



**Simpósio de Métodos  
Numéricos em Engenharia**

**25 a 27 de outubro, 2017**

# *Comparação entre métodos de resolução de sistemas aplicados à discretização da equação de Poisson via diferenças finitas exponencial*

*Beatriz Liara Carreira; Analice Costacurta Brandi*

Departamento de Matemática e Computação  
Faculdade de Ciências e Tecnologia - UNESP  
Presidente Prudente, Brasil  
biialiara@gmail.com; analice@fct.unesp.br

**Resumo**—Recentemente, um novo método de diferenças finitas exponencial vem sendo aplicado na resolução de equações diferenciais parciais elípticas. Os sistemas lineares resultantes da discretização desses problemas, geralmente têm uma estrutura que sugere ser conveniente recorrer aos métodos numéricos para obter sua solução. Neste contexto, o objetivo deste trabalho consiste na comparação entre os métodos aplicados na resolução dos sistemas lineares provenientes da discretização realizada através do método exponencial.

**Palavras-chave**—método exponencial; sistemas lineares; métodos numéricos; problemas elípticos.

## I. INTRODUÇÃO

Problemas de equilíbrio são aqueles em que a propriedade de interesse não depende da evolução temporal e na maioria das vezes são modelados por equações diferenciais parciais elípticas. Esses sistemas também são conhecidos como estacionários, justamente por permanecerem constantes em relação ao tempo.

As equações elípticas mais conhecidas são as equações de Poisson e de Laplace, cujas aplicações são as mais variadas. Por exemplo, a equação de Poisson representa o movimento de um fluido viscoso incompressível a baixa velocidade e a equação de Laplace é empregada para descrever potencial eletromagnético, dentre outras [2].

Essas equações podem ser resolvidas através de três tipos de abordagem: a computacional, a experimental e a analítica. Por conseguinte, a abordagem analítica nem sempre é possível. Resolver analiticamente uma equação diferencial pode levar a processos complexos ou até mesmo impossíveis, uma vez que algumas delas não admitem solução exata. A abordagem experimental, é bastante satisfatória, contudo tem custo operacional elevado e depende de processos longos. Já a abordagem computacional, não impõe limitações de ordem dimensional, física e espacial, além de técnicas de estabilidade e convergência serem incorporadas ao processo de solução, tornando-a uma das abordagens mais atrativas, devido a ausência de limitações.

Em contrapartida, detalhes importantes a serem verificados estão relacionados à convergência, à consistência e à estabilidade e são necessários para garantir a integridade da solução. É preciso que haja controle da propagação do erro, isto é, que os critérios de estabilidade sejam satisfeitos para garantir um método numérico estável. Caso contrário, pode ocorrer um acúmulo de erros capaz de interferir e prejudicar totalmente a solução numérica final. A estabilidade aliada à consistência implica em um método numérico convergente, cujos resultados obtidos sejam fiéis ao problema, embora não sejam exatos.

A abordagem computacional se realiza por meio dos métodos numéricos que aproximam com determinada precisão a solução de equações diferenciais parciais com o auxílio de computadores. Recentemente, um novo método numérico foi desenvolvido por Pandey [3], chamado de método de diferenças finitas exponencial

de quarta ordem, simulado computacionalmente para equações diferenciais parciais elípticas de segunda ordem com diferentes condições de contorno.

A aplicação do método de diferenças finitas exponencial em equações lineares produz sistemas lineares. Esses sistemas resultantes têm uma característica peculiar: geralmente, a matriz de discretização é esparsa e aproveitando-se dessa estrutura, pode ser conveniente recorrer ao uso dos métodos iterativos para obter sua solução, embora também possa recorrer à utilização de métodos diretos nas simulações, desde que o sistema linear satisfaça as condições necessárias à aplicação do método.

Neste contexto, no presente trabalho trata-se da aplicação do método de diferenças finitas exponencial para a solução de equações diferenciais parciais elípticas lineares de segunda ordem, além da comparação dos métodos numéricos para solução dos sistemas lineares resultantes.

## II. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

O domínio de integração de uma equação diferencial parcial bidimensional é uma região  $\Omega$  cuja área é limitada pela fronteira  $\partial\Omega$ . A equação abaixo é considerada uma equação diferencial parcial elíptica em  $\Omega$  se  $b^2 - 4ac < 0$  para todo ponto interior de  $\Omega$  [1].

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = d \left( x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (1)$$

Uma das principais equações elípticas que representam os problemas de equilíbrio é a equação de Poisson dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y). \quad (2)$$

Uma característica dos problemas modelados por equações diferenciais parciais elípticas é que toda região  $\Omega$  seja imediatamente afetada por qualquer mudança no valor da variável dependente em um ponto do interior do domínio ou na fronteira  $\partial\Omega$ . Isso é equivalente a afirmar que as propriedades físicas de problemas elípticos se propagam em todas as direções dentro da região  $\Omega$ , afetando os pontos interiores, e por este motivo suas condições de contorno normalmente são especificadas ao longo de toda fronteira.

As condições de contorno usualmente especificam os valores da função ou os valores de sua derivada normal ao longo do contorno  $\partial\Omega$ , ou uma mistura de ambos, que são, respectivamente, as condições de Dirichlet ( $u$  é conhecida em  $\partial\Omega$ ), de Neumann ( $\frac{\partial u}{\partial n}$  é conhecida em  $\partial\Omega$ ) e Robin ( $\alpha u = \beta \frac{\partial u}{\partial n}$  conhecida em  $\partial\Omega$ ). Em particular, considera-se neste trabalho uma região quadrada  $\Omega = \{(x, y) : a \leq x \leq b; a \leq y \leq b\}$  com condição de contorno  $u(x, y) = g(x, y)$  em  $\partial\Omega$ .

## III. FORMULAÇÃO NUMÉRICA

A resolução de uma equação diferencial parcial analiticamente fica restrita a problemas simples. Problemas mais complexos tornam-se difíceis ou até mesmo impossíveis de se resolver analiticamente por conta da insuficiência dos métodos existentes. Enquanto isso, a abordagem computacional é capaz de solucionar equações com alto nível de complexidade, não havendo restrições a geometrias e processos complicados.

A abordagem computacional é realizada por meio dos métodos numéricos, que calculam soluções aproximadas para o problema através do suporte de computadores. Primeiramente, é necessário conhecer o domínio do problema, então alguns pontos são selecionados e nesses pontos aproxima-se a solução, uma vez que o computador seria incapaz de aplicar as técnicas numéricas num domínio contínuo, contendo infinitos pontos. A esse processo denomina-se discretização.

A discretização do domínio deve ser o primeiro passo para solucionar numericamente um problema estacionário através de uma equação elíptica. Para exemplificar o processo, considera-se  $\Omega$  como sendo uma região quadrada, coberta por uma malha, conforme a Fig. 1.

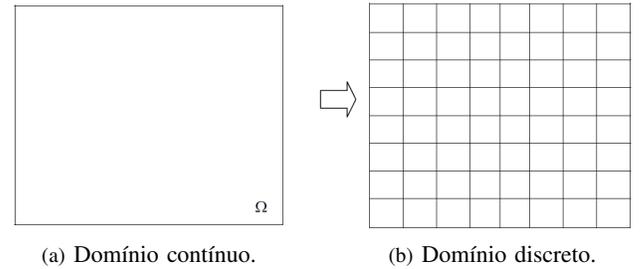


Figura 1: Discretização do domínio.

### A. Método de Diferenças Finitas Exponencial

O método de diferenças finitas exponencial produz aproximações de alta ordem considerando um espaçamento uniforme  $h$  nas direções  $x$  e  $y$ . Inicialmente, é preciso considerar os oito pontos vizinhos  $(i \pm 1, j)$ ,  $(i, j \pm 1)$  e  $(i \pm 1, j \pm 1)$ , ao ponto  $(i, j)$

$$\begin{cases} u_{i\pm 1, j} = u(x_i \pm h, y_j) \\ u_{i, j\pm 1} = u(x_i, y_j \pm h) \\ u_{i\pm 1, j\pm 1} = u(x_i \pm h, y_j \pm h), \end{cases}$$

com  $i, j = 0, 1, \dots, N$ , sendo  $N$  a quantidade de subintervalos tomados.

Para aproximar a solução analítica da equação elíptica de Poisson, o método de diferenças finitas exponencial utiliza nove pontos e inicialmente é dado pela seguinte equação

$$a_0(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + a_1(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) + a_2u_{i,j} = b_0h^2f_{i,j}e^{\phi(h)}, \quad (3)$$

com  $i, j = 0, 1, \dots, N$ , onde  $a_0, a_1, a_2$  e  $b_0$  são constantes e  $\phi(h)$  é uma função diferenciável. A partir dessa equação, pode-se ainda, definir a função  $F(h, u)$  da seguinte forma

$$F(h, u) \equiv a_0(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + a_1(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) + a_2u_{i,j} - b_0h^2f_{i,j}e^{\phi(h)}. \quad (4)$$

Observando a Fig. 2, nota-se a disposição dos pontos envolvidos na expressão de discretização de uma equação diferencial utilizando o método de diferenças finitas exponencial.

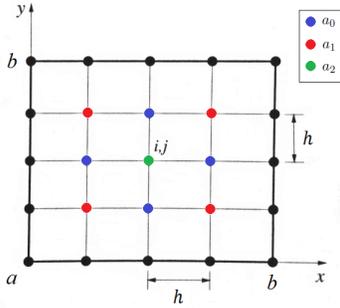


Figura 2: Estêncil da aproximação da equação elíptica utilizando o método de diferenças finitas exponencial.

A partir de (4) ocorre o desenvolvimento do método de diferenças finitas exponencial de alta ordem. Primeiramente, expandindo a função diferenciável  $\phi(h)$  em série de Mac Lauren obtém-se a seguinte expressão

$$\phi(h) = \phi(0) + h\phi'(0) + \frac{h^2}{2!}\phi''(0) + O(h^3). \quad (5)$$

Agora, aplicando expansão exponencial no termo  $e^{\phi(h)}$ , o resultado é dado por

$$e^{\phi(h)} = 1 + \phi(h) + \frac{\phi(h)^2}{2!} + O(h^3). \quad (6)$$

Então, o desenvolvimento do método exige que se faça a substituição de (5) em (6). Esse processo acaba fornecendo a expressão a seguir

$$e^{\phi(h)} = 1 + \phi(0) + \frac{1}{2}\phi(0)^2 + h(1 + \phi(0))\phi'(0) + \frac{h^2}{2}(\phi'(0)^2 + (1 + \phi(0))\phi''(0)) + O(h^3). \quad (7)$$

Dando continuidade ao processo, é preciso expandir  $F(h, u)$  em série de Taylor em torno do ponto  $u_{i,j}$ . Truncando essa expansão até a quarta ordem, pode-se escrevê-la da seguinte maneira

$$F_{i,j} = a_04u_{i,j} + a_14u_{i,j} + a_2u_{i,j} - b_0h^2f_{i,j}e^{\phi(h)} + a_0 \left( h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{(i,j)} + a_1 \left( 2h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{(i,j)} + a_0 \left( \frac{h^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{h^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)_{(i,j)} + a_1 \left( \frac{h^4}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{h^4}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + h^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_{(i,j)}. \quad (8)$$

Para simplificar a expressão é preciso considerar  $f_{i,j} = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{(i,j)}$ , e então

$$\nabla^2 f_{i,j} = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{(i,j)} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{(i,j)}. \quad (9)$$

Usando essas notações e substituindo-as em (8), tem-se

$$(4a_0 + 4a_1 + a_2)u_{i,j} + (a_0 + 2a_1)h^2f_{i,j} + \frac{h^4}{12}(a_0 + 2a_1)\nabla^2 f_{i,j} - \frac{h^4}{6}(a_0 - 4a_1)\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - b_0h^2f_{i,j}(1 + \phi(0) + \frac{1}{2}\phi(0)^2) + h(1 + \phi(0))\phi'(0) + \frac{h^2}{2}(\phi'(0)^2 + (1 + \phi(0))\phi''(0)) = 0.$$

Analisando os coeficientes de  $h^p$ , com  $p = 0, 2, 3, 4$ , constrói-se o seguinte sistema não linear

$$\begin{cases} 4a_0 + 4a_1 + a_2 = 0 \\ (a_0 + 2a_1)f_{i,j} - b_0f_{i,j}(1 + \phi(0) + \frac{1}{2}\phi(0)^2) = 0 \\ -b_0f_{i,j}(1 + \phi(0))\phi'(0) = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \end{cases} \quad (10)$$

sendo

#### IV. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{12}(a_0 + 2a_1)\nabla^2 f_{i,j}, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{6}(a_0 - 4a_1) \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_{(i,j)}, \\ \lambda_3 &= b_0 f_{i,j} \frac{1}{2} (\phi'(0)^2 + (1 + \phi(0))\phi''(0)).\end{aligned}$$

Para resolver o sistema anterior, considera-se  $\phi(0) = 0$ ,  $\phi'(0) = 0$  e  $a_0 - 4a_1 = 0$ . Com simples substituições convenientes descobre-se facilmente os valores de  $a_0$ ,  $a_2$  e  $b_0$ , como segue a partir de agora

$$\begin{aligned}a_0 &= 4a_1, \\ a_2 &= -20a_1, \\ b_0 &= 6a_1.\end{aligned}$$

A substituição de todos esses valores conhecidos na última equação do sistema não linear fornece o valor de  $\phi''(0)$

$$\phi''(0) = \frac{\nabla^2 f_{i,j}}{6f_{i,j}}. \quad (11)$$

Agora que são conhecidos, os valores de  $\phi(0)$ ,  $\phi'(0)$  e  $\phi''(0)$  são utilizados em (5), obtendo-se o valor de  $\phi(h)$

$$\phi(h) = \frac{h^2 \nabla^2 f_{i,j}}{12f_{i,j}}. \quad (12)$$

Finalmente, sabe-se os valores de todas as constantes que a princípio eram desconhecidas e além disso, uma expressão foi encontrada para a função  $\phi$ . Substituindo os valores de  $a_0$ ,  $a_2$ ,  $b_0$  e  $\phi(h)$  em (3), obtém-se a equação do método de diferenças finitas exponencial na sua forma final

$$\begin{aligned}4(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + (u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} + \\ + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) - 20u_{i,j} = 6h^2 f_{i,j} e^{\frac{h^2 \nabla^2 f_{i,j}}{12f_{i,j}}},\end{aligned} \quad (13)$$

com  $i, j = 0, 1, \dots, N$ .

O laplaciano que se encontra no expoente é aproximado por diferenças finitas de segunda ordem, como visto a seguir

$$h^2 \nabla^2 f_{i,j} = f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 4f_{i,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1}. \quad (14)$$

Essa expressão é a discretização da equação diferencial utilizando o método de diferenças finitas, também conhecida pela fórmula dos cinco pontos.

Na discretização de um problema elíptico linear pelo método de diferenças finitas exponencial obtém-se um sistema de equações lineares. Portanto, a solução desse problema de equilíbrio implica determinar a solução do sistema resultante da forma  $Ax = f$ , em que  $A$  é a matriz dos coeficientes,  $f$  é um vetor de constantes e  $x$  é o vetor solução.

Em muitos casos, esse sistema não possui as condições necessárias para ser resolvido analiticamente. Devido a isso existem alternativas, que são os métodos numéricos dedicados à solução de sistemas lineares. Esses métodos podem ser divididos em diretos e iterativos.

Não há como se afirmar categoricamente a superioridade dos métodos iterativos de solução de sistemas lineares sobre os diretos, ou vice-versa. O desempenho dos métodos de ambas as classes depende, basicamente da estrutura da matriz de coeficientes do problema que está sendo resolvido [2].

##### A. Métodos Diretos

O termo método direto refere-se às técnicas que, na ausência de erros de arredondamento e após um determinado número finito de iterações é capaz de calcular a solução exata do sistema linear, caso ela exista. Os métodos diretos transformam o sistema linear em questão num outro sistema linear equivalente, cuja solução é a mesma do sistema original. A ideia do método é que esse sistema transformado possua uma matriz de coeficientes com características capazes de simplificar sua resolução, que conseqüentemente fornecerá a solução do sistema linear original.

1) *Decomposição LU*: Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . Suponha-se que existam duas matrizes convenientes  $L$  e  $U$ , triangular inferior (*lower*) e triangular superior (*upper*), respectivamente, de tal forma que  $A$  possa ser decomposta por essas matrizes, isto é,  $A = LU$ . A isto denomina-se fatorização ou decomposição  $LU$  de  $A$ . Ocorre que se  $A$  for uma matriz não singular, então  $L$  e  $U$  também serão, e conseqüentemente, ambas terão os elementos diagonais não nulos.

Dessa forma, agora ao invés de um sistema linear, será preciso resolver dois sistemas lineares

$$\begin{aligned}(LU)x = f &\Rightarrow L(\underbrace{Ux}_y) = f, \\ Ly = f, &\quad Ux = y.\end{aligned} \quad (15)$$

Sendo  $L$  uma matriz triangular inferior então a primeira linha do primeiro sistema a ser resolvido será  $l_{11}y_1 = f_1$ , fornecendo o valor de  $y_1$ . Substituindo o valor determinado anteriormente nas equações seguintes faz resultar um novo sistema cujas incógnitas são  $y_2, \dots, y_n$ . Avançando no procedimento para cada uma das equações pode-se calcular todas incógnitas, procedendo como a seguir

$$\begin{cases} y_1 = \frac{f_1}{l_{11}} \\ y_i = \frac{1}{l_{ii}} \left( f_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j \right), \quad i = 2, \dots, n. \end{cases} \quad (16)$$

O sistema  $Ux = y$  pode ser resolvido de modo semelhante. A diferença está no fato de  $U$  ser triangular superior. Consequentemente, deve-se calcular primeiro o valor de  $x_n$ , e em seguida, as demais incógnitas, utilizando um processo regressivo

$$\begin{cases} x_n = \frac{y_n}{u_{nn}} \\ x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left( y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j \right), \quad i = n-1, \dots, 1. \end{cases} \quad (17)$$

Resta agora encontrar um algoritmo que permita determinar as matrizes  $L$  e  $U$ . Para uma matriz  $A$ , de ordem  $n$ , tem-se que os elementos de  $L$  e  $U$  satisfazem o sistema de equações não lineares

$$\sum_{r=1}^{\min(i,j)} l_{ir} u_{rj} = a_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (18)$$

Este sistema possui  $n^2$  equações e  $n^2 + n$  incógnitas e por isso a decomposição  $LU$  não é única [4]. Dessa forma fixa-se 1 para os componentes da diagonal da matriz  $L$ , e (18) transforma-se num sistema determinado. Tem-se que

$$\begin{cases} u_{i,j} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, \quad i \leq j, \quad j = 1, \dots, n \\ l_{i,j} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}) / u_{jj}, \quad i > j, \quad j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (19)$$

Nota-se que não há necessidade de se calcular os elementos diagonais de  $L$ , porque foram fixados iguais a 1.

## B. Métodos Iterativos

Os métodos iterativos costumam ser mais econômicos, pois requerem um gasto computacional menor. Além disso, são capazes de se autocorrigirem, isto é, sua convergência independe da aproximação inicial.

Para resolver iterativamente um sistema linear da forma  $Ax = f$ , onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

primeiramente decompõe-se a matriz  $A$  de tal forma que

$$A = L + D + U, \quad (20)$$

em que  $L$  é a matriz triangular estritamente inferior,  $D$  é a matriz diagonal e  $U$  é a matriz triangular estritamente superior. A partir disso, a matriz  $A$  é decomposta na soma

$$A = M + N, \quad (21)$$

e escreve-se o sistema na forma  $Mx = f - Nx$ , em que  $M$  e  $N$  são matrizes compostas das matrizes  $L$ ,  $D$ , e  $U$ .

A matriz  $M$  é escolhida propositalmente de maneira que seja invertível facilitando a resolução do sistema. Por exemplo,  $M$  pode ser diagonal, triangular ou tridiagonal. O método iterativo, então, é definido por

$$Mx^{(k)} = f - Nx^{(k-1)}, \quad \text{com } k = 1, 2, \dots \quad (22)$$

sendo  $x^{(0)}$  uma aproximação inicial qualquer e  $k$  o número de iterações, e então  $x^{(k)}$  e  $x^{(k-1)}$  são vetores de  $n$  componentes avaliados na iteração  $k$  e na iteração anterior, respectivamente.

A seguir, são apresentadas as deduções de dois métodos iterativos essencialmente importantes na resolução dos sistemas lineares resultantes da discretização de equações diferenciais parciais elípticas.

1) *Método de Gauss-Seidel*: No método de Gauss-Seidel ocorre

$$M = L + D \quad \text{e} \quad N = U. \quad (23)$$

Isso permite escrever

$$Ax = f \Leftrightarrow (M + N)x = f \Leftrightarrow (L + D)x = f - Ux. \quad (24)$$

Portanto, escrito na forma matricial o método de Gauss-Seidel consiste em

$$Dx^{(k)} = f - Lx^{(k)} - Ux^{(k-1)}, \quad (25)$$

ou ainda,

$$(L + D)x^{(k)} = f - Ux^{(k-1)},$$

$$x^{(k)} = (L + D)^{-1}f - (L + D)^{-1}Ux^{(k-1)}. \quad (26)$$

E, conseqüentemente, na forma pontual pode ser escrito como

$$x_i^{(k)} = (f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}x_j^{(k-1)})/a_{i,i}, \quad (27)$$

com  $i = 1, 2, \dots, n$ .

2) *Successive Over-Relaxation - SOR*: À medida que progredem as iterações, uma característica dos métodos iterativos é que a diferença entre as sucessivas aproximações diminua, fazendo com que o método necessite de muitas iterações para alcançar uma boa solução.

Um modo de amenizar esse efeito é sobre-relaxar o valor de  $x^{(k+1)}$ , de tal forma que a solução numérica adequada seja aproximada mais rapidamente. A aplicação desse procedimento em métodos iterativos para solução de sistemas lineares são os chamados processos de relaxação.

Uma vez conhecida a fórmula pontual do método de Gauss-Seidel e também sua forma matricial, o método SOR pode ser definido por meio da iteração

$$x_{SOR}^{(k)} = x_{SOR}^{(k-1)} + \omega(x_{GS}^{(k)} - x_{SOR}^{(k-1)}), \quad (28)$$

em que  $x_{GS}$  é um vetor avaliado no método de Gauss-Seidel,  $x_{SOR}$  é o vetor avaliado no método SOR e  $\omega$  é conhecido por fator de relaxação. A equação acima pode ser reescrita da seguinte maneira

$$x_{SOR}^{(k)} = (1 - \omega)x_{SOR}^{(k-1)} + \omega x_{GS}^{(k)}. \quad (29)$$

Substituindo (27) em (29), obtém-se o método SOR na forma pontual

$$x_i^{(k)} = (1 - \omega)x_i^{(k-1)} + \omega(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}x_j^{(k-1)})/a_{i,i}. \quad (30)$$

Para obter a sua forma matricial, basta substituir (26) em (29)

$$x^{(k)} = (1 - \omega)x^{(k-1)} + \omega(f - Lx^{(k)} - Ux^{(k-1)})D^{-1},$$

$$x^{(k)} = (1 - \omega)x^{(k-1)} + \omega D^{-1}f - \omega D^{-1}Lx^{(k)} - \omega D^{-1}Ux^{(k-1)},$$

separando os termos de acordo com os níveis da iteração

$$(1 + \omega D^{-1}L)x^{(k)} = (1 - \omega - \omega D^{-1}U)x^{(k-1)} + \omega D^{-1}f, \quad (31)$$

multiplicando por  $D$ , segue que

$$(D + \omega L)x^{(k)} = (D - D\omega - \omega U)x^{(k-1)} + \omega f,$$

e portanto, a forma matricial do método SOR é dada por

$$x^{(k)} = (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D - \omega U]x^{(k-1)} + \omega(D + \omega L)^{-1}f. \quad (32)$$

Para convergência do método, é necessário  $0 < \omega < 2$ . Em particular,  $\omega = 1$  faz o método SOR retornar ao método de Gauss-Seidel. Quando  $0 < \omega < 1$ , aplica-se subrelaxação às incógnitas. Diferentemente, para  $1 < \omega < 2$ , aplica-se sobre-relaxação.

## V. RESULTADOS NUMÉRICOS

Considerando a seguinte equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2e^{x+y}, \quad (33)$$

definida em um quadrado de lado unitário, sua solução exata e condição de contorno do tipo Dirichlet em toda fronteira do domínio são dadas por  $u(x, y) = e^{x+y}$  [2].

O problema descrito acima é discretizado utilizando o método de diferenças finitas exponencial em quatro malhas: uma malha grossa  $5 \times 5$  com um espaçamento equivalente a  $h = 0.25$ , uma malha pouco mais refinada, intermediária grossa com  $h = 0.125$ , outra malha intermediária fina  $17 \times 17$  com um espaçamento equivalente a  $h = 0.0625$  e uma malha fina  $33 \times 33$ . O sistema linear resultante desta discretização será resolvido pelos métodos de Decomposição LU, Gauss-Seidel e SOR.

Sabendo que o desempenho do método SOR depende do fator de relaxação aplicado, foi realizada uma busca, no sentido de determinar um fator de relaxação que produzisse a menor quantidade de iterações possíveis, isto é, um  $\omega_{otimo}$  que otimizasse a resolução do sistema linear. Os resultados desta busca são observados na Tabela I.

Tabela I: RASTREAMENTO DO FATOR DE RELAXAÇÃO.

Malha	Fator	Iterações
Grossa	1.2	18
Intermediária Grossa	1.5	38
Intermediária Fina	1.7	74
Fina	1.8	156

É importante mencionar que a busca pelo fator de relaxação foi realizada com precisão de  $10^{-1}$  e obedeceu a um critério garantindo uma aproximação cujo erro fosse inferior a  $10^{-10}$  e um máximo de 2500 iterações. Analisando as Fig. 3 e 4, nota-se que neste caso em particular, o processo de sobre-relaxação foi mais adequado ao problema.

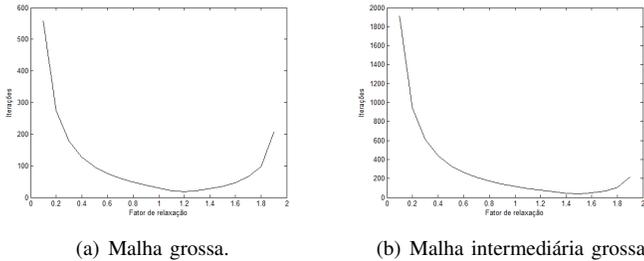


Figura 3: Comportamento do método SOR.

Tabela III: COMPARAÇÃO ENTRE O ERRO PRODUZIDO.

Malha	GS	SOR	LU
Grossa	1.8140e-05	1.8140e-05	1.8140e-05
Intermediária Grossa	1.1535e-06	1.1519e-06	1.1519e-06
Intermediária Fina	8.5815e-08	7.3184e-08	7.3178e-08
Fina	6.3508e-08	7.5683e-09	4.5729e-09

precisão das aproximações, no caso da malha mais grossa não houve muita diferença entre os resultados, enquanto que nas demais malhas, observa-se que o método SOR e LU apresentaram um desempenho semelhante.

A seguir estão dispostas nas Fig. 5 e 6 as representações da distribuição do erro numérico no domínio, para cada uma das malhas testadas. A ordem dos erros encontram-se entre  $10^{-6}$  e  $10^{-9}$ , garantindo ótimas aproximações. Além das representações do erro local, segue também a Fig. 7, com a distribuição da solução numérica no domínio.

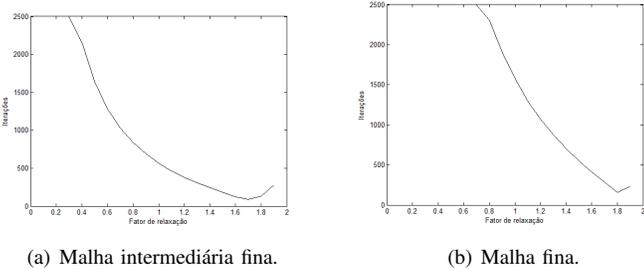


Figura 4: Comportamento do método SOR.

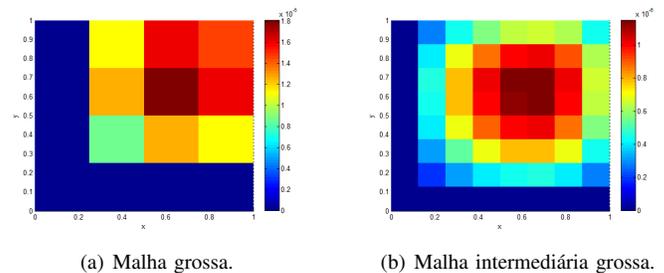


Figura 5: Distribuição do erro no domínio .

Agora, determinado o melhor fator de relaxação para o método SOR, é realizada uma análise entre os métodos SOR e Gauss Seidel, - representado por GS na Tabela II - dada através de uma comparação entre o número de iterações realizadas por cada um dos métodos iterativos.

Tabela II: QUANTIDADE DE ITERAÇÕES REALIZADAS.

Malha	GS	SOR
Grossa	30	18
Intermediária Grossa	115	38
Intermediária Fina	425	74
Fina	1574	156

Na Tabela III, consta os resultados da aplicação dos métodos diretos e iterativos na resolução dos sistemas lineares. O critério de comparação utilizado foi o erro máximo absoluto  $\|E\|_{\infty} = \max_{1 < i < N} |E_i|$ .

Observando a Tabela III, todos os métodos apresentaram bons resultados, mas comparando os métodos iterativos entre si, embora Gauss-Seidel seja satisfatório, o método SOR consegue aproximar a solução realizando um número muito inferior de iterações, principalmente à medida em que a malha vem sendo refinada. Analisando a

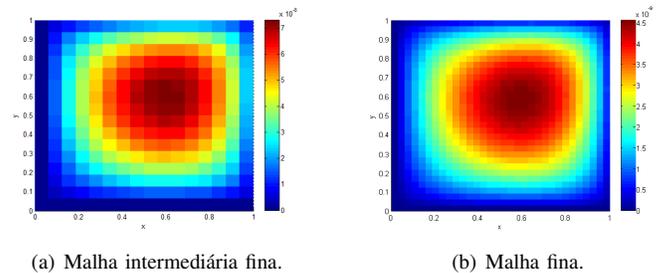


Figura 6: Distribuição do erro no domínio.

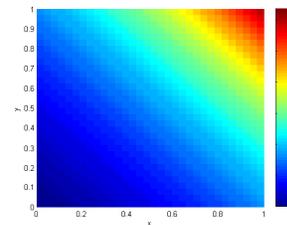


Figura 7: Solução numérica usando o método exponencial numa malha fina.

## VI. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi resolvida a equação de Poisson através do método de diferenças finitas exponencial em quatro refinamentos de malha. O método direto de Decomposição LU e os métodos iterativos de Gauss-Seidel e SOR foram testados para os sistemas lineares resultantes.

Os testes numéricos em diversas malhas evidenciam o efeito que o refinamento provoca na solução final, produzindo melhores resultados. Com relação à comparação entre os métodos de resolução de sistemas lineares, observa-se que o método SOR foi capaz de produzir resultados tão bons quanto os obtidos através do método direto LU, e portanto, considerando o fato de que os sistemas resolvidos são esparsos e que essa estrutura sugere a redução do gasto computacional produzido na simulação com métodos iterativos, pode-se afirmar que eles podem ser mais vantajosos que os diretos, uma vez que não há prejuízos na solução final.

## AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP pelo auxílio financeiro no desenvolvimento deste trabalho, processo nº 2016/08343-2.

## REFERÊNCIAS

- [1] J. A. Cuminato and M. Meneguette Jr. *Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [2] A. O. Fortuna, *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações*. São Paulo: EDUSP, 2012.
- [3] P. K. Pandey, *A higher accuracy exponential finite difference method for the numerical solution of second order elliptic partial differential equations*. Nova Delhi: Journal of Mathematical and Computational Science, 2013.
- [4] A. Quarteroni and F. Saleri, *Cálculo Científico com MATLAB e Octave*. Milano: Springer-Verlag Italia, 2006.