Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia

25 a 27 de outubro, 2017

SMNE UFPR

Estudo da estacionariedade e multiestabilidade de redes neurais por meio de análise de recorrência

Roberto Cesar Budzinski Neto, Bruno Rafael Reichert Boaretto, Kalel Luiz Rossi, Thiago Prado, Sergio Lopes
Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná
Curitiba, Brasil
roberto.budzinski@gmail.com

***Resumo*—Neste trabalho, se utiliza a modelagem matemática, neste caso, o modelo de Rulkov e a abordagem por meio dos conceitos de redes para simular uma rede neural e investigar acerca da sua dinâmica. Sabe-se que redes neurais com o comportamento de *burst* podem apresentar características de não-estacionariedade, bem como multiestabilidade. Dessa forma, se deseja investigar a relação entre os comportamentos citados e a topologia da rede, especificamente, como a adição de conexões não locais afeta os fenômenos de interesse. Para tal, utilizam-se as ideias de análise de recorrência, especificamente, por meio do determinismo, o qual expressa a quantidade de pontos recorrentes que estão em estruturas diagonais, para investigar o comportamento dinâmico da redes neurais e desta forma obter mais informações acerca da influência da topologia sobre as mesmas.**

***Palavras-chave*—redes neurais, análise de recorrência, análise de dados.**

I. Introdução

Desde o século passado, o avanço da computação fez que com o uso de modelos matemáticos para estudo da natureza fosse ampliado. O presente trabalho se utiliza do modelo de Rulkov [1], o qual descreve o comportamento dinâmico de *burst*, que pode ser descrito como uma sequência de disparos seguidos de um período quiescente. Entretanto, de um modo geral, os modelos são feitos para o estudo de um neurônio individual. Desta forma, para que seja possível estabelecer uma conexão mais próxima da realidade, usa-se a abordagem de rede, considerando assim, o cérebro como uma rede complexa, onde os neurônios podem ser entendidos como os nodos e as conexões entre os neurônios como as conexões entre os próprios nodos [2]. Sobre estas redes, geralmente são consideradas as topologias de pequeno mundo, livre de escala e aleatória [3], sendo que existem indícios experimentais de que regiões cerebrais funcionam segundo estas arquiteturas.

Em contraste com a sincronização, sobre a estacionariedade e estabilidade de redes neurais as informações são escassas. Em [4] os autores mostram que uma rede neural com comportamento de *bursting* sob regime de pequeno mundo apresenta comportamento não estacionário e multiestável para regiões com parâmetro de acoplamento fraco. É possível observar neste mesmo trabalho que para esta rede, existe o comportamento de "dois estados" tal que o sistema possui dois estados preferenciais nos quais permuta ao longo do tempo, sendo que as distribuições dos tempos de estabilidade desses estados escalam com leis de potência, indicando assim que a rede pode possuir comportamento crítico nesta região maleável. Nesse sentido, o presente trabalho pretende estudar a relação entre os fenômenos observados em [4] e a topologia da rede, particularmente, com a adição de conexões não locais. Para tal, pode-se partir de uma rede de segundos vizinhos (apenas conexões locais) e então aumentar a probabilidade da adição de uma conexão não local por meio da rota de Newman-Watts [5]. Desta forma, por meio do uso de análise de recorrência, espera-se obter mais informações sobre a dependencia do comportamento dinâmico de redes neurais a respeito da topologia da mesma, uma vez que, como dito anteriormente, o próprio cérebro humano apresenta distintas arquiteturas de conexão.

Projeto patrocinado pelo CNPq e pela CAPES.

II. Modelo e Arquitetura de Conexão

O modelo de Rulkov [1] pode ser entendido como um mapa acoplado bidimensional que é capaz de reproduzir o comportamento dinâmico neuronal conhecido como *burst*. Vale ressaltar que existem diversos modelos de equações diferenciais que reproduzem o mesmo padrão dinâmico, entretanto, a grande vantagem do modelo adotado consiste no fato de ser uma equação de diferença e desta forma, o tempo computacional é extremamente reduzido. Matematicamente, o modelo pode ser escrito como:

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{1+x_n^2} + y_n + \frac{\varepsilon}{C_{\mathrm{n}}}\sum_{i,j=1}^{N} A_{i,j}, \tag{1}$$

$$y_{n+1} = y_n - \sigma x_n + \beta, \tag{2}$$

onde x representa a variável rápida, ou ainda o potencial sobre a membrana do neurônio, y a variável lenta do sistema, ε é o parâmetro de acoplamento da rede, C_{n} o fator de normalização e $A_{i,j}$ representa a matriz de adjacência que contém as informações sobre as conexões da rede. α, σ e β são parâmetro de modelagem que para o presente trabalho foram fixados em $\alpha = 4.1$ e $\sigma = \beta = 0.001$, pois dessa forma o comportamento de *burst* é obtido.

A respeito da arquitetura de conexão utilizada, parte-se de uma rede com conexões locais, do tipo segundos vizinhos e adicionam-se conexões não locais com uma probabilidade p por meio da rota de Newman-Watts [5] e então estuda-se a dependência dos comportamentos de interesse em função de p. Vale notar que existe uma região de probabilidades onde a topologia de pequeno mundo é alcançada e que no limite de $p \to 1$ obtem-se uma topologia de conexão global.

III. Metodologia

Sabe-se que sistemas dinâmicos, de um modo geral, apresentam a característica de repetição, não de forma literal, mas a menos de um *threshold*. Nesse sentido, pode-se definir uma matriz de recorrência tal qual em [6]:

$$R_{i,j}(\delta) = \Theta(\delta - |x_i - x_j|), i,j = 1,2,...,N, \tag{3}$$

onde R é a matriz de recorrência, δ é o *threshold*, Θ é a função de Heaviside e N é o tamanho da rede. Dessa forma, se um estado i é recorrente ao estado j então a matriz recebe 1 e se o oposto acontece a matriz recebe 0. Quando a análise de recorrência foi desenvolvida para investigação de sistemas dinâmicos, a mesma ocorria de forma visual, por meio de *recurrence plots*. Entretanto, novos métodos foram criados e com base em análises estatística da matriz de recorrência é possível caracterizar a dinâmica do sistema de forma mais detalhada. Para desenvolvimento do trabalho, usa-se a ferramenta estatística determinismo, a qual expressa a taxa de pontos recorrentes que recaem em estruturas diagonais em toda matriz de recorrência. Matematicamente, pode-se escrever o determinismo como feito em [6]:

$$\Delta(l_{\min}, \delta) = \frac{\sum_{l=l_{\min}}^{N} lP(l,\delta)}{\sum_{l=1}^{N} lP(l,\delta)}, \tag{4}$$

onde Δ é o determinismo, l é o tamanho da estrutura diagonal, $l_{\min}$ representa o tamanho mínimo para que uma estrutura diagonal seja considerada e P se refere aos histogramas dessas estruturas.

A partir dessa análise estatística, pode-se investigar acerca da dinâmica da rede neural em função do parâmetro de acoplamento e da sua topologia. Para tal, simula-se uma rede com 1024 neurônios de Rulkov e obtem-se o campo médio da mesma usando $V_m = \sum_{i=1}^{N} V_i/N$, onde V_i é o potencial de cada neurônio. Com base no campo médio, é possivel usar o determinismo para avaliar o comportamento médio temporal em função do parâmetro de acoplamento ε para diferentes condições iniciais e dessa forma investigar a multiestabilidade e como estas condições afetam a rede em cada região de acoplamento, assim como feito em [4]. Além disso, avalia-se também o comportamento temporal, por meio do determinismo em função do tempo para uma região de parâmetro de acoplamento. Dessa forma, por meio da distribuição dos valores de $\Delta(t)$ é possível verificar a existência de (não)estacionariedade, da mesma forma que realizado em [4].

IV. Considerações Finais

Com base no prodecimento descrito acima, espera-se obter informações sobre a multiestabilidade, a sensibilidade às condições iniciais e não estacionariedade em relação à topologia da rede, particularmente, qual o papel de conexões (não)locais no comportamento dinâmico da mesma, desta forma, buscando entendimento sobre problemas reais, uma vez que, como dito anteriormente, são observados em redes neurais reais diferentes arranjos topológicos.

Agradecimentos

Este trabalho tem o apoio do CNPq e da CAPES.

Referências

[1] Nikolai F Rulkov. Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map. *Physical Review E*, 65(4):041922, 2002.

[2] C. C. Hilgetag and M. Kaiser. *Lectures in Supercomputational Neuroscience: Dynamics in Complex Brain Networks*. Springer, Berlin, 2008.

[3] Duncan J Watts and Steven H Strogatz. Collective dynamics of 'small-world'networks. *nature*, 393(6684):440–442, 1998.

[4] RC Budzinski, BRR Boaretto, TL Prado, and SR Lopes. Detection of nonstationary transition to synchronized states of a neural network using recurrence analyses. *Physical Review E*, 96(1):012320, 2017.

[5] Mark EJ Newman, Steven H Strogatz, and Duncan J Watts. Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications. *Physical review E*, 64(2):026118, 2001.

[6] Norbert Marwan, M Carmen Romano, Marco Thiel, and Jürgen Kurths. Recurrence plots for the analysis of complex systems. *Physics reports*, 438(5):237–329, 2007.