Dedução das Equações Adimensionais da Geração de Malhas 2D

Camila Hiromi Tamura
Universidade Estadual de Londrina
Londrina - Pr, Brasil
camila_tamura@yahoo.com.br

Prof. Dr. Eliandro Rodrigues Cirilo
Universidade Estadual de Londrina
Londrina - Pr, Brasil
ercirilo@uel.br

***Resumo*—O modo de se gerar malhas computacionais constitui-se num papel importante quando relacionado ao desenvolvimento de técnicas numéricas para a resolução de fenômenos da natureza. Neste trabalho apresenta-se uma metodolodia matemática para a geração de malhas bidimensionais em coordenadas generalizadas na forma adimensional.**

***Palavras-chave*—Adimensionalização; geração de malhas; coordenadas generalizadas;**

I. INTRODUÇÃO

Na natureza pouquíssimos fenômenos modelados por equações diferenciais podem ser solucionados usando-se apenas métodos analíticos, assim, métodos númericos são empregados para obter uma aproximação da solução da equação que governa esses fenômenos. No contexto da resolução computacional, o primeiro passo é discretizar a região onde se quer encontrar a solução numérica, ou seja, cria-se um conjunto finito de pontos para a região, nomeado como malha computacional [4]. As malhas podem ser categorizadas em estruturadas, quando apresentam uma lei de construção, e não estruturadas caso contrário. Particularmente neste trabalho consideraremos a geração de malhas estruturadas. Uma característica comum na construção de malhas, é que a maioria das regiões de interesse são geometrias complexas, e para que seja possível a simulação sobre estas regiões é necessária a sua simplificação em formas geométricas elementares quando o espaço euclidiano é considerado. O sistema de coordenadas cartesianas leva a uma má adequação da fronteira da região quando a malha é construída, já que o domínio físico não coincide com o domínio da malha. Para não se deparar com a má adequação da fronteira foi desenvolvido o sistema de coordenadas generalizadas. Este sistema nos permite mapear um domínio com geometria irregular ou regular, escrito no sistema cartesiano (x, y), para uma geometria regular escrita no sistema de coordenadas generalizadas (ξ, η). As coordenadas curvilíneas de um ponto são relacionadas ao sistema cartesiano pelas equações de transformação do tipo $\xi = \xi(x, y)$ e $\eta = \eta(x, y)$. É decisiva a construção de uma malha adequada, para que seja possível estimar os gradientes de interesse do fenômeno modelado com acurácia, e este trabalho vai nessa direção.

II. MODELO MATEMÁTICO

A. Equações Governantes

A geração de malha, ou seja, a discretização do domínio físico, é uma das tarefas mais complexa do processo de simulação numérica, a geração de uma boa malha depende fortemente da habilidade mental de se enxergar a malha que se quer gerar. Nesse trabalho adotaremos a técnica de geração de malhas por equações diferenciais elípticas, que são dadas por [2]:

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = P \tag{1}$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = Q \tag{2}$$

onde P e Q são responsáveis pela atração entre linhas coordenadas, definidas por:

$$P(\xi, \eta) = -\sum_{j=1}^{N} a_j sign(\xi - \xi_j) e^{-c_j|\xi - \xi_j|} - \sum_{i=1}^{M} b_i sign(\xi - \xi_i) e^{-d_i \sqrt{(\xi-\xi_i)^2 + (\eta-\eta_i)^2}} \tag{3}$$

$$Q(\xi, \eta) = -\sum_{j=1}^{N} a_j sign(\eta - \eta_j) e^{-c_j|\eta - \eta_j|} - \sum_{i=1}^{M} b_i sign(\eta - \eta_i) e^{-d_i \sqrt{(\xi-\xi_i)^2 + (\eta-\eta_i)^2}}. \tag{4}$$

Os índices dos somatórios M e N representam o número total de linhas na direção ξ e η respectivamente, e a_j, b_i, c_j e d_i são números reais ajustados via experimentação numérica, procurando atrair as linhas ξ e η para as linhas ξ_i e η_j [1].

B. Coordenadas Generalizadas

Geralmente a maioria dos problemas de interesse em mecânica dos fluidos são representados por geometrias irregulares, e a construção de malhas retangulares desses problemas não permite obter soluções numéricas com precisão aceitável, porquê o sistema cartesiano leva a uma má adequação da fronteira do problema [3]. Para contornar essa problemática foram desenvolvidas métricas de transformação para o sistema de coordenadas generalizadas. As métricas permitem mapear um domínio físico, com geometria irregular, no sistema cartesiano (x, y), para um domínio computacional, com geometria regular, escrita no sistema de coordenadas generalizadas (ξ, η). A vantagem com o uso dessa técnica é que removemos a má adequação da fronteira do problema, ou seja, mantemos a integridade geométrica de todos os elementos.

Considerando as métricas $\alpha = {x_\eta}^2 + {y_\eta}^2$, $\gamma = {x_\xi}^2 + {y_\xi}^2$, $\beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta$ e $J = \dfrac{1}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi}$, onde x_ξ, x_η, y_ξ e y_η denotam derivadas parciais, as equações (1) e (2), em coordenadas cartesianas, são transformadas para o sistema de coordenadas generalizadas, e ficam escritas como:

$$\alpha x_{\xi\xi} + \gamma x_{\eta\eta} - 2\beta x_{\xi\eta} + \frac{1}{J^2}(P x_\xi + Q x_\eta) = 0 \qquad (5)$$

e

$$\alpha y_{\xi\xi} + \gamma y_{\eta\eta} - 2\beta y_{\xi\eta} + \frac{1}{J^2}(P y_\xi + Q y_\eta) = 0, \qquad (6)$$

onde P e Q são como dadas em (3) e (4).

C. *Adimensionalização*

Dividindo os comprimentos x e y por um comprimento de referência L e ξ e η por $\Delta\xi$ e $\Delta\eta$ respectivamente, e denotando as quantidades adimensionais por $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{\xi}$ e $\overline{\eta}$, teremos:

$$\overline{x} = \frac{x}{L}, \quad \overline{y} = \frac{y}{L}, \quad \overline{\xi} = \frac{\xi}{\Delta\xi} \quad \text{e} \quad \overline{\eta} = \frac{\eta}{\Delta\eta}.$$

Substituindo esses adimensionais nas equações (5) e (6), após manipulações matemáticas, obtemos as equações de geração de malha adimensionais

$$\overline{\alpha}\overline{x}_{\overline{\xi}\overline{\xi}} + \overline{\gamma}\overline{x}_{\overline{\eta}\overline{\eta}} - 2\overline{\beta}\overline{x}_{\overline{\xi}\overline{\eta}} + \frac{L^2}{\overline{J}^2}(\overline{P}\overline{x}_{\overline{\xi}} + \overline{Q}\overline{x}_{\overline{\eta}}) = 0 \qquad (7)$$

e

$$\overline{\alpha}\overline{y}_{\overline{\xi}\overline{\xi}} + \overline{\gamma}\overline{y}_{\overline{\eta}\overline{\eta}} - 2\overline{\beta}\overline{y}_{\overline{\xi}\overline{\eta}} + \frac{L^2}{\overline{J}^2}(\overline{P}\overline{y}_{\overline{\xi}} + \overline{Q}\overline{y}_{\overline{\eta}}) = 0 \qquad (8)$$

com $\overline{\alpha} = {\overline{x}_{\overline{\eta}}}^2 + {\overline{y}_{\overline{\eta}}}^2$, $\overline{\gamma} = {\overline{x}_{\overline{\xi}}}^2 + {\overline{y}_{\overline{\xi}}}^2$, $\overline{\beta} = \overline{x}_{\overline{\xi}}\overline{x}_{\overline{\eta}} + \overline{y}_{\overline{\xi}}\overline{y}_{\overline{\eta}}$ e $\overline{J} = \dfrac{1}{\overline{x}_{\overline{\xi}}\overline{y}_{\overline{\eta}} - \overline{x}_{\overline{\eta}}\overline{y}_{\overline{\xi}}}$.

Uma vez que as equações da mecânica dos fluidos em geral são resolvidas a partir da forma adimensional - pois uma análise numérica criteriosa do padrão de escoamento é possível de ser realizada - então é natural, vantajoso e consistente em se trabalhar com malhas geradas via as equações (7) e (8) em detrimento das equações (5) e (6).

III. Algumas Considerações

Neste trabalho apresentamos de forma sucinta os passos necessários para que as equações de geração de malhas bidimensionais, dadas em coordenadas cartesianas, equações (1) e (2), sejam transformadas para o sistema de coordenadas generalizadas adimensional, equações (7) e (8). A vantagem dessa abordagem é analisar de maneira mais refinada as equações governantes adimensionais de escoamentos bidimensionais. Um outro fato relevante é com respeito a qualidade geométrica dos elementos da malha. Quando o elemento é geometricamente adequado o esforço computacional de resolução numérica das equações de escoamento tende a ser reduzido. Desta forma se faz necessário o levantamento de parâmetros que retratem a questão da qualidade geométrica dos elementos. Mas o levantamento dos parâmentros e sua análise encontram-se ainda em desenvolvimento.

Referências

[1] CIRILO, E. R., DE BORTOLI, A. L. Geração da malha da traquéia e dos tubos bronquiais por spline cúbico. Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas 27, 2 (2006), 147–155.

[2] MALISKA, C. R. Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional, 2a. ed. LTC, Rio de Janeiro, 2013.

[3] THOMPSON, J. F., WARSI, Z. U. A., MASTIN, C. W. Numerical Grid Generation: Foundations and Applications. North-Holland, 1985.

[4] FORTUNA, A. O. Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos básicos e aplicações, 2a. ed. EDUSP, São Paulo, 2012.