



**Simpósio de Métodos  
Numéricos em Engenharia**

**25 a 27 de outubro, 2017**

## *Esquema explícito de terceira ordem via método dos elementos de conservação espaço-temporal para solução das equações de águas rasas*

Adriano Rodrigues de Melo  
Instituto Federal Catarinense - IFC  
Araquari-SC, Brasil

Rodovia BR 280, km 27, adriano.melo@ifc.edu.br

Liliana Madalena Gramani, Eloy Kaviski  
Universidade Federal do Paraná - UFPR  
Curitiba-PR, Brasil

Centro Politécnico, l.gramani@gmail.com, eloy.dhs@ufpr.br

**Resumo**—Este trabalho apresenta o desenvolvimento de esquemas numéricos explícitos de alta ordem e alta resolução para a solução numérica das equações de águas rasas em uma e duas dimensões. Utiliza-se a formulação do método dos elementos de conservação espaço-temporal, um método numérico desenvolvido exclusivamente para leis de conservação e caracterizado por priorizar, sobretudo, as formas integrais dessas leis de conservação, bem como por tratar espaço e tempo como variáveis indistintas no modelo. Uma modificação foi realizada sobre as funções de base: aproximações de segunda ordem foram utilizadas em todas as dimensões (mesmo a temporal). A partir dessa modificação, tornou-se possível obter esquemas explícitos com precisão de terceira ordem. Experimentos numéricos foram realizados (simulações de ruptura de barragem em uma e duas dimensões) no sentido de validar a precisão e robustez do método.

**Palavras-chave**—método CE/SE; águas rasas; espaço-tempo; alta ordem.

### I. INTRODUÇÃO

As equações de Saint-Venant, também conhecidas como equações de águas rasas, possuem diversas aplicações, tais como no estudo da propagação de marés em rios e estuários; no comportamento de ondas oceânicas oscilatórias; na variação do fluxo produzida pela construção de controles artificiais tais como comportas ou máquinas hidroelétricas alimentadas pelo canal, ou até mesmo pela ruptura de uma barragem [9].

Existem vários trabalhos recentes concernentes à área de métodos numérico/computacionais delineados para essas equações. À exem-

plo, cite-se [12], que desenvolveram uma nova aproximação pelo reticulado de Boltzmann para resolver as equações unidimensionais. A formulação resultante é totalmente explícita e, conforme concluem, de boa precisão. Yang et al. (2015) [19] desenvolveram esquemas de volumes finitos centrais com sobreposição de células em problemas 1D e 2D, com a característica de preservar o balanço entre o gradiente do fluxo e o termo fonte. De maneira análoga, [2] desenvolveu um método cuja atenção especial está no balanceamento do termo fonte. O autor realiza uma discretização especial sobre a lei de pressão, de tal forma que certas propriedades analíticas são transferidas para o método numérico construído. Kesserwani et al. (2015) [11] desenvolveram uma formulação numérica do tipo Godunov combinada com multi-wavelets com o objetivo de determinar de forma adaptativa o nível de resolução local. Hwang (2013) [10] desenvolveu um novo método denominado método da partícula característica baseado na realocação das partículas computacionais ao longo das curvas características. Lobeiro (2012) [13] construiu um método de pseudo-características para a solução das equações em sua forma bidimensional.

Existem ainda, vários trabalhos relacionados a simulação de fluxo de ruptura de barragem, tais como [5] que propuseram um método sem malha para simulações em canais abertos 1D baseado na hidrodinâmica de partículas suaves; [16] que desenvolveram um modelo numérico, validado por meio de experimentos laboratoriais, em que as derivadas espaciais eram discretizadas por meio de um esquema central conservativo *upwind* explícito; [1] que formulou um esquema de volumes finitos *upwind* centrado na célula e de segunda ordem sobre malhas triangulares não estruturadas com a finalidade

de auxiliar a construção de um plano de ação de emergência para a barragem de Torogh, no Irã.

No que diz respeito ao método CE/SE (*Conservation Element and Solution Element Method*), [14], [15] e [20] construíram esquemas unidimensionais e bidimensionais de segunda ordem de precisão para simular o problema de ruptura de barragem e ressalto hidráulico em um canal retangular.

A proposta desse trabalho se insere no contexto de desenvolver um esquema numérico de alta ordem para a solução das equações de Saint Venant em uma e duas dimensões.

A seção a seguir (seção II), aborda o desenvolvimento de esquemas CE/SE de alta resolução para a solução das equações bidimensionais. Para isso, apresenta-se as definições bidimensionais dos elementos de conservação e de solução, bem como as funções de aproximação utilizadas. Erro de truncamento, consistência e estabilidade são investigados na subseção II-F. Experimentos numéricos em problemas unidimensionais e bidimensionais são realizados junto as subseções II-G e II-I, com o objetivo de obter a ordem de precisão experimental/computacional bem como avaliar o comportamento do esquema perante descontinuidades. Constrói-se na subseção II-H um esquema melhorado para problemas com formação de choque e descontinuidades. O trabalho se encerra junto à seção III com as conclusões.

## II. O MÉTODO CE/SE PARA AS EQUAÇÕES BIDIMENSIONAIS

Este capítulo é dedicado ao desenvolvimento de um esquema CE/SE de alta ordem para a solução das equações de Saint-Venant bidimensionais, também conhecidas na literatura por equações de águas rasas.

### A. Equações de Saint-Venant

Para um canal retangular, a forma conservativa em duas dimensões das equações de Saint Venant é dada pelo sistema [6]

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{Q})}{\partial y} = \mathbf{S}(\mathbf{Q}), \quad (1)$$

em que

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ uh \\ vh \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uh \\ u^2h + gh^2/2 \\ uvh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_2 \\ q_2^2/q_1 + gq_1^2/2 \\ q_2q_3/q_1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + gh^2/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_3 \\ q_2q_3/q_1 \\ q_3^2/q_1 + gq_1^2/2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ gq_1(S_{0_x} - S_{f_x}) \\ gq_1(S_{0_y} - S_{f_y}) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

As variáveis  $u(x, y, t)$  e  $v(x, y, t)$  correspondem as velocidades médias do fluxo nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente;  $h(x, y, t)$  a profundidade da água medida verticalmente;  $g$  a aceleração devido a gravidade;  $S_{0_x} = \sin \alpha_x$  e  $S_{0_y} = \sin \alpha_y$  as declividades (inclinações do fundo do canal) nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente;  $\alpha_x$  e  $\alpha_y$  o ângulo entre o fundo do canal e as direções  $x$  e  $y$ , respectivamente;  $S_{f_x}$  e  $S_{f_y}$  representam as resistências ao escoamento nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. As resistências  $S_{f_x}$  e  $S_{f_y}$  são calculadas a partir das fórmulas do estado permanente [6]:

$$S_{f_x} = \frac{\eta^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} = \frac{\eta^2 q_2 \sqrt{q_2^2 + q_3^2}}{q_1^{10/3}}, \quad (6)$$

$$S_{f_y} = \frac{\eta^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} = \frac{\eta^2 q_3 \sqrt{q_2^2 + q_3^2}}{q_1^{10/3}}. \quad (7)$$

### B. Os elementos de conservação e de solução bidimensionais

Considera-se, por simplicidade, a equação (1) como

$$\frac{\partial q_m}{\partial t} + \frac{\partial f_m}{\partial x} + \frac{\partial g_m}{\partial y} = S_m, \quad m = 1, 2, 3. \quad (8)$$

Então, pelo teorema da divergência no espaço  $\mathbb{R}^3$ , tem-se que a equação (8) representa a forma diferencial da lei integral de conservação

$$\oint_{S(V)} \mathbf{H}_m \cdot ds = \int_V S_m dV, \quad (9)$$

em que  $\mathbf{H}_m = (f_m, g_m, q_m)$ ,  $m = 1, 2, 3$  e  $S(V)$  representa o contorno de uma região espaço-tempo  $V \subset \mathbb{R}^3$ .

No método CE/SE, um elemento de conservação (*CE*) é uma região espaço-tempo em que a conservação do fluxo, equação (9), é forçada, enquanto que um elemento de solução (*SE*) é uma região espaço-tempo, normalmente distinta, em que as variáveis fluxo são supostamente suaves e a equação (8) é válida. Para definir estes dois importantes objetos, considera-se primeiramente uma malha no plano  $x$ - $y$ , conforme Fig. 1a. Existem dois grupos de pontos, marcados por círculos e estrelas, que representam nós da malha em dois níveis de tempo diferentes. A cada ponto  $(i, j, k)$  da malha associa-se um *CE* e um *SE*. O *CE* é definido como o quadrilátero  $EFGHE'F'G'H'$  e o *SE* é a união do quadrilátero  $P''Q''R''S''P'Q'R'S'$  e o polígono  $EFGH$  (ver Fig. 1b).

Para todo  $(x, y, t) \in SE(i, j, k)$ , aproxima-se  $q_m$ , para  $m = 1, 2, 3$ , por um polinômio de Taylor de segunda ordem

$$q_m^*(x, y, t; i, j, k) = \sum_{n=0}^2 \frac{1}{n!} \sum_{l_1+l_2+l_3=n} \frac{n!}{l_1!l_2!l_3!} \frac{\partial^n q_m}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2} \partial t^{l_3}} \hat{q}^*, \quad (10)$$

$$\hat{q}^* = (x - x_i)^{l_1} (y - y_j)^{l_2} (t - t_k)^{l_3}.$$

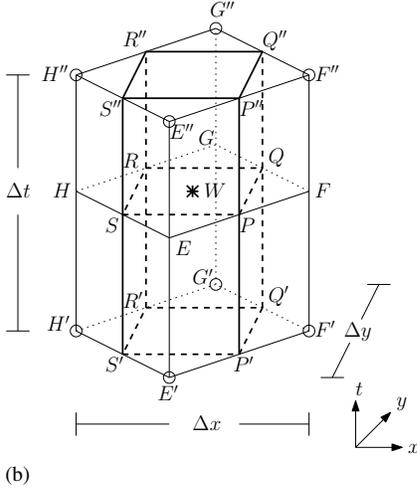
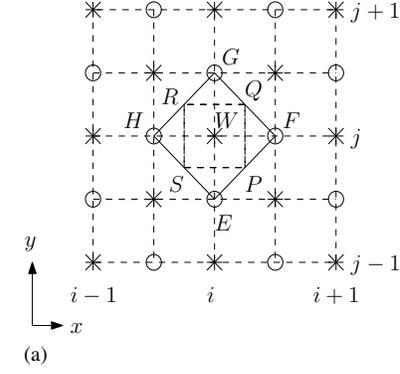


Figura 1: (a) Pontos da malha representativa no plano  $x$ - $y$ ; (b) As definições dos elementos de solução  $SE(i, j, k)$  e elementos de conservação  $CE(i, j, k)$  no ponto  $(i, j, k)$  da malha [20, 21].

Aproximações análogas são feitas sobre as funções  $f_m$  e  $g_m$ ,  $m = 1, 2, 3$ . O termo fonte, por outro lado, é aproximado por uma ordem a menos, ou seja,

$$S_m^*(x, y, t; i, j, k) = (S_m)_{i,j}^k + [(S_m)_x]_{i,j}^k (x - x_i) + [(S_m)_y]_{i,j}^k (y - y_j) + [(S_m)_t]_{i,j}^k (t - t_k). \quad (11)$$

Dessa forma, a equação (8) pode ser aproximada no  $SE(i, j, k)$  por  $\text{div } \mathbf{H}_m^* = S_m^*$ , em que  $\mathbf{H}_m^* = (f_m^*, g_m^*, q_m^*)$ ,  $m = 1, 2, 3$ , ao mesmo tempo em que a equação (9) é aproximada no  $CE(i, j, k)$  por

$$\oint_{S(CE(i,j,k))} \mathbf{H}_m^* \cdot ds = \int_{CE(i,j,k)} S_m^* dV, \quad m = 1, 2, 3. \quad (12)$$

### C. Avaliação de $(q_m)_{i,j}^k$

Substituindo (10) e (11) em (12), obtém-se, após todas as simplificações, o esquema de avanço no tempo para a variável  $(q_m)_{i,j}^k$ ,

representado resumidamente como:

$$(q_m)_{i,j}^k + \frac{\Delta x^2}{48} [(q_m)_{xx}]_{i,j}^k + \frac{\Delta y^2}{48} [(q_m)_{yy}]_{i,j}^k = (P_m)_{i,j}^k, \quad (13)$$

para  $m = 1, 2, 3$ , em que

$$(P_m)_{i,j}^k = [\mathcal{P}_m^y(\Delta x, f_m, g_m)]_{i-1/2,j}^{k-1/2} + [\mathcal{P}_m^y(-\Delta x, f_m, g_m)]_{i+1/2,j}^{k-1/2} + [\mathcal{P}_m^x(\Delta y, g_m, f_m)]_{i,j-1/2}^{k-1/2} + [\mathcal{P}_m^x(-\Delta y, g_m, f_m)]_{i,j+1/2}^{k-1/2} \quad (14)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_m^{\zeta}(\Delta \xi, \phi, \psi) = & \frac{1}{4} \left\{ q_m + \frac{\Delta \xi}{4} (q_m)_{\xi} + \frac{\Delta t}{4} [\phi_{\xi} - \psi_{\zeta}] \right. \\ & + \frac{2\Delta t}{\Delta \xi} \left[ \phi + \frac{\Delta t}{4} \phi_t \right] + \frac{\Delta t}{48\Delta \xi} [\Delta \zeta^2 \phi_{\zeta\zeta} + \Delta \xi^2 \phi_{\xi\xi}] \\ & + \frac{\Delta t}{12\Delta \xi} \left[ \Delta t^2 \phi_{tt} - \frac{\Delta \xi^2}{2} \psi_{\zeta\zeta} \right] \\ & + \frac{\Delta t^2}{16} [\phi_{\xi t} - \psi_{\zeta t}] + \frac{\Delta \zeta^2}{192} (q_m)_{\zeta\zeta} + \frac{7\Delta \xi^2}{192} (q_m)_{\xi\xi} \\ & \left. + \frac{\Delta t}{2} \left[ S_m + \frac{\Delta t}{4} (S_m)_t + \frac{\Delta \xi}{4} (S_m)_{\xi} \right] \right\}. \quad (15) \end{aligned}$$

Observe que  $\mathcal{P}_m^{\zeta}(\Delta \xi, \phi, \psi)$  é um operador sobre quatro parâmetros:  $\zeta$  e  $\xi$ , que podem assumir os valores de  $x$  ou de  $y$ ; e  $\phi$  e  $\psi$ , que podem ser as funções  $f_m$  ou  $g_m$ ,  $m = 1, 2, 3$ . É importante notar, ainda, que as equações (13) e (15) dependem apenas das incógnitas  $q_m, (q_m)_x, (q_m)_y, (q_m)_{xx}, (q_m)_{yy}$  e  $(q_m)_{xy}$  do tempo  $t_{k-1/2}$ , para  $m = 1, 2, 3$ . Observe, por exemplo, que o cálculo de

$$\begin{aligned} (f_m)_t &= \sum_{l=1}^3 \frac{\partial f_m}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial t} = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial f_m}{\partial q_l} \left[ S_l - \frac{\partial f_l}{\partial x} - \frac{\partial g_l}{\partial y} \right], \quad (16) \\ &= \sum_{l=1}^3 \frac{\partial f_m}{\partial q_l} S_l - \sum_{l=1}^3 \frac{\partial f_m}{\partial q_l} \sum_{n=1}^3 \left[ \frac{\partial f_l}{\partial q_n} \frac{\partial q_n}{\partial x} + \frac{\partial g_l}{\partial q_n} \frac{\partial q_n}{\partial y} \right], \end{aligned}$$

é inteiramente dependente das variáveis  $q_m, (q_m)_x$  e  $(q_m)_y$ ,  $m = 1, 2, 3$ .

Por outro lado, é preciso conhecer  $[(q_m)_{xx}]_{i,j}^k$  e  $[(q_m)_{yy}]_{i,j}^k$  previamente à obtenção de  $(q_m)_{i,j}^k$  no tempo  $t_k$ , conforme equação (13). A seção a seguir descreve a obtenção dessas derivadas espaciais duplas.

### D. Avaliação de $[(q_m)_{xx}]_{i,j}^k, [(q_m)_{xy}]_{i,j}^k$ e $[(q_m)_{yy}]_{i,j}^k$

Para prosseguir, constrói-se primeiramente equações auxiliares a partir de (8) por derivação:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial (q_m)_{xx}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(f_m)_{xx} - (S_m)_x] + \frac{\partial (g_m)_{xx}}{\partial y}, \\ &= \text{div } \tilde{\mathbf{H}}_m, \quad m = 1, 2, 3, \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial (q_m)_{yy}}{\partial t} + \frac{\partial (f_m)_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} [(g_m)_{yy} - (S_m)_y], \\ &= \text{div } \tilde{\mathbf{H}}_m, \quad m = 1, 2, 3, \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial (q_m)_{xy}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(f_m)_{xy} - \frac{1}{2}(S_m)_y] + \frac{\partial}{\partial y} [(g_m)_{xy} - \frac{1}{2}(S_m)_x], \\ &= \text{div } \tilde{\mathbf{H}}_m, \quad m = 1, 2, 3, \quad (19) \end{aligned}$$

### E. Avaliação de $[(q_m)_x]_{i,j}^k$ e $[(q_m)_y]_{i,j}^k$

com respectivas formas integrais:

$$\oint_{S(V)} \hat{\mathbf{H}}_m \cdot ds = 0, \quad \oint_{S(V)} \tilde{\mathbf{H}}_m \cdot ds = 0 \quad \text{e} \quad \oint_{S(V)} \bar{\mathbf{H}}_m \cdot ds = 0. \quad (20)$$

As equações (17)-(20) possuem, conforme (10) e (11), para todo  $(x, y, t) \in SE(i, j, k)$ , os seguintes análogos numéricos:

$$\text{div } \hat{\mathbf{H}}_m^* = \text{div } \tilde{\mathbf{H}}_m^* = \text{div } \bar{\mathbf{H}}_m^* = 0, \quad (21)$$

$$\oint_{S(CE(i,j,k))} \hat{\mathbf{H}}_m^* \cdot ds = \oint_{S(CE(i,j,k))} \tilde{\mathbf{H}}_m^* \cdot ds = 0 \quad (22)$$

$$\oint_{S(CE(i,j,k))} \bar{\mathbf{H}}_m^* \cdot ds = 0. \quad (23)$$

Os campos vetoriais aproximados  $\hat{\mathbf{H}}_m^*$ ,  $\tilde{\mathbf{H}}_m^*$  e  $\bar{\mathbf{H}}_m^*$  são constantes (lembre-se que as funções  $f^*$ ,  $g^*$  e  $q^*$  são polinômios de segundo grau), de modo que a avaliação das equações em (22) e (23), sobre o elemento de conservação descrito pela Fig. 1b, retornam:

$$\begin{aligned} [(q_m)_{xx}]_{i,j}^k &= \frac{1}{4} \left\{ [(q_m)_{xx}]_{i-1/2,j}^{k-1/2} + [(q_m)_{xx}]_{i+1/2,j}^{k-1/2} + [(q_m)_{xx}]_{i,j-1/2}^{k-1/2} \right. \\ &\quad + [(q_m)_{xx}]_{i,j+1/2}^{k-1/2} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ [(f_m)_{xx}]_{i-1/2,j}^{k-1/2} \right. \\ &\quad \left. + [(S_m)_x]_{i+1/2,j}^{k-1/2} - [(f_m)_{xx}]_{i+1/2,j}^{k-1/2} - [(S_m)_x]_{i-1/2,j}^{k-1/2} \right] \\ &\quad \left. + \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left[ [(g_m)_{xx}]_{i,j-1/2}^{k-1/2} - [(g_m)_{xx}]_{i,j+1/2}^{k-1/2} \right] \right\}, \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(q_m)_{yy}]_{i,j}^k &= \frac{1}{4} \left\{ [(q_m)_{yy}]_{i-1/2,j}^{k-1/2} + [(q_m)_{yy}]_{i+1/2,j}^{k-1/2} + [(q_m)_{yy}]_{i,j-1/2}^{k-1/2} \right. \\ &\quad + [(q_m)_{yy}]_{i,j+1/2}^{k-1/2} + \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left[ [(g_m)_{yy}]_{i,j-1/2}^{k-1/2} \right. \\ &\quad \left. + [(S_m)_y]_{i,j+1/2}^{k-1/2} - [(g_m)_{yy}]_{i,j+1/2}^{k-1/2} - [(S_m)_y]_{i,j-1/2}^{k-1/2} \right] \\ &\quad \left. + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ [(f_m)_{yy}]_{i-1/2,j}^{k-1/2} - [(f_m)_{yy}]_{i+1/2,j}^{k-1/2} \right] \right\} \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(q_m)_{xy}]_{i,j}^k &= \frac{1}{4} \left\{ [(q_m)_{xy}]_{i-1/2,j}^{k-1/2} + [(q_m)_{xy}]_{i+1/2,j}^{k-1/2} + [(q_m)_{xy}]_{i,j-1/2}^{k-1/2} \right. \\ &\quad \left. + [(q_m)_{xy}]_{i,j+1/2}^{k-1/2} \right. \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ [(f_m)_{xy}]_{i-1/2,j}^{k-1/2} - [(f_m)_{xy}]_{i+1/2,j}^{k-1/2} \right] \\ &\quad + \frac{\Delta t}{4\Delta x} \left[ [(S_m)_y]_{i+1/2,j}^{k-1/2} - [(S_m)_y]_{i-1/2,j}^{k-1/2} \right] \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left[ [(g_m)_{xy}]_{i,j-1/2}^{k-1/2} - [(g_m)_{xy}]_{i,j+1/2}^{k-1/2} \right] \\ &\quad \left. + \frac{\Delta t}{4\Delta y} \left[ [(S_m)_x]_{i,j+1/2}^{k-1/2} - [(S_m)_x]_{i,j-1/2}^{k-1/2} \right] \right\}, \quad (26) \end{aligned}$$

para  $m = 1, 2, 3$ .

As equações (24), (25) e (26) fornecem os valores das variáveis de marcha com derivada de segunda ordem. Aborda-se na seção a seguir o cálculo das derivadas de primeira ordem das variáveis dinâmicas  $q_m$ ,  $m = 1, 2, 3$ .

As variáveis  $[(q_m)_x]_{i,j}^k$  e  $[(q_m)_y]_{i,j}^k$  podem ser determinadas por meio de uma estratégia análoga àquela apresentada na seção II-D anterior, bastando, para isso, construir leis diferenciais de conservação (já nas formas aproximadas), para  $m = 1, 2, 3$ :

$$\frac{\partial(q_m^*)_x}{\partial t} + \frac{\partial(f_m^*)_x}{\partial x} + \frac{\partial(g_m^*)_x}{\partial y} = \text{div } \check{\mathbf{H}}_m^* = (S_m^*)_x, \quad (27)$$

$$\frac{\partial(q_m^*)_y}{\partial t} + \frac{\partial(f_m^*)_y}{\partial x} + \frac{\partial(g_m^*)_y}{\partial y} = \text{div } \check{\mathbf{H}}_m^* = (S_m^*)_y, \quad (28)$$

e integrais

$$\oint_{S(CE(i,j,k))} \check{\mathbf{H}}_m^* \cdot ds = \int_{CE(i,j,k)} (S_m^*)_x dV, \quad (29)$$

$$\oint_{S(CE(i,j,k))} \check{\mathbf{H}}_m^* \cdot ds = \int_{CE(i,j,k)} (S_m^*)_y dV. \quad (30)$$

As avaliações das equações em (29) e (30) fornecem as inclinações equacionadas por

$$\begin{aligned} [(q_m)_\xi]_{i,j}^k &= [\mathcal{Q}_m^{(1)}(\Delta x, \xi)]_{i-1/2,j}^{k-1/2} + [\mathcal{Q}_m^{(1)}(-\Delta x, \xi)]_{i+1/2,j}^{k-1/2} + \\ &\quad [\mathcal{Q}_m^{(2)}(\Delta y, \xi)]_{i,j-1/2}^{k-1/2} + [\mathcal{Q}_m^{(2)}(-\Delta y, \xi)]_{i,j+1/2}^{k-1/2}, \quad (31) \end{aligned}$$

para  $\xi = x, y$  e  $m = 1, 2, 3$ , em que  $[(q_m)_\xi]_{i,j}^k = [(q_m)_x]_{i,j}^k$ , para  $\xi = x$ , isto é, a derivada de primeira ordem de  $q_m$ . E ainda,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_m^{(1)}(\Delta x, \xi) &= \frac{1}{4} \left\{ (q_m)_\xi + \frac{\Delta x}{4} (q_m)_{x\xi} + \frac{\Delta t}{4} [(f_m)_{x\xi} - (g_m)_{y\xi}] + \right. \\ &\quad \left. \frac{\Delta t}{2} (S_m)_\xi + \frac{2\Delta t}{\Delta x} [(f_m)_\xi + \frac{\Delta t}{4} (f_m)_{t\xi}] \right\}, \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_m^{(2)}(\Delta y, \xi) &= \frac{1}{4} \left\{ (q_m)_\xi + \frac{\Delta y}{4} (q_m)_{y\xi} + \frac{\Delta t}{4} [(g_m)_{y\xi} - (f_m)_{x\xi}] + \right. \\ &\quad \left. \frac{\Delta t}{2} (S_m)_\xi + \frac{2\Delta t}{\Delta y} [(g_m)_\xi + \frac{\Delta t}{4} (g_m)_{t\xi}] \right\}. \quad (33) \end{aligned}$$

O esquema CE/SE é formado, por tanto, pelo conjunto de equações (13), (24)-(26) e (31). Para o caso unidimensional, utiliza-se as equações

$$(q_m)_i^j + \frac{\Delta x^2}{24} [(q_m)_{xx}]_i^j = \frac{1}{2} \left\{ [\mathcal{Q}_m(\Delta x)]_{i-1/2}^{j-1/2} + [\mathcal{Q}_m(-\Delta x)]_{i+1/2}^{j-1/2} \right\}, \quad (34)$$

$$[(q_m)_x]_i^j = \frac{1}{2} \left\{ [\mathcal{Q}_m^x(\Delta x)]_{i-1/2}^{j-1/2} + [\mathcal{Q}_m^x(-\Delta x)]_{i+1/2}^{j-1/2} \right\}, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} [(q_m)_{xx}]_i^j &= \frac{1}{2} \left\{ [(q_m)_{xx}]_{i+1/2}^{j-1/2} + [(q_m)_{xx}]_{i-1/2}^{j-1/2} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ [(f_m)_{xx}]_{i-1/2}^{j-1/2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - [(f_m)_{xx}]_{i+1/2}^{j-1/2} + [(S_m)_x]_{i-1/2}^{j-1/2} - [(S_m)_x]_{i+1/2}^{j-1/2} \right] \right\}, \quad (36) \end{aligned}$$

para  $m = 1, 2$ , em que

$$\begin{aligned} [\mathcal{Q}_m(\Delta x)]_i^j &= (q_m)_i^j + \frac{\Delta x}{4} \left\{ [(q_m)_x]_i^j + \frac{\Delta x}{6} [(q_m)_{xx}]_i^j \right\} \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ (f_m)_i^j + \frac{\Delta t}{4} [(f_m)_t]_i^j + \frac{\Delta t^2}{24} [(f_m)_{tt}]_i^j \right\} \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} \left\{ (S_m)_i^j + \frac{\Delta x}{4} [(S_m)_x]_i^j + \frac{\Delta t}{4} [(S_m)_t]_i^j \right\}, \quad (37) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} [\mathcal{Q}_m^x(\Delta x)]_i^j &= [(q_m)_x]_i^j + \frac{\Delta x}{4} [(q_m)_{xx}]_i^j + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ [(f_m)_x]_i^j - (S_m)_i^j \right\} \\ &+ \frac{\Delta t^2}{4\Delta x} \left\{ [(f_m)_{xt}]_i^j - [(S_m)_t]_i^j \right\}, \quad m = 1, 2. \end{aligned} \quad (38)$$

### F. Erro de truncamento, consistência e estabilidade

Avalia-se nesta subseção as propriedades básicas do esquema numérico, tais como erro de truncamento, consistência e estabilidade.

Considera-se, por simplicidade, as equações de águas rasas homogênea e suponha inicialmente que as soluções  $q_m$ ,  $m = 1, 2, 3$  da equação (1) sejam funções suaves de modo que  $q_m \in C^\infty(V)$  e ainda que  $f_m(q_1, q_2, q_3), g_m(q_1, q_2, q_3) \in C^\infty(V)$ . Neste caso, as funções  $q_m, f_m$  e  $g_m$  podem ser expandidas em série de Taylor na vizinhança de  $(x_i, y_j, t_{j-1/2}) \in V \subset \mathbb{R}^3$ . O mesmo é possível para suas derivadas, isto é, para as funções  $(q_m)_\xi, (f_m)_\xi, (g_m)_\xi, (q_m)_{\xi\zeta}, (f_m)_{\xi\zeta}$  e  $(g_m)_{\xi\eta}$ ,  $\xi, \zeta = x, y, t$ . Substituindo adequadamente estas expressões em série de Taylor nas equações (13), (24)-(26), (31) e subtraindo o resultado da equação (8), tem-se, após as simplificações,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{q_m}(x_i, y_j, t_{j-1/2}) &= \mathcal{O}(\Delta t^4) + \mathcal{O}(\Delta x^4) + \mathcal{O}(\Delta y^4) + \mathcal{O}(\Delta t \Delta x^4) + \\ &\quad \mathcal{O}(\Delta t \Delta y^4) + \mathcal{O}(\Delta t^2 \Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta t^2 \Delta y^2), \end{aligned} \quad (39)$$

para  $m = 1, 2, 3$ .

A equação (39) representa o erro de truncamento decorrente ao aproximar-se (8) por  $\text{div } \mathbf{H}_m^* = S_m^*$ ,  $m = 1, 2, 3$ . De modo análogo, obtém-se os erros de truncamento para as derivadas de primeira e segunda ordem, respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{(q_m)_\xi}(x_i, y_j, t_{j-1/2}) &= \mathcal{O}(\Delta t^3) + \mathcal{O}(\Delta x^4) + \mathcal{O}(\Delta y^4) + \mathcal{O}(\Delta t \Delta x^2) \\ &\quad + \mathcal{O}(\Delta t \Delta y^2), \quad \xi = x, y, \quad m = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{(q_m)_{\xi\zeta}}(x_i, y_j, t_{j-1/2}) &= \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta y^2) + \mathcal{O}(\Delta t \Delta x^2) \\ &\quad + \mathcal{O}(\Delta t \Delta y^2), \quad \xi, \zeta = x, y, \quad m = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (41)$$

Pelas equações anteriores, tem-se que os erros de truncamento  $\mathcal{T}_{q_m}, \mathcal{T}_{(q_m)_\xi}, \mathcal{T}_{(q_m)_{\xi\zeta}} \rightarrow 0$  quando  $\Delta t, \Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ , para  $\xi, \zeta = x, y$ ,  $m = 1, 2, 3$ , o que implica na consistência do esquema.

A condição de estabilidade para o esquema bidimensional é dada por

$$\max \left\{ \frac{\Delta t}{\Delta x} (|u| + \sqrt{gh}) \right\} + \max \left\{ \frac{\Delta t}{\Delta y} (|v| + \sqrt{gh}) \right\} \leq 1, \quad (42)$$

enquanto que a condição de estabilidade de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) para o método unidimensional é restrita por [20]:

$$CFL = \frac{\Delta t}{\Delta x} \max (|u| + \sqrt{gh}), \quad (43)$$

onde o número de Courant satisfaz  $0 < CFL \leq 1$ .

O esquema em questão é interessante apenas em problemas com soluções de comportamento suave. A seção a seguir justifica essa afirmação.

### G. Experimentos Numéricos Preliminares

Com o objetivo de avaliar o esquema desenvolvido quanto a precisão e robustez, propõe-se nesta seção três exemplos numéricos. Os experimentos relacionados à precisão foram construídos a partir de sistemas lineares tendo em vista a seguinte [18, p. 64]:

**Definição II.1.** Um esquema  $P_{\Delta x, \Delta t} v = R_{\Delta x, \Delta t} f$  que é consistente com a equação diferencial  $\mathcal{P}u = f$  possui precisão de ordem  $r$  no tempo e ordem  $s$  no espaço se, para toda função suave  $\phi(x, t)$ ,

$$P_{\Delta x, \Delta t} \phi - R_{\Delta x, \Delta t} \mathcal{P} \phi = \mathcal{O}(\Delta t^r) + \mathcal{O}(\Delta x^s). \quad (44)$$

Ou seja, a ordem de precisão fornece informação do quão acurada está a solução numérica na hipótese de que a solução verdadeira seja suave.

**Exemplo II.1** (Teste de precisão 1D). O objetivo deste exemplo teste é verificar experimentalmente a ordem de precisão do esquema CE/SE. Seja o sistema hiperbólico linear unidimensional

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = \mathbf{0}, \quad \text{onde } \mathbf{U} = (\phi, u), \quad \mathbf{F} = (cu, c\phi) \quad (45)$$

e  $c$  é uma constante dada. Impondo as condições iniciais  $\phi(x, 0) = -c^{-1} \sin(2\pi x)$  e  $u(x, 0) = 0$ , é possível obter a seguinte solução exata [15]:

$$\phi(x, t) = -c^{-1} \cos(2\pi ct) \sin(2\pi x), \quad (46)$$

$$u(x, t) = c^{-1} \sin(2\pi ct) \cos(2\pi x). \quad (47)$$

As soluções são computadas com as equações (13), (24)-(26) e (31). A Tabela I apresenta os erros calculados nas normas  $L^1$  e  $L^2$ , nas simulações realizadas sobre o domínio computacional  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $c = 1$ ,  $CFL = 0,8$  até atingir o tempo  $t = 1, 2$ s, sendo  $n$  o número de células no espaço. O experimento verifica a terceira ordem de precisão do esquema para ambas as variáveis  $u$  e  $\phi$ .

Tabela I: Ordem de precisão experimental do método CE/SE para o sistema hiperbólico linear unidimensional.

$n$	Norma $L^1$			
	Erro ( $\phi$ )	Ordem	Erro ( $u$ )	Ordem
20	$8,32 \times 10^{-3}$	—	$1,66 \times 10^{-2}$	—
40	$1,85 \times 10^{-3}$	2,17	$2,53 \times 10^{-3}$	2,72
80	$3,07 \times 10^{-4}$	2,59	$3,40 \times 10^{-4}$	2,89
160	$4,37 \times 10^{-5}$	2,81	$4,39 \times 10^{-5}$	2,96
320	$5,81 \times 10^{-6}$	2,91	$5,57 \times 10^{-6}$	2,98
640	$7,49 \times 10^{-7}$	2,96	$7,01 \times 10^{-7}$	2,99
$n$	Norma $L^2$			
	Erro ( $\phi$ )	Ordem	Erro ( $u$ )	Ordem
20	$7,16 \times 10^{-3}$	—	$1,35 \times 10^{-2}$	—
40	$1,49 \times 10^{-3}$	2,27	$2,04 \times 10^{-3}$	2,72
80	$2,44 \times 10^{-4}$	2,61	$2,72 \times 10^{-4}$	2,91
160	$3,49 \times 10^{-5}$	2,81	$3,47 \times 10^{-5}$	2,97
320	$4,67 \times 10^{-6}$	2,90	$4,37 \times 10^{-6}$	2,99
640	$6,03 \times 10^{-7}$	2,95	$5,49 \times 10^{-7}$	2,99

Note-se que  $\mathcal{O}(\Delta x^3)$  era esperado, tendo em vista que a ordem de precisão experimental  $s$  é estimada conforme

$$\|\varepsilon^N\|_2 = \|\mathbf{u}^j - \hat{\mathbf{u}}^j\|_2 = C(\Delta x)^s + \text{termos de alta ordem}, \quad (48)$$

e como  $\hat{\mathbf{u}}^j$  está sendo aproximado por polinômios de segunda ordem, é natural que  $s$  seja de ordem 3.

**Exemplo II.2** (Teste de precisão 2D). Seja agora o sistema hiperbólico linear bidimensional

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x + \mathbf{G}(\mathbf{U})_y = \mathbf{0}, \quad (49)$$

onde

$$\mathbf{U} = (\phi, u, v), \quad \mathbf{F} = (cu, c\phi, 0), \quad \mathbf{G} = (cv, 0, c\phi) \quad (50)$$

e  $c$  é uma constante dada. Para os dados iniciais  $\phi(x, y, 0) = -c^{-1}[\sin(2\pi x) + \sin(2\pi y)]$  e  $u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0$ , este problema admite a seguinte solução exata [15]:

$$\begin{aligned} \phi &= -c^{-1} \cos(2\pi ct) [\sin(2\pi x) + \sin(2\pi y)], \\ u &= c^{-1} \sin(2\pi ct) \cos(2\pi x) \quad \text{e} \quad v = c^{-1} \sin(2\pi ct) \cos(2\pi y). \end{aligned} \quad (51)$$

Tabela II: Ordem de precisão experimental do método CE/SE para o sistema hiperbólico linear bidimensional.

$n$	Norma $L^1$			
	Erro ( $\phi$ )	Ordem	Erro ( $u, v$ )	Ordem
20	$2,60 \times 10^{-3}$	—	$1,28 \times 10^{-2}$	—
40	$4,23 \times 10^{-4}$	2,62	$2,03 \times 10^{-3}$	2,66
80	$7,52 \times 10^{-5}$	2,49	$2,92 \times 10^{-4}$	2,80
160	$1,20 \times 10^{-5}$	2,65	$3,94 \times 10^{-5}$	2,89
320	$1,74 \times 10^{-6}$	2,79	$5,13 \times 10^{-6}$	2,94
640	$2,36 \times 10^{-7}$	2,88	$6,55 \times 10^{-7}$	2,97

$n$	Norma $L^2$			
	Erro ( $\phi$ )	Ordem	Erro ( $u, v$ )	Ordem
20	$1,80 \times 10^{-3}$	—	$7,48 \times 10^{-3}$	—
40	$3,38 \times 10^{-4}$	2,41	$1,17 \times 10^{-3}$	2,68
80	$6,11 \times 10^{-5}$	2,47	$1,65 \times 10^{-4}$	2,82
160	$9,60 \times 10^{-6}$	2,67	$2,22 \times 10^{-5}$	2,90
320	$1,40 \times 10^{-6}$	2,78	$2,90 \times 10^{-6}$	2,94
640	$1,94 \times 10^{-7}$	2,85	$3,72 \times 10^{-7}$	2,96

A Tabela II apresenta os erros numéricos calculados nas normas  $L^1$  e  $L^2$ , no tempo  $t = 0, 2s$ , com parâmetros especificados em  $c = 1$ ,  $CFL = 0,4$  e domínio computacional definido em  $-1 \leq x, y \leq 1$ , sendo  $n = n_x = n_y$  e  $n_x \times n_y$  o número de células utilizadas na discretização. O experimento confirma novamente a precisão de terceira ordem do esquema CE/SE.

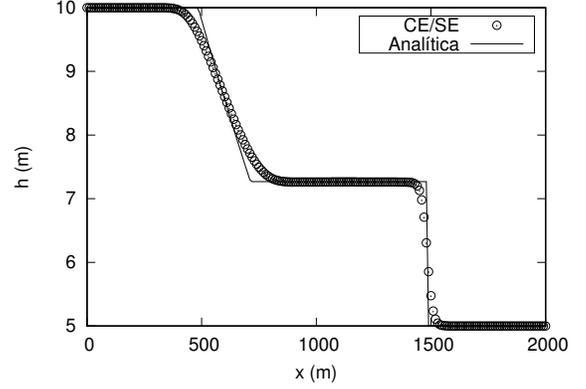
**Exemplo II.3** (Problema de Riemann I: ruptura de barragem 1D). Considera-se agora um problema ideal de ruptura de barragem sobre um domínio molhado, isto é, a quebra de barragem é instantânea, o fundo é plano e não existe resistência ao escoamento. As condições iniciais para esta configuração seguem o clássico problema de Riemann

$$h(x, 0) = \begin{cases} h_l, & \text{para } 0m \leq x \leq x_0m \\ h_r, & \text{para } x_0m < x \leq Lm \end{cases}, \quad \text{com } h_l \geq h_r \quad (52)$$

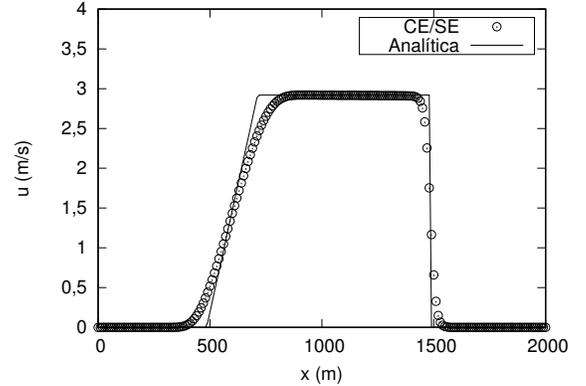
e  $u(x, 0) = 0m/s$ .

O domínio considerado é  $0m \leq x \leq 2000m$ ,  $x_0 = 1000m$  e a solução analítica pode ser encontrada em [17, p. 333] ou [7]. As Fig. 2a e 2b demonstram o comportamento da solução numérica em relação à analítica, calculadas no tempo  $t = 52s$ , com  $n +$

$1 = 201$  pontos, incremento espacial  $\Delta x = 10m$ ,  $CFL = 0,8$  e profundidades iniciais a montante e a jusante  $h_l = 10m$  e  $h_r = 5m$ , respectivamente. Note que a resposta numérica é coerente com a analítica, embora apresente suavidade que a distancie nas regiões com mudanças abruptas.



(a)



(b)

Figura 2: Elevação da superfície da água  $h$  e velocidade  $u$  para o problema de ruptura de barragem, computada no tempo  $t = 52s$ , utilizando uma malha uniforme com 201 pontos, incremento espacial  $\Delta x = 10m$  e  $h_r/h_l = 0,5$ .

Com o intuito de aperfeiçoar a aproximação para problemas com descontinuidades ou formação de choque, propõe-se uma modificação do cálculo das variáveis em (24)-(26) e (31). Trata-se de uma variação do procedimento adotado por [3] e consiste em um processo iterativo descrito na seção a seguir.

#### H. Esquema Para Problemas Descontínuos ou Com Formação de Choque

Considera-se inicialmente as seguintes formas regressivas e progressivas:

$$[(q_m^\pm)_\xi]_{i,j}^k = \delta_\xi^\pm(q_m) \quad \text{e} \quad [(q_m^\pm)_{\zeta\xi}]_{i,j}^k = \delta_\xi^\pm[(q_m)_\zeta], \quad (53)$$

em que  $\xi = x, y$  e  $\zeta = x, y$  e  $m = 1, 2, 3$ ; de tal modo que o operador  $\delta_{\xi}^{\pm}$  seja definido como

$$\delta_{\xi}^{\pm}(\phi) = \begin{cases} \pm \frac{2}{\Delta \xi} [(\phi')_{i \pm 1/2, j}^k - \phi_{i, j}^k], & \text{se } \xi = x, \\ \pm \frac{2}{\Delta \xi} [(\phi')_{i, j \pm 1/2}^k - \phi_{i, j}^k], & \text{se } \xi = y, \end{cases} \quad (54)$$

e

$$\phi' = \begin{cases} \phi + \frac{\Delta t}{2} \phi_t + \frac{\Delta t^2}{8} \phi_{tt}, & \text{se } \phi = (q_m)_x, (q_m)_y, \\ \phi + \frac{\Delta t}{2} \phi_t, & \text{se } \phi = (q_m)_{xx}, (q_m)_{xy}, (q_m)_{yy}. \end{cases} \quad (55)$$

As aproximações para as derivadas serão definidas, para  $m = 1, 2, 3$ , como

$$[(q_m)_{\xi}]_{i, j}^k = \mathcal{W} \{ [(q_m^+)_{\xi}]_{i, j}^k, [(q_m^-)_{\xi}]_{i, j}^k, \alpha \}, \quad (56)$$

$$[(q_m)_{\zeta \xi}]_{i, j}^k = \mathcal{W} \{ [(q_m^+)_{\zeta \xi}]_{i, j}^k, [(q_m^-)_{\zeta \xi}]_{i, j}^k, \alpha \}, \quad (57)$$

em que  $\xi = x, y$  e  $\zeta = x, y$  e a função  $\mathcal{W}$ , para  $\alpha \geq 0$ , é tal que [3, 4]:

$$\mathcal{W}(x_-, x_+, \alpha) = \begin{cases} \frac{|x_+|^{\alpha} x_- + |x_-|^{\alpha} x_+}{|x_+|^{\alpha} + |x_-|^{\alpha}}, & |x_+|^{\alpha} + |x_-|^{\alpha} \neq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (58)$$

Observe que neste caso, as equações (56) e (57) representam médias ponderadas das diferenças progressivas e regressivas descritas em (53) e (54). No caso de  $\alpha = 0$ , (56) e (57) tornam-se diferenças finitas centrais [20]. Adota-se neste trabalho  $\alpha = 1$ .

Importante notar, no entanto, que as equações (56) e (57) dependem da variável  $(q_m)_{i, j}^k$  que, por sua vez, depende de  $[(q_m)_{xx}]_{i, j}^k$  e  $[(q_m)_{yy}]_{i, j}^k$ , conforme (13). Dito de outra forma, para obter  $(q_m)_{i, j}^k$  é necessário obter antes  $[(q_m)_{xx}]_{i, j}^k$  e  $[(q_m)_{yy}]_{i, j}^k$ , e vice-versa. O que fazer então? Utiliza-se as equações, (24) e (25) como aproximações iniciais para  $[(q_m)_{xx}]_{i, j}^k$  e  $[(q_m)_{yy}]_{i, j}^k$ , respectivamente, o que tornará possível obter a aproximação inicial de  $(q_m)_{i, j}^k$  pela equação (13). Com isso, novas aproximações das derivadas de primeira e segunda ordem poderão ser obtidas, agora por meio das equações (56) e (57), respectivamente. Dessa forma, um processo iterativo é construído (Algoritmo 1).

Utilizando o Algoritmo 1, sob as mesmas condições e com os mesmos parâmetros utilizados no Exemplo II.3, obtém-se os gráficos constantes na Fig. 3. Observa-se que esta solução numérica é superior à anterior, sobretudo no que tange às regiões de rápidas mudanças. A Tabela III dispõe os erros relativos nas normas  $L^1$  e  $L^2$  para as soluções numéricas calculadas sob ambos os esquemas. O Algoritmo 1 produz uma redução no erro relativo de cerca de 81% na norma  $L^1$  e cerca de 60% na norma  $L^2$ , para ambas as variáveis  $h$  e  $u$ .

Conforme [20], a razão  $h_r/h_l$  é um importante índice para julgar a aplicabilidade e a acurácia de esquemas numéricos no modelo 1D de ruptura de barragem. Segundo os mesmos autores, os regimes de escoamentos subcrítico e supercrítico existem simultaneamente

**Algoritmo 1:** Algoritmo CE/SE para o cálculo das variáveis de marcha sobre um determinado ponto  $(i, j, k)$  da malha.

**início**

Defina uma tolerância  $\tau$ ;

Faça  $m = 1$ ;

**repita**

Faça  $l = 1$ ;

Calcule  $[(q_m)_{xx}]_{i, j}^k$  e  $[(q_m)_{yy}]_{i, j}^k$  com as equações (24) e (25), respectivamente;

Calcule  $(q_m^l)_{i, j}^k$  com a equação (13);

**repita**

Calcule  $[(q_m)_x]_{i, j}^k$  e  $[(q_m)_y]_{i, j}^k$  com a equação (56);

Calcule  $[(q_m)_{xx}]_{i, j}^k$ ,  $[(q_m)_{xy}]_{i, j}^k$  e  $[(q_m)_{yy}]_{i, j}^k$  com a equação (57);

Calcule  $(q_m^{l+1})_{i, j}^k$  com a equação (13);

**até**  $\|(q_m^{l+1})_{i, j}^k - (q_m^l)_{i, j}^k\| < \tau$ ;

**até**  $m = 3$ ;

**fim**

Tabela III: Taxa de decrescimento do erro relativo após a utilização do Algoritmo 1.

Esquema	Norma $L^1$	
	Erro Relativo $h$	Erro Relativo $u$
CE/SE	$8,002 \times 10^{-3}$	$5,319 \times 10^{-2}$
CE/SE-Alg. 1	$1,508 \times 10^{-3}$	$9,887 \times 10^{-3}$
TAXA	-81,16%	-81,41%
Esquema	Norma $L^2$	
	Erro Relativo $h$	Erro Relativo $u$
CE/SE	$1,910 \times 10^{-2}$	$9,318 \times 10^{-2}$
CE/SE-Alg. 1	$7,813 \times 10^{-3}$	$3,663 \times 10^{-2}$
TAXA	-59,08%	-60,69%

num canal sem fricção, horizontal e retangular, quando  $h_r/h_l < 0,138$ . Altera-se, neste sentido, estes parâmetros para uma razão  $h_r/h_l = 0,001$  ( $h_r = 0,01$  e  $h_l = 10$ ). Os resultados simulados são mostrados nas Figs. 4a e 4b e os erros relativos na Tabela IV. A solução computada é precisa, mesmo na situação em que  $h_r/h_l < 0,138$ .

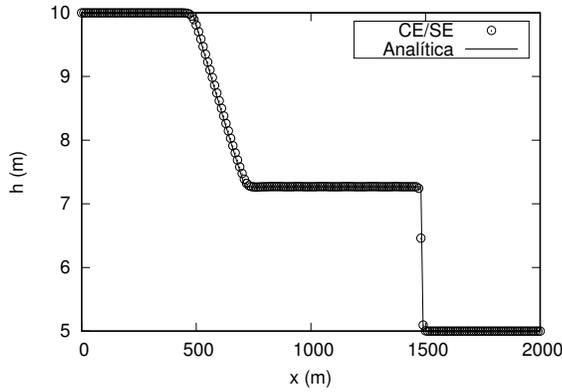
Tabela IV: Erro relativo para a solução do problema de ruptura de barragem unidimensional com  $h_r/h_l = 0,001$ .

Norma	Erro Relativo $h$	Erro Relativo $u$
$L^1$	$5,908 \times 10^{-3}$	$1,999 \times 10^{-2}$
$L^2$	$6,631 \times 10^{-3}$	$9,762 \times 10^{-2}$

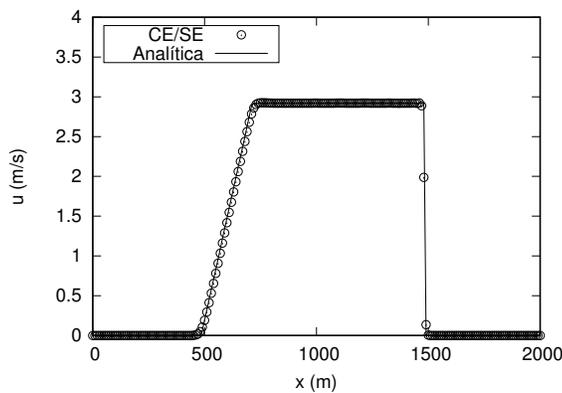
Neste sentido, a modificação não apenas melhora os resultados na presença de descontinuidade, como também

### I. Validação bidimensional

Esta seção destina-se à apresentação de um experimento 2D clássico de ruptura parcial de barragem. Este problema hipotético



(a)

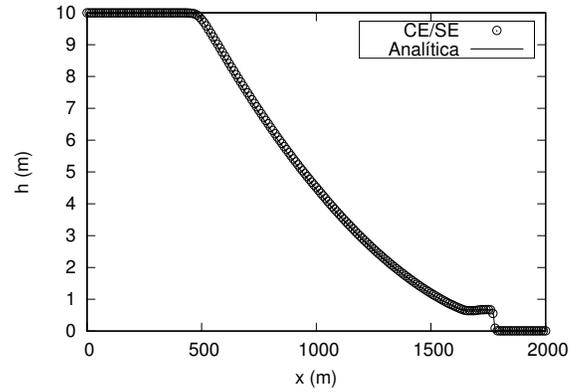


(b)

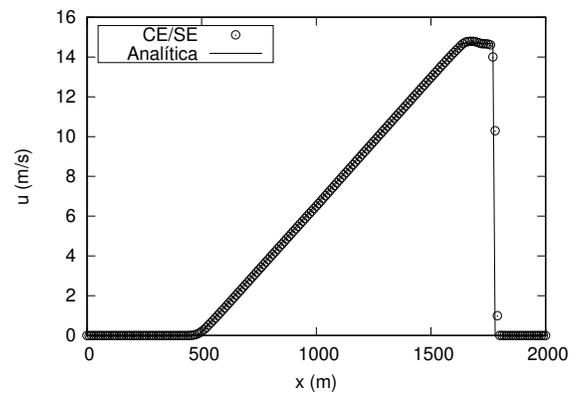
Figura 3: Elevação da superfície da água  $h$  e velocidade  $u$  para o problema de ruptura de barragem, computada no tempo  $t = 52s$ , utilizando uma malha uniforme com 201 pontos, incremento espacial  $\Delta x = 10m$  e  $h_r/h_l = 0,5$ .

bidimensional é um exemplo utilizado por [20], [8] e [22]. Neste problema as velocidades iniciais são todas nulas, a profundidade a montante é de 10m, enquanto que a jusante é assumida ser 5m, 0, 1m ou 0m (lembre-se que  $h_r/h_l < 0,138$  é um bom índice de avaliar a robustez do esquema). O domínio computacional (Fig. 5) consiste de uma região de  $200m \times 200m$ , com uma parede que se estende paralelamente ao eixo  $y$ , com 10m de largura e que está centrada em  $x = 100m$ . As condições de contorno são consideradas todas reflexivas. A falha é suposta ser instantânea, possui 75m de extensão a partir de  $y = 95m$ . O canal é horizontal e desconsidera-se a resistência ao escoamento. Espera-se a formação de uma frente de choque após o rompimento.

As soluções numéricas foram todas computadas sobre uma malha uniforme composta por  $101 \times 101$  células retangulares e  $CFL = 0,7$ . São apresentados nas Figs. 6, 8 e 10 os perfis da profundidade, nas Figs. 7 e 9 os campos de velocidade e junto a Fig. 11 dispõe-se os campos de vazão calculados nos tempos de 5 e 7,2 segundos, para as razões  $h_r/h_l$  iguais a 0,5, 0,01 e 0,0, respectivamente.



(a)



(b)

Figura 4: Elevação da superfície da água  $h$  e velocidade  $u$  para o problema de ruptura de barragem com  $h_r/h_l = 0,001$ , no tempo  $t = 52s$ , numa malha uniforme com 201 pontos e respectivo incremento espacial  $\Delta x = 10m$ , calculados com o Algoritmo 1.

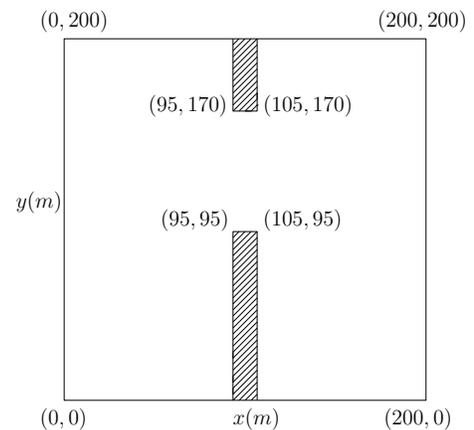
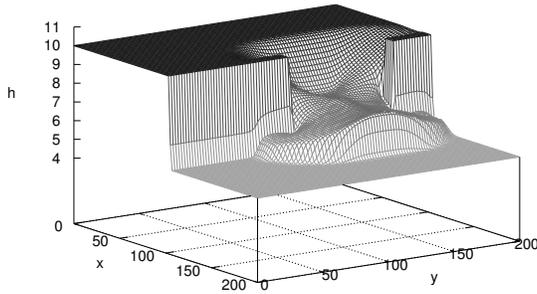
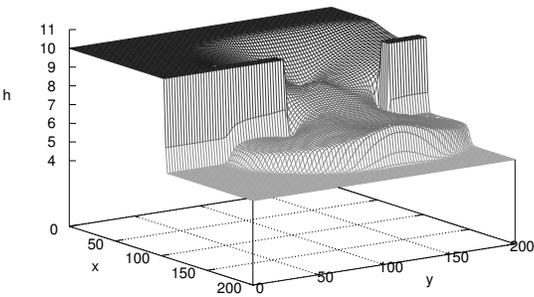


Figura 5: Domínio computacional do problema de ruptura parcial de barragem bidimensional, horizontal e sem resistência ao escoamento. A barragem após a falha é representada pela área rasurada.



(a) Superfície  $t = 5$ s.

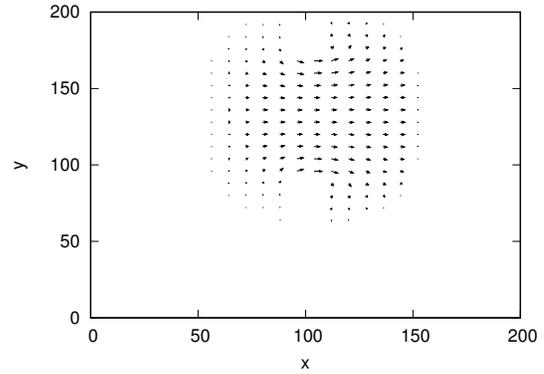


(b) Superfície  $t = 7, 2$ s.

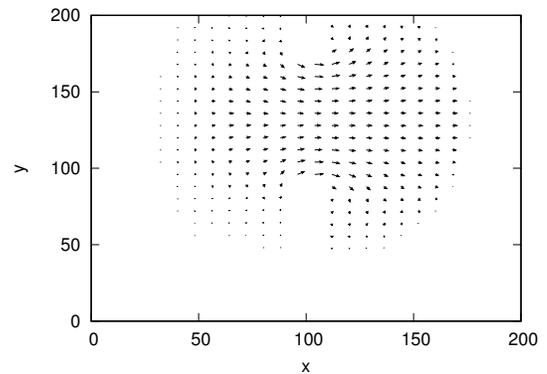
Figura 6: Elevação da superfície da água  $h$  para a solução numérica calculada nos tempos de 5 e 7, 2s com  $CFL = 0, 7$ , do problema de ruptura de barragem anti-simétrica em um domínio horizontal e sem fricção, com profundidades a montante de 10m e a jusante de 5m.

Quando existe uma profundidade não nula à jusante, um choque sempre existe (observar Figs. 6a, 6b, 8a e 8b). Outro detalhe é que os vetores velocidade tornam-se gradativamente nulos, conforme Figs. 7a, 7b, 9a e 9b. Por outro lado, no caso de leito seco, não existe formação de choque viajando à jusante (Figs. 10a e 10b), a profundidade é extremamente pequena, no entanto, não nula. Pelo fato de que no esquema numérico  $uh = q_1$ ,  $vh = q_2$  e  $h$  são as variáveis de marcha estimadas, a precisão de máquina irá produzir valores finitos para a variável  $u$  e  $v$ , calculadas como  $u = uh/h$  e  $v = vh/h$ , respectivamente, mesmo quando  $h$  é, em termos de precisão de máquina, considerado nulo. Neste caso,  $uh$  que é a quantidade conservada, é uma variável melhor para se examinar, tendo-se em vista as Figs. 11a e 11b.

Para finalizar as considerações sobre este exemplo, diga-se que todos os resultados são consistentes com aqueles presentes na literatura [8, 20, 22].



(a) Campo de velocidades  $t = 5$ s.

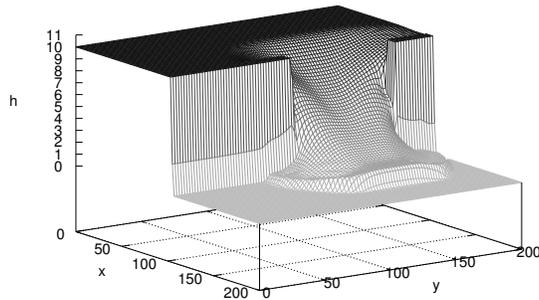


(b) Campo de velocidades  $t = 7, 2$ s.

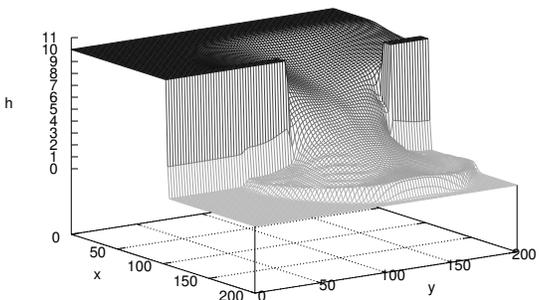
Figura 7: Campos de velocidade, para a solução numérica calculada nos tempos de 5 e 7, 2s com  $CFL = 0, 7$ , do problema de ruptura de barragem anti-simétrica em um domínio horizontal e sem fricção, com profundidades a montante de 10m e a jusante de 5m.

### III. CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES

Este trabalho diz respeito ao desenvolvimento de esquemas CE/SE de alta precisão para a solução das equações de Saint-Venant em uma e duas dimensões. O diferencial da proposta foi a utilização de polinômios de Taylor de segunda ordem que proporcionaram precisão de terceira ordem. As abordagens encontradas na literatura e associadas às equações de Saint-Venant, remetem a utilização de funções de primeira ordem [14, 20], o que resulta em esquemas de (também alta) segunda ordem de precisão. Detalhou-se todo o desenvolvimento pertinente à obtenção do esquema, que foi adaptado para capturar soluções com formação de choque e descontinuidades. O método foi testado por meio de problemas de ruptura de barragem, dentre estes, o clássico problema de Riemann unidimensional, tanto em uma quanto em duas dimensões. Todos os testes realizados corroboram com a afirmação de que o esquema possui boa precisão, sobretudo no que tange à situações com presença de descontinuidades e formação de choque.



(a) Superfície  $t = 5s$ .



(b) Superfície  $t = 7, 2s$ .

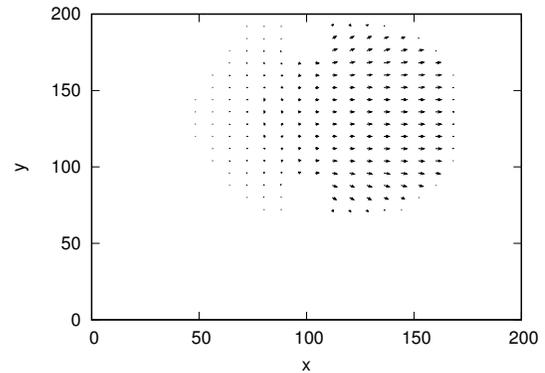
Figura 8: Elevação da superfície da água  $h$  para a solução numérica calculada nos tempos de 5 e 7, 2s com  $CFL = 0,7$ , do problema de ruptura de barragem anti-simétrica em um domínio horizontal e sem fricção, com profundidades a montante de 10m e a jusante de 0, 1m.

#### AGRADECIMENTOS

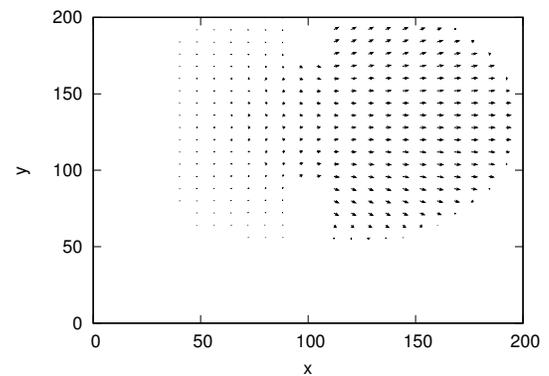
Os autores agradecem à CAPES pelo apoio financeiro, ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, da Universidade Federal do Paraná (PPGMNE - UFPR), e ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense (IFC), Campus Araquari, pelo apoio à pesquisa.

#### REFERÊNCIAS

- [1] M. Aliparast. Two-dimensional finite volume method for dam-break flow simulation. *International Journal of Sediment Research*, 24(1):99 – 107, 2009.
- [2] R. Borsche. A well-balanced solver for the Saint Venant equations with variable cross-section. *Journal of Numerical Mathematics*, 23(2):99–115, 2015.
- [3] S.-C. Chang. The Method of Space-Time Conservation Element and Solution Element - A New Approach for Solving the Navier-



(a) Campo de velocidades  $t = 5s$ .

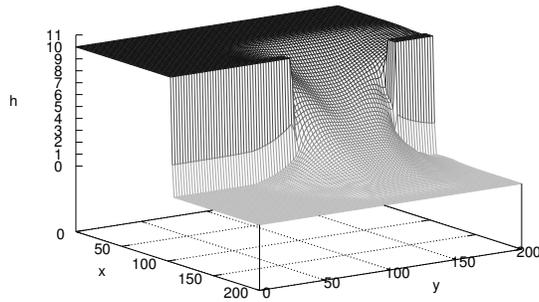


(b) Campo de velocidades  $t = 7, 2s$ .

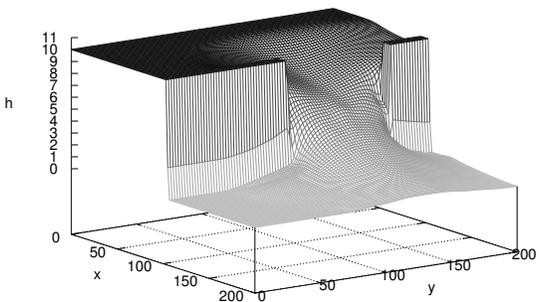
Figura 9: Campos de velocidade para a solução numérica calculada nos tempos de 5 e 7, 2s com  $CFL = 0,7$ , do problema de ruptura de barragem anti-simétrica em um domínio horizontal e sem fricção, com profundidades a montante de 10m e a jusante de 0, 1m.

Stokes and Euler Equations. *Journal of Computational Physics*, 119(2):295–324, 1995.

- [4] S.-C. Chang and W.-W. To. A New Numerical Framework for Solving Conservation Laws - The Method of Space-Time Conservation Element and Solution Element. Technical Memo TM 104495, NASA, Lewis Research Center, NASA, August 1991. TM 104495.
- [5] T.-J. Chang, H.-M. Kao, K.-H. Chang, and M.-H. Hsu. Numerical simulation of shallow-water dam break flows in open channels using smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Hydrology*, 408(1-2):78–90, 2011.
- [6] M. H. Chaudhry. *Open-Channel Flow - Second Edition*. Springer Science, 2008.
- [7] O. Delestre, C. Lucas, P.-A. Ksinant, F. Darboux, C. Laguerre, T.-N.-T. Vo, F. James, and S. Cordier. SWASHES: a compilation of shallow water analytic solutions for hydraulic and environmental studies. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 72(3):269–300, 2013.
- [8] R. J. Fennema and M. H. Chaudhry. Implicit methods for two-dimensional unsteady free-surface flows. *Journal of Hydraulic*

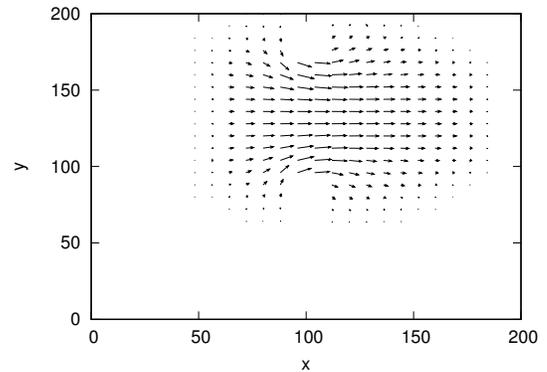


(a) Superfície  $t = 5$ s.

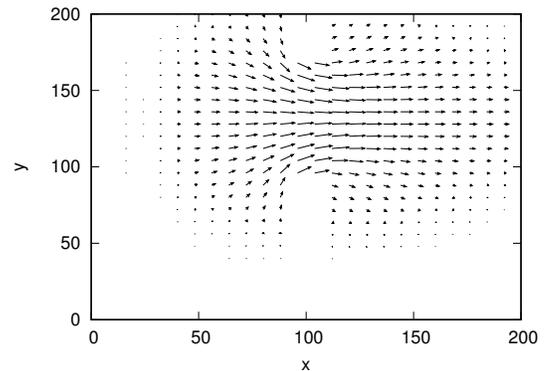


(b) Superfície  $t = 7, 2$ s.

Figura 10: Elevação da superfície da água  $h$  para a solução numérica calculada nos tempos de 5 e 7, 2s com  $CFL = 0,7$ , do problema de ruptura de barragem anti-simétrica em um domínio horizontal e sem fricção, com profundidades a montante de 10m e a jusante de 0m.



(a) Vazão  $t = 5$ s.



(b) Vazão  $t = 7, 2$ s.

Figura 11: Campo de vazão para a solução numérica calculada nos tempos de 5 e 7, 2s com  $CFL = 0,7$ , do problema de ruptura de barragem anti-simétrica em um domínio horizontal e sem resistência ao escoamento, com profundidades a montante de 10m e a jusante de 0m.

- Research*, 27(3):321–332, 1989.
- [9] F. M. Henderson. *Open Channel Flow*. Macmillan Publishing Co., New York, 1966.
- [10] Y.-H. Hwang. A characteristic particle method for the Saint Venant equations. *Computers & Fluids*, 76:58–72, 2013.
- [11] G. Kesserwani, D. Caviedes-Voullieme, N. Gerhard, and S. Muller. Multiwavelet discontinuous Galerkin-adaptive shallow water model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 294:56–71, 2015.
- [12] H. Liu, H. Wang, S. Liu, C. Hu, Y. Ding, and J. Zhang. Lattice Boltzmann method for the Saint-Venant equations. *Journal of Hydrology*, 524:411–416, 2015.
- [13] A. M. Lobeiro. *Solução das equações de Saint Venant em uma e duas dimensões usando o método das características*. PhD thesis, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.
- [14] T. Molls and F. Molls. Space-Time Conservation Method Applied to Saint Venant Equations. *Journal of Hydraulic Engineering*, 124(5):501–508, 1998.
- [15] Qurrat-Ul-Ain, S. Qamar, and G. Warnecke. A high-resolution space-time conservative method for non-linear hyperbolic conservation laws. *International Journal of Computational Methods*, 04(02):223–247, 2007.
- [16] J. Singh, M. S. Altinakar, and Y. Ding. Two-dimensional numerical modeling of dam-break flows over natural terrain using a central explicit scheme. *Advances in Water Resources*, 34(10):1366–1375, 2011.
- [17] J. J. Stoker. *Water Waves: The Mathematical Theory with Applications*. Interscience Publishers, New York, 1957.
- [18] J. C. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. Siam, Philadelphia, 1947.
- [19] S. Yang, A. Kurganov, and Y. Liu. Well-Balanced Central Schemes on Overlapping Cells with Constant Subtraction Techniques for the Saint-Venant Shallow Water System. *Journal of Scientific Computing*, 63(3):678–698, 2015.
- [20] Y. Zhang, Z. Zeng, and J. Chen. The improved space-time conservation element and solution element scheme for two-dimensional dam-break flow simulation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 68(5):605–624, 2012.

- [21] Z.-C. Zhang, S. T. J. Yu, S.-C. Chang, A. Himansu, and P. C. E. Jorgenson. A Modified Space-Time Conservation Element and Solution Element Method for Euler and Navier-Stokes Equations. page 10, 1999. in A Collection of Technical Papers, 14th AIAA CFD Conference, 28/Junho à 1/Julho, 1999, Norfolk, Virginia.
- [22] C. Zoppou and S. Roberts. Numerical solution of the two-dimensional unsteady dam break. *Applied Mathematical Modelling*, 24(7):457 – 475, 2000.