Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia

25 a 27 de outubro, 2017

SMNE UFPR

Solução do Problema do Sistema Mola-Massa com uso do Método de Diferenças Finitas

João C. O. Vicente
Monique B. Filgueiras
Adilandri M. Lobeiro
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Departamento Acadêmico de Matemática (DAMAT)
Campo Mourão, Brasil
joaovicente@alunos.utfpr.edu.br, moniquefilgueiras@alunos.utfpr.edu.br, alobeiro@utfpr.edu.br

Liliana Madalena Gramani
Eloy Kavisky
Universidade Federal do Paraná (UFPR)
Departamento de Matemática (DMAT)
Curitiba, Brasil
gramani@ufpr.br, eloy.dhs@ufpr.br

***Resumo*—O Método de Diferenças Finitas é um método consagrado por resolver equações lineares de segunda ordem com coeficientes constantes, tais equações se fazem essenciais porque servem como modelos matemáticos de alguns processos físicos. Este tabalho traz a soluções analítica e numérica de um Problema de Valor Inicial para resolver o sistema mola-massa.**

***Palavras-chave*—Método de Diferenças Finitas; Solução Análitica; Solução Numérica;**

I. Introdução

Este trabalho trata da obtenção da solução numérica de um Problema de Valor Inicial (PVI) para problemas físicos do sistema mola-massa. Em particular, analisa-se o movimento de uma massa presa a uma mola. É considerada uma massa m pendurada em uma das extremidades de uma mola vertical de comprimento original l, como mostra a Figura 1.

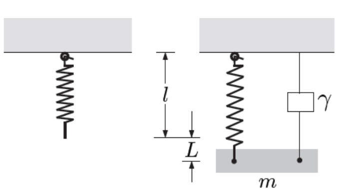

Figura 1: Sistema mola-massa

A equação linear de segunda ordem que aproxima o caso à situação física é dada por:

$$ms''(t) + \gamma s'(t) + ks(t) = F(t), \tag{1}$$

onde s é o espaço em que a massa se deslocou, s', a velocidade do corpo e s'' é a aceleração da massa. Sendo f é a força total agindo sobre a massa em função do tempo t, γ é uma constante positiva de proporcionalidade conhecida como a constante de amortecimento e k, a constante elástica da mola. A posição da massa é dada pela solução da equação (1), sujeita às condições iniciais $s(0) = s_0$ e $s'(0) = v_0$ [2].

II. Desenvolvimento

Para aplicar o Método de Diferenças Finitas (MDF) no Problema de Valor Inicial (PVI) de segunda ordem,

$$\left| \begin{array}{ccccc} y'' & = & p(x)y' + q(x)y + r(x) & , & a \leq x \leq b, \\ y(a) = \alpha & , & y'(a) = \lambda, & & \end{array} \right. \tag{2}$$

necessita utilizar aproximações de quociente de diferenças para aproximar tanto y' quanto y''.

Para fazer a discretização do intervalo $[a, b]$, em primeiro lugar, basta selecionar um número inteiro $N > 0$ e dividir o intervalo $[a, b]$ em $N+1$ subintervalos iguais cujos extremos são os pontos de malha [1].

$$x_i = a + ih, \tag{3}$$

para $i = 0, 1, \cdots, N+1$. Substituindo $i = 0$ em (3) obtém-se $x_0 = a$. Para $i = N+1$ tem se o extremo direito do intervalo,

$x_{N+1} = b$. Ao substituir $i = N+1$ em (3) encontra-se o tamanho do passo, h, dado por,

$$h = \frac{b-a}{N+1}. \quad (4)$$

A equação diferencial a ser aproximada é

$$y''(x_i) = p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) + r(x_i). \quad (5)$$

Ao substituir as fórmulas de diferenças em 5 tem-se

$$\frac{y(x_i+h) - 2y(x_i) + y(x_i-h)}{h^2} = p(x_i)\left[\frac{y(x_i+h) - y(x_i-h)}{2h}\right] + q(x_i)y(x_i) + r(x_i) - \frac{h^2}{12}\left[2p(x_i)y^{(3)}(\eta_i) - y^{(4)}(\xi_i)\right],$$

para $\xi_i, \eta_i \in]x_i - h, x_i + h[$. Ao considerar as condições iniciais, obtém-se

$$\begin{cases} \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} = p(x_i)\left[\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}\right] + q(x_i)y(x_i) + r(x_i) \\ \qquad - \frac{h^2}{12}\left[2p(x_i)y^{(3)}(\eta_i) - y^{(4)}(\xi_i)\right] \\ y(a) = \alpha \quad , \quad y'(a) = \lambda, \end{cases}$$

para $i = 0, 1, 2, \cdots, N$, onde $y(x_i + h) = y(x_{i+1})$ e $y(x_i - h) = y(x_{i-1})$.

Ao fazer $w_i \approx y(x_i)$, encontra-se o MDF com erro de truncamento da ordem $O(h^2)$, dado por

$$\left(\frac{-w_{i+1}+2w_i-w_{i-1}}{h^2}\right) + p(x_i)\left(\frac{w_{i+1}-w_{i-1}}{2h}\right) + q(x_i)w_i = -r(x_i), \quad (6)$$

para todo $i = 0, 1, 2, \cdots, N$, em que

$$w_0 = \alpha \quad , \quad w_{-1} = w_1 - 2h\lambda \quad (7)$$

Ao multiplicar a equação (6) por h^2, e fazer as devidas simplificações tem-se

$$-\left(1 + \tfrac{h}{2}p(x_i)\right)w_{i-1} + \left(2 + h^2 q(x_i)\right)w_i - \left(1 - \tfrac{h}{2}p(x_i)\right)w_{i+1} = -h^2 r(x_i)$$

Portanto, para $i = 0, 1, 2, ..., N$, obtém-se um sistema de $N+1$ equações por $N+1$ incógnitas, dado por

$$\begin{cases} \left(-1 - \frac{h}{2}p(x_i)\right)w_{i-1} + \left(2 + h^2 q(x_i)\right)w_i + \left(-1 + \frac{h}{2}p(x_i)\right)w_{i+1} = -h^2 r(x_i) \\ w_0 = \alpha \text{ e } w_{-1} = w_1 - 2h\lambda. \end{cases}$$

Como estudo de caso, considera-se o sistema mola-massa, governado pela equação diferencial

$$s'' + 0,125s' + s = 0, \quad (8)$$

onde s está medindo em pés e t em segundos, sujeito as condições iniciais, $s(0) = 2$ e $s'(0) = 0$. Pede-se para determinar a posição da massa em qualquer instante.

Com o objetivo de verificar a veracidade do MDF obteve-se a solução analítica da EDO (8) sujeito as condições iniciais, dado por

$$s = e^{\frac{-t}{16}}\left(2\cos\frac{\sqrt{255}}{16}t + \frac{2}{\sqrt{255}}\sin\frac{\sqrt{255}}{16}t]\right) \quad (9)$$

Posteriormente, desenvolveu um algoritmo no software $Maple18$® para obter a solução numérica e comparar com a solução analítica. Após fazer isso, encontra-se alguns resultados conforme ilustra a Tabela 1.

Os valores determinados para t, seguiram um passo de $0,25$, assim foram obtidas a solução numérica e analítica para a equação do espaço. Pode-se notar que o erro relativo apresentado é pequeno, devido a quantidade de iterações utilizada, sendo N =200 para a solução deste problema.

Tabela I: Comparação entre alguns dos resultados obtidos.

t	s (analítica)	s (numérica)	Erro Relativo
0,25	1,760233075	1,757692308	0,001443426
0,50	1,479703596	1,47525148	0,003008789
0,75	1,117226946	1,110716432	0,005827387
2,25	-1,300865888	-1,309863469	0,006916609
2,50	-1,512365792	-1,518800902	0,004254996
2,75	-1,624780997	-1,62784482	0,001885684
3,00	-1,634278666	-1,633358475	0,000563056
3,25	-1,543443854	-1,538188111	0,003405205
3,50	-1,360923802	-1,351288336	0,007080092

Conforme é possível visualizar na Figura 2, a solução numérica se mostra bem aproximada da solução analítica. Na imagem a solução analítica está representada por uma curva contínua, já a numérica por uma curva pontilhada.

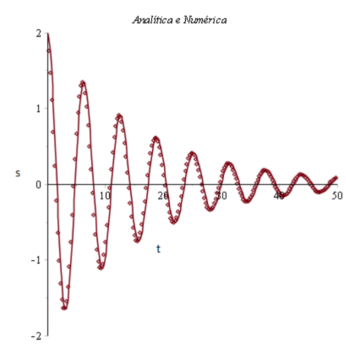

Figura 2: Comparação entre a solução analítica e numérica

III. Conclusão

Os resultados da solução numérica obtida a partir da utilização do software $Pyton$® foi comparado com a solução analítica informada. De acordo com as informações contidas na Tabela 1 fica claro que o MDF é satisfatório para resolução do problema sistema mola-massa.

Referências

[1] R. L. Burden e J. D. Faires, Análise Numérica, *Pioneira Thomson Learning.*, São Paulo, 2003.

[2] W. E. Boyce e R. C. DiPrima, Equações Diferenciais Elementares. Rio de Janeiro, 2013.