Um Algorítmo Adaptativo para o Problema de Vibração Livre de Barras Utilizando Análise Isogeométrica

Mateus Rauen, Roberto Dalledone Machado e Marcos Arndt
(*Programa de Pós Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia*)
Universidade Federal do Paraná
Curitiba, Brasil

***Resumo*—Os métodos de enriquecimento no campo de funções do Método dos Elementos Finitos (MEF) conseguiram obter vantagens relacionadas a acurácia e convergência se comparados com a formulação pura do MEF. Com destaque ao Método dos Elementos Finitos Generalizado (MEFG) devido à vantagem de adicionar funções quaisquer na partição da unidade do MEF. Mais recentemente um novo método baseado no MEF surgiu apresentando vantagens relacionadas à geração de malha do MEF, este método foi entitulado Análise Isogeométrica (AIG). Este trabalho apresenta uma formulação enriquecida e adaptativa para a AIG, aplicada para o problema de vibração livre de barras. A convergência deste método é verificada e comparada com a convergência do MEFG com Adaptação.**

***Palavras-chave*—Vibração Livre, Barra, MEFG, Análise Isogeométrica**

I. INTRODUÇÃO

A Análise Isogeométrica (AIG) foi introduzida por [7], cuja principal proposta consiste na utilização das própria funções utilizadas no CAD como aproximadoras para um problema matemático. O termo isogeométrico surge desta utilização dual das funções do CAD, as quais são denominadas NURBS (*Non Uniform Rational B-Splines*). Sob o aspecto de implementação este método revolucionou o conceito de malha, trazendo vantagens relacionadas à criação, interpolação e refinamento devido a utilização da exatidão geométrica, derivada do CAD, e do contexto de implementação a nível global.

Apesar de demonstrar um conceito revolucionário sob o aspecto de implementação e precisão, a AIG ainda encontra-se em fase de desenvolvimento. Uma série de testes, novas formulações e aprimoramentos têm sido discutidas na literatura de métodos aproximados nos últimos anos. Sob o contexto da dinâmica das estruturas os resultados obtidos por [4] para a AIG trouxeram uma precisão vantajosa para os problemas de vibração de elementos unidimensionais se comparada com os mesmos resultados para o MEF convencional. Cottrell *et al.* (2006) ([4]) obtiveram um espectro de erro das frequências naturais de vibração de barras e vigas de Euler-Bernoulli com melhor comportamento do que os desenvolvidos através do MEF, além de obter melhores taxas de convergência. A extensão dos resultados obtidos por [4] foi desenvolvida por [9].

Paralelamente, os métodos de enriquecimento do campo de funções do MEF, com ênfase ao Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) têm sido aplicados na Dinâmica das Estruturas apresentando resultados vantajosos em termos de acurácia quando comparados ao MEF clássico. Para os problemas de vibração livre de estruturas, estratégias adaptativas têm sido desenvolvidas nos últimos anos com o objetivo de melhorar a precisão numérica dos problemas matemáticos. Um algorítmo adaptativo para problemas de vibração livre com base no enriquecimento através do método da partição da unidade foi proposto por [2] e [1] que obtiveram altas taxas de convergência para problemas de vibração livre de estruturas reticuladas. Dadas as vantagens tanto da AIG quanto do MEFG para a dinâmica das estruturas, o presente trabalho apresenta uma formulação híbrida da AIG com o MEFG para o problema de vibração livre de barras.

II. ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA

Hughes *et al.* ([7]) propuseram o método entitulado Análise Isogeométrica cuja principal característica se dá na utilização direta das funções geradoras de geometria CAD para a aplicação da análise numérica de problemas de valor de contorno. Estas funções são chamadas de funções NURBS: *Non Uniform Rational B-SPlines*. O termo Isogeométrico se deve ao fato de que as funções do CAD geram a geometria exata do objeto de estudo, além de serem utilizadas como funções aproximadoras para o problema matemático.

A. B-Splines

As funções base B-Splines são geradas a partir do grau polinomial (p), do número de funções (n) e do vetor de nós de controle ($\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi n + p + 1\}$) através da fórmula recursiva de Cox-De Boor. Para dado grau polinomial p, o algorítmo inicia em $p = 0$ com a seguinte expressão:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{1}$$

As próximas iterações para $p > 0$ são definidas pela expressão:

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi). \tag{2}$$

Fig. 1 mostra um conjunto de funções do tipo B-Splines de grau $p = 2$, construídas através da fórmula recursiva de Cox-De Boor através do vetor de nós de controle $\Xi = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$.

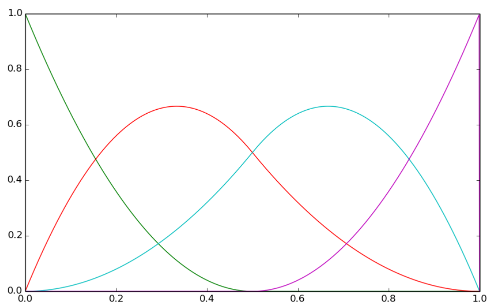

Figura 1. Funções base B-Splines $p = 2$ com vetor de nós de controle $\Xi = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$

III. ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA COM ENRIQUECIMENTO

A. Método da Partição da Unidade

Seja uma função $u \in H^1(\Omega)$ uma função definida em um domínio Ω a qual se deseja aproximar, e $\{\Omega_i\}$ um conjunto de coberturas, ou núvens, contidas no domínio Ω. Um conjunto de funções $\eta_i(\xi)$ definidas em uma cobertura Ω_i que satisfazem as condições ([1], [8]):

$$supp(\eta_i) = \{x \in \Omega | \eta_i(\xi) \neq 0\} \subset [\Omega_i], \forall i \tag{3}$$

$$\sum_i \eta_i \equiv 1 \text{ sobre } \Omega, \tag{4}$$

é considerado uma partição da unidade $\{\eta_i\}$ sobre Ω_i. Segundo [2] e [1], este conjunto de partição da unidade permite a obtenção de um espaço generalizado de funções de enriquecimento, sendo que podem ser escolhidas funções enriquecedoras que representem um determinado problema matemático.

Seja $S_i \subset H^1(\Omega_i)$ um conjunto de funções que possam representar localmente a função u:

$$S_i = \left\{ s_i^j \right\}_{j=1}^m . \tag{5}$$

O conjunto de funções enriquecedoras é formado pelo produto de S_i pela partição da unidade η_i, na forma:

$$S := \sum_i \eta_i S_i = \left\{ \sum_i \eta_i s_i^j \; | s_i^j \in S_i \right\} \subset H^1(\Omega), \tag{6}$$

sendo que a função $u(\xi)$ pode ser aproximada por $u_h(\xi)$ pela expressão:

$$u_h(\xi) = \sum_i \sum_{s_i^j} \eta_i s_i^j(\xi) a_{ij}, \tag{7}$$

onde a_{ij} são os graus de liberdade do problema.

B. Enriquecimento Adaptativo para a Análise da Vibração Livre de um Elemento de Barra Reta

O elemento generalizado de barra reta foi inicialmente proposto por [2] e [1] que utilizou como partição da unidade as funções lineares do MEF clássico dadas por:

$$\eta_i = \begin{cases} 1 + \frac{x - x_i}{x_i - x_{i-1}} & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ 1 - \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \tag{8}$$

em $\Omega_i = (x_{i-1}, x_{i+1})$. Sendo o espaço de aproximação local definido por:

$$S_i = \text{span}\{1 \; \gamma_{1j} \; \gamma_{2j} \; \varphi_{1j} \; \varphi_{2j} \; \ldots\}, \; j = 1, 2, 3, \ldots, n_l \tag{9}$$

com

$$\gamma_{1j} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ sen[\beta_{Rj}(x - x_i)] & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \tag{10}$$

$$\gamma_{2j} = \begin{cases} sen[\beta_{Lj}(x - x_i)] & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ 0 & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \tag{11}$$

$$\varphi_{1j} = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ cos[\beta_{Rj}(x - x_i)] - 1 & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \tag{12}$$

$$\varphi_{2j} = \begin{cases} cos[\beta_{Lj}(x - x_i)] - 1 & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ 0 & \text{if } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \tag{13}$$

$$\beta_{Rj} = \sqrt{\frac{\rho_R}{E_R}} u_j \tag{14}$$

$$\beta_{Lj} = \sqrt{\frac{\rho_L}{E_L}} u_j, \tag{15}$$

onde E_R e ρ_R são o módulo de elasticidade e a massa específica no subdomínio (x_i, x_{i+1}), respectivamente. E_L e ρ_L são o módulo de elasticidade e a massa específica no subdomínio (x_{i-1}, x_i), and u_j e u_j é a frequência relacionada ao j-ésimo nível de enriquecimento.

As funções γ_{1j}, γ_{2j}, φ_{1j} e φ_{2j} são capazes de expressar melhor o espaço de aproximação do problema de vibração livre de barras. Expressões similares na forma trigonométrica foram utilizadas por [5] e [10] para enriquecer o problema de vibração livre de barras e obtiveram melhores resultados em termos de taxa de convergência se comparados com o MEF clássico. Um fato importante a respeito destas funções é que elas se anulam nas interfaces do elemento, não interferindo na imposição padrão das condições de contorno de MEF convencional.

O algorítmo de adaptatividade se dá inicialmente na escolha de uma frequência para as funções enriquecedoras γ_{1j}, γ_{2j},

φ_{1j} e φ_{2j} após uma análise inicial sem a inserção das funções. Esta frequência escolhida, chamada de frequência alvo é então inserida nas funções enriquecedoras, realimentando o modelo. Fig. 2 representa o algorítmo adaptativo proposto por [2] e [1].

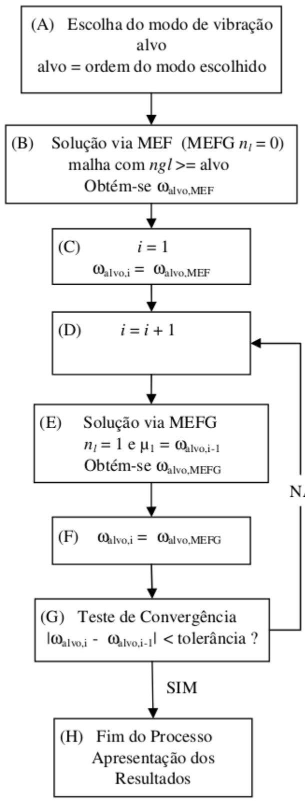

Figura 2. Algorítmo adaptativo para o problema de vibração livre

Os resultados obtidos por [2] e [1] para o problema de vibração livre de barras desenvolvidos através do MEFG adaptativo mostraram alta taxa de convergência da frequência alvo, quando comparados com o MEF convencional e com os métodos enriquecidos.

A proposta deste trabalho está em estender os resultados do MEFG adaptativo proposto por [2] e [1] utilizando as funções NURBS da AIG como partição da unidade. Portanto neste caso:

$$\eta_i = N_{i,p}. \tag{16}$$

C. Forma Variacional do Problema de Vibração Livre de Barras

O problema de vibração axial de um elemento de barra ([6]), mostrado na Fig. 3, apresenta hipóteses simplificadoras relacionadas ao material da barra e sua geometria. O material deve ser elástico linear e homogêneo e as seções transversais são normais ao eixo antes e após a deformação do material. A deformação da barra $\bar{u}$ se dá ao longo do seu eixo e o problema consiste em encontrar $\bar{u}$ de modo que satisfaça a

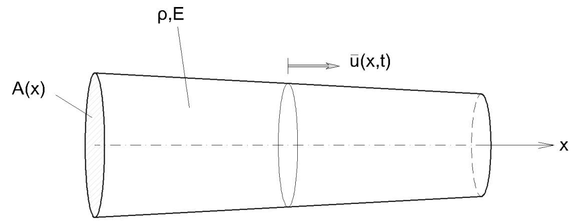

Figura 3. Elemento de barra com vibração axial

equação diferencial:

$$\rho A \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) = 0 \tag{17}$$

onde ρ é a massa específica do material, A a área da seção transversal da barra e E o módulo de elasticidade do material, ou módulo de Young.

A formulação variacional deste problema é desenvolvida considerando o parâmetro tempo como variável independente e aplicando o método dos resíduos ponderados, onde uma função de ponderação w, independente do tempo, é inserida na equação diferencial. Os graus de liberdade são considerados desconhecidos, variam de acordo com o tempo e são determinados como solução de um sistema de equações diferenciais ([3]). Aplicando o método dos resíduos ponderados na equação 17, tem-se:

$$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} w dx - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) w dx = 0. \tag{18}$$

Considerando os parâmetros ρ e E constantes e que a área da seção transversal A não varia ao longo da barra, integrando o segundo termo por partes, a equação 18 se transforma em:

$$\rho A \int_0^L \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} w dx + EA \int_0^L \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} dx - EA\left[w\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right]_0^L = 0. \tag{19}$$

O problema de vibração livre de um elemento de barra se transforma em um problema de autovalores com a substituição da solução analítica geral. Segundo [3] um problema de vibração livre apresenta solução analítica na forma:

$$\bar{u}(x,t) = e^{i\omega t}u(x) = ((cos(\omega t) + i.sen(\omega t))\ u(x). \tag{20}$$

Substituindo a equação 20 na equação 19, tem-se:

$$EA \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} dx - EA\left[w\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right]_0^L - \lambda \rho A \int_0^L u w dx = 0. \tag{21}$$

As operações decorrentes do Método de Galerkin ocorrem, neste caso, em espaços de mesma ordem. Portanto sob quaisquer imposições de condições de contorno o segundo termo da equação 21 se anula. O problema de autovalores é então dado por:

$$B(u, w) = \lambda F(u, w) \tag{22}$$

onde λ é o autovalor do problema e as $B(u, w)$ e $F(u, w)$ são formas bilineares dadas por:

$$B(u, w) = EA \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx, \tag{23}$$

$$F(u, w) = \rho A \int_0^L uwdx. \tag{24}$$

Quando é aplicado um método aproximado, o problema de vibração livre de barras se transforma em um problema não exato. A equação 22 é então formada por funções aproximadoras para o deslocamento axial e para a ponderação da sentença.

Na forma discreta, a solução aproximada $u^h(x)$ é escrita da seguinte maneira:

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^{N} \phi_j u_j \tag{25}$$

onde N é o número total de graus de liberdade, ϕ_j as funções de base globais utilizadas na aproximação e u_j são os graus de liberdade do problema. Admitindo que a função de ponderação e o deslocamento axial são dados pelas funções base de aproximação, a forma discreta do problema, para $i = 1, 2, \ldots, N$ pode ser escrita como:

$$\sum_{j=1}^{N} \left(EA \int_0^L \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx \right) u_j = \lambda^h \sum_{j=1}^{N} \left(\rho A \int_0^L \phi_i \phi_j dx \right) u_j. \tag{26}$$

A equação 26 pode ser escrita matricialmente como:

$$\mathbf{K}\phi^h = \lambda^h \mathbf{M}\phi^h \tag{27}$$

a qual representa o problema de autovalores generalizados. A resolução destes autovalores fornece as frequências naturais de vibração pela relação:

$$\omega^h = \sqrt{\lambda^h}. \tag{28}$$

IV. EXPERIMENTO NUMÉRICO

Um teste da AIG com enriquecimento é realizado, onde uma barra com módulo de elasticidade $E = 1N/m^2$, massa específica $\rho = 1kg/m^3$, área da seção transversal $A = 1m^2$ e comprimento $L = 1m$ e duas extremidades fixas é submetida ao fenômeno de vibração livre conforme descrito na seção anterior (Fig. 4).

Figura 4. Barra uniforme com duas extremidades fixas

Este problema possui solução analítica, dada por:

$$\omega_r = \frac{r\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad , r = 1, 2, 3, \ldots \tag{29}$$

$$u_r(x) = a \ sen \left(\frac{r\pi x}{L} \right) \tag{30}$$

O algorítmo adaptativo foi executado por meio da partição da unidade formada por funções base NURBS com grau $p = 2$, $n = 4$ e vetor de nós de controle $\Xi = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$. As funções enriquecedoras utilizadas nesta modelagem são as funções:

$$\gamma_{1j} = sen(\omega_i \xi) \tag{31}$$

$$\varphi_{1j} = cos(\omega_i \xi). \tag{32}$$

Fig. 5, 6, 7 e 8 mostram o erro relativo do algorítmo adaptativo para as frequências alvo $i = 1, 2, 3$ e 4, respectivamente, em função do número da iteração correspondente.

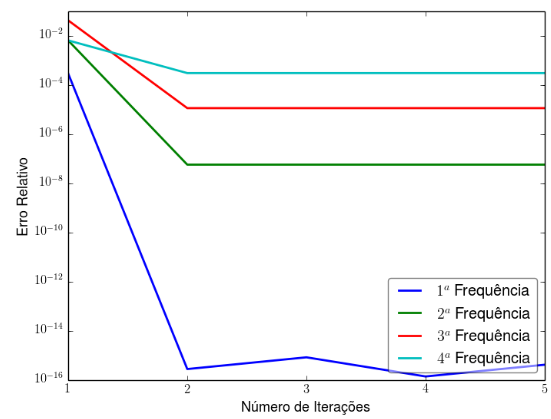

Figura 5. Resultado da AIG com enriquecimento adaptativo para a primeira frequência alvo

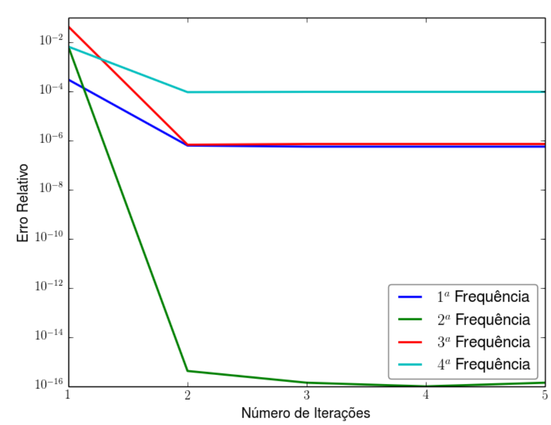

Figura 6. Resultado da AIG com enriquecimento adaptativo para a segunda frequência alvo

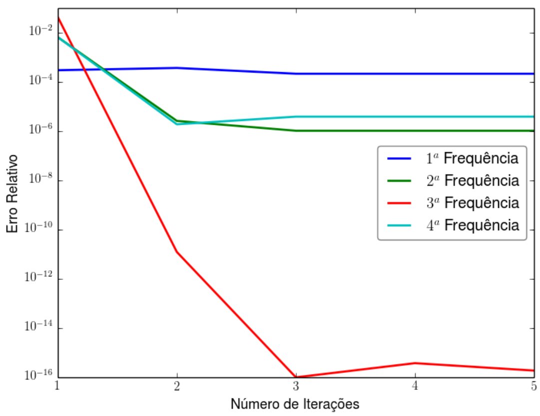

Figura 7. Resultado da AIG com enriquecimento adaptativo para a terceira frequência alvo

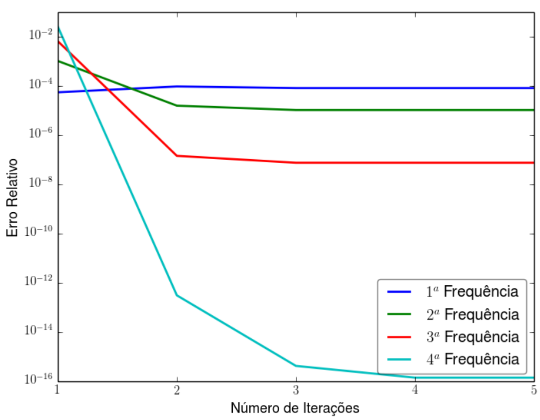

Figura 8. Resultado da AIG com enriquecimento adaptativo para a quarta frequência alvo

V. CONCLUSÕES

Os resultados mostram a característica da alta taxa de convergência da frequência alvo. Para cada frequência alvo escolhida, observa-se também que as demais frequências analizadas apresentam um pequeno ganho de precisão. Este fenômeno de alta convergência, também observado por [2] e [1] para o MEFG adaptativo, mostra um bom comportamento das funções B-Splines como partição da unidade e boa eficácia do método adaptativo na determinação de frequências naturais de vibração.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPQ (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo apoio nesta pesquisa.

REFERÊNCIAS

[1] M Arndt, R D Machado, and A Scremin. An adaptive generalized finite element method applied to free vibration analysis of straight bars and trusses. *Journal of Sound and Vibration*, 329:659–672, 2010.

[2] Marcos Arndt. *O Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado À Análise de Vibrações Livres de Estruturas Reticuladas*. PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Curitiba, 2009. Doutorado em Método Numéricos em Engenharia.

[3] G F Carey and J T Oden. *Finite Element: Computational Aspects*. Prentice Hall, New Jersey, 1984.

[4] J A Cottrell, A Reali, Y Bazilevs, and T J R Hughes. Isogeometric analysis of structural vibrations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:5257–5196, 2006.

[5] N Ganesan and C Engels. Hierarchical bernoulli-euller beam finite elements. *Computer & Structures*, 43(2):297–304, 1992.

[6] T J R Hughes. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, Mineola, 1987.

[7] T J R Hughes, J A Cottrell, and Y Bazilevs. Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:4135–4195, 2005.

[8] J M Melenk and I Babuska. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4):289–314, 1996.

[9] M Rauen, R D Machado, and M Arndt. Comparison between the isogeometric analysis and the enriched methods to the problem of free vibration of bars. In *Proceedings of the XXXIV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Pirenópolis, Brazil, 2013. XXXIV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering.

[10] P Zeng. Composite element method for vibration analysis of structures, part i: principle and c0 element (bar). *Journal of Sound and Vibration*, 218(4):619–658, 1998a.