



**Simpósio de Métodos
Numéricos em Engenharia**

25 a 27 de outubro, 2017

Métodos multi-malhas aplicados à equação de Poisson bidimensional

Leticia Braga Berlandi, Analice Costacurta Brandi

Departamento de Matemática e Computação

Faculdade de Ciências e Tecnologia, UNESP

Presidente Prudente - SP, Brasil

leticiaberlandi@gmail.com, analice@fct.unesp.br

Resumo—O presente trabalho consiste em resolver a equação diferencial parcial elíptica de Poisson, onde a condição de contorno do tipo Dirichlet foi considerada para a obtenção da solução numérica do problema bidimensional, considerando um domínio quadrado. O objetivo deste trabalho é analisar a eficiência computacional de métodos multi-malhas (ou multigrid) quando aplicados à resolução de sistemas lineares provenientes do método de diferenças finitas. No processo de resolução da equação diferencial foram utilizados dois métodos iterativos, o esquema *Correction Scheme* (CS) e o esquema *Full Approximation Scheme* (FAS). Ambos os métodos foram implementados no software Matlab, onde os resultados obtidos foram comparados com a solução analítica conhecida na literatura. Dessa forma, foi realizada uma comparação dos métodos multigrid CS e FAS para verificar se os métodos numéricos utilizados foram eficientes para a solução desse tipo de problema.

Palavras-chave—Equação de Poisson; método de diferenças finitas; métodos multigrid; Matlab.

I. INTRODUÇÃO

Problemas de equilíbrio são aqueles em que o sistema permanece constante em relação ao tempo, também são conhecidos como problemas em regime permanente ou no estado estacionário e geralmente, dão origem a equações elípticas. As mais conhecidas dessas equações são as equações de Poisson e de Laplace, cujas aplicações são as mais variadas como, por exemplo, problemas de pressão, problemas em elasticidade, problemas de camada limite, problemas de vibração em membranas, problemas de difusão [2], dentre outras.

O avanço computacional nos últimos anos foi decisivo para

o destaque da simulação numérica no estudo desses problemas, aprimorando cada vez mais os métodos numéricos. A discretização de problemas elípticos utilizando o método de diferenças finitas resulta em um sistema de equações lineares que tem uma estrutura bastante peculiar. Em geral, a matriz desse sistema contém apenas alguns poucos elementos não nulos em cada linha, ou seja, é esparsa, exigindo métodos iterativos que se aproveitem dessa estrutura para resolvê-los mais rapidamente [9].

Outra particularidade dos sistemas lineares provenientes da discretização dessas equações é que são, em geral, muito grandes, pois o número de incógnitas é aproximadamente proporcional ao número de pontos da malha. Na simulação de problemas reais uma tal malha conteria ainda um número muito reduzido de pontos para uma boa representação dos fenômenos que se pretende simular, de forma que malhas mais finas são uma necessidade [1].

A grande dificuldade imposta pelo processo de preenchimento da matriz está em não saber, *a priori*, quais elementos serão modificados. Portanto, deve-se reservar o espaço necessário para armazenar toda a matriz na memória do computador, apesar da maior parte desse espaço ser preenchida com zeros. Os métodos iterativos não têm esse problema, pois requerem somente o resultado da multiplicação da matriz dos coeficientes por um vetor e , portanto, o padrão de zeros da matriz não sofre qualquer modificação ao longo do processo [4].

Este trabalho trata da aplicação de métodos de solução de sistemas de equações lineares para a solução de problemas elípticos, em especial para a equação de Poisson bidimensional, em que o método de diferenças finitas foi utilizado para aproximação da solução dessa equação. Além disso, a implementação do algoritmo foi realizada

através do software Matlab, em que uma análise do erro, comparações entre os métodos numéricos e a solução analítica, conhecidas na literatura, foram realizadas.

II. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

A equação de Poisson bidimensional é uma equação elíptica de segunda ordem dada por

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y). \quad (1)$$

O domínio de integração de uma equação elíptica bidimensional é sempre uma área limitada pela fronteira ΩR . As condições de contorno usualmente especificam os valores da função ou os valores de sua derivada normal ao longo do contorno ΩR , ou uma mistura de ambos, que são, respectivamente, as condições de Dirichlet (u é conhecida em ΩR), de Neumann ($\frac{\partial u}{\partial n}$ é conhecida em ΩR) e Robin ($\alpha u = \beta \frac{\partial u}{\partial n}$ conhecida em ΩR). Em particular, considera-se neste trabalho uma região quadrada $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$ com condição de contorno $u(x, y) = g(x, y)$ em ΩR .

III. FORMULAÇÃO NUMÉRICA

O problema em estudo é formulado por uma equação diferencial parcial do tipo estacionária e por condições auxiliares específicas. Considerando o fato de que nem sempre existe solução analítica, faz-se necessária a resolução do problema de modo numérico. Para tanto, o método de diferenças finitas é adotado para a discretização do domínio e das derivadas parciais.

O método numérico de diferenças finitas é usado como uma abordagem alternativa para obter a aproximação da solução de uma equação diferencial parcial. A ideia básica desse método é transformar a resolução de uma equação diferencial em um sistema de equações algébricas, substituindo as derivadas por diferenças [5].

O método de diferenças finitas é facilmente implementado computacionalmente, que consiste da discretização do domínio e na substituição das derivadas presentes na equação diferencial por aproximações utilizando apenas os valores numéricos da função, onde a ferramenta básica no cálculo das aproximações das derivadas é a fórmula de Taylor [6].

Conforme já foi dito, o método de diferenças finitas foi implementado através do software Matlab e a primeira etapa para resolução de qualquer método numérico envolvendo equações diferenciais parciais é discretizar a região onde se procura a solução. Para a discretização define-se uma malha, que é um conjunto finito de pontos pertencentes ao domínio, chamados nós da malha [2]. Considera-se a região quadrada R coberta por uma malha, conforme mostra a Fig. 1.

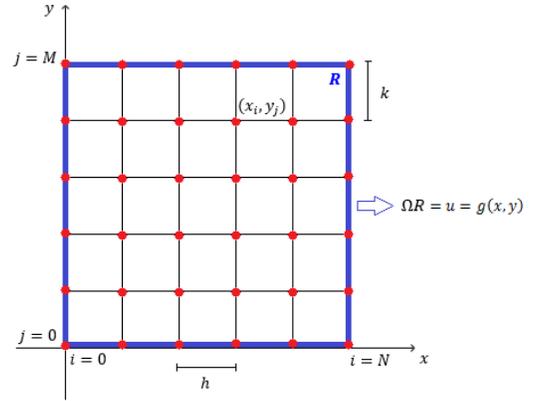


Figura 1: Malha de discretização.

Enfatiza-se aqui a importância da discretização correta da fronteira e a importância da escolha correta dos métodos de solução para o sistema linear resultante. A discretização de problemas elípticos sempre resulta em um sistema de equações lineares que tem uma estrutura bastante peculiar. Em geral, a matriz do sistema é grande e esparsa, tendo a necessidade de propor métodos iterativos que se utilizem dessa estrutura para resolvê-los mais rapidamente [9].

O sistema linear proveniente da discretização da equação de Poisson pelo método de diferenças finitas pode ser resolvido por métodos multigrid. Estes são os métodos iterativos mais eficientes conhecidos para se resolver sistemas de equações, onde a ideia básica está em usar um conjunto de malhas e executar alternativamente iterações em cada nível de malha para obter soluções aproximadas desta equação em malhas mais grossas [10].

O objetivo dos métodos multigrid é acelerar a convergência para reduzir o tempo da Unidade Central de Processamento (CPU) necessário para resolver sistemas de equações lineares, onde são realizadas iterações na malha mais fina e em cada nível de malha mais grossa são resolvidas apenas equações residuais [8]. Para isto, são usados operadores para transferir informações da malha fina para a malha imediatamente mais grossa (processo de restrição) e da malha grossa para a malha imediatamente mais fina (processo de prolongação). Considerando a sequência com que as diversas malhas são utilizadas no caso unidimensional, as Fig. 2 e 3 ilustram o ciclo V e W, respectivamente.

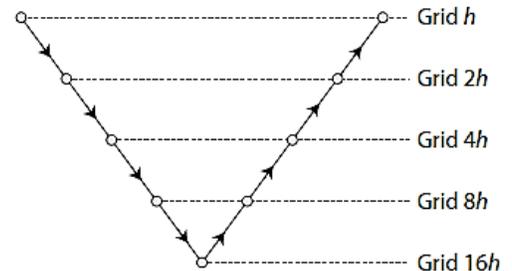


Figura 2: Ciclo V.

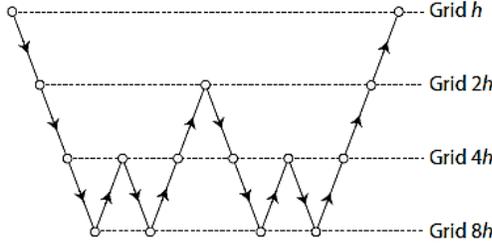


Figura 3: Ciclo W.

Assim como no caso unidimensional, o método multigrid utiliza-se de diversas malhas e ciclos para resolver a equação de Poisson bidimensional, conforme ilustra a Fig. 4.

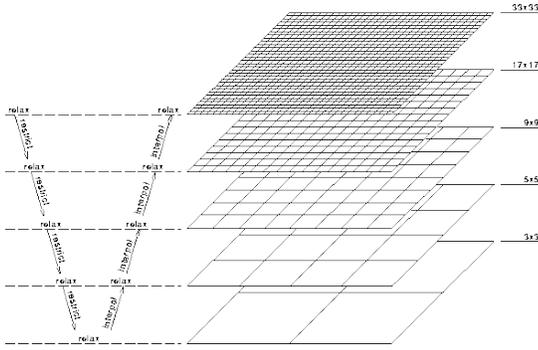


Figura 4: Processo de refinamento de malhas.

Os sistemas lineares que aparecem em cada malha são resolvidos através de métodos iterativos, os quais têm propriedades para reduzir os erros oscilatórios rapidamente. Sendo assim, neste trabalho são testados os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel, conforme são descritos adiante. Além disso, o esquema de correção CS e o esquema de aproximação total FAS foram estudados, implementados e utilizados no presente trabalho.

A. Modelo Discreto Bidimensional

Inicialmente, considera-se R uma região do plano e ΩR sua fronteira. Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ na equação

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = d\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad (2)$$

tem-se uma equação diferencial parcial (EDP) elíptica, para todo ponto (x, y) pertencente a região limitada do plano R .

Sabe-se que muitos problemas práticos são governados por (2), com $a = c = -1$ e $b = 0$. Fazendo $d = f(x, y)$, obtém-se a equação de Poisson, dada por (1).

A Equação (2) possui infinitas soluções pois, sendo linear e tendo como solução u e v , tem-se que $w = \alpha u + \beta v$ também é solução

dessa equação. Dessa forma, para que a solução seja única, deve-se especificar as condições de contorno com a qual se pretende trabalhar em um determinado problema.

O método das diferenças finitas consiste de substituir as derivadas parciais presentes na equação diferencial por aproximações por diferenças finitas. Para ilustrar este processo, considera-se a equação de Poisson com condição de contorno tipo Dirichlet dada por

$$\begin{cases} \nabla^2 u = -\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y) & \text{com } (x, y) \in R \\ u = g(x, y) & \text{com } (x, y) \in \Omega R \end{cases},$$

definida no retângulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ sobre a fronteira ΩR desse retângulo.

A discretização de uma equação estacionária nos fornece um sistema de equações que pode ser resolvido por meio de métodos diretos e iterativos. Para ilustrar como esta discretização é realizada na prática considera-se (1).

Primeiramente, para aproximar u_{xx} e u_{yy} por diferenças finitas cobre-se a região R com uma malha. Escolhe-se a opção mais óbvia que consiste em traçar linhas paralelas aos eixos coordenados. Os pontos dessa malha serão denotados por (x_i, y_j) , $x_i = ih$, $y_j = jk$, $i = 0, 1, \dots, N$, $j = 0, 1, \dots, M$, onde $h = \frac{a}{N}$ representa o espaçamento na direção x e $k = \frac{b}{M}$ representa o espaçamento na direção y . Denota-se por R_δ os pontos da malha interiores a R , isto é, $R_\delta = \{(x_i, y_j), 0 < i < N, 0 < j < M\}$, e por ΩR_δ os pontos da malha que estão sobre a fronteira, ou seja, $\Omega R_\delta = \{(x_i, y_j), (i = 0, N, 0 \leq j \leq M) \text{ e } (0 \leq i \leq N, j = 0, M)\}$.

Pode-se agora aproximar as derivadas de (1) da seguinte forma: Sabe-se que (1) é válida para todos os pontos de R , então em particular para um ponto genérico de R_δ pode-se escrever,

$$-[u_{xx}(x_i, y_j) + u_{yy}(x_i, y_j)] = f(x_i, y_j). \quad (3)$$

Assim, pode-se aproximar as derivadas por:

$$\begin{cases} u_{xx}(x_i, y_j) \cong \frac{u(x_i + h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j)}{h^2} \\ u_{yy}(x_i, y_j) \cong \frac{u(x_i, y_j + k) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j - k)}{k^2} \end{cases}. \quad (4)$$

Substituindo essas aproximações em (3), obtém-se:

e escrito na forma

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j \right).$$

Isso sugere definir um método iterativo da seguinte forma: suposto $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$ obtido no passo anterior, obtém-se $x^{k+1} = (x_1^{k+1}, \dots, x_n^{k+1})$ por

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^k \right). \quad (9)$$

No caso da fórmula de cinco pontos para o problema de Poisson com $h = k$, como a equação para cada ponto (i, j) é dada por

$$-u_{i,j-1} - u_{i,j+1} + 4u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} = h^2 f_{i,j},$$

o método de Jacobi é

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4} (u_{i,j-1}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i+1,j}^k + h^2 f_{i,j}). \quad (10)$$

No caso especial da equação de Laplace ($f(x, y) = 0$) com condição de fronteira de Dirichlet não-nula, o método de Jacobi é simplesmente a propriedade do valor médio discreta

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4} (u_{i,j-1}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i+1,j}^k). \quad (11)$$

Em outras palavras, calculados os valores de u em todos os pontos da malha na iteração anterior, o novo valor de u em um ponto interior da malha nesta iteração é calculado através da média dos seus quatro pontos vizinhos. Os valores iniciais de u nos pontos interiores da malha para a primeira iteração (isto é, o chute inicial) podem ser atribuídos arbitrariamente ou através de algum argumento razoável. Por exemplo, pode-se utilizar uma média ponderada dos valores de fronteira para o valor inicial em cada ponto interior da malha, de acordo com a posição do ponto em relação aos pontos das quatro fronteiras discretizadas.

Em forma matricial, o algoritmo de Jacobi pode ser descrito da seguinte forma: denotando por $D = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ a matriz diagonal cujas entradas são as entradas diagonais de A , tem-se que

$$x^{k+1} = D^{-1}[(D - A)x^k + b], \quad (12)$$

ou

$$x^{k+1} = D^{-1}(Cx^k + b), \quad (13)$$

onde $C = (D - A)$ é a matriz composta pelos elementos de A fora os elementos da diagonal principal.

C. Método de Gauss-Seidel

Um método iterativo que converge cerca de duas vezes mais rápido que o método de Jacobi é o método de Gauss-Seidel, onde os valores de x são atualizados dentro de cada iteração, sem esperar pela próxima. Em outras palavras, obtido o valor de x_j^{k+1} , este é usado no lugar de x_j^k no cálculo seguinte. No sistema $Ax = b$ em que $a_{ii} \neq 0$ para todo i , como antes isola-se cada x_i na i -ésima equação, agora escreve-se

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right).$$

Então define-se

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^k \right), \quad (14)$$

pois os valores $x_1^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}$ já foram computados nesta iteração, enquanto que os valores x_{i+1}^k, \dots, x_n^k são fornecidos pela iteração anterior.

Por exemplo, no caso da equação de Laplace, pode-se utilizar a fórmula

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4} (u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i,j+1}^k + u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^k), \quad (15)$$

assumindo que os pontos da malha são percorridos na ordem lexicográfica, de modo que quando calcula-se o valor de u no ponto i, j na iteração $k+1$, nesta mesma iteração já se calcula os valores de u em $i-1, j$ e em $i, j-1$, e se usa estes valores para calcular $u_{i,j}^{k+1}$ ao invés dos valores $u_{i,j-1}^k$ e $u_{i-1,j}^k$ obtidos na iteração anterior.

Em forma matricial, o algoritmo de Gauss-Seidel pode ser descrito da seguinte forma: dada uma matriz A , existe uma decomposição

$$A = L + D + U, \quad (16)$$

onde D é uma matriz diagonal, L é uma matriz estritamente triangular inferior e U é uma matriz estritamente triangular superior. Então o algoritmo de Gauss-Seidel é definido por

$$x^{k+1} = D^{-1}(b - Lx^{k+1} - Ux^k), \quad (17)$$

ou

$$(L + D)x^{k+1} = b - Ux^k,$$

ou ainda, pode ser escrito como

$$x^{k+1} = (L + D)^{-1}(b - Ux^k). \quad (18)$$

IV. RESULTADOS NUMÉRICOS

Considere a equação de Poisson bidimensional dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2[(1 - 6x^2)y^2(1 - y^2) + (1 - 6y^2)x^2(1 - x^2)], \quad (19)$$

pertencente ao domínio

$$R = \{(x, y) \in R^2 / 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1\},$$

cuja solução analítica é dada por

$$u(x, y) = (x^2 - x^4)(y^4 - y^2). \quad (20)$$

O problema descrito foi simulado para diferentes refinamentos de malha, onde as malhas utilizadas são regulares e se adota aqui, h para descrever o espaçamento. A princípio, inicia-se com uma malha mais grossa e, a partir de então, começa a refiná-la objetivando a analisar o comportamento da solução numérica do problema diante dessas modificações. Inicialmente considera-se uma malha grossa 5×5 ($h = 0,25$).

Ao refinar a malha pela primeira vez, obtém-se um espaçamento que equivale à metade do espaçamento anterior. Conseqüentemente, existem mais pontos discretos nos quais a função deve ser avaliada, pois trata-se de uma malha intermediária grossa 9×9 ($h = 0,125$).

Aplicando o método em uma malha intermediária fina, tomados 16 subintervalos nas direções x e y ($h = 0,0625$), obtém-se 289 pontos discretos. Isso significa que o sistema linear resultante possui 225 equações. Esse número também representa a dimensão da matriz dos coeficientes, que é pentadiagonal tratando-se do método de diferenças finitas de segunda ordem. Isso indica o quanto a matriz é esparsa, e por isso há a necessidade de resolvê-la por métodos iterativos, que aproveitem essa característica, reduzindo o gasto computacional.

Por fim, refinando a malha pela última vez, tem-se uma malha fina 33×33 ($h = 0,03125$), gerando um sistema demasiadamente grande e, ainda, espera-se gerar uma aproximação mais consistente.

Neste trabalho foi verificada a eficiência de métodos multigrid e, para tal verificação, foi realizada uma análise do erro máximo absoluto (E_{max}) cometido na solução do problema com diferentes espaçamentos, para duas e quatro malhas. E ainda, foi considerado o erro máximo menor ou igual a 10^{-6} . Sabe-se que E_{max} é dado por

$$E_{max} = \max_{1 \leq i, j \leq N-1} |u_{(i,j)} - U_{(i,j)}|, \quad (21)$$

onde $u_{(i,j)}$ representa a solução exata do problema, enquanto que $U_{(i,j)}$ a solução aproximada, de acordo com o método numérico utilizado.

A distribuição do (E_{max}) do esquema de correção CS pode ser observada na Tabela I.

Tabela I: Comparação do (E_{max}) cometido em diferentes espaçamentos pelo esquema CS.

Espaçamento ($h = k$)	Esquema de correção CS	
	2 malhas	4 malhas
0,25	0,0030	0,0030
0,125	7,6388e-04	7,6389e-04
0,0625	1,9672e-04	1,9673e-04
0,03125	4,9171e-05	4,9172e-05

Agora, observa-se através da Tabela II os valores do E_{max} cometido pelo esquema de aproximação total FAS em cada malha computacional utilizada

Tabela II: Comparação do (E_{max}) cometido em diferentes espaçamentos pelo esquema FAS.

Espaçamento ($h = k$)	Esquema de aproximação total FAS	
	2 malhas	4 malhas
0,25	0,0325	0,0030
0,125	0,1250	7,6388e-04
0,0625	0,4731	1,9673e-04
0,03125	1,7927	4,9177e-05

Uma síntese do E_{max} cometido pelos dois esquemas com o método multigrid, em quatro diferentes espaçamentos, é apresentada

nas tabelas I e II. Nota-se que o esquema de aproximação total FAS apresenta um erro maior que o esquema de correção CS, para todos os espaçamentos testados utilizando-se duas malhas. Isso decorre do fato de que não é muito efetivo usar somente dois níveis de malha [7], uma vez que para se obter um bom desempenho do método multigrid diversos níveis de malhas devem ser usados [3]. Portanto, o método CS se mostrou eficaz para o problema analisado. Já o método FAS mostrou-se não ser um esquema eficaz quando utilizou-se duas malhas na obtenção da solução numérica do problema.

V. CONCLUSÕES

O presente trabalho teve por objetivo estudar a equação de Poisson, em um domínio bidimensional. O método de diferenças finitas foi utilizado para aproximar as derivadas do problema aqui apresentado e, além disso, foram estudados os esquemas CS e FAS com o método multigrid. Estes foram utilizados no cálculo da solução aproximada do sistema linear obtido através da discretização da equação de Poisson, com condição de contorno do tipo Dirichlet.

Para a obtenção de soluções aproximadas, diferentes espaçamentos foram considerados e o esquema de correção CS se mostrou eficaz na solução da equação. Isso decorre do fato de que a solução numérica apresentou resultados bem próximos da solução analítica do problema, resultando em um erro que pode ser considerado desprezível. Além disso, pôde-se constatar que quanto maior o refinamento da malha, melhor a solução numérica do problema analisado.

A comparação dos erros cometidos com duas e quatro malhas foi realizada e verificou-se o comportamento dos métodos numéricos para ambos os casos. Porém, sob o ponto de vista de uma melhor aproximação, a solução obtida utilizando-se quatro malhas apresentou um desempenho superior quanto à utilização de duas malhas, pois o erro cometido ao se utilizar duas malhas foi maior do que o erro com quatro malhas.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro no desenvolvimento deste trabalho, processo nº 2016/25855 – 7.

REFERÊNCIAS

- [1] E. Kreyszig, *Advanced engineering mathematics*, 9th ed. Hoboken, United States: John Wiley & Sons, 2006.
- [2] J. A. Cuminato e M. Meneguette, *Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas*, 1. ed. Rio de Janeiro, Brasil: SBM, 2013.
- [3] J. C. Tannehill, D. A. Anderson and R. H. Pletcher, *Computational fluid mechanics and heat transfer*, 2nd ed. Washington, United States: Taylor & Francis, 1997.
- [4] J. Zhao, T. Zhang and R. M. Corless, Convergence of compact finite difference method, *Applied mathematics and computation*, vol 182, Issue 2, p. 1454-1469, 2006.
- [5] M. A. G. Ruggiero e V. L. R. Lopes, *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*, 2. ed. São Paulo, Brasil: Makron Books, 1996.
- [6] N. B. Franco, *Cálculo numérico*. São Paulo, Brasil: Pearson Prentice Hall, 2006.

- [7] P. J. Roache, *Fundamentals of computational fluid dynamics*. Socorro, United States: Hermosa Publishers, 1998.
- [8] P. Wesseling, *An Introduction to Multigrid Methods*. Chichester, England: John Wiley Sons Ltd., 1992.
- [9] R. L. Burden e J. D. Faires, *Análise numérica*. São Paulo, Brasil: Cengage Learning, 2008.
- [10] W. L. Briggs, V. E. Henson and S. F. McCormick, *A Multigrid Tutorial*, 2nd ed. Philadelphia, United States: SIAM, 2000.