



**Simpósio de Métodos  
Numéricos em Engenharia**

**25 a 27 de outubro, 2017**

# *Método de Potra-Pták adaptado a problemas não lineares de pórticos planos*

Luiz Antonio Farani de Souza  
Curso de Engenharia Civil, UTFPR  
Apucarana, Brasil  
lasouza@utfpr.edu.br

**Resumo**— Neste trabalho é desenvolvido um algoritmo para o método de Potra-Pták, com convergência de ordem cúbica, associado à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear. Análises estáticas de dois problemas de pórticos planos com não linearidade geométrica são realizadas com o software Matlab por meio do Método dos Elementos Finitos Corrotacional. As trajetórias de equilíbrio das estruturas são obtidas.

**Palavras-chave**— Pórtico Plano; Potra-Pták; Elementos Finitos Corrotacional; Comprimento de Arco Linear.

## I. INTRODUÇÃO

Um dos principais objetivos da Engenharia Estrutural é tornar os sistemas estruturais mais econômicos, por intermédio da redução do seu peso e do consumo de materiais, sem, contudo, diminuir a sua segurança e durabilidade. A metodologia de análise estática não linear tem como principal problema o traçado das trajetórias de equilíbrio (curva deslocamento *versus* força) de tais sistemas. Nesta pesquisa é desenvolvido um algoritmo para o método de Potra-Pták, com convergência de ordem cúbica, associado à técnica de Comprimento de Arco Linear, para a análise de pórticos planos com não linearidade geométrica. Na discretização das estruturas, emprega-se o Método dos Elementos Finitos Corrotacional descrito em [1]. Nesta aproximação, a estrutura por hipótese pode sofrer grandes deslocamentos e rotações, mas com pequenas deformações dos elementos. O comportamento constitutivo dos materiais é elástico linear. Simulações são realizadas em ambiente Matlab, cujos resultados numéricos evidenciam o melhor desempenho do código computacional

implementado, em comparação com as análises feitas com os métodos tradicionais de Newton-Raphson Padrão (NR) e Newton-Raphson Modificado (NRM).

## II. METODOLOGIA

A equação que governa o equilíbrio estático de um sistema estrutural pode ser descrita por [2]:

$$\mathbf{g}^{(k)} = \lambda^{(k)} \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}^{(k-1)}), \quad (1)$$

na qual  $\mathbf{F}_{int}$  é o vetor de forças internas avaliado em função do vetor de deslocamentos nodais  $\mathbf{u}$  na iteração (k-1), e  $\lambda^{(k)}$  é o parâmetro de força corrente responsável pelo escalonamento do vetor  $\mathbf{F}_r$ , sendo este um vetor de referência e de magnitude arbitrária. A metodologia para a solução de problemas estruturais não lineares deve ser capaz de traçar a trajetória de equilíbrio completa, identificando e passando por todos os pontos críticos. No método de Comprimento de Arco Linear, a trajetória de iteração é mantida sempre ortogonal à tangente inicial em cada passo. A expressão para o subincremento do parâmetro de força é dada por:

$$\delta\lambda^{(k)} = -\frac{\Delta\mathbf{u}^{(0)T} \delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{\Delta\mathbf{u}^{(0)T} \delta\mathbf{u}_r^{(k)}}, \quad (2)$$

na qual  $\delta\mathbf{u}_g^{(k)}$  é a parcela referente às forças residuais  $\mathbf{g}^{(k)}$ ,  $\delta\mathbf{u}_r^{(k)}$  são os deslocamentos residuais e  $\Delta\mathbf{u}^{(0)}$  é o incremento inicial dos deslocamentos nodais. O método de Potra-Pták, adaptado para o problema não linear estrutural, é descrito pelas seguintes equações:

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \mathbf{K}^{(k-1)-1} (\delta\lambda_1^{(k)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}^{(k-1)}), \quad (3)$$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \mathbf{K}^{(k-1)^{-1}} [\delta \lambda_2^{(k)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k)})]. \quad (4)$$

### III. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Os resultados numéricos de dois problemas de pórticos planos com comportamento não linear geométrico são apresentados nesta seção.

#### A. Pórtico de Lee

O exemplo numérico ilustrado na Fig. 1a, conhecido como Pórtico de Lee, é utilizado frequentemente por pesquisadores para validar a estratégia de solução não linear [3]. A estrutura apresenta as seguintes propriedades: módulo de elasticidade  $E = 7,0608 \times 10^3 \text{ kN/cm}^2$ ,  $A = 6,0 \text{ cm}^2$  e  $I = 2,0 \text{ cm}^4$ . A coluna é discretizada por dez elementos finitos de pórtico, enquanto a viga é discretizada por dois elementos à esquerda do ponto de aplicação da força concentrada  $P$  e oito à direita. Foram adotados para as simulações o incremento de força  $\Delta P = 2,0 \text{ kN}$  e a tolerância  $tol = 1,0 \times 10^{-5}$ . Considera-se que a ligação entre a coluna e a viga seja rígida. Pode ser observada na Fig. 1a a trajetória de equilíbrio (deslocamento vertical no nó 13 *versus* força  $P$ ) obtida com o método de Potra-Pták, havendo boa concordância com a curva obtida por [4]. Na Tabela I aparecem os seguintes resultados numéricos: número de passos de força ( $NP$ ), número de iterações acumuladas ( $k_i$ ) e tempo de processamento  $t$  (em segundos) obtidos com os métodos de Potra-Pták, NR e NRM.

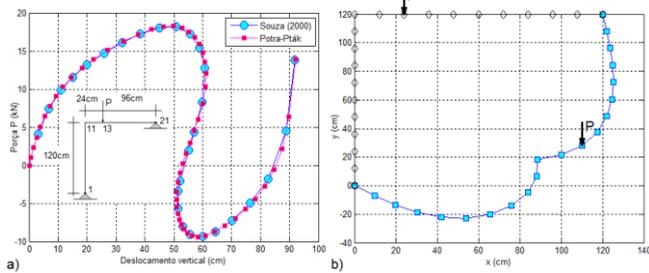


Figura 1. Pórtico de Lee: a) Trajetórias de equilíbrio; e b) Pórtico deformado.

TABELA I: - RESULTADOS NUMÉRICOS DO PÓRTICO DE LEE.

Método	NP	$k_i$	t (s)
NR	166	660	1,141405
NRM	3869	15643	10,724564
Potra-Pták	54	209	0,520740

#### B. Pórtico de sete andares

Considere o desenho esquemático da estrutura na Fig. 2a, que consiste de um pórtico de sete pavimentos com ligações viga-coluna rígidas. Para as vigas é adotado o perfil IPE400 ( $A = 8,446 \times 10^3 \text{ mm}^2$  e  $I = 2,313 \times 10^8 \text{ mm}^4$ ), e para as colunas os perfis IPB450 ( $A = 2,18 \times 10^4 \text{ mm}^2$  e  $I = 7,989 \times 10^8 \text{ mm}^4$ ) e IPB600 ( $A = 2,7 \times 10^4 \text{ mm}^2$  e  $I = 1,710 \times 10^9 \text{ mm}^4$ ). Na discretização das colunas e vigas foram usados, respectivamente, 112 e 56 elementos finitos de pórtico, totalizando 168 elementos e 163 nós (número total de graus de liberdade igual a 489). A relação constitutiva do material é descrita por um modelo elástico linear cujo módulo de

elasticidade longitudinal ( $E$ ) é igual a 205,0 GPa. Para as simulações, considera-se  $\Delta P = 500,0 \text{ kN}$  e  $tol = 10^{-5}$ . Na Fig. 2b aparece o pórtico deformado e na Fig. 2c aparecem as trajetórias de equilíbrio (deslocamento horizontal no nó 114 *versus* força  $P$ ) obtidas com o método de Potra-Pták e por [5]. Na Tabela II são apresentados os resultados numéricos ( $NP$ ,  $k_i$  e  $t$ ) obtidos com os métodos de Potra-Pták, NR e NRM.

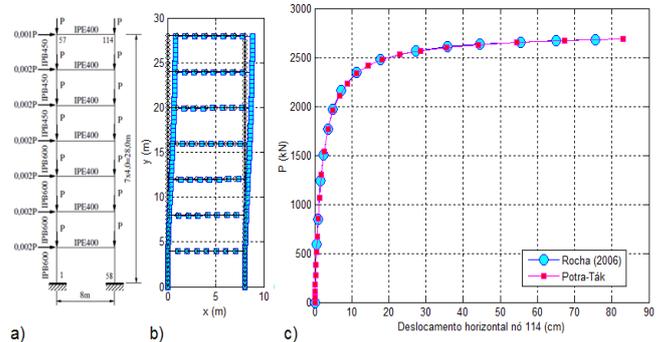


Figura 2. a) Modelo estrutural do pórtico de sete andares; b) Pórtico deformado; e c) Trajetórias de equilíbrio.

TABELA II: RESULTADOS NUMÉRICOS DO PÓRTICO DE SETE ANDARES.

Método	NP	$k_i$	t (s)
NR	32	71	1,660711
NRM	70	191	1,780077
Potra-Pták	25	50	1,505455

### IV. CONCLUSÃO

O código computacional desenvolvido com o método de Potra-Pták mostrou-se promissor, uma vez que as soluções aproximadas dos problemas de pórtico foram obtidas com um tempo de processamento menor, em comparação com os tempos obtidos das simulações com os métodos clássicos de NR e NRM.

### AGRADECIMENTOS

O autor agradece à UTFPR pelo apoio para o desenvolvimento desta pesquisa.

### REFERÊNCIAS

- [1] M. A. Crisfield, "Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures", vol 1. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 1991.
- [2] D. P. Maximiano, A. R. D. Silva and R. A. M. Silveira, "Iterative strategies associated with the normal flow technique on the nonlinear analysis of structural arches", Revista Escola de Minas (Impresso), vol. 67, pp. 143-150, 2014.
- [3] L. A. F. de Souza, "Método numérico para a solução não linear de pórtico plano com convergência de quarta ordem", Congresso Técnico Científico de Engenharia e da Agronomia - CONTECC 2017, Belém-Pa, 2017
- [4] R. M. Souza, "Force-based Finite Element for Large Displacement Inelastic Analysis of Frames". Tese (Doutorado), University of California, Berkeley, EUA, 2000.
- [5] P. A. S. Rocha, "Análise Inelástica de Segunda Ordem de Estruturas Metálicas com Ligações Semi-Rígidas", Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2006.