SMNE UFPR
Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia
25 a 27 de outubro, 2017

Formulação de MEC com a Reciprocidade Dual

Um estudo da influência do número de pontos internos

Jonathas Rodrigues Salles de Oliveira
Programa de Pós-Graduação de Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE-UFPR)
Curitiba, Brasil
jonathas_salles@hotmail.com

Luiz Alkimin de Lacerda
PPGMNE-UFPR
Instituto de Tecnologia para o Desenvolvimento LACTEC
Curitiba, Brasil
alkimin@lactec.org.br

***Resumo* — Este trabalho apresenta um estudo de MEC com a Reciprocidade Dual para analisar a aproximação dos resultados numéricos com a solução analítica da equação de Poisson conforme se aumenta o número de pontos internos no domínio do problema.**

***Palavras-chave* — Método dos Elementos de Contorno, Equação de Poisson, Reciprocidade Dual.**

I. INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é o método numérico mais recente do ponto de vista de aplicações computacionais. Tem esta denominação a partir do trabalho de Brebbia [1]. Desde então o MEC vem sendo aprimorado com pesquisas nas mais variadas áreas da engenharia. [2]

Dentre as vantagens do MEC, pode-se citar a capacidade de analisar um problema por meio da solução de integrais de contorno. No entanto, existem algumas dificuldades de estender esta técnica para várias aplicações tais como problemas não homogêneos, não lineares e dependentes do tempo, por exemplo. A principal desvantagem neste caso é o aparecimento de integrais de domínio que dependem da implementação de células para análise. Com isso, o método perde sua eficiência quando comparado ao Método dos Elementos Finitos.

O Método da Reciprocidade Dual (MRD) é uma técnica que transforma estas integrais de domínio em integrais de contorno. Embora não se utilize a discretização do domínio em células, o MRD exige a consideração de pontos internos, para a melhoria da precisão dos resultados [3].

Este trabalho apresenta uma formulação de MEC com a Reciprocidade Dual e tem como objetivo verificar a convergência da solução numérica com a analítica da Equação de Poisson ao se aumentar o número de pontos internos no domínio.

II. O MODELO MATEMÁTICO

A equação de Poisson é definida por:

$$\nabla^2 u = b \ em \ \Omega. \tag{1}$$

Aplicando o MEC nesta equação tem-se:

$$c_i u_i + \int_\Gamma u q^* d\Gamma + \int_\Omega b u^* \, d\Omega = \int_\Gamma q u^* \, d\Gamma \tag{2}$$

onde b é uma função conhecida no domínio do problema, a constante c_i depende apenas da geometria escolhida no contorno nos diferentes nós i; u^* e q^* são a solução fundamental do problema e sua derivada, respectivamente.

O MRD transforma a integral de domínio em (2) em uma integral de contorno, mas para isso exige a inclusão de j pontos internos no domínio do problema para aproximar a função b que é substituída conforme a equação a seguir.

$$b = \sum_{j=1}^{T} \alpha_j f_j. \quad (3)$$

onde α é um conjunto de coeficientes; f são funções de aproximação nos diferentes pontos internos j e T representa o número total de pontos utilizados no domínio e no contorno do problema.

III. O MODELO

A análise numérica foi realizada a partir de 40 elementos lineares e descontínuos de contorno sendo utilizados 4 pontos para a quadratura de Gauss no processo de integração de tais elementos. O modelo geométrico do domínio é quadrado.

O modelo numérico aproximou (1) com termo b igual a -1 e comparou seu resultado com a equação a seguir que representa a solução analítica do problema.

$$u(x,y) = \frac{(1-x^2)}{2} - \frac{16}{\pi^3} \sum_{\substack{k=1 \\ k\ \text{ímpar}}}^{\infty} \left\{ \frac{\operatorname{sen}(\frac{k\pi(1+x)}{2})}{k^3 senh(k\pi)} \right.$$

$$\left. .\left(senh\left(\frac{k\pi(1+y)}{2}\right) + senh\left(\frac{k\pi(1-y)}{2}\right)\right) \right\} \quad (4)$$

Cinco modelos foram implementados variando apenas o número de pontos internos (1, 5, 9, 13, 25). A solução encontrada para o potencial u no ponto central do domínio em cada um desses modelos pode ser vista na Fig. 1.

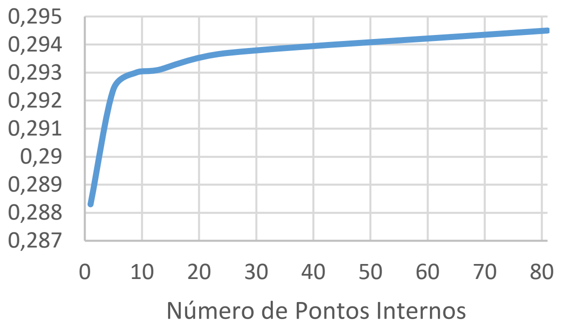

Figura 1. Solução encontrada para ponto central no domínio, coordenada (0,0), para diferentes números de pontos internos.

A Fig.1 mostra que os valores de potencial no ponto interno do problema convergem para 0,2946 (solução analítica) quando se aumenta o número de pontos internos de 1 para 81. Pode-se verificar que o aumento no número de pontos internos aproxima a solução numérica da analítica. A Fig. 2 apresenta uma comparação entre a solução numérica desenvolvida e a solução analítica em (4). Nela pode-se verificar que o modelo numérico implementado acompanha o comportamento analítico esperado.

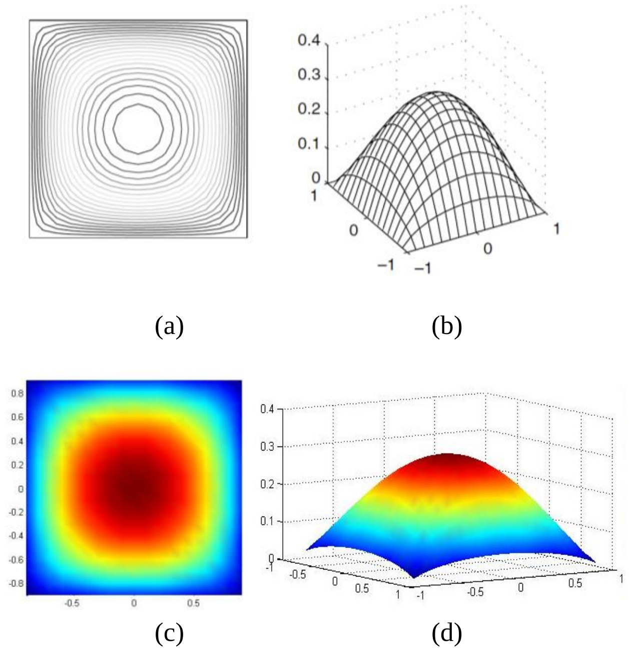

Figura 2. Soluções para a equação de Poisson. Distribuição bidimensional no domínio do problema (a) e tridimensional (b) para a solução analítica apresentada em (4). Distribuição bidimensional no domínio do problema (c) e tridimensional (d) para o modelo numérico desenvolvido em (2).

IV. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma formulação de MEC com Reciprocidade Dual para o estudo da Equação de Poisson.

O modelo numérico implementado com diferentes números de pontos internos demonstrou, como esperado, que com aumento do número de pontos internos a solução numérica converge para a solução analítica do problema

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa durante este período de realização do doutorado.

REFERÊNCIAS

[1] Brebbia, C. A., 1978. *The boundary element method for engineers*. Pentech Press.

[2] Toutip, W. *Study on the Dual Reciprocity Boundary Element Metho*d. Technical Report. 2016.

[3] *Chapter 1: The Poisson Equation.* Disponível em: http://people.inf.ethz.ch/arbenz/FEM16/pdfs/0-19-852868-X.pdf. Acesso em 10 de Set 2017.