SMNE UFPR
Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia
25 a 27 de outubro, 2017

Teoria de Sturm-Liouville e Problemas de Valores de Contorno

João Antonio Francisconi Lubanco Thomé
Curso de Matemática
Universidade Federal do Paraná - UFPR
Curitiba, Brasil
jolubanco@gmail.com

Prof. Dr. Fernando de Ávila Silva
Departamento de Matemática
Universidade Federal do Paraná - UFPR
Curitiba, Brasil

***Resumo*—No estudo das Equações Diferenciais Parciais(EDP), em particular na equação do calor homogênea, nos deparamos com o método de separação de variáveis para obtenção da solução formal do problema. Este método consiste na suposição da independência das variáveis em questão, e a consideração que a solução possa ser descrita como um produto de duas outras funções independentes. Neste caso, nos deparamos com uma equação diferencial ordinária(EDO) no qual temos de encontrar suas soluções. Assim, neste trabalho iremos utilizar a Teoria de Sturm-Liouville para a resolução destas EDO's mais gerais, e consequentemente obter um método de encontrar a solução da equação do calor não-homogênea.**

***Palavras-chave*—EDP; Sturm-Liouville; Equação do Calor**

I. Introdução

Neste trabalho estamos interessados em encontrar uma forma de obter a solução para o problema de condução de calor não-homogêneo, descrito por

$$\begin{cases} r(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u + F(x,t) \\ u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = 0 \quad u_x(1,t) + h_2 u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \tag{1}$$

Para isso, vamos primeiramente considerar o caso homogêneo, ou seja, $F(x,t) = 0$. Então

$$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u \tag{2}$$

Programa de Educação Tutorial, PET-Matemática.

Aplicando o *Método de Separação de Variáveis*, isto é, suponha que a solução do problema (1) pode ser expressa como uma produto de duas outras funções com variáveis independentes, $u(x,t) = X(x)T(t)$. Assim, aplicando $u = u(x,t)$ na equação (2), obtemos

$$r(x)X(x)T'(t) = [p(x)X'(x)T(t)]_x - q(x)X(x)T(t) \tag{3}$$

Como não estamos interessados nas soluções triviais do problema, podemos supor $X(x) \neq 0$ e $T(t) \neq 0$, para todo $x \in [0,1]$ e $t \in [0,\infty)$. Desta forma, dividindo (3) por $r(x)X(x)T(t)$, temos

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{[p(x)X'(x)T(t)]_x}{r(x)X(x)T(t)} - \frac{q(x)}{r(x)} = -\lambda \tag{4}$$

Em que tomamos (4) igual a uma constante λ, devido ao fato que no lado esquerdo da igualdade depende apenas de t e o direito apenas de x. Assim, para que relação seja satisfeita, consideramos a equação igual a uma constante. Isolando os termos em (4), chegamos em

$$-[p(x)X']' + q(x)X = \lambda r(x)X \tag{5}$$

Note que, como supomos $u(x,t) = X(x)T(t)$, ao aplicarmos as condições de contorno do problema (1), temos

$$\begin{aligned} u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = 0 \quad &\Rightarrow \quad X'(0)T(t) - h_1 X(0)T(t) = 0 && (6)\\ &\Rightarrow \quad X'(0) - h_1 X(0) = 0 && (7) \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos $X'(1) + h_2 X(1) = 0$. Assim, vamos considerar o seguinte problema de contorno

$$\begin{cases} -[p(x)X']' + q(x)X = \lambda r(x)X \\ X'(0) - h_1 X(0) = 0 \\ X'(1) + h_2 X(1) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Se tomarmos p, q e r satisfazendo condições adequadas de continuidade e $p(x) > 0$ e $r(x) > 0$, então (8) é chamado de *Problema de Valor de Contorno de Sturm-Liouville*. Desta forma, através desta teoria, vamos ser capazes de descrever a solução do problema (1), como uma combinação de autofunções normalizadas do Problema de Sturm-Liouville, isto é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x) \tag{9}$$

e assim, determinar o parâmetro $b_n(t)$ de modo a satisfazer (9).

II. Motivação

Como motivação, vamos tomar um caso mais simples. Por exemplo, considere o problema de condução de calor em uma barra de seção reta uniforme com as condições descritas em [1], e representado na Fig.1.

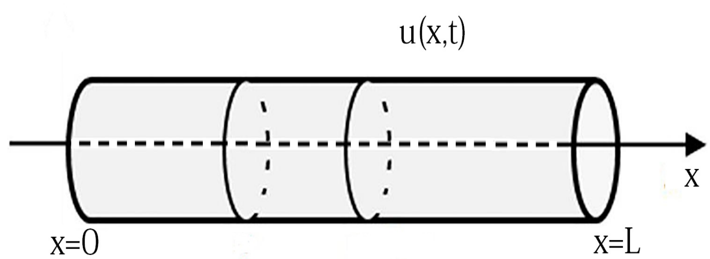

Figura 1: Condução de calor em um barra homogênea finita.

Assim, estamos interessados em determinar uma função $u = u(x,t)$ que descreva a condução de calor na barra. A equação diferencial que descreve esse processo, junto com suas condições iniciais e de contorno, é dada por

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t & 0 \leq x \leq L \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 \leq x \leq L \\ u(0,t) = 0 \quad u(L,t) = 0 & t \geq 0 \end{cases} \tag{10}$$

sendo α^2 uma constante conhecida como *difusividade térmica* que depende apenas do material da barra. Para determinar a solução, utilizamos o *Método de Separação de Variáveis*, isto é, supomos que $u(x,t) = X(x)T(t)$. Assim, ao invés de resolvermos uma equação diferencial parcial, recaímos no problema de resolver duas equações diferencias ordinárias, em que uma delas possui a seguinte forma

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \text{ e } X(L) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Resolvendo o problema (11), obtemos como solução formal de (10) a função

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t} \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{12}$$

com coeficiente c_n determinado por:

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{13}$$

Agradecimentos

Agradeço ao Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação pelo financiamento através do Programa de Educação Tutorial.

Referências

[1] BOYCE, W.E. & DIPRIMA R.C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 8 ed. (1998). LT & C.

[2] FIGUEIREDO, D.G. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. IMPA.

[3] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo*. vol 1. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, c1986.