



**Simpósio de Métodos  
Numéricos em Engenharia**

**25 a 27 de outubro, 2017**

# *Uma nova técnica de resolução para o Problema da Régua de Golomb*

Deidson Vitorio Kurpel <sup>a, 1</sup>

Cassius Tadeu Scarpin <sup>a, b, 2</sup>

José Eduardo Pécora Junior <sup>a, b, 3</sup>

Alexandre Checoli Choueiri <sup>a, 4</sup>

Cleder Marcos Schenekemberg <sup>a, 5</sup>

Nathália Cristina Ortiz da Silva <sup>a, 6</sup>

<sup>a</sup> Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia

<sup>b</sup> Departamento de Administração Geral e Aplicada  
Universidade Federal do Paraná

Curitiba, Brasil

<sup>1</sup> [kurpeld@gmail.com](mailto:kurpeld@gmail.com), <sup>2</sup> [cassiusts@gmail.com](mailto:cassiusts@gmail.com), <sup>3</sup> [pecora@ufpr.br](mailto:pecora@ufpr.br), <sup>4</sup> [alexandrechecoli@gmail.com](mailto:alexandrechecoli@gmail.com), <sup>5</sup> [cledercms@hotmail.com](mailto:cledercms@hotmail.com),  
<sup>6</sup> [ncosilva2@gmail.com](mailto:ncosilva2@gmail.com)

**Resumo**—Uma Régua de Golomb difere de uma régua comum por cada par de marcas possuir uma distância única, ou seja, nenhum outro par de marcas deve obter a distância já encontrada anteriormente. Este trabalho apresenta uma nova abordagem para resolução do Problema da Régua de Golomb. O método proposto inicia-se com uma heurística construtiva para encontrar uma solução inicial para o problema. Em seguida, aplica-se uma heurística de melhoria baseada no *Fix and Optimize*. Os resultados desta abordagem são comparados com as respostas obtidas por meio da resolução do modelo matemático. Verificou-se que, para régua com até 35 marcas, o método proposto encontrou uma solução viável para o problema, enquanto a resolução do modelo matemático não obteve solução para os casos acima de 10 marcas.

**Palavras-chave**—otimização; heurística de melhoria; Problema da Régua de Golomb.

## I. INTRODUÇÃO

Uma régua comum possui suas marcas igualmente espaçadas em alguma unidade de medida, tal como milímetros ou centímetros. Para medir qualquer distância entre a primeira e a última marca da régua, posiciona-se a régua de tal maneira que a diferença entre duas marcas seja igual a distância desejada (Fig. 1 (a)). Para medir a distância de 5 centímetros, podemos colocar a régua entre as marcas 0 e 5 ou 1 e 6, por exemplo.

Em uma Régua de Golomb, ao contrário das usuais, a diferença entre quaisquer duas marcas corresponde a uma distância que não é medida por nenhum outro par de marcas [1]. Por exemplo, se existe uma marca na posição 1 e outra na posição 4, então nenhum outro par de marcas deve estar separado por uma distância de 3 centímetros (Fig. 1 (b)). A Régua de Golomb tem esse nome em homenagem a Solomon Wolf Golomb (1932-2016), que atuou nas áreas de matemática e engenharia na University of Southern California [2].

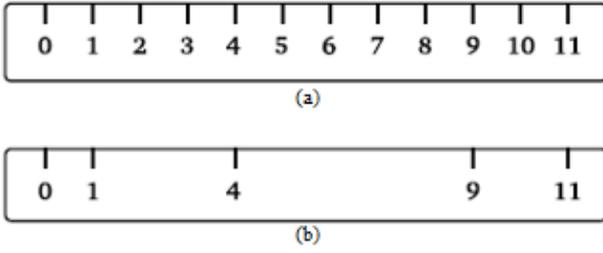


Figura 1. Exemplo de régua comum (a) e de Régua de Golomb (b).

Usando a régua da Fig. 1 pode-se medir as distâncias  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ . Já com a régua da Fig. 2, não é possível escolher duas marcas de tal forma que a distância entre elas seja igual a 6. Por meio de uma escolha adequada de duas marcas, pode-se, neste caso, medir as seguintes distâncias  $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}$ .

De acordo com [3], uma Régua de Golomb é definida da seguinte maneira: dado um inteiro positivo  $n$ , seja o conjunto  $m_1, \dots, m_n$  as posições inteiras de marcas em uma régua. Considera-se que  $m_i < m_j$  para todo  $1 \leq i < j \leq n$  e  $m_1 = 0$ . A distância entre quaisquer dois pares de marcas em uma Régua de Golomb é única, isto é,  $m_j - m_i$  para todo  $1 \leq i < j \leq n$  são distintos. Ao minimizar  $m_n$ , isto é, ao procurar o menor comprimento possível de uma régua com  $n$  marcas, tem-se o Problema da Régua de Golomb (PRG). Uma Régua de Golomb com  $n$  marcas é dita ótima se não existir nenhuma outra régua mais curta.

Existem diversas aplicações para a Régua de Golomb. A mais conhecida é a disposição de antenas para captação de sinais em radioastronomia, cujo objetivo é distribuir antenas geograficamente de modo que a distância entre cada par de antenas é única [4]. Outras aplicações podem ser encontradas nas seguintes áreas: cristalografia de raios-X [5], telecomunicação [6] e criptografia [7].

Embora o problema seja de difícil resolução, não há prova formal que ele é NP-Hard [8], [9]. Existem diversas abordagens para a resolução do PRG na literatura. Métodos aproximativos para geração de Réguas de Golomb foram propostos por [10], [11], [12], [13], [14] e [15]. Metaheurísticas, tais como algoritmo genético [16], algoritmo evolucionário [17] e GRASP [18], também foram extensamente utilizadas como técnicas de resolução do problema. Um método de relaxação Lagrangeana e uma formulação matemática para o problema podem ser encontrados em [3].

Este trabalho apresenta uma nova técnica de resolução para o PRG. Uma solução inicial é encontrada por um procedimento construtivo e, em seguida, procura-se otimizar esta solução por meio de uma heurística de melhoria baseada no *Fix and Optimize*. Os resultados obtidos pelo método proposto são comparados com os valores encontrados pela resolução do modelo matemático de [3].

O trabalho está organizado da seguinte maneira. Na Seção I descreve-se, de modo contextualizado, o PRG. A Seção II apresenta o modelo matemático do problema abordado, enquanto a Seção III explica a metodologia de resolução

proposta. Os resultados dos testes computacionais são apresentados na Seção IV. Por fim, na seção V são feitas as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

## II. MODELO MATEMÁTICO

O modelo matemático de [3], apresentado nesta seção, é baseado na formulação encontrada em [19]. Considere que as marcas tomam as suas posições definidas no conjunto  $\{1, \dots, L\}$ , para algum limitante superior (*upper bound*)  $L$ . Este limitante, fundamental na modelagem do problema, pode ser obtido por algum procedimento heurístico, fornecendo seu valor como parâmetro inicial para o problema. No modelo de [3], as variáveis de decisão são as  $\binom{n}{2}$  distâncias  $d_{ij} = m_j - m_i$ , onde  $m_j$  e  $m_i$ ,  $i \neq j$ , são marcas da régua.

Introduz-se um conjunto de arcos  $\{(i, j) | 1 \leq i < j \leq n\}$ , correspondentes aos pares de marcas  $m_i$  e  $m_j$ , e um conjunto dos possíveis comprimentos  $\{1, \dots, L\}$ . Considere a variável binária  $f_{ijv}$ , tal que  $f_{ijv} = 1$  se o par  $(i, j)$  assume uma distância  $v \in \{1, \dots, L\}$  e  $f_{ijv} = 0$ , caso contrário.

O modelo matemático é dado por:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{k=1}^{n-1} d_{k,k+1} \quad (1)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{v=1}^L f_{ijv} = 1, \quad 1 \leq i < j \leq n \quad (2)$$

$$\sum_{i < j} f_{ijv} \leq 1, \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad v = 1, \dots, L \quad (3)$$

$$\sum_{v=1}^L v \cdot f_{ijv} = d_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n \quad (4)$$

$$\sum_{k=i}^{j-1} d_{k,k+1} = d_{ij}, \quad 2 \leq i+1 < j \leq n \quad (5)$$

$$f_{ijv} \in \{0,1\}, \quad 1 \leq i < j < n, \quad v = 1, \dots, L \quad (6)$$

No modelo, a função objetivo visa minimizar o comprimento da régua. As restrições (2) garantem a existência de apenas uma medida entre um par de marcas  $(i, j)$ . As restrições (3) garantem que, para cada distância  $v$  (onde  $v \in \{1, \dots, L\}$ ), exista, no máximo, um par de marcas com essa distância. Já as restrições (4) atribuem os valores das distâncias às variáveis do modelo, enquanto (5) garantem que cada parte da régua seja composta por seus pedaços menores. Por fim, (6) representa o domínio das variáveis de decisão do modelo.

## III. METODOLOGIA

A abordagem de resolução proposta neste trabalho, em um primeiro instante, utiliza uma heurística construtiva para a obtenção de um limitante superior  $L$  e de uma solução inicial para o problema. Em seguida, uma heurística de

melhoria é empregada, visando, em cada iteração, encontrar soluções melhores e diminuir o limitante superior usado na modelagem do problema.

### A. Solução Inicial e Limitante Superior

A solução inicial para o problema é obtida de forma construtiva. Para exemplificar, considere uma régua com sete marcas (Fig. 3 (a)).

A solução inicial parte da definição do primeiro comprimento da régua. Na Fig. 3 (a), isso equivale ao número 1 (em vermelho) inserido no arco (1,2). O próximo comprimento de arco a ser inserido na régua é o 2 (Fig. 3 (b)), que corresponde ao arco (6,7). A construção da solução alterna a inserção de valores nos lados opostos da régua. A cada etapa da construção (Fig. 3 (c), (d), (e), (f)), é necessário eliminar as combinações de comprimento que já foram inseridas, isto é, deve-se verificar se o acréscimo de um determinado comprimento na régua manterá a factibilidade do problema.

A Fig. 3 ilustra todos os passos envolvidos na construção da solução. O resultado final, com todas as posições preenchidas, totaliza  $Z_0 = 1 + 3 + 6 + 8 + 5 + 2 = 25$ . Esta solução também fornece o limite superior para a modelagem do problema, sendo  $L = 25$ .

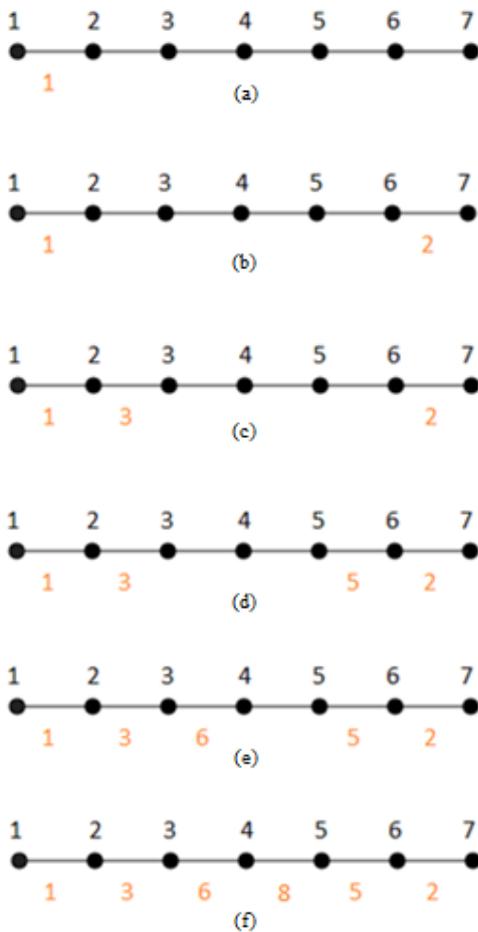


Figura 3. Etapas para obtenção da solução inicial.

### B. Heurística de Melhoria

Uma vez determinado o limitante superior, de acordo com a heurística da subseção anterior, pode-se utilizar o modelo de [3]. Esta modelagem depende de  $L$ , de modo que, quanto menor o limitante superior, menor será o número de variáveis envolvidas na formulação matemática do problema.

A metodologia empregada é uma adaptação da heurística *Fix and Optimize* (F&O). A nova abordagem, denominada *Fix and Optimize* Modificado (F&OM), fixa determinados comprimentos de arco da régua, gerando subproblemas, com espaço de busca reduzido em relação ao problema original.

O F&OM visa definir quais variáveis serão fixadas no processo de resolução. Inicialmente, apenas as variáveis relacionadas aos dois maiores comprimentos de arcos não são fixadas. Todas as demais variáveis recebem os valores da melhor solução corrente, que num primeiro instante, coincidem com os valores da solução inicial. Após fixar as variáveis do modelo, busca-se resolver o subproblema resultante. Em seguida, define-se as novas variáveis que serão fixadas de acordo com os maiores comprimentos de arcos na solução atual.

Caso não ocorra melhoria na resolução de um subproblema, incrementa-se unitariamente o número de variáveis livres, até se obter melhoria da solução atual ou até todas as variáveis ficarem livres. Quando há melhoria na solução atual, retorna-se a fixar os dois maiores comprimentos de arco da solução corrente. Este processo é similar ao método de busca local *Variable Neighbourhood Descent* (VND), no qual aumenta-se ou diminui-se o raio da vizinhança conforme melhoria ou não da solução [20]. O F&OM possui dois critérios de parada: tempo limite de execução e número de variáveis livres. A Fig. 4 apresenta o algoritmo proposto:

```

FixAndOptimizeModificado()
Tempo ← 0
TempoLimite ← T
Arcos ← NumArcos
QtidadeArcosLivres ← 2
SolucaoAtual ← SolucaoInicial
Z_Solucao ← Z_SolucaoInicial
L ← Z_SolucaoInicial
    
```

```

Enquanto (Tempo < TempoLimite) e (QtidadeArcosLivres ≤ Arcos) Faça
    Z_SolucaoAtual ← ResolvaSubproblema(QtidadeArcosLivres,
    SolucaoAtual)
    Se (Z_SolucaoAtual < Z_Solucao) Então
        Z_Solucao ← Z_SolucaoAtual
        QtidadeArcosLivres ← 2
        L ← Z_SolucaoAtual
    Senão
        QtidadeArcosLivres ← QtidadeArcosLivres + 1
    Fim Se
Fim enquanto

Retorne SolucaoAtual
Fim
    
```

Figura 4. Pseudocódigo do F&OM.

#### IV. RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Os algoritmos apresentados neste trabalho foram implementados em linguagem VB.net e utilizou-se o software de otimização *Gurobi Optimizer 7.0.1* para a resolução dos subproblemas. Os testes foram executados em um computador com sistema operacional *Microsoft Windows 10*, processador *Intel® Core i5-4200U CPU @ 1,60HZ 2,30GHZ*, memória RAM de 8GB e sistema do tipo 64 bits.

Um tempo limite de 3.600 segundos foi estabelecido para a execução dos testes. Ao todo, 15 casos foram avaliados, considerando régua entre 5 e 35 marcas. Os resultados, apresentados na TABELA , foram comparados às soluções obtidas pelo Método Exato e aos Menores Comprimentos Conhecidos (MCC), disponíveis em <https://ibm.co/2vYrZZa>. O valor ótimo de problemas com até 23 marcas é conhecido, isto é, prova-se que o MCC é o menor possível.

TABELA I: RESULTADOS OBTIDOS COM OS MÉTODOS AVALIADOS

Marcas	MCC	Método Exato	Solução Inicial	F&OM	Gap
5	11	11	11	11	0,00%
6	17	17	17	17	0,00%
7	25	25	25	25	0,00%
8	34	34	36	34	0,00%
9	44	44	50	44	0,00%
10	55	55	69	55	0,00%
11	72	-	92	72	0,00%
12	85	-	116	95	11,76%
13	106	-	141	122	15,09%
14	127	-	172	140	10,23%
15	151	-	206	183	21,19%
20	283	-	465	389	37,45%
25	480	-	931	798	66,25%
30	680	-	1599	1353	98,97%
35	987	-	2562	2279	130,90%

- Nenhuma solução foi encontrada no tempo limite de execução.

O método exato encontrou solução, dentro do limite de tempo pré-determinado, para régua com até 10 marcas, sendo todos valores ótimos. Acima de 10 marcas, nenhuma solução factível foi alcançada. Já o F&OM, partindo da solução inicial, encontrou soluções ótimas para régua com até 11 marcas. Embora, para casos acima de 11 marcas a solução encontrada pelo método proposto não tenha superado o MCC, em todos os casos uma solução factível foi encontrada e otimizada pelo F&OM.

#### V. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, apresentou-se uma abordagem heurística para solucionar o problema da Régua de Golomb, baseada numa adaptação do método *Fix and Optimize*. Os resultados obtidos pelo método proposto foram comparados com as soluções dadas pelo software de otimização *Gurobi* e com os melhores resultados da literatura. Em todos os casos avaliados o F&OM obteve soluções factíveis, melhorando as soluções iniciais, enquanto o *Gurobi* não foi capaz de

determinar soluções factíveis para régua com mais de 10 marcas no limite de tempo estabelecido.

Para avaliar a metodologia proposta, adotou-se um critério guloso de escolha de variáveis livres, optando por não fixar as variáveis relacionadas aos maiores arcos da solução atual. Como sugestões para trabalhos futuros, pode-se testar outros critérios de seleção de variáveis, como, por exemplo, escolher arcos consecutivos na régua. Outra sugestão seria considerar algum mecanismo de diversificação para o F&OM, escolhendo aleatoriamente quais e quantas variáveis permanecerão livres em cada iteração da heurística, bem como explorar novas alternativas para a geração de soluções iniciais, como o Método de Construção de Rusza-Linström.

#### REFERÊNCIAS

- [1] C. Meyer and P. A. Papakonstantinou, "On the complexity of constructing Golomb Rulers," *Discret. Appl. Math.*, vol. 157, no. 4, pp. 738–748, 2009.
- [2] S. Bansal, "Optimal Golomb ruler sequence generation for FWM crosstalk elimination: Soft computing versus conventional approaches," *Appl. Soft Comput.*, vol. 22, pp. 443–457, 2014.
- [3] M. R. Slusky and W.-J. van Hoeve, "A Lagrangian Relaxation for Golomb Rulers," in *Integration of AI and OR Techniques in Constraint Programming for Combinatorial Optimization Problems: 10th International Conference, CPAIOR 2013, Yorktown Heights, NY, USA, May 18-22, 2013. Proceedings*, C. Gomes and M. Sellmann, Eds. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013, pp. 251–267.
- [4] R. C. Alperin and V. Drobot, "Golomb Rulers," *Math. Mag.*, vol. 84, no. 1, pp. 48–55, 2011.
- [5] G. S. Bloom and S. W. Golomb, "Applications of numbered undirected graphs," *Proc. IEEE*, vol. 65, no. 4, pp. 562–570, Apr. 1977.
- [6] R. J. F. Fang and W. A. Sandrin, "Carrier frequency assignment for nonlinear repeaters," *COMSAT Tech. Rev.*, vol. 7, pp. 227–245, May 1977.
- [7] S. W. Golomb and G. Gong, *Signal Design for Good Correlation: For Wireless Communication, Cryptography, and Radar*. Cambridge University Press, 2005.
- [8] N. Memarsadeghi, "NASA Computational Case Study: Golomb Rulers and Their Applications," *Comput. Sci. Eng.*, vol. 18, no. 6, pp. 58–62, Nov. 2016.
- [9] M. Sorge, H. Moser, R. Niedermeier, and M. Weller, "Exploiting a hypergraph model for finding Golomb rulers," *Acta Inform.*, vol. 51, no. 7, pp. 449–471, Oct. 2014.
- [10] P. Erdős, "On a Problem of Sidon in Additive Number Theory and on Some Related Problems Addendum," *J. London Math. Soc.*, vol. 19, no. 76\_Part\_4, p. 208, 1944.
- [11] B. Linström, "An inequality for B2-sequences," *J. Comb. Theory*, vol. 6, no. 2, pp. 211–212, 1969.
- [12] I. Z. Ruzsa, "Solving a linear equation in a set of integers I," *Acta Arith.*, vol. 65, no. 3, pp. 259–282, 1993.
- [13] R. C. Bose and S. Chowla, "Theorems in the additive theory of numbers," *Comment. Math. Helv.*, vol. 37, no. 1, pp. 141–147, Dec. 1962.

- [14] J. Singer, "A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory," *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 43, pp. 377–385, 1938.
- [15] A. Dimitromanolakis, "Analysis of the Golomb Ruler and the Sidon Set Problems, and Determination of Large, Near-Optimal Golomb Rulers," 2002.
- [16] S. W. Soliday, A. Homaifar, and G. L. Leiby, "Genetic Algorithm Approach to the Search for Golomb Rulers," in *Proceedings of the 6th International Conference on Genetic Algorithms*, 1995, pp. 528–535.
- [17] F. B. Pereira, J. Tavares, and E. Costa, "Golomb Rulers: The Advantage of Evolution," in *Progress in Artificial Intelligence: 11th Portuguese Conference on Artificial Intelligence, EPIA 2003, Beja, Portugal, December 4-7, 2003. Proceedings*, F. M. Pires and S. Abreu, Eds. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003, pp. 29–42.
- [18] C. Cotta and A. J. Fernández, "A Hybrid GRASP – Evolutionary Algorithm Approach to Golomb Ruler Search," in *Parallel Problem Solving from Nature - PPSN VIII: 8th International Conference, Birmingham, UK, September 18-22, 2004. Proceedings*, X. Yao, E. K. Burke, J. A. Lozano, J. Smith, J. J. Merelo-Guervós, J. A. Bullinaria, J. E. Rowe, P. Tiño, A. Kabán, and H.-P. Schwefel, Eds. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004, pp. 481–490.
- [19] R. Lorentzen and R. Nilsen, "Application of linear programming to the optimal difference triangle set problem," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 37, no. 5, pp. 1486–1488, Sep. 1991.
- [20] N. Mladenović and P. Hansen, "Variable neighborhood search," *Comput. Oper. Res.*, vol. 24, no. 11, pp. 1097–1100, 1997.