SMNE UFPR
Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia
25 a 27 de outubro, 2017

Dedução da Equação de Orr-Sommerfeld para um Fluido Viscoelástico do tipo Giesekus

Laison J. da S. Furlan
Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional
Universidade Estadual Paulista - UNESP
Presidente Prudente, Brasil
laisonfurlan@gmail.com
Analice Costacurta Brandi

***Resumo*—Neste trabalho são apresentadas as equações que modelam o escoamento de um fluido não-Newtoniano viscoelástico do tipo Giesekus, tanto na sua forma dimensional quanto na adimensional. Utilizando a Teoria de Estabilidade Linear é apresentada a dedução da equação de Orr-Sommerfeld para um fluido viscoelástico do tipo Giesekus, juntamente com as equações dos tensores presentes nessa equação.**

***Palavras-chave*—Teoria de Estabilidade Linear; Modelo Giesekus; Equação de Orr-Sommerfeld.**

I. Introdução

A dinâmica de fluidos computacional é uma área muito relevante no ramo industrial, principalmente nas áreas química, alimentícia, aeronáutica e petrolífera. Devido a essa relevância, há muitos problemas a serem investigados, entre eles, o de instabilidade em escoamentos de fluidos não-Newtonianos.

Há muitas aplicações científicas e industriais em que a estabilidade do escoamento laminar e a transição para a turbulência são relevantes. Portanto, é importante investigar a física da estabilidade e a transição laminar-turbulenta a fim de controlá-la, adiantá-la ou preveni-la.

Portanto, há um interesse em desenvolver métodos numéricos capazes de simular escoamentos de fluidos viscoelásticos, com baixo custo e resultados satisfatórios, a fim de prever o comportamento do escoamento de um fluido durante o processo industrial desejado (extração, injeção, etc).

Contudo, fazer essa simulação não é algo simples, devido a complexidade das equações que modelam o escoamento de um fluido viscoelástico, e também da dificuldade do tratamento em contornos computacionais, necessitando de um método eficiente que discretize o domínio para que seja possível o tratamento numérico.

É necessário buscar alternativas que facilitam o tratamento numérico do fenômeno que se deseja analisar em um escoamento. Neste trabalho é apresentado um estudo da estabilidade linear do escoamento de um fluido viscoelástico do tipo Giesekus, com a dedução da equação de Orr-Sommerfeld.

II. Formulação Matemática

Nesta seção são obtidas as equações governantes para fluidos não-Newtonianos, em escoamentos incompressíveis e isotérmicos. A equação constitutiva para o fluido não-Newtoniano considerada é o modelo Giesekus. Também é feita a dedução da equação de Orr-Sommerfeld para um fluido viscoelástico utilizando a Teoria de Estabilidade Linear.

Processo nº 2017/11068-6, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

A. Equações Governantes

As equações que modelam os escoamentos incompressíveis e isotérmicos são as equações de conservação de massa (continuidade) e de quantidade de movimento (equação do momento), que são dadas da seguinte forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

$$\rho\Big[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})\Big] = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \tag{2}$$

onde $\mathbf{u}$ é o vetor velocidade, t é o tempo, ρ é a densidade do fluido e $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor tensão total, definido por

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}, \tag{3}$$

em que p é a pressão, $\mathbf{I}$ é o tensor identidade e $\boldsymbol{\tau}$ o tensor simétrico das tensões, determinado a partir da equação constitutiva do fluido. No caso bidimensional, $\mathbf{u} = [u \quad v]^\top$ representa as componentes da velocidade nas direções x e y, respectivamente, e o tensor simétrico das tensões é definido por $\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau^{xx} & \tau^{xy} \\ \tau^{xy} & \tau^{yy} \end{bmatrix}$.

1) Modelo não-Newtoniano: Algumas características dos fluidos relacionadas as suas propriedades físicas servem para classificá-los como Newtonianos e não-Newtonianos. Essas características influenciam alguns fatores relevantes em um escoamento, como por exemplo, o fluxo do material, a taxa de deformação e etc.

Os fluidos não-Newtonianos não apresentam uma linearidade entre a taxa de deformação e a tensão de cisalhamento. O valor da viscosidade dinâmica não é constante, variando de acordo com a taxa de deformação aplicada. Sendo assim, no modelo de fluido não-Newtoniano de um fluido viscoelástico, o tensor das tensões é definido pela soma da contribuição Newtoniana (viscosa) e da contribuição não-Newtoniana (elástica) da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta_s \mathbf{D} + \mathbf{T}, \tag{4}$$

onde η_s é a viscosidade do solvente Newtoniano, $\mathbf{D}$ é o tensor taxa de deformação, dado por

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \tag{5}$$

$\mathbf{T}$ é o tensor extra-tensão (simétrico) que representa a contribuição não-Newtoniana (polimérica), na forma bidimensional

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix}.$$

O divergente do tensor tensão total (3) para um fluido não-Newtoniano é dado por

$$\begin{aligned}
\nabla\sigma &= \nabla(\tau - pI) = \nabla(2\eta_s D + T - pI) = 2\eta_s \nabla D + \nabla T - \nabla pI = \\
&= 2\eta_s \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} = \\
&= \eta_s \begin{bmatrix} 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} & \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \end{bmatrix} = \\
&= \eta_s \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} & \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo, em coordenadas cartesianas, as equações de conservação de massa (1) e de quantidade de movimento (2), para um fluido não-Newtoniano viscoelástico se tornam

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (uu)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] + \\
+ \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y},
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (uv)}{\partial x} + \frac{\partial (vv)}{\partial y}\right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_s\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right] + \\
+ \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{8}$$

B. Modelo Giesekus

A equação constitutiva do modelo Giesekus é escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{T} + \lambda \overset{\nabla}{\mathbf{T}} + \alpha \frac{\lambda}{\eta_p}(T.T) = 2\eta_p \mathbf{D}, \tag{9}$$

onde η_p é o coeficiente de viscosidade polimérica e λ é o tempo de relaxação do fluido. A constante α representa o parâmetro de mobilidade que regula o comportamento "shear thinning" (cisalhamento fino ou pseudoplasticidade) do fluido ($0 \leqslant \alpha \leqslant 1$), $T.T$ denota o produto tensorial, $\overset{\triangledown}{\mathbf{T}}$ é a derivada convectada dada por

$$\overset{\triangledown}{\mathbf{T}} = \frac{D\mathbf{T}}{Dt} - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T}, \tag{10}$$

em que $\dfrac{D\mathbf{T}}{Dt}$ é a derivada material de T, que pode ser descrita por

$$\frac{D\mathbf{T}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + u(\nabla T). \tag{11}$$

Reescrevendo (9) em coordenadas cartesianas bidimensionais utilizando (10), tem-se

$$T + \lambda \overset{\triangledown}{\mathbf{T}} + \alpha \frac{\lambda}{\eta_p}(T.T) = 2\eta_p D,$$

$$T + \lambda \left[\frac{DT}{Dt} - T(\nabla u)^T - (\nabla u) T \right] + \alpha \frac{\lambda}{\eta_p}(T.T) = 2\eta_p D,$$

$$T + \lambda \left[\frac{\partial T}{\partial t} + u(\nabla T) - T(\nabla u)^T - (\nabla u) T \right] + \alpha \frac{\lambda}{\eta_p}(T.T) = 2\eta_p D,$$

$$\begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix} + \lambda \left(\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix} + \right.$$

$$+ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} +$$

$$\left. - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix} \right) +$$

$$+ \alpha \frac{\lambda}{\eta_p} \left(\begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix} \right) =$$

$$= 2\eta_p \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Após algumas manipulações algébricas, são obtidas as equações dos tensores não-Newtonianos bidimensionais para o modelo Giesekus

$$T^{xx} + \lambda \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial (uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx}\frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy}\frac{\partial u}{\partial y} \right) +$$

$$+ \alpha \frac{\lambda}{\eta_p} \left(T^{xx^2} + T^{xy^2} \right) = 2\eta_p \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{12}$$

$$T^{xy} + \lambda \left(\frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial (uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (vT^{xy})}{\partial y} - T^{xx}\frac{\partial v}{\partial x} - T^{yy}\frac{\partial u}{\partial y} \right) +$$

$$+ \alpha \frac{\lambda}{\eta_p} \left(T^{xy}(T^{xx} + T^{yy}) \right) = \eta_p \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \tag{13}$$

$$T^{yy} + \lambda \left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial (uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial (vT^{yy})}{\partial y} - 2T^{xy}\frac{\partial v}{\partial x} - 2T^{yy}\frac{\partial v}{\partial y} \right) +$$

$$+ \alpha \frac{\lambda}{\eta_p} \left(T^{xy^2} + T^{yy^2} \right) = 2\eta_p \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{14}$$

III. ADIMENSIONALIZAÇÃO

Uma maneira comum de tratar um problema em dinâmica dos fluidos computacional é a utilização das equações que modelam esse problema de forma adimensional. Utilizando esse tratamento, surgem algumas constantes adimensionais conhecidas na literatura, como por exemplo, o número de Reynolds, Weissenberg, constante β e etc.

Para adimensionalização das equações governantes definem-se os parâmetros, tais como o comprimento L, a velocidade U e a densidade ρ_0 que neste caso pode ser o próprio ρ, pois o escoamento é incompressível.

Considerando as seguintes mudanças de variáveis

$$x^* = \frac{x}{L},\ u^* = \frac{u}{U},\ t^* = \frac{tU}{L},\ p^* = \frac{p}{\rho U^2},\ T^* = \frac{T}{\rho U^2}, \tag{15}$$

aparecem os números adimensionais,

- Número de Reynolds (*Re*): Representa a razão entre as forças inercias e as forças viscosas do escoamento e é definido por
$$Re = \frac{\rho U L}{\eta_0}, \tag{16}$$
onde η_0 é a viscosidade total do fluido, dada por $\eta_0 = \eta_s + \eta_p$, sendo que η_s é a viscosidade do solvente e η_p a viscosidade do polímero.
- Número de Weissenberg (*Wi*): Para um fluido viscoelástico, é a razão entre uma escala de tempo característica do fluido e uma escala de tempo do escoamento,
$$Wi = \frac{\lambda U}{L}. \tag{17}$$
- Constante β: A constante $\beta \in (0, 1)$ é uma quantidade que controla a contribuição do solvente Newtoniano, definida por
$$\beta = \frac{\eta_s}{\eta_0}. \tag{18}$$

As equações de Navier-Stokes e dos tensores não-Newtonianos são apresentadas na sua forma adimensional como deduzidas abaixo.

Para obter a equação da continuidade na forma adimensional, basta substituir as variáveis adimensionais e manipulá-las da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \Rightarrow \frac{\partial (Uu^*)}{\partial (Lx^*)}+\frac{\partial (Uv^*)}{\partial (Ly^*)}=0 \Rightarrow \overbrace{\frac{U}{L}}^{\neq 0}\left[\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right]=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{19}$$

Para obtenção da equação de quantidade de movimento na direção x, em sua forma adimensional, faz-se as seguintes manipulações:

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (uu)}{\partial x}+\frac{\partial (uv)}{\partial y}\right]=-\frac{\partial p}{\partial x}+\eta_s\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]+$$
$$+\frac{\partial T^{xx}}{\partial x}+\frac{\partial T^{xy}}{\partial y},$$

$$\Rightarrow \rho\left[\frac{\partial (Uu^*)}{\partial (\frac{L}{U}t^*)}+\frac{\partial (U^2u^*u^*)}{\partial (Lx^*)}+\frac{\partial (U^2u^*v^*)}{\partial (Ly^*)}\right]=-\frac{\partial (\rho U^2 p^*)}{\partial (Lx^*)}+$$
$$+\eta_s\left[\frac{\partial^2 (Uu^*)}{\partial (Lx^*)^2}+\frac{\partial^2 (Uu^*)}{\partial (Ly^*)^2}\right]+\frac{\partial (\rho U^2 T^*)^{xx}}{\partial (Lx^*)}+\frac{\partial (\rho U^2 T^*)^{xy}}{\partial (Ly^*)}.$$

Dividindo ambos os lados da equação pelo termo $\frac{\rho U^2}{L}$, tem-se:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*}+\frac{\partial (u^*u^*)}{\partial x^*}+\frac{\partial (u^*v^*)}{\partial y^*}=-\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\overbrace{\frac{\eta_s}{\rho UL}}^{\circledast}\left[\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right]+$$
$$+\frac{\partial T^{*xx}}{\partial x^*}+\frac{\partial T^{*xy}}{\partial y^*}.$$

Aplicando as seguintes manipulações ao termo $\circledast$

$$\frac{\eta_s}{\rho UL}=\frac{\eta_0-\eta_p}{\rho UL}=\frac{1}{Re}-\frac{\eta_p}{\rho UL}=\frac{1}{Re}-\frac{\eta_0-\eta_s}{\rho UL}=$$
$$=\frac{1}{Re}-\frac{1-\frac{\eta_s}{\eta_0}}{\frac{\rho UL}{\eta_0}}=\frac{1}{Re}-\frac{1-\beta}{Re}=\frac{\beta}{Re},$$

é obtida a equação de quantidade de movimento na direção x em sua forma adimensional (a notação do $*$ nas variáveis adimensionais foi omitida por questão de simplicidade, visto que as constantes adimensionais denotam que a equação esta em sua forma adimensional)

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (uu)}{\partial x}+\frac{\partial (uv)}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\beta}{Re}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]+$$
$$+\frac{\partial T^{xx}}{\partial x}+\frac{\partial T^{xy}}{\partial y}. \tag{20}$$

De forma análoga, é obtida a equação da quantidade de movimento na direção y em sua forma adimensional

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial (uv)}{\partial x}+\frac{\partial (vv)}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\beta}{Re}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]+$$
$$+\frac{\partial T^{xy}}{\partial x}+\frac{\partial T^{yy}}{\partial y}. \tag{21}$$

Para obter as equações dos tensores não-Newtonianos em sua forma adimensional, faz-se:

$$T^{xx}+\lambda\left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t}+\frac{\partial (uT^{xx})}{\partial x}+\frac{\partial (vT^{xx})}{\partial y}-2T^{xx}\frac{\partial u}{\partial x}-2T^{xy}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+$$
$$+\alpha\frac{\lambda}{\eta_p}\left(T^{xx^2}+T^{xy^2}\right)=2\eta_p\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\Rightarrow \rho U^2T^{*xx}+\frac{\lambda\rho U^3}{L}\left(\frac{\partial T^{*xx}}{\partial t^*}+\frac{\partial (u^*T^{*xx})}{\partial x^*}+\frac{\partial (v^*T^{*xx})}{\partial y^*}+\right.$$
$$\left.-2T^{*xx}\frac{\partial u^*}{\partial x^*}-2T^{*xy}\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)+\frac{\alpha\lambda}{\eta_p}\rho^2U^4\left(T^{*xx^2}+T^{*xy^2}\right)=$$
$$=2\frac{\eta_pU}{L}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Dividindo toda a equação pelo termo ρU^2, tem-se

$$T^{*xx}+\frac{\lambda U}{L}\left(\frac{\partial T^{*xx}}{\partial t^*}+\frac{\partial (u^*T^{*xx})}{\partial x^*}+\frac{\partial (v^*T^{*xx})}{\partial y^*}-2T^{*xx}\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\right.$$
$$\left.-2T^{*xy}\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)+\overbrace{\frac{\alpha\lambda\rho U^2}{\eta_p}}^{\circledast}\left(T^{*xx^2}+T^{*xy^2}\right)=2\frac{\eta_p}{\rho UL}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Considerando o termo $\circledast$, faz-se as seguinte manipulações:

$$\frac{\alpha\lambda\rho U^2}{\eta_p}=\frac{\alpha LWiU\rho}{\eta_p}=\frac{\alpha Wi(LU\rho)}{\eta_0-\eta_s}==\frac{\alpha Wi(LU\rho)\frac{1}{\eta_0}}{1-\frac{\eta_s}{\eta_0}}=\frac{\alpha WiRe}{1-\beta}.$$

Substituindo esta manipulação juntamente com as considerações utilizadas para as equações de Navier-Stokes, obtém-se a equação do tensor T^{xx}, em sua forma adimensional

$$T^{xx}+Wi\left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t}+\frac{\partial (uT^{xx})}{\partial x}+\frac{\partial (vT^{xx})}{\partial y}-2T^{xx}\frac{\partial u}{\partial x}+\right.$$
$$\left.-2T^{xy}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\alpha WiRe}{1-\beta}\left(T^{xx^2}+T^{xy^2}\right)=2\frac{(1-\beta)}{Re}\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{22}$$

Procedendo de forma análoga, são obtidas as equações, em sua forma adimensional, dos tensores não-Newtonianos T^{xy} e T^{yy}

$$T^{xy}+Wi\left(\frac{\partial T^{xy}}{\partial t}+\frac{\partial (uT^{xy})}{\partial x}+\frac{\partial (vT^{xy})}{\partial y}-T^{xx}\frac{\partial v}{\partial x}-T^{yy}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+$$
$$+\frac{\alpha WiRe}{1-\beta}\left(T^{xy}(T^{xx}+T^{yy})\right)=\frac{(1-\beta)}{Re}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{23}$$

$$T^{yy}+Wi\left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial t}+\frac{\partial (uT^{yy})}{\partial x}+\frac{\partial (vT^{yy})}{\partial y}-2T^{xy}\frac{\partial v}{\partial x}+\right.$$

$$-2T^{yy}\frac{\partial v}{\partial y}\bigg) + \frac{\alpha WiRe}{1-\beta}\left(T^{xy^2} + T^{yy^2}\right) = 2\frac{(1-\beta)}{Re}\frac{\partial v}{\partial y}. \quad (24)$$

As equações (19)–(24) modelam um escoamento incompressível, isotérmico e bidimensional, para um fluido viscoelástico utilizando o modelo Giesekus, para qualquer valor para o número de Reynolds.

IV. Teoria de Estabilidade Linear

Nesta seção é apresentada a análise de estabilidade linear para escoamentos de fluidos viscoelásticos, utilizando a equação constitutiva do tipo Giesekus. O objetivo é deduzir uma equação de Orr-Sommerfeld para um fluido viscoelástico do tipo Giesekus, e estudar sua solução numérica.

Assumindo que o escoamento principal é invariante na direção x, ou seja,

$$\begin{aligned} u &= U(y), \\ v &= 0, \\ p &= P(x,y), \\ T &= \hat{T}(y). \end{aligned}$$

Considerando que o escoamento instantâneo pode ser decomposto em um escoamento base e um escoamento perturbado, as variáveis dependentes podem ser decompostas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= U(y) + \tilde{u}(x,y,t), \\ v(x,y,t) &= \tilde{v}(x,y,t), \\ p(x,y,t) &= P(x,y) + \tilde{p}(x,y,t), \\ T(x,y,t) &= \hat{T}(y) + \widetilde{T}(x,y,t). \end{aligned} \quad (25)$$

Substituindo essas variáveis decompostas nas equações de Navier-Stokes e nas equações dos tensores não-Newtonianos, é obtido o sistema de equações para as perturbações

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v}\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\beta}{Re}\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2}\right) + \\ + \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial y}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{\beta}{Re}\left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2}\right) + \\ + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial y}, \quad (28)$$

$$\widetilde{T}^{xx} + Wi\left(\frac{\partial \widetilde{T}^{xx}}{\partial t} + U\frac{\partial \widetilde{T}^{xx}}{\partial x} + \tilde{v}\frac{\partial \hat{T}^{xx}}{\partial y} - 2\hat{T}^{xx}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \right. \\ \left. -2\hat{T}^{xy}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - 2\widetilde{T}^{xy}\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\alpha WiRe}{(1-\beta)}\left(2\hat{T}^{xx}\widetilde{T}^{xx} + \right. \\ \left. +2\hat{T}^{xy}\widetilde{T}^{xy}\right) = \frac{2(1-\beta)}{Re}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}, \quad (29)$$

$$\widetilde{T}^{xy} + Wi\left(\frac{\partial \widetilde{T}^{xy}}{\partial t} + U\frac{\partial \widetilde{T}^{xy}}{\partial x} + \tilde{v}\frac{\partial \hat{T}^{xy}}{\partial y} - \hat{T}^{xx}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \hat{T}^{yy}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \right. \\ \left. -\widetilde{T}^{yy}\frac{\partial U(y)}{\partial y}\right) + \frac{\alpha WiRe}{(1-\beta)}\left(\hat{T}^{xy}(\widetilde{T}^{xx} + \widetilde{T}^{yy}) + \right. \\ \left. +\widetilde{T}^{xy}(\hat{T}^{xx} + \hat{T}^{yy})\right) = \frac{(1-\beta)}{Re}\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}\right), \quad (30)$$

$$\widetilde{T}^{yy} + Wi\left(\frac{\partial \widetilde{T}^{yy}}{\partial t} + U\frac{\partial \widetilde{T}^{yy}}{\partial x} + \tilde{v}\frac{\partial \hat{T}^{yy}}{\partial y} - 2\hat{T}^{xy}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - 2\hat{T}^{yy}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}\right) + \\ + \frac{\alpha WiRe}{(1-\beta)}\left(2\hat{T}^{xy}\widetilde{T}^{xy} + 2\hat{T}^{yy}\widetilde{T}^{yy}\right) = \frac{2(1-\beta)}{Re}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}. \quad (31)$$

Por hipótese, o escoamento principal (base) é solução das equações de Navier-Stokes, então as perturbações também devem satisfazer esse sistema de equações. Assumi-se também, que as amplitudes das perturbações são pequenas, fazendo com que os termos não lineares possam ser desprezados.

Como as equações resultantes são lineares e os seus coeficientes não dependem de x e t, então, pode-se buscar soluções utilizando algum método para este tipo de equação, como por exemplo, o método da separação das variáveis, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x,y,t) &= \frac{1}{2}[\overline{u}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + \overbrace{\overline{u}(y)e^{i(\omega t - \alpha x)}}^{cc}], \\ \tilde{v}(x,y,t) &= \frac{1}{2}[\overline{v}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + \overline{v}(y)e^{i(\omega t - \alpha x)}], \\ \tilde{p}(x,y,t) &= \frac{1}{2}[\overline{p}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + \overline{p}(y)e^{i(\omega t - \alpha x)}], \\ \widetilde{T}(x,y,t) &= \frac{1}{2}[\overline{T}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + \overline{T}(y)e^{i(\omega t - \alpha x)}], \end{aligned} \quad (32)$$

sendo $i = \sqrt{-1}$, cc o complexo conjugado da variável em questão. Estas equações indicam que as perturbações se propagam como ondas com frequência ω, comprimento de onda $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$, velocidade de onda

$c = \frac{\omega}{\alpha}$ e amplitudes $\overline{u}, \overline{v}, \overline{p}$ e $\overline{T}$.

Somar um número complexo com o seu complexo conjugado, é o mesmo que procurar o valor da variável em questão apenas no domínio real. Na prática, resolve-se as equações perturbadas complexas, para encontrar o valor de α, ω e $\overline{u}$, por isso, o complexo conjugado (cc) é desprezado ao efetuar as substituições das variáveis nas equações perturbadas.

Substituindo essas variáveis nas equações de Navier-Stokes perturbadas, é obtido o sistema das equações de Navier-Stokes em função das autofunções $\overline{u}, \overline{v}, \overline{p}$ e $\overline{T}$

$$i\alpha\overline{u}(y) + \frac{d\overline{v}(y)}{dy} = 0, \tag{33}$$

$$i\alpha(U-c)\overline{u} + \overline{v}\frac{dU}{dy} + i\alpha\overline{p} - i\alpha\overline{T}^{xx} - \frac{d\overline{T}^{xy}}{dy} = \\ = \frac{\beta}{Re}\left(\frac{d^2\overline{u}}{dy^2} - \alpha^2\overline{u}\right), \tag{34}$$

$$i\alpha(U-c)\overline{v} + \frac{d\overline{p}}{dy} - i\alpha\overline{T}^{xy} - \frac{d\overline{T}^{yy}}{dy} = \frac{\beta}{Re}\left(\frac{d^2\overline{v}}{dy^2} - \alpha^2\overline{v}\right). \tag{35}$$

Derivando (34) em relação a y, tem-se

$$i\alpha(U-c)\frac{d\overline{u}}{dy} + i\alpha\overline{u}\frac{dU}{dy} + \frac{d\overline{v}}{dy}\frac{dU}{y} + \overline{v}\frac{d^2U}{dy^2} + i\alpha\frac{d\overline{p}}{dy} - i\alpha\frac{d\overline{T}^{xx}}{dy} + \\ - \frac{d^2\overline{T}^{xy}}{dy^2} = \frac{\beta}{Re}\left(\frac{d^3\overline{u}}{dy^3} - \alpha^2\frac{d\overline{u}}{dy}\right). \tag{36}$$

Multiplicando (35) pela constante $i\alpha$, obtém-se

$$-\alpha^2(U-c)\frac{d\overline{v}}{dy} + i\alpha\frac{d\overline{p}}{dy} + \alpha^2\overline{T}^{xy} - i\alpha\frac{d\overline{T}^{yy}}{dy} = \\ \frac{\beta}{Re}\left(i\alpha\frac{d^2\overline{v}}{dy^2} + i\alpha^3\overline{v}\right). \tag{37}$$

Fazendo $36 - 37$, tem-se

$$i\alpha(U-c)\frac{d\overline{u}}{dy} + i\alpha\overline{u}\frac{dU}{dy} + \alpha^2(U-c)\frac{d\overline{v}}{dy} + \frac{d\overline{v}}{dy}\frac{dU}{dy} + \\ + \overline{v}\frac{d^2U}{dy^2} + i\alpha\left(\frac{d\overline{T}^{yy}}{dy} - \frac{d\overline{T}^{xx}}{dy}\right) - \alpha^2\overline{T}^{xy} - \frac{d^2\overline{T}^{xy}}{dy^2} = \\ = \frac{\beta}{Re}\left(\frac{d^3\overline{u}}{dy^3} - \alpha^2\frac{d\overline{u}}{dy} - i\alpha\frac{d^2\overline{v}}{dy^2} + i\alpha^3\overline{v}\right).$$

Usando a equação da continuidade, que fornece o resultado $\overline{u} = \dfrac{i}{\alpha}\dfrac{d\overline{v}}{dy}$, tem-se

$$i\alpha(U-c)\frac{d}{dy}\left(\frac{i}{\alpha}\frac{d\overline{v}}{dy}\right) + i\alpha\frac{i}{\alpha}\frac{d\overline{v}}{dy}\frac{dU}{dy} + \alpha^2(U-c)\frac{d\overline{v}}{dy} + \\ + \frac{d\overline{v}}{dy}\frac{dU}{dy} + \overline{v}\frac{d^2U}{dy^2} + i\alpha\left(\frac{d\overline{T}^{yy}}{dy} - \frac{d\overline{T}^{xx}}{dy}\right) - \alpha^2\overline{T}^{xy} - \frac{d^2\overline{T}^{xy}}{dy^2} = \\ = \frac{\beta}{Re}\left(\frac{d^3}{dy^3}\left(\frac{i}{\alpha}\frac{d\overline{v}}{dy}\right) - \alpha^2\frac{d}{dy}\left(\frac{i}{\alpha}\frac{d\overline{v}}{dy}\right) - i\alpha\frac{d^2\overline{v}}{dy^2} + i\alpha^3\overline{v}\right).$$

Simplificando os termos após algumas manipulações, tem-se

$$-(U-c)\frac{d^2\overline{v}}{dy^2} + \alpha^2(U-c)\frac{d\overline{v}}{dy} + \overline{v}\frac{d^2U}{dy^2} + i\alpha\left(\frac{d\overline{T}^{yy}}{dy} - \frac{d\overline{T}^{xx}}{dy}\right) + \\ -\alpha^2\overline{T}^{xy} - \frac{d^2\overline{T}^{xy}}{dy^2} = \frac{\beta}{Re}\left(\frac{i}{\alpha}\frac{d^4\overline{v}}{dy^4} - 2i\alpha\frac{d^2\overline{v}}{dy^2} + i\alpha^3\overline{v}\right).$$

Multiplicando por α, é obtida a seguinte equação diferencial ordinária

$$-\alpha(U-c)\frac{d^2\overline{v}}{dy^2} + \alpha^3(U-c)\frac{d\overline{v}}{dy} + \alpha\overline{v}\frac{d^2U}{dy^2} + i\alpha^2\left(\frac{d\overline{T}^{yy}}{dy} - \frac{d\overline{T}^{xx}}{dy}\right) + \\ -\alpha^3\overline{T}^{xy} - \alpha\frac{d^2\overline{T}^{xy}}{dy^2} = \frac{\beta}{Re}\left(i\frac{d^4\overline{v}}{dy^4} - 2i\alpha^2\frac{d^2\overline{v}}{dy^2} + i\alpha^4\overline{v}\right).$$

Logo, a equação de Orr-Sommerfeld para um fluido viscoelástico do tipo Giesekus, é dada por

$$\alpha(U-c)\left(\alpha^2\frac{d\overline{v}}{dy} - \frac{d^2\overline{v}}{dy^2}\right) + \alpha\overline{v}\frac{d^2U}{dy^2} + i\alpha^2\left(\frac{d\overline{T}^{yy}}{dy} - \frac{d\overline{T}^{xx}}{dy}\right) + \\ -\alpha^3\overline{T}^{xy} - \alpha\frac{d^2\overline{T}^{xy}}{dy^2} = \frac{i\beta}{Re}\left(\frac{d^4\overline{v}}{dy^4} - 2\alpha^2\frac{d^2\overline{v}}{dy^2} + i\alpha^4\overline{v}\right). \tag{38}$$

Como o modelo viscoelástico considerado é o Giesekus, então, as equações dos tensores presentes na equação de Orr-Sommerfeld são

$$\overline{T}^{xx} + Wi\left(-i\omega\overline{T}^{xx} + i\alpha U\overline{T}^{xx} + \overline{v}\frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} - 2i\alpha\overline{u}\hat{T}^{xx} + \right. \\ \left. -2\hat{T}^{xy}\frac{d\overline{u}}{dy} - 2\overline{T}^{xy}\frac{dU}{dy}\right) + \frac{2\alpha WiRe}{(1-\beta)}\left(\hat{T}^{xx}\overline{T}^{xx} + \hat{T}^{xy}\overline{T}^{xy}\right) =$$

$$= \frac{2(1-\beta)}{Re} i\alpha\overline{u}, \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
&\overline{T}^{xy} + Wi\Bigg(-i\omega\overline{T}^{xy} + i\alpha U\overline{T}^{xy} + \overline{v}\frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} - i\alpha\overline{v}\hat{T}^{xx} - \hat{T}^{yy}\frac{d\overline{u}}{dy} + \\
&-\overline{T}^{yy}\frac{dU}{dy}\Bigg) + \frac{\alpha WiRe}{(1-\beta)}\Big(\hat{T}^{xy}(\overline{T}^{xx}+\overline{T}^{yy}) + \overline{T}^{xy}(\hat{T}^{xx}+\hat{T}^{yy})\Big) = \\
&= \frac{(1-\beta)}{Re}\left(i\alpha\overline{v} + \frac{d\overline{u}}{dy}\right),
\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
&\overline{T}^{yy} + Wi\left(-i\omega\overline{T}^{yy} + i\alpha U\overline{T}^{yy} + \overline{v}\frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} - 2i\alpha\overline{v}\hat{T}^{xy} - 2\hat{T}^{yy}\frac{d\overline{v}}{dy}\right) + \\
&+ \frac{2\alpha WiRe}{(1-\beta)}\Big(\hat{T}^{xy}\overline{T}^{xy} + \hat{T}^{yy}\overline{T}^{yy}\Big) = \frac{2(1-\beta)}{Re}\frac{d\overline{v}}{dy},
\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d\overline{T}^{xx}}{dy} + Wi\Bigg((i\alpha U - i\omega)\frac{d\overline{T}^{xx}}{dy} + \left(i\alpha\overline{T}^{xx} - 2\frac{d\overline{T}^{xy}}{dy}\right)\frac{dU}{dy} + + \\
&+ \left(\frac{d\overline{v}}{dy} - 2i\alpha\overline{u}\right)\frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} - \left(2i\alpha\hat{T}^{xx} + 2\frac{d\hat{T}^{xy}}{dy}\right)\frac{d\overline{u}}{dy} + \overline{T}\frac{d^2\hat{T}^{xx}}{dy^2} + \\
&-2\overline{u}\frac{d^2\hat{T}^{xy}}{dy^2} - 2\overline{T}^{xy}\frac{d^2U}{dy^2}\Bigg) + \frac{2\alpha WiRe}{(1-\beta)}\Bigg(\hat{T}^{xx}\frac{d\overline{T}^{xx}}{dy} + \overline{T}^{xx}\frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} + \\
&+\hat{T}^{xy}\frac{d\overline{T}^{xy}}{dy} + \overline{T}^{xy}\frac{d\hat{T}^{xy}}{dy}\Bigg) = \frac{2(1-\beta)}{Re} i\alpha\frac{d\overline{u}}{dy},
\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d\overline{T}^{yy}}{dy} + Wi\Bigg((i\alpha U - i\omega)\frac{d\overline{T}^{yy}}{dy} - \frac{d\overline{v}}{dy}\left(\frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} + 2i\alpha\hat{T}^{xy}\right) + \\
&+\overline{v}\left(\frac{d^2\hat{T}^{yy}}{dy^2} - 2i\alpha\frac{d\hat{T}^{xy}}{dy^2}\right) + i\alpha\overline{T}^{yy}\frac{dU}{dy} - 2\hat{T}^{yy}\frac{d^2\overline{v}}{dy^2}\Bigg) + \\
&+\frac{2\alpha WiRe}{(1-\beta)}\left(\hat{T}^{xy}\frac{d\overline{T}^{xy}}{dy} + \overline{T}^{xy}\frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} + \hat{T}^{yy}\frac{d\overline{T}^{yy}}{dy} + \overline{T}^{yy}\frac{d\hat{T}^{yy}}{dy}\right) = \\
&= \frac{2(1-\beta)}{Re}\frac{d^2\overline{v}}{dy^2},
\end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\overline{T}^{xy}}{dy^2} + Wi\Bigg((i\alpha U - i\omega)\frac{d^2\overline{T}^{xy}}{dy^2} + i\alpha\frac{d\overline{T}^{xy}}{dy}\frac{dU}{dy} + \Bigg(\frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} + \\
&-i\alpha\hat{T}^{xx}\Bigg)\frac{d^2\overline{v}}{dy^2} + 2\left(\frac{d^2\hat{T}^{xy}}{dy^2} - i\alpha\frac{d\hat{T}^{xx}}{dy}\right)\frac{d\overline{v}}{dy} + \overline{v}\Bigg(\frac{d^3\hat{T}^{xy}}{dy^3} + \\
&-i\alpha\frac{d^2\hat{T}^{xy}}{dy^2}\Bigg) - \frac{d^2\hat{T}^{yy}}{dy^2}\frac{d\overline{u}}{dy} - 2\frac{d\hat{T}^{yy}}{dy}\frac{d^2\overline{u}}{dy^2} - \hat{T}^{yy}\frac{d^3\overline{u}}{dy^3} - \frac{d\overline{T}^{yy}}{dy}\frac{d^2U}{dy^2} + \\
&-\overline{T}^{yy}\frac{d^3U}{dy^3}\Bigg) + \frac{\alpha WiRe}{(1-\beta)}\Bigg(\frac{d\hat{T}^{xy}}{dy}\left(\frac{d\overline{T}^{xx}}{dy} + \frac{d\overline{T}^{yy}}{dy}\right) + \Big(\overline{T}^{xx} + \\
&+\overline{T}^{yy}\Big)\frac{d^2\hat{T}^{xy}}{dy^2} + \left(\frac{d\overline{T}^{xx}}{dy} + \frac{d\overline{T}^{yy}}{dy}\right)\frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} + \Bigg(\frac{d^2\overline{T}^{xx}}{dy^2} + \\
&+\frac{d^2\overline{T}^{yy}}{dy^2}\Bigg)\hat{T}^{xy} + \Big(\hat{T}^{xx} + \hat{T}^{yy}\Big)\frac{d^2\overline{T}^{xy}}{dy^2} + 2\left(\frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} + \frac{d\hat{T}^{yy}}{dy}\right)\frac{d\overline{T}^{xy}}{dy} + \\
&+\overline{T}^{xy}\left(\frac{d^2\hat{T}^{xx}}{dy^2} + \frac{d^2\hat{T}^{yy}}{dy^2}\right)\Bigg) = \frac{(1-\beta)}{Re}\left(i\alpha\frac{d^2\overline{v}}{dy^2} + \frac{d^3\overline{u}}{dy^3}\right).
\end{aligned} \tag{44}$$

V. Escoamento Base

Para calcular o escoamento base do canal, assume-se que todas as variáveis são dependentes apenas do eixo y, exceto para a pressão cujo gradiente é constante na direção x. O domínio na direção y é compreendido entre $[-1, 1]$.

Olhando para a equação da continuidade, é obtido que a componente v do vetor velocidade é nula. De fato,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v(x,y,t) \equiv \text{constante}, \tag{45}$$

como $v_{parede} = 0$ então $v(x,y,t) \equiv 0$.

Escrevendo as hipóteses impostas sobre o escoamento, tem-se

$$\Bigg(\frac{\partial}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} = 0; \quad \nabla p = \text{constante}; \quad v = 0; \quad u = u(y); \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}(y)\Bigg)$$

Dadas as equações adimensionalizadas para o modelo de fluido viscoelástico do tipo Giesekus, tem-se o seguinte sistema:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (uu)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\beta}{Re}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (uv)}{\partial x} + \frac{\partial (vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\beta}{Re}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right] + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y},$$

$$T^{xx}+Wi\left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t}+\frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x}+\frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y}-2T^{xx}\frac{\partial u}{\partial x}-2T^{xy}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+$$
$$+\frac{\alpha WiRe}{(1-\beta)}\left(T^{xx^2}+T^{xy^2}\right)=2\frac{(1-\beta)}{Re}\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$T^{xy}+Wi\left(\frac{\partial T^{xy}}{\partial t}+\frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y}-T^{xx}\frac{\partial v}{\partial x}-T^{yy}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+$$
$$+\frac{\alpha WiRe}{(1-\beta)}\left(T^{xy}(T^{xx}+T^{yy})\right)=\frac{(1-\beta)}{Re}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$T^{yy}+Wi\left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial t}+\frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x}+\frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y}-2T^{xy}\frac{\partial v}{\partial x}-2T^{yy}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+$$
$$+\frac{\alpha WiRe}{(1-\beta)}\left(T^{xy^2}+T^{yy^2}\right)=2\frac{(1-\beta)}{Re}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Aplicando no sistema as hipóteses impostas, é obtido um novo sistema de equações simplificadas que descrevem o escoamento do fluido viscoeslástico para o modelo Giesekus, da seguinte forma:

$$-p_x+\frac{\beta}{Re}\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{dT^{xy}}{dy}=0, \tag{46}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{dT^{yy}}{dy}=0, \tag{47}$$

$$T^{xx}=2WiT^{xy}\frac{du}{dy}-\frac{\alpha WiRe}{(1-\beta)}\left(T^{xx^2}+T^{xy^2}\right), \tag{48}$$

$$T^{xy}=WiT^{yy}\frac{du}{dy}-\frac{\alpha WiRe}{(1-\beta)}\left(T^{xy}(T^{xx}+T^{yy})\right)+ + \frac{(1-\beta)}{Re}\frac{du}{dy}, \tag{49}$$

$$T^{yy}=-\frac{\alpha WiRe}{(1-\beta)}\left(T^{xy^2}+T^{yy^2}\right). \tag{50}$$

VI. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Neste trabalho foi aprensentada as equações que modelam escomentos incompressíveis, isotérmicos, bidimensional, para um fluido não-Newtoniano viscoelástico, utilizando a equação constitutiva do modelo Giesekus. Também foram apresentadas as equações que modelam escoamentos para um fluido não-Newtoniano viscoelástico em sua forma adimensional.

Seguindo a teoria de estabilidade linear, foi apresentada a dedução da equação de Orr-Sommerfeld para um fluido viscoelástico do tipo Giesekus, e as equações dos tensores presentes nesta equação.

E por fim, foram substituídas as hipóteses sobre o escoamento nas equações de Navier-Stokes e dos tensores, afim de obter um sistema simplificado de equações, para que seja possível a obtenção da solução analítica para o escoamento base. Esse tipo de resultado é importante pois, faz com que o tratamento numérico seja feito apenas no escoamento perturbado, facilitando assim, a análise e propagação das perturbações, fornecendo resultados que mostram a estabilidade linear do escoamento para esse tipo de fluido não-Newtoniano.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pelo apoio financeiro no desenvolvimento deste trabalho, processo nº 2017/11068-6.

REFERÊNCIAS

[1] Gervazoni, Ellen S. *Análise de Estabilidade Linear de Escoamentos Bidimensionais do Fluido Oldroyd-B*. 2016. p 21-39. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) - Faculdade de Ciências e Tecnologia, UNESP - Univ Estadual Paulista, 2016.

[2] Giesekus, H. A Simple Constitutive Equation for Polymer Fluids Based on the Concept of Deformation-Dependent Tensorial Mobility. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Amsterdam, 1982. p 69-109.

[3] M. T. Mendonça; M. A. F. de Medeiros. *Instabilidade Hidrodinâmica e transição para turbulência com aplicações em engenharia e meteorologia*. ENCIT,2002.

[4] Pontes, J. R. M; Mangiavacchi, N. *Fenômenos de Transferência com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia*. Apostila UFRJ, Rio de Janeiro, vol. 1. 2015.