

# *Simulação de onda de maré por meio do Método do Reticulado de Boltzmann*

Vanderlei Galina  
UTFPR  
Curitiba, Brasil  
vanderleigalina@utfpr.edu.br

Jocelaine Cargnelutti  
UTFPR  
Toledo, Brasil  
jocelainecargne@utfpr.edu.br

Eloy Kaviski, Liliana M. Gramani  
UFPR  
Curitiba, Brasil  
eloy.dhs@ufpr.br, l.gramani@gmail.com

Adilandri M. Lobeiro  
UTFPR  
Campo Mourão, Brasil  
adilandri@gmail.com

**Resumo**—O método do reticulado de Boltzmann (LBM) é aplicado neste trabalho com o objetivo de simular o movimento de uma onda no mar próximo à costa em uma região relativamente curta, com leito regular e profundidade variável. A região costeira é considerada como um canal de grande largura, o escoamento é subcrítico e é descrito pelas equações de águas rasas. Assim, utilizam-se a função distribuição de equilíbrio e a equação do LBM adequadas, de modo que recuperem as equações de águas rasas. A simulação é unidimensional e para isto considera-se condição de contorno de deslizamento nas paredes do canal. Além disso, considera-se a condição de contorno de zero gradiente na entrada e saída do canal, e o operador de colisão com um único tempo de relaxamento. Este estudo de caso possui solução analítica para a velocidade e profundidade da água. Procedese com sua comparação com a solução numérica apresentando muito boa concordância.

**Palavras-chave**—Métodos numéricos em hidráulica; método do reticulado de Boltzmann; equações de águas rasas; escoamentos em canais.

## I. INTRODUÇÃO

As equações de águas rasas estão presentes na modelagem de fenômenos na natureza e são amplamente utilizadas na simulação de escoamentos em rios, estuários e canais [24]. Escoamentos governados por essas equações não-lineares, podem ser simulados por meio de métodos numéricos, como por exemplo, método das diferenças finitas, método dos elementos finitos, método das características e método dos volumes finitos. Resolver numericamente um problema condicionado às características de escoamento de águas rasas requer precisão, eficiência e capacidade de captura de informações físicas que tornem os dados numéricos concordantes com o comportamento real [13]. Neste sentido, nas últimas décadas, o LBM passou por refinamentos e extensões, foi aprimorado, e tornou-se uma ferramenta promissora na simulação de escoamentos governados pelas equações de águas rasas [4], [13], [24]. O método é originário historicamente do autômato celular de gás em rede (LGCA), sendo este uma classe particular dos autômatos celulares (CA). O LBM não utiliza discretizações nas equações macroscópicas governantes do escoamento e esta característica o difere dos outros métodos numéricos. A ideia

principal do LBM é fazer a ponte entre a microescala e a macroescala por não considerar o comportamento individual das partículas, mas o comportamento de um conjunto de partículas [24].

No LBM, assim como em outros métodos numéricos, deve-se conhecer bem o problema e incorporar adequadamente as características físicas para que a simulação retorne resultados precisos. A abordagem correta das condições iniciais e de contorno, pode ser a diferença entre o sucesso e o insucesso de uma simulação no LBM. O LBM pode gerar soluções numéricas precisas, por meio de cálculos aritméticos simples, para problemas que envolvem equações diferenciais e geometrias complexas. O algoritmo é de simples implementação e é possível otimizar o código por meio do uso da computação paralela [24].

Cabe atentar-se as questões relacionadas com a instabilidade numérica. Como o LBM não possui estabilidade numérica garantida, estudos sinalizaram algumas condições necessárias para que o método tenha estabilidade. Porém, em alguns casos, estas condições podem não ser suficientes. O que ocorre é que a estabilidade linear depende de muitos parâmetros, o que impede a sua caracterização completa [20], [24]. Por exemplo, as aplicações envolvendo escoamentos reais de água possuem números de Reynolds muito altos e as simulações são realizadas com o parâmetro de relaxamento muito próximo do limite inferior,  $\tau = 1/2$  [20]. Escoamentos com altos números de Reynolds exigem refinamento da malha e, consequentemente, alto custo computacional. Nestes casos, avalia-se a possibilidade de otimizar o tempo de processamento utilizando computação paralela ou utilizar outro método numérico que, dependendo do problema, pode ser mais adequado [24]. O LBM requer o cuidado de estimar e ajustar os parâmetros de simulação, possibilitando otimização do custo computacional e precisão dos resultados [7].

Utilizou-se o operador de colisão com um único tempo de relaxamento neste trabalho. Ele é conhecido pelas siglas BGK, denominado deste modo devido aos seus criadores Bhatnagar, Gross e Krook. O BGK não é a única forma

conhecida para o operador de colisão. No LBM pode-se observar três esquemas de abordagem: um único tempo de relaxamento (*single relaxation time* - SRT), dois tempos de relaxamento (*two relaxation times* - TRT) e múltiplos tempos de relaxamento (*multiple relaxation times* - MRT) [17], [21]. Deste modo, o operador de colisão BGK é também conhecido como a abordagem com um único tempo de relaxamento.

Na simulação do escoamento de águas rasas o esquema SRT é amplamente utilizado devido a sua simplicidade [11], [13], [23]–[25]. Porém, é comum nas simulações, o aparecimento de instabilidades numéricas, principalmente nos escoamentos de água, devido a baixa viscosidade cinemática e altos números de Reynolds [17]. De acordo com Rocca, Adduce e Sciortino [11], o LBM é um método intrinsecamente de fluxo viscoso e a viscosidade numérica pode ser adequadamente ajustada em concordância com os parâmetros da discretização, possibilitando evitar instabilidades numéricas. Os autores observam também que o valor da viscosidade no LBM é geralmente mais elevada do que a viscosidade cinemática do fluido. O ajuste dos parâmetros do problema são fundamentais para manter a estabilidade numérica.

Este trabalho faz parte de um estudo preliminar, cuja intenção é simular escoamentos em canais naturais e bacias hidrográficas, governados pelas equações de águas rasas. O interesse em utilizar o LBM se ratifica, principalmente, pelo fato de ser uma alternativa potencial para simular escoamento de água sem utilizar discretizações nas equações governantes. Com código de simples implementação e a possibilidade de utilizar computação paralela, o LBM mostra-se um método promissor na dinâmica de fluidos computacional, respeitadas as restrições já mencionadas.

## II. ESCOAMENTO EM CANAIS

Considera-se neste trabalho escoamentos em canais em que a profundidade da água é geralmente muito menor que a largura e o escoamento ocorre com superfície livre exposta à atmosfera. As equações governantes para estes escoamentos são as equações de águas rasas que são derivadas das equações de Navier-Stokes com o pressuposto de que a distribuição de pressão ao longo da vertical varia hidrostáticamente.

O sistema de equações de Navier-Stokes, juntamente com a equação da continuidade, são conhecidos por descrever com precisão o comportamento de um fluido em vários tipos de situações. Situações estas que englobam desde as mais simples como um rio com fluxo lento em um canal retilíneo, até um canal com geometria complexa e escoamento turbulento com condições extremas [28].

Usando a notação tensorial de Zhou [24], a equação de conservação da massa e as equações de conservação da quantidade de movimento ficam reescritas na forma (1). Esta notação é interessante e sucinta,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} &= F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \quad (1)$$

onde,

- $t$  : é o tempo;
- $\rho$  : é a densidade do fluido (massa específica);
- $g$  : é a aceleração da gravidade;
- $p$  : é a pressão;
- $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  : é a viscosidade cinemática que é igual a viscosidade dinâmica  $\mu$  dividido pela massa específica  $\rho$ ;
- $x_j$  : representa as coordenadas espaciais  $x, y, z$ ;
- $u_i$  : representa as componentes do vetor velocidade nas direções  $x, y$  e  $z$ , isto é,  $u, v, w$ ;
- $F_i$  : representa as componentes da força gravitacional nas direções  $x, y$  e  $z$ , respectivamente,  $F_x, F_y, F_z$ .

O lado esquerdo da equação (1) representa o termo convectivo. Observa-se agora o lado direito, onde o primeiro termo representa uma força de campo, o segundo termo refere-se a variação da pressão e o terceiro é o termo viscoso [24].

O sistema de Navier-Stokes é composto por equações diferenciais parciais não-lineares em praticamente todos os casos e somente em situações simplificadas a solução analítica pode ser obtida. Estas equações descrevem o escoamento de um fluido e permitem calcular campos de velocidade e pressão de um escoamento [3].

Por outro lado, os problemas abordados neste trabalho são governados pelas equações de águas rasas, como mencionou-se anteriormente. Neste sentido, cabe neste momento descrever brevemente como as equações de águas rasas são obtidas a partir das equações de Navier-Stokes.

Procede-se integrando verticalmente (integral definida sobre a profundidade do canal) a primeira equação (1), que é a equação da continuidade. Aplica-se a regra de Leibnitz, além de condições cinemáticas na superfície livre e fundo do canal. Procedimento análogo é realizado para todas as outras equações do sistema (1), mas com o cuidado de analisar cada um dos termos das equação do sistema. Estes cálculos podem ser encontrados no trabalho de Zhou [24], que aliás, é um trabalho muito bem elaborado.

Depois de algumas considerações e muitos cálculos, tem-se a equação da conservação da massa e as equações da conservação da quantidade de movimento (2), escritas com notação tensorial,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu_j)}{\partial x_j} &= 0 \\ \frac{\partial(hu_i)}{\partial t} + \frac{\partial(hu_i u_j)}{\partial x_j} &= -g \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{h^2}{2} \right) + \nu \frac{\partial^2(hu_i)}{\partial x_j \partial x_j} + F_i \end{aligned} \quad (2)$$

onde  $F_i$  é um termo de força definido como,

$$F_i = -gh \frac{\partial z_b}{\partial x_i} + \frac{\tau_{wi}}{\rho} - \frac{\tau_{bi}}{\rho} + E_i, \quad (3)$$

em que,

- $\frac{\partial z_b}{\partial x_i}$  : é a declividade do fundo;
- $\tau_{wi}$  : é a tensão de cisalhamento do vento na superfície da água na direção  $i$ ;
- $\tau_{bi}$  : é a tensão de cisalhamento no fundo do canal na direção  $i$ ;
- $E_i$  : é o termo de Coriolis na direção  $i$ .

O termo de Coriolis é dado por (4), porém geralmente é desprezado nas simulações de escoamento de águas rasas,

$$E_i = \begin{cases} f_c h v & \text{se } i = x \\ -f_c h v & \text{se } i = y \end{cases}, \quad (4)$$

em que  $f_c = 2\omega \sin\phi$  é o parâmetro do Coriolis no qual  $\omega \approx 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$  é a velocidade angular de rotação da Terra e  $\phi$  é a latitude da Terra no local de interesse.

A tensão de cisalhamento no fundo do canal na direção  $i$  é calculada utilizando (5),

$$\tau_{bi} = \rho C_b u_i \sqrt{u_j u_j}, \quad (5)$$

onde  $C_b$  é o coeficiente de atrito do leito do canal, que pode ser um valor constante ou estimado por  $C_b = g/C_z^2$ . O coeficiente de Chezy  $C_z$  é determinado em termos do raio hidráulico  $R_h$  e do coeficiente de rugosidade de Manning  $n_b$ ,

$$C_z = \frac{R_h^{1/6}}{n_b}. \quad (6)$$

A tensão de cisalhamento do vento na superfície da água na direção  $i$  pode ser determinada com a ajuda da expressão,

$$\tau_{wi} = \rho_a C_w u_{wi} \sqrt{u_{wj} u_{wj}}, \quad (7)$$

em que,

$\rho_a$  : é a densidade do ar;

$C_w$  : é o coeficiente de resistência;

$u_{wi}$  : é a componente da velocidade do vento na direção  $i$ .

### III. MÉTODO DO RETICULADO DE BOLTZMANN

Originalmente, o método do reticulado de Boltzmann surgiu em resposta aos problemas dos métodos baseados no LGCA [14], e foi derivado do LGCA. Esquemas baseados nos LGCAs deixaram de ser atrativos, pois o nível elevado de flutuações do fluido associados ao número limitado de pontos de uma malha computacional, tornam o método aplicável, na maioria dos casos, para problemas pequenos. Além disso, o LGCA apresenta ruído estatístico devido ao uso de funções distribuição de variável booleana. De acordo com Wolf-Gladrow [27], os primeiros pesquisadores que conseguiram eliminar o ruído foram McNamara e Zanetti [15] e foram também os primeiros que utilizaram funções contínuas de distribuição de partículas ao invés das funções booleanas usadas no LGCA. Nascia o método do reticulado de Boltzmann.

#### A. Equação do LBM e Operador BGK

O LBM é um modelo cinético que incorpora a física essencial de processos microscópicos ou mesoscópicos, de forma que as características na escala macroscópica sejam fiéis às equações, não sendo necessário fazer a discretização das equações que governam a dinâmica do fluido. As principais etapas no LBM são os processos de transmissão e colisão [4].

Pode-se identificar no LBM quatro elementos principais: a equação governante, operador de colisão, o reticulado e a função distribuição de equilíbrio. O reticulado descreve as possíveis direções de movimento das distribuições de uma

partícula. A função distribuição de equilíbrio deve ser escolhida de forma que seja possível a recuperação das equações governantes do escoamento e assumindo que o número de Mach (Ma) é suficientemente pequeno. O operador de colisão BGK escreve a colisão como um processo de relaxamento para o estado de equilíbrio local [8].

Inicialmente procede-se com a apresentação da equação governante do LBM. Esta equação possui duas etapas: transmissão e colisão. Na etapa de transmissão, as partículas se movem de um nó da malha para um dos seus nós vizinhos, com direção dada pela velocidade [24]. Este movimento é regido por:

$$f_\alpha(+\vec{e}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) = f'_\alpha(\vec{x}, t) + \frac{\Delta t}{N_\alpha e^2} e_{\alpha i} F_i(\vec{x}, t), \quad (8)$$

onde,

$f_\alpha$  : é a função distribuição de partículas e representa a probabilidade de uma partícula seguir determinada direção;

$f'_\alpha$  : é o valor de  $f_\alpha$  antes da transmissão;

$e = \frac{\Delta x}{\Delta t}$  : é a velocidade no reticulado;

$\Delta x$  : é o espaçamento da malha;

$\Delta t$  : é o incremento no tempo;

$\vec{e}_\alpha$  : são as possíveis direções de movimento de uma partícula na malha;

$F_i$  : é a componente da força na direção  $i$ ;

$N_\alpha = \frac{1}{e^2} \sum e_{\alpha i} e_{\alpha i}$  : é uma constante estabelecida de acordo com o reticulado escolhido.

Na etapa de colisão, as partículas que chegam no mesmo nó interagem entre si e mudam suas direções conforme as diretrizes do operador de colisão. Esta etapa é representada pela equação [24]:

$$f'_\alpha(\vec{x}, t) = f_\alpha(\vec{x}, t) + \Omega_\alpha [f(\vec{x}, t)], \quad (9)$$

onde  $\Omega_\alpha$  é o operador de colisão.

Estudos foram feitos no sentido de simplificar o operador de colisão. Em 1989 os pesquisadores Higuera e Jiménez [9] introduziram a ideia de linearizar o operador de colisão, procedendo com a expansão da função de distribuição em torno do seu valor de equilíbrio local. Nos anos 1990 e 1991 pesquisadores, motivados pelo operador quase-linear construído por Higuera e Jiménez [9], sugeriram uma forma linear para o operador de colisão usando um único tempo de relaxamento  $\tau$  em direção ao equilíbrio local, desde que os números de Knudsen e Mach sejam pequenos [5], [9], [18]:

$$\Omega_\alpha(f) = -\frac{1}{\tau} (f_\alpha - f_\alpha^{eq}), \quad (10)$$

em que,

$\tau$  : é o parâmetro de relaxamento;

$f_\alpha^{eq}$  : é a função distribuição de equilíbrio.

Esta forma para o operador de colisão já havia sido utilizada por Bhatnagar, Gross e Krook [2], com o objetivo de simplificar a equação de Boltzmann e é conhecida como operador BGK.

As etapas de transmissão (8) e colisão (9) são combinadas com a expressão (10), e fornecem a equação de evolução do LBM, denominada LBE [24]:

$$f_\alpha(\vec{x} + \vec{e}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\tau}(f_\alpha - f_\alpha^{eq}) + \frac{\Delta t}{N_\alpha e^2} e_{\alpha i} F_i(\vec{x}, t). \quad (11)$$

### B. Função Distribuição de Equilíbrio

As equações gerais que governam o escoamento de fluidos são o sistema de Navier-Stokes juntamente com a equação da conservação da massa. É possível fazer simplificações e particularizações destas equações, originando, por exemplo, as equações de águas rasas e as equações de escoamento superficial [3].

No LBM a função distribuição de equilíbrio é desenvolvida de forma que se recupere as equações macroscópicas governantes do escoamento. Deste modo, se o interesse é avaliar um problema governado pelas equações macroscópicas de águas rasas, é necessário encontrar a função distribuição de equilíbrio que recupere as equações de águas rasas [24]. O mesmo ocorre para problemas governados pelas equações de Navier-Stokes ou problemas envolvendo escoamento superficial. Por exemplo, no trabalho de Chen e Doolen [4], são simulados problemas governados pelas equações de Navier-Stokes. No trabalho de Zhou [24] são resolvidos problemas envolvendo as equações de águas rasas. Nestes dois trabalhos foram utilizadas funções distribuição de equilíbrio diferentes, pois trata-se de equações governantes diferentes.

No trabalho de Zhou [24], a função distribuição de equilíbrio de Maxwell-Boltzmann  $f^M$  é transformada em uma função distribuição de equilíbrio  $f_\alpha^{eq}$  para ser usada no LBM. A  $f_\alpha^{eq}$  deve ser expressa como uma série de potências da velocidade macroscópica. Este procedimento é uma abordagem geral e permite recuperar as equações de águas rasas.

De forma geral, uma abordagem para função distribuição de equilíbrio é dada pela seguinte expressão [19],

$$f_\alpha^{eq} = A_\alpha + B_\alpha e_{\alpha i} u_i + C_\alpha e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j + D_\alpha u_i u_i. \quad (12)$$

Considerando o reticulado  $D2Q9$ , pode-se observar sua simetria. Assim reescreve-se (12) na seguinte forma,

$$f_\alpha^{eq} = \begin{cases} A_0 + D_0 u_i u_i, & \alpha = 0 \\ \tilde{A} + \tilde{B} e_{\alpha i} u_i + \tilde{C} e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j + \tilde{D} u_i u_i, & \alpha = 1, 3, 5, 7 \\ \tilde{A} + \tilde{B} e_{\alpha i} u_i + \tilde{C} e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j + \tilde{D} u_i u_i, & \alpha = 2, 4, 6, 8 \end{cases}. \quad (13)$$

As constantes em (13) são determinadas levando em consideração as restrições sobre a função distribuição de equilíbrio, ou seja, devem obedecer as relações de conservação da massa e quantidade de movimento referentes às equações de águas rasas,

$$\sum_\alpha f_\alpha^{eq}(\vec{x}, t) = h(\vec{x}, t), \quad (14)$$

$$\sum_\alpha e_{\alpha i} f_\alpha^{eq}(\vec{x}, t) = h(\vec{x}, t) u_i(\vec{x}, t), \quad (15)$$

$$\sum_\alpha e_{\alpha i} e_{\alpha j} f_\alpha^{eq}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} g h^2(\vec{x}, t) \delta_{ij} + h(\vec{x}, t) u_i(\vec{x}, t) u_j(\vec{x}, t). \quad (16)$$

Observe que a função distribuição de equilíbrio (12) é construída de acordo com as restrições (14), (15) e (16). Juntando essa construção com a LBE (11), obtém-se a solução para as equações de águas rasas. A demonstração deste resultado e o cálculo das constantes em (13) pode ser encontrada em Zhou [24]. Assim, reescreve-se (13) e obtém-se a função distribuição de equilíbrio, que juntamente com a LBE (11), recupera as equações de águas rasas,

$$f_\alpha^{eq} = \begin{cases} h - \frac{5gh^2}{6e^2} - \frac{2h}{3e^2} u_i u_i, & \alpha = 0 \\ \frac{gh^2}{6e^2} + \frac{h}{3e^2} e_{\alpha i} u_i + \frac{h}{2e^4} e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j + \frac{h}{6e^2} u_i u_i, & \alpha = 1, 3, 5, 7 \\ \frac{gh^2}{24e^2} + \frac{h}{12e^2} e_{\alpha i} u_i + \frac{h}{8e^4} e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j + \frac{h}{24e^2} u_i u_i, & \alpha = 2, 4, 6, 8 \end{cases}. \quad (17)$$

De posse da LBE (11) e da função distribuição de equilíbrio (17), busca-se determinar as quantidades físicas de interesse, a profundidade e a velocidade da água. Estas variáveis macroscópicas são determinadas de forma a recuperar as equações de águas rasas [16],

$$h(\vec{x}, t) = \sum_\alpha f_\alpha(\vec{x}, t). \quad (18)$$

$$u_i(\vec{x}, t) = \frac{1}{h(\vec{x}, t)} \sum_\alpha e_{\alpha i} f_\alpha(\vec{x}, t). \quad (19)$$

### C. Reticulado $D2Q9$

O reticulado utilizado neste trabalho é o  $D2Q9$ , pois representa bem a dinâmica de problemas envolvendo escoamentos de fluidos em canais [10], [22], [25].

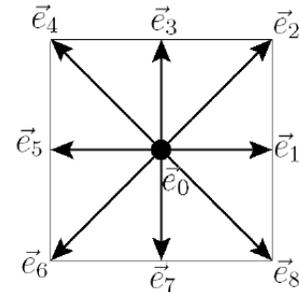


Figura 1. Direções de movimento de uma partícula no reticulado  $D2Q9$ .

Fonte: Zhou [24]

O reticulado bidimensional  $D2Q9$  possui oito direções não nulas de movimento, conforme Fig. 1. Este reticulado é quadrado e é necessário introduzir duas velocidades (cardeais e colaterais) para as partículas, de acordo com a distância a ser percorrida em um passo de tempo. Uma partícula toma a

direção de uma das 9 possibilidades de direções, de acordo com as velocidades estabelecidas, sendo que uma delas é permanecer no mesmo local [24].

Com relação às duas velocidades, pode-se perceber que as direções cardeais são mais lentas e terão módulo  $c = \Delta x / \Delta t$ . As direções colaterais são mais rápidas, pois precisam percorrer maior distância utilizando o mesmo tempo das direções cardeais e terão módulo  $c\sqrt{2}$ .

As direções do movimento das partículas são dadas por:

$$\vec{e}_\alpha = \begin{cases} (0, 0) & \text{se } \alpha = 0 \\ c \left( \cos \frac{(\alpha-1)\pi}{4}, \text{sen} \frac{(\alpha-1)\pi}{4} \right) & \text{se } \alpha = 1, 2, 3, 4 \\ c\sqrt{2} \left( \cos \frac{(\alpha-1)\pi}{4}, \text{sen} \frac{(\alpha-1)\pi}{4} \right) & \text{se } \alpha = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (20)$$

#### D. Condições de Contorno

A representação adequada das características físicas do problema, por meio das condições iniciais e de contorno, é um fator crucial para a estabilidade e precisão das simulações. A Fig. 2, ilustra uma malha para discretização do domínio do problema, a qual define a entrada e saída de um canal, suas paredes laterais e as direções de velocidade do reticulado.

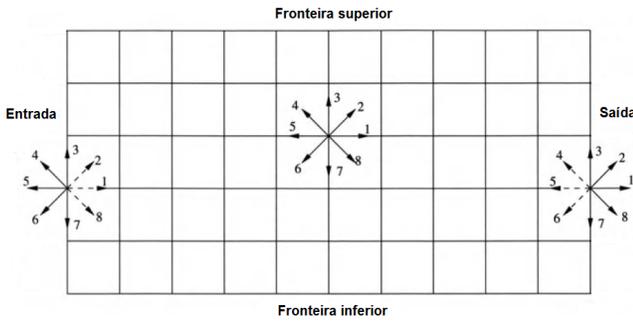


Figura 2. Definição da malha.  
Fonte: Zhou [24]

O reticulado bidimensional  $D2Q9$  pode ser utilizado para descrever um problema unidimensional, desde que sejam especificadas as condições de contorno de deslizamento nas paredes laterais. Isto é feito com o esquema de colisão elástica, em que a partícula que chega na fronteira é refletida para o fluido. Após o processo de transmissão, faz-se as seguintes atribuições para a função distribuição de equilíbrio na parede superior:

$$f_6 = f_4, \quad f_7 = f_3, \quad f_8 = f_2 \quad (21)$$

e, na parede inferior:

$$f_2 = f_8, \quad f_3 = f_7, \quad f_4 = f_6 \quad (22)$$

As condições de contorno de entrada e saída são configuradas como o zero gradiente da função distribuição normal à fronteira. Dessa forma, na entrada, tem-se:

$$f_\alpha(1, j) = f_\alpha(2, j), \quad \alpha = 1, 2, 8 \quad (23)$$

e, na saída, tem-se:

$$f_\alpha(n_x, j) = f_\alpha(n_x - 1, j), \quad \alpha = 4, 5, 6, \quad (24)$$

onde  $n_x$  representa o índice do comprimento  $L$  do canal.

#### IV. ESTUDO DE CASO: SIMULAÇÃO DE ONDA DE MARÉ COM LEITO REGULAR

Neste estudo de caso, considera-se a propagação de uma onda em uma região costeira relativamente curta, com leito regular e profundidade variável. Empregam-se as equações de águas rasas unidimensionais para representar o escoamento de água em um canal de largura infinita. A geometria do escoamento é representada na Fig. 3, onde  $h(x, t)$  é a função que representa a altura acima do fundo do canal,  $H(x)$  é a função que representa a profundidade, porém com referência a um nível fixo da água e  $u(x, t)$  é a velocidade do escoamento na direção horizontal.

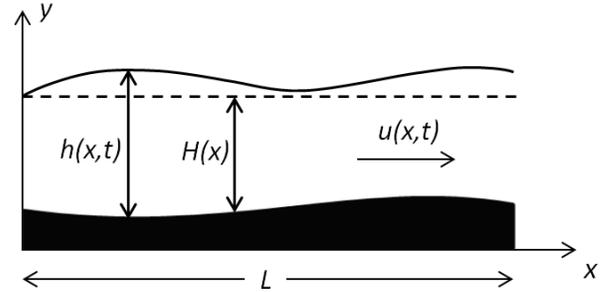


Figura 3. Esquema para simulação do fluxo de maré.

Bermudez e Vazquez [1], apresentam a solução analítica assintótica do problema, equação (25); juntamente com suas condições iniciais e de contorno, nas equações (26) e (27), respectivamente:

$$\begin{aligned} h(x, t) &= H(x) + \varphi(t) \\ q(x, t) &= h(x, t) u(x, t) = -\varphi'(t)(x - L) + \psi(t) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= h_o(x) \\ q(x, 0) &= q_o(x) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} h(0, t) &= \varphi(t) \\ q(L, t) &= \psi(t) \end{aligned} \quad (27)$$

onde  $h_o, q_o, \varphi$  e  $\psi$  são funções conhecidas.

Na simulação deste trabalho, será considerado um comprimento  $L = 16000 \text{ m}$ . A função  $z_b(x)$  que descreve o fundo do mar é obtida pela interpolação dos pontos da Tabela I, com a utilização de spline cúbica.

Considera-se, ainda:

$$H(x) = 63 - z_b(x) \quad (28)$$

e, condições iniciais e de contorno:

Tabela I  
ELEVACÃO DO LEITO,  $z_b(x)$

$x$	0.0	474.0	1053.0	4000.0	6000.0	7000.0
$z_b(x)$	0.0	2.7	7.0	23.0	20.0	26.0
$x$	8740.0	11000.0	14200.0	15000.0	16000.0	
$z_b(x)$	37.0	28.0	51.5	53.0	54.0	

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= H(x) \\ q(x, 0) &= 0 \end{aligned}, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} h(0, t) &= H(0) + 5 - 5 \operatorname{sen} \left[ \pi \left( \frac{t}{20000} + \frac{1}{2} \right) \right] \\ q(L, t) &= 0 \end{aligned}. \quad (30)$$

A expressão de  $h(0, t)$  em (30), simula uma onda de 5 m de amplitude.

Sob estas condições, a solução analítica é determinada pelas equações:

$$h(x, t) = H(x) + 5 - 5 \operatorname{sen} \left[ \pi \left( \frac{t}{20000} + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (31)$$

e,

$$u(x, t) = \frac{(x - L)\pi}{4000h(x, t)} \cos \left[ \pi \left( \frac{t}{20000} + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (32)$$

## V. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os parâmetros utilizados no LBM são os seguintes: o comprimento do canal é  $L = 16000 m$ , a quantidade de reticulados é 914, a velocidade no reticulado é  $c = 200 m/s$  e o parâmetro de relaxamento é  $\tau = 0,6$ . Com isso, tem-se o passo de tempo  $\Delta t = 0,0875 s$ . O parâmetro de relaxamento é obtido por meio da expressão  $\tau = \frac{1}{2} + \frac{3\nu\Delta t}{\Delta x^2}$ .

Como a massa da água é muito grande, os efeitos gravitacionais são preponderantes, podendo-se considerar desprezíveis os efeitos da resistência ao escoamento. Dessa forma, o termo de força dado em (3), fica determinado pela expressão  $F = -gh(x, t) \frac{\partial z_b}{\partial x}$ .

O número de iterações realizadas foi de 125000, o que corresponde a um tempo de 10937,5 segundos. Utilizou-se o compilador Gfortran em um computador com processador 2,2 GHz e 16 GB de memória RAM. O tempo de processamento gasto no processamento foi de 128 segundos.

As figuras 4 e 5 mostram a comparação das soluções numérica e analítica para a superfície e velocidade da água em  $t = 10937,5$  segundos.

A comparação dos resultados numéricos com a solução analítica mostra que para a profundidade da água, o erro relativo máximo é menor que 0,5%. Para a velocidade, o erro relativo máximo é menor que 5% até a posição  $x = 15890 m$ . E um erro maior que 5% quando  $x > 15890 m$ . Esse aumento no erro relativo à jusante, ocorre devido as imposição de a velocidade tender para zero quando  $x$  tende para 16000 m. A velocidade torna-se muito pequena, não sendo o erro relativo adequado para a medida de precisão, normalmente utiliza-se o

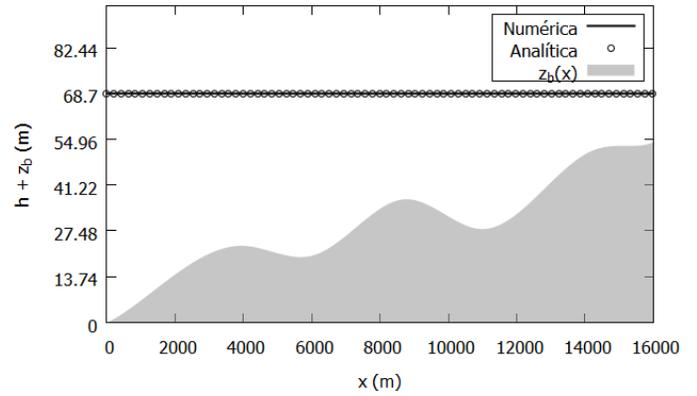


Figura 4. Superfície da água em 10937,5 s.

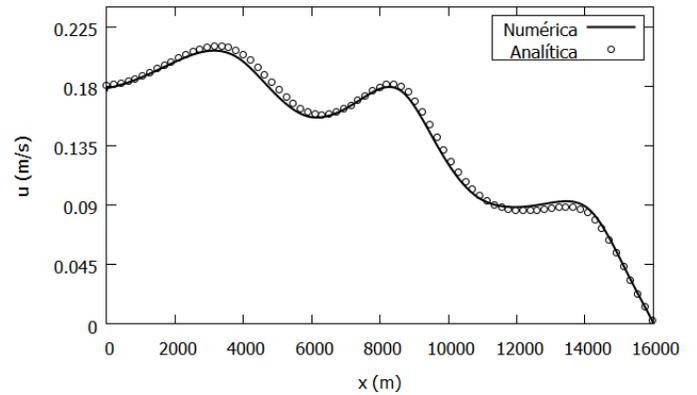


Figura 5. Velocidade do escoamento em 10937,5 s.

erro absoluto. Ao calcular o erro absoluto para as velocidades com erro relativo maior que 5%, obtém-se erro absoluto menor que 0,0004 m/s.

## VI. CONCLUSÃO

Os resultados apresentados mostram a precisão do LBM na simulação de escoamento de águas rasas não permanente. Tendo em vista que a solução analítica é obtida por análise assintótica, a concordância do resultado numérico é considerada muito boa.

## REFERÊNCIAS

- [1] A. Bermudez and M. E. Vazquez. Upwind Methods For Hyperbolic Conservation Laws With Source Terms, *Computers Fluids*, 23(8):1049–1071, 1994.
- [2] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross and M. Krook. A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems, *Physical Review*, 94(3):511–525, 1954.
- [3] M. H. Chaudhry. *Open-Channel Flow*. Springer, New York, 2008.
- [4] S. Chen and G. D. Doolen. Lattice Boltzmann Method for fluid flows, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 30(1):329–364, 1998.
- [5] S. Chen, H. D. Chen, D. Martinez and W. Matthaeus. Lattice Boltzmann Model for Simulation of Magnetohydrodynamics, *Physical Review Letters*, 67:3776–3779, 1991.
- [6] O. Delestre, C. Lucas, P. Ksinant, F. Darboux, C. Laguerre, T. N. T. Vo, F. James and S. Cordier. Swashes: a compilation of shallow water analytic solutions for hydraulic and environmental studies, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 72:269–300, 2013.

- [7] D. R. Golbert. Método de Lattice Boltzmann em Hemodinâmica Computacional: interações fluido-estrutura e modelos acoplados 1D-3D. Tese de Doutorado, LNCC, 2013.
- [8] X. He and L. S. Luo. A priori derivation of the lattice Boltzmann equation, *Physical Review E*, 55(6):6333–6336, 1997.
- [9] F. J. Higuera and J. Jiménez. Boltzmann Approach to Lattice Gas Simulations, *Europhysics Letters*, 9(7):663–668, 1989.
- [10] G. V. Krivovichev. On the Parametrical Lattice Boltzmann Equations. In *Applied Mathematical Sciences*, 8(101):5003–5014, 2014.
- [11] M. La Rocca, C. Adduce and G. Sciortino. Development of a Lattice Boltzmann Method for Two-layered Shallow-water Flow, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 70:1048–1072, 2012.
- [12] H. Liu. Lattice Boltzmann Simulations for Complex Shallow Water Flows. Tese de Doutorado, University of Liverpool, Liverpool, 2010.
- [13] H. Liu, J. G. Zhou and R. Burrows. Lattice Boltzmann simulations of the transient shallow water flows, *Advances in Water Resources*, 33:387–396, 2010.
- [14] G. R. McNamara and B. Alder. Analysis of the Lattice Boltzmann Treatment of Hydrodynamics., *Physica A*, 194:218–228, 1993.
- [15] G. R. McNamara and G. Zanetti. Use of the Boltzmann Equation to Simulate Lattice-gas Automata., *Physical Review Letters*, 61(20):2332–2335, 1988.
- [16] Y. Peng. Lattice Boltzmann Simulations of Environmental Flow Problems in Shallow Water Flows. Tese de Doutorado, University of Liverpool, 2012.
- [17] Y. Peng, J. M. Zhang and J. G. Zhou. Lattice Boltzmann Model Using Two Relaxation Times for Shallow-Water Equations, *Journal of Hydraulic Engineering*, 142(2), 2016.
- [18] Y. H. Qian. Lattice Gas and Lattice Kinetic Theory Applied to the Navier-Stokes Equations. Tese de Doutorado, Université Pierre et Marie Curie, 1990.
- [19] D. H. Rothman. *Lattice-Gas Cellular Automata: Simple Models of Complex Hydrodynamics*. Cambridge University Press, New York, 2004.
- [20] J. Sterling and S. Chen. Stability Analysis of Lattice Boltzmann Methods, *Journal of Computational Physics*, 123(1):196–206, 1996.
- [21] K. Tubbs. Lattice Boltzmann Modeling for Shallow Water Equations Using High Performance Computing. Tese de Doutorado, Louisiana State University, 2010.
- [22] W. Xiong and J. Zhang. A Two-dimensional Lattice Boltzmann Model for Uniform Channel Flows. In *Computers and Mathematics with Applications*, 61:3453–3460, 2011.
- [23] J. G. Zhou. A lattice Boltzmann model for the shallow water equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:3527–3539, 2002.
- [24] J. G. Zhou. *Lattice Boltzmann Method for Shallow Water Flows*. Springer, New York, 2004.
- [25] J. G. Zhou, H. Liu, S. Shafiqi, Y. Peng and R. Burrows. Lattice Boltzmann Method for Open-channel Flows, *Engineering and Computational Mechanics*, 163:243–249, 2010.
- [26] Q. Zou and X. He. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model. *Physics of Fluids*, 9(6):1591–1598, 1997.
- [27] D. A. Wolf-Gladrow. *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models - An Introduction*. Springer, Berlin, 2005.
- [28] B. J. N. Wylie. Application of Two-Dimensional Cellular Automaton Lattice-Gas Models to the Simulation of Hydrodynamics. Tese de Doutorado, University of Edinburgh, 1990.