



**Simpósio de Métodos
Numéricos em Engenharia**

25 a 27 de outubro, 2017

Cálculo comparativo nos domínios real e periódico de um operador pseudodiferencial

Izabela Patrício Bastos
PPGM
UFPR
Curitiba-PR Brasil
izabelapatricio@gmail.com

Ailin Ruiz de Zarate
DMAT/PPGM
UFPR
Curitiba-PR Brasil
ailin@ufpr.br

Resumo—Neste trabalho estuda-se um operador pseudodiferencial que aparece nos sistemas do tipo Boussinesq para ondas intermediárias e nas equações derivadas destes quando a propagação das ondas é restrita a uma única direção, como na equação de ondas longas intermediárias (ILW). O operador é estudado tanto no domínio das frequências, onde é inicialmente representado, quanto no domínio físico, distinguindo-se tanto o caso não periódico quanto o caso periódico. No caso periódico, a expressão do núcleo é dada por funções especiais, cujo cálculo é comparado com o caso não periódico no mesmo intervalo. E no caso periódico é analisado a sua representação por série de Fourier.

Palavras-chave—Ondas internas; modelos dispersivos; sistema do tipo Boussinesq; equação de Ondas Longas Intermediárias; operador pseudodiferencial; funções especiais.

I. INTRODUÇÃO

O objeto de estudo do presente trabalho é um operador pseudodiferencial muitas vezes denominado de Transformada de Hilbert na faixa. Tal operador aparece na redução das equações de Euler que descrevem a evolução de uma onda interna desenvolvida na interface entre duas camadas de fluidos invíscidos, imiscíveis, irrotacionais e incompressíveis de densidades diferentes, confinados em uma faixa plana com escalas que configuram um regime denominado de intermediário, [5], [9], [10]. No processo de redução das equações de Euler se faz necessário transformar a informação sobre a derivada normal na interface para derivada tangencial, e é este operador que faz a troca na geometria mencionada acima. A obtenção detalhada do operador é feita na seção II.

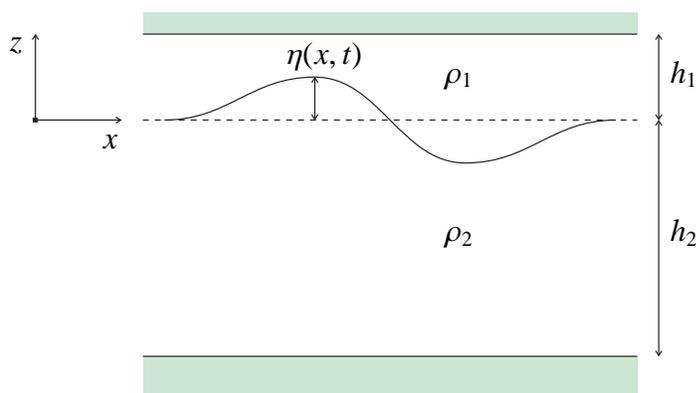


Figura 1: Configuração de duas camadas de fluidos limitados por uma tampa rígida e um fundo plano.

Como resultado da redução são obtidos sistemas do tipo Boussinesq. Especificamente temos o seguinte sistema bidirecional fracamente dispersivo e não linear, [5]:

$$\begin{cases} \eta_t - [(1 - \alpha\eta)u]_x = 0 \\ u_t + \alpha u u_x - \eta_x = \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}[u_{xx}], \end{cases} \quad (1)$$

onde $\eta(t, x)$ está relacionada à perturbação adimensionalizada na interface e $u(t, x)$ à componente horizontal da velocidade da camada superior, como na figura 1. Ambas incógnitas são funções das variáveis temporal e espacial (na direção horizontal), t e x , respectivamente. As derivadas parciais são denotadas por subíndices;

α e β são os parâmetros adimensionais positivos de não-linearidade e dispersão, respectivamente. As densidades originais $\rho_1 < \rho_2$ das camadas superior e inferior foram mantidas no termo que envolve o operador não local de interesse \mathcal{T} cujo símbolo no domínio das frequências é:

$$\widehat{\mathcal{T}}(k) = i \coth(k\delta), \quad (2)$$

para $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, no caso não periódico ($x \in \mathbb{R}$), ou $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, no caso periódico. A constante $\delta > 0$ é a espessura da camada inferior em repouso após escalamento, detalhes podem ser encontrados em [9]. A partir deste tipo de sistemas ainda é possível fazer uma redução unidirecional cujo resultado é a equação de ondas longas intermediária (ILW) descrita aqui seguindo a notação em [2],

$$u_t + \frac{1}{\delta} u_x + 2uu_x + \mathcal{T}[u_{xx}] = 0. \quad (3)$$

No caso não periódico, tem-se um par de Fourier, a saber,

$$\frac{1}{2\delta} \coth\left(\frac{\pi x}{2\delta}\right) \text{ e } -i \coth(k\delta), \quad (4)$$

por essa razão, o operador \mathcal{T} é dado por uma convolução da função contangente hiperbólica com a função argumento do operador:

$$\mathcal{T}[u](x) = -\frac{1}{2\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \coth\left[\frac{\pi}{2\delta}(x - \xi)\right] u(\xi) d\xi \quad (5)$$

onde a integral deve ser interpretada como valor principal de Cauchy.

Computacionalmente é impossível calcular a integral dada em (5) e um truncamento para um intervalo limitado é uma aproximação conceitualmente incorreta do operador \mathcal{T} . De fato, mostra-se na seção (III) que no domínio limitado $[-L, L]$, $L > 0$, o núcleo envolvido na convolução é uma função diferente da contangente hiperbólica.

Este trabalho está organizado como descrito a seguir. Na seção (II) é feita a dedução do operador no caso periódico. Na seção (III), obtém-se o núcleo do operador do caso periódico a partir das funções especiais Elípticas de Jacobi, Zeta de Jacobi e Integrais Elípticas completas do Primeiro Tipo, representadas por sua expansão em q-séries. Na seção (IV), compara-se o núcleo periódico descrito pelas funções especiais com o núcleo não periódico no domínio limitado $[-L, L]$ e é feita uma análise a respeito da série de Fourier truncada do caso periódico.

II. DERIVAÇÃO NO DOMÍNIO DAS FREQUÊNCIAS E SÉRIES DE FOURIER

Nesta seção será feita a dedução da Série de Fourier do operador \mathcal{T} no caso periódico.

Na redução das equações de Euler para o problema de duas camadas de fluidos descrito na seção anterior a informação da camada inferior é embutida nas equações da camada superior através do termo da derivada da pressão em x , já que a pressão é a mesma na interface do fluido. Pela Lei de Bernoulli na interface, o cálculo da derivada da pressão envolve o potencial de velocidade da camada inferior de tal forma que basta resolver um problema de Neumann na camada inferior em repouso, com profundidade δ , para um potencial de

velocidade $\nabla\phi$ nessa região fixada e com velocidade normal $g(x)$ que é uma aproximação da condição cinemática na interface original, respeitando a ordem da expansão assintótica em α e β . Detalhes podem ser encontrados em [9].

Dessa forma, a equação de Laplace com condição de Neumann é:

$$\begin{cases} \phi_{xx} + \phi_{zz} = 0, & -\delta < z < 0, & x \in \Pi[-L, L], \\ \phi(0, z) = \phi(2L, z), & \forall z \in [-\delta, 0], \\ \phi_z(x, 0) = g(x), & g \in C^1 \\ \phi_z(x, -\delta) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

O objetivo é encontrar uma expressão para $\phi_x(x, 0)$, veja figura 2.

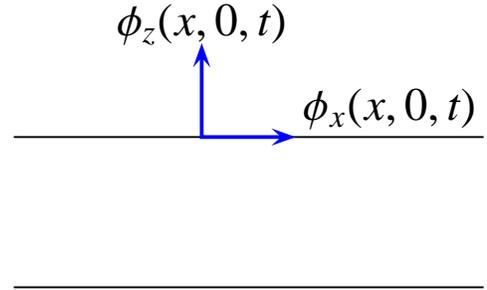


Figura 2: Problema do potencial na faixa com condição de Neumann para extrair a derivada tangencial na fronteira superior.

Como o problema é linear, pode-se utilizar séries de Fourier periódica. Para simplificar a notação, considere:

$$\bar{x} = \frac{\pi x}{L}, \quad \bar{x} \in \Pi[-\pi, \pi]. \quad (7)$$

Assim, $x = \frac{L}{\pi} \bar{x}$, $\Phi(\bar{x}, z) = \phi(x, z)$ e o problema descrito acima fica:

$$\begin{cases} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \Phi_{\bar{x}\bar{x}} + \Phi_{zz} = 0 & -\delta < z < 0, & \bar{x} \in \Pi[-\pi, \pi], \\ \Phi(0, z) = \Phi(\pi, z), \\ \Phi_z(\bar{x}, 0) = G(\bar{x}) = g(x), \\ \Phi_z(\bar{x}, -\delta) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Aplicando a Transformada de Fourier na variável \bar{x} , segue que

$$\begin{cases} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (ik)^2 \widehat{\Phi}(k, z) + \widehat{\Phi}''(k, z) = 0 & k \in \mathbb{Z}, \\ \widehat{\Phi}_z(k, 0) = \widehat{G}(k), \\ \widehat{\Phi}_z(k, -\delta) = 0, \end{cases} \quad (9)$$

logo

$$\begin{cases} \widehat{\Phi}'' - k^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \widehat{\Phi} = 0, & -\delta < z < 0, \\ \widehat{\Phi}'(0) = \widehat{G}, \\ \widehat{\Phi}'(-\delta) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Assim, para cada k temos um problema de valor de contorno, cuja equação característica é dada por $r^2 - \frac{k^2 \pi^2}{L^2} = 0$ com raízes $r_1 = \frac{k\pi}{L}$ e $r_2 = -\frac{k\pi}{L}$. Portanto, a solução geral da E.D.O. tem a forma:

$$\widehat{\Phi}(k, z) = c_1 \exp\left(\frac{k\pi}{L} z\right) + c_2 \exp\left(-\frac{k\pi}{L} z\right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Derivando (11) em relação a z , tem-se

$$\widehat{\Phi}'(k, z) = c_1 \frac{k\pi}{L} \exp\left(\frac{k\pi}{L}z\right) + c_2 \left(-\frac{k\pi}{L}\right) \exp\left(-\frac{k\pi}{L}z\right), \quad (12)$$

logo,

$$\widehat{\Phi}'(k, 0) = (c_1 - c_2) \frac{k\pi}{L} = \widehat{G}(k) \quad (13)$$

$$\widehat{\Phi}'(k, -\delta) = c_1 \frac{k\pi}{L} \exp\left(-\frac{k\pi\delta}{L}\right) + c_2 \left(-\frac{k\pi}{L}\right) \exp\left(\frac{k\pi\delta}{L}\right) = 0 \quad (14)$$

De (14), segue que $c_1 = c_2 \exp\left(\frac{2k\pi\delta}{L}\right)$ e substituindo em (13), tem-se que $c_2 \left[\exp\left(\frac{2k\pi\delta}{L}\right) - 1\right] \frac{k\pi}{L} = \widehat{G}(k)$.

Se $k \neq 0$, segue que

$$c_2 = \frac{L}{k\pi} \frac{1}{\exp\left(\frac{2k\pi\delta}{L}\right) - 1} \widehat{G}(k) \quad (15)$$

e

$$c_1 = \frac{L}{k\pi} \frac{\exp\left(\frac{2k\pi\delta}{L}\right)}{\exp\left(\frac{2k\pi\delta}{L}\right) - 1} \widehat{G}(k) \quad (16)$$

e portanto,

$$\widehat{\Phi}(k, z) = \left[\frac{L}{k\pi} \frac{\exp\left(\frac{2k\pi\delta}{L}\right) \exp\left(\frac{k\pi z}{L}\right)}{\exp\left(\frac{2k\pi\delta}{L}\right) - 1} + \frac{L}{k\pi} \frac{\exp\left(\frac{k\pi z}{L}\right)}{\exp\left(\frac{2k\pi\delta}{L}\right) - 1} \right] \widehat{G}(k), \quad (17)$$

multiplicando e dividindo por $\exp\left(-\frac{k\pi\delta}{L}\right)$, tem-se a seguinte expressão para $\widehat{\Phi}(k, z)$:

$$\left[\frac{\exp\left(\frac{k\pi\delta}{L} + \frac{k\pi z}{L}\right)}{\exp\left(\frac{k\pi\delta}{L}\right) - \exp\left(-\frac{k\pi\delta}{L}\right)} + \frac{\exp\left(-\frac{k\pi\delta}{L} - \frac{k\pi z}{L}\right)}{\exp\left(\frac{k\pi\delta}{L}\right) - \exp\left(-\frac{k\pi\delta}{L}\right)} \right] \frac{L}{k\pi} \widehat{G}(k). \quad (18)$$

Utilizando as funções hiperbólicas $\sinh \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$ e $\cosh \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$ segue que

$$\widehat{\Phi}(k, z) = \frac{\cosh\left(\frac{k\pi(\delta+z)}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi\delta}{L}\right)} \frac{L}{k\pi} \widehat{G}(k). \quad (19)$$

Por outro lado, como a série de Fourier da função $\Phi(\bar{x}, z)$ é dada por:

$$\Phi(\bar{x}, z) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \widehat{\Phi}(k, z) e^{ik\bar{x}} + c \quad (20)$$

onde c é a constante referente a frequência nula, tem-se que

$$\Phi(\bar{x}, z) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{L}{k\pi} \frac{\cosh\left(\frac{k\pi(\delta+z)}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi\delta}{L}\right)} \widehat{G}(k) e^{ik\bar{x}} + c. \quad (21)$$

Além disso, note que

$$G(\bar{x}) = g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(k) \exp\left(\frac{ik\pi x}{L}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(k) \exp(ik\pi\bar{x}), \quad (22)$$

logo,

$$\widehat{G}(k) = \widehat{g}(k). \quad (23)$$

Conclui-se então que

$$\phi(x, z) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{L}{k\pi} \frac{\cosh\left(\frac{k\pi(\delta+z)}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi\delta}{L}\right)} \widehat{g}(k) \exp\left(\frac{ik\pi x}{L}\right) + c \quad (24)$$

e a derivada em relação a x é dada por

$$\begin{aligned} \phi_x(x, z) &= \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{L}{k\pi} \frac{\cosh\left(\frac{k\pi(\delta+z)}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi\delta}{L}\right)} \widehat{g}(k) \exp\left(\frac{ik\pi x}{L}\right) \frac{ik\pi}{L} \\ &= i \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\cosh\left(\frac{k\pi(\delta+z)}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi\delta}{L}\right)} \widehat{g}(k) \exp\left(\frac{ik\pi x}{L}\right). \end{aligned} \quad (25)$$

Por fim, em $z = 0$, tem-se que

$$\phi_x(x, 0) = i \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \coth\left(\frac{k\pi\delta}{L}\right) \widehat{g}(k) \exp\left(\frac{ik\pi x}{L}\right). \quad (26)$$

Isso pode ser feito porque a série dada por (25) é uniformemente convergente $\forall (x, z) \in [-L, L] \times [-\delta, 0]$. De fato: como $\cosh(x)$ é crescente para $x > 0$ e decrescente para $x < 0$ segue que:

$$\left| \frac{\cosh\left(\frac{k\pi}{L}(\delta+z)\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi\delta}{L}\right)} \right| \leq \left| \frac{\cosh\left(\frac{k\pi\delta}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi\delta}{L}\right)} \right| = \left| \coth\left(\frac{k\pi\delta}{L}\right) \right| \leq M, \quad (27)$$

para certo $M > 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Além disso, como g é de classe C^1 e $\left| e^{\frac{ik\pi x}{L}} \right| = 1$, $\forall x \in [-L, L]$, segue, pelo teste M de Weierstrass, que a série converge uniformemente e absolutamente $\forall (x, z) \in [-L, L] \times [-\delta, 0]$.

Portanto, $\mathcal{T}u = \phi_x(x, 0)$ resulta em

$$\mathcal{T}u = i \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \coth\left(\frac{k\pi\delta}{L}\right) \widehat{u}(k) \exp\left(\frac{ik\pi x}{L}\right). \quad (28)$$

Logo o operador no domínio físico é descrito pela convolução:

$$\mathcal{T}u = -\frac{1}{2L} \int_{-L}^L \widetilde{T}(x - \xi; \delta, L) u(\xi) d\xi, \quad (29)$$

com o núcleo \widetilde{T} dado por

$$\widetilde{T}(x; \delta, L) = i \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \coth\left(\frac{k\pi\delta}{L}\right) \exp\left(\frac{ik\pi x}{L}\right), \quad (30)$$

onde a série deve ser interpretada no sentido das distribuições.

III. FUNÇÕES ESPECIAIS

É possível escrever a expressão (30) usando funções elípticas, [2]. Para isso, defini-se tais funções da seguinte forma.

Define-se, inicialmente, o parâmetro m tal que $m = \text{sen}^2 \alpha = k^2$, onde k é o módulo, nota-se que esse k não é o mesmo que o k de frequência da equação (30) e α é o ângulo modular.

As funções Elípticas de Jacobi são dadas por:

$$x = \text{sen } \phi = \text{sn } v, \quad (31)$$

$$\cos \phi = \text{cn } v, \quad (32)$$

$$\sqrt{1 - m \text{sen } \phi} = \text{dn } v, \quad (33)$$

$$\cot \phi = \frac{\text{cn } v}{\text{sn } v} = \text{cs } v, \quad (34)$$

As Integrais Elípticas do Primeiro Tipo são dadas por:

$$F(\phi \setminus m) = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1 - m \text{sen } \theta}} d\theta = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - mt^2)}} dt = v. \quad (35)$$

Já as Integrais Elípticas do Segundo Tipo são dadas por:

$$E(\phi \setminus m) = \int_0^\phi \sqrt{1 - m \text{sen } \theta} d\theta = \int_0^x \frac{\sqrt{1 - mt^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt. \quad (36)$$

Para as Integrais Elípticas completas, basta considerar $\phi = \frac{\pi}{2}$, isto é, $x = 1$, assim:

$$K(m) = K = F\left(\frac{\pi}{2} \setminus m\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - m \text{sen } \theta}} d\theta, \quad (37)$$

$$K'(m) = K(1 - m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - m) \text{sen } \theta}} d\theta, \quad (38)$$

$$E(m) = E\left(\frac{\pi}{2} \setminus m\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m \text{sen } \theta} d\theta. \quad (39)$$

Além disso, a Função Zeta de Jacobi é definida por:

$$Z(\phi \setminus m) = E(\phi \setminus m) - \frac{E(m)F(\phi \setminus m)}{K(m)}. \quad (40)$$

Essas funções podem ser escritas por q-séries. Nesse caso, determina-se o módulo k de tal forma que $\frac{K'(k)}{K(k)} = \frac{\delta}{L}$ e $q = \exp\left(-\frac{\pi K'}{K}\right) = \exp\left(-\frac{\pi \delta}{L}\right)$, assim tem-se que:

$$Z(a) = \frac{2\pi}{K} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1 - q^{2m}} \text{sen}\left(\frac{m\pi a}{K}\right), \quad (41)$$

$$\text{dn}(a) \text{cs}(a) = \frac{\pi}{2K} \cot\left(\frac{\pi a}{2K}\right) - \frac{2\pi}{K} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1 + q^m} \text{sen}\left(\frac{m\pi a}{K}\right). \quad (42)$$

Dessa forma, tem-se que:

$$\tilde{T}(x; \delta, L) = -\frac{2K}{\pi} \left[Z\left(\frac{Kx}{L}\right) + \text{dn}\left(\frac{Kx}{L}\right) \text{cs}\left(\frac{Kx}{L}\right) \right]. \quad (43)$$

De fato, note que:

$$\coth(x) = \text{tgh}\left(\frac{x}{2}\right) + \text{cossech}(x), \quad (44)$$

$$\text{cossech}\left(\frac{m\pi\delta}{L}\right) = \frac{2q^m}{1 - q^{2m}}, \quad (45)$$

$$\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\text{senh}(x)}{\cosh(x) + 1} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{2e^x}{e^x + 1} - 1. \quad (46)$$

Portanto,

$$-\tanh\left(\frac{1}{2} \frac{m\pi\delta}{L}\right) = \tanh\left(\frac{1}{2} \frac{-m\pi\delta}{L}\right) = \frac{2q^m}{1 + q^m} - 1. \quad (47)$$

Além disso, a Série de Fourier da cotangente é dada por

$$\cot\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \text{sen}(mx), \quad (48)$$

no sentido das distribuições.

Combinando esses resultados, segue que:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(x; \delta, L) &= i \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \coth\left(\frac{k\pi\delta}{L}\right) \exp\left(\frac{ik\pi x}{L}\right) \\ &= i \sum_{k=1}^{\infty} \coth\left(\frac{k\pi\delta}{L}\right) \exp\left(\frac{ik\pi x}{L}\right) + \\ &\quad + i \sum_{k=1}^{\infty} \coth\left(-\frac{k\pi\delta}{L}\right) \exp\left(-\frac{ik\pi x}{L}\right) \\ &= i \sum_{k=1}^{\infty} \coth\left(\frac{k\pi\delta}{L}\right) \left[\exp\left(\frac{ik\pi x}{L}\right) + \exp\left(-\frac{ik\pi x}{L}\right) \right] \\ &= i \sum_{k=1}^{\infty} \coth\left(\frac{k\pi\delta}{L}\right) 2i \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \\ &= -2 \sum_{k=1}^{\infty} \coth\left(\frac{k\pi\delta}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \\ &\stackrel{(44)}{=} -2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\tanh\left(\frac{k\pi\delta}{2L}\right) + \text{cossech}\left(\frac{k\pi\delta}{L}\right) \right] \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \\ &\stackrel{(45) \text{ e } (47)}{=} 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1 + q^k} \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) - \\ &\quad - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1 - q^{2k}} \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \\ &= -\frac{2K}{\pi} \left[\frac{2\pi}{K} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1 - q^{2k}} \text{sen}\left(\frac{k\pi(Kx/L)}{K}\right) \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2K}{\pi} \left[\frac{\pi}{K} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi x}{L} \right) - \right. \\
& \left. -\frac{2\pi}{K} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1+q^k} \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right] \\
(48) \quad & \stackrel{=}{=} -\frac{2K}{\pi} \left[\frac{2\pi}{K} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1-q^{2k}} \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi(Kx/L)}{K} \right) \right] - \\
& -\frac{2K}{\pi} \left[\frac{\pi}{2K} \cot \left(\frac{k\pi(Kx/L)}{2K} \right) - \right. \\
& \left. -\frac{2\pi}{K} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1+q^k} \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi(Kx/L)}{K} \right) \right] \\
(41)^e(42) \quad & \stackrel{=}{=} -\frac{2K}{\pi} \left[Z \left(\frac{Kx}{L} \right) + \operatorname{dn} \left(\frac{Kx}{L} \right) \operatorname{cs} \left(\frac{Kx}{L} \right) \right], \quad (49)
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

IV. IMPLEMENTAÇÃO: CONHECENDO O NÚCLEO DO OPERADOR

Resumindo, o operador \mathcal{T} no caso não periódico tem como núcleo:

$$\tilde{T}(x; \delta) = -\frac{1}{2\delta} \coth \left(\frac{\pi x}{2\delta} \right), \text{ se } x \neq 0. \quad (50)$$

Já no domínio das frequências, o núcleo periódico é representado por uma série de Fourier:

$$\tilde{T}(x; \delta, L) = \frac{i}{2L} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \coth \left(\frac{k\pi\delta}{L} \right) \exp \left(\frac{ik\pi x}{L} \right), \quad (51)$$

no sentido das distribuições. Ainda no caso periódico, esse núcleo pode ser calculado utilizando funções especiais:

$$\tilde{T}(x; \delta, L) = -\frac{1}{2L} \frac{2K}{\pi} \left[Z \left(\frac{Kx}{L} \right) + \operatorname{dn} \left(\frac{Kx}{L} \right) \operatorname{cs} \left(\frac{Kx}{L} \right) \right], \quad (52)$$

onde

$$Z(a) = \frac{2\pi}{K} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1-q^{2m}} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi a}{K} \right) \quad (53)$$

$$\operatorname{dn}(a) \operatorname{cs}(a) = \frac{\pi}{2K} \cot \left(\frac{\pi a}{2K} \right) - \frac{2\pi}{K} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1+q^m} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi a}{K} \right) \quad (54)$$

com $q = \exp \left(-\frac{\pi\delta}{L} \right)$.

A figura 3 mostra a diferença entre o núcleo periódico dado por (52) e o núcleo do caso não periódico dado por (50) no intervalo de $[-\pi, \pi]$:

No domínio real, a cotangente hiperbólica foi calculada com a função \coth do Matlab avaliada nos valores da malha, já no domínio periódico com as funções especiais, foi utilizada a função ellipj do Matlab para encontrar os valores de dn e cs e a função Zeta foi

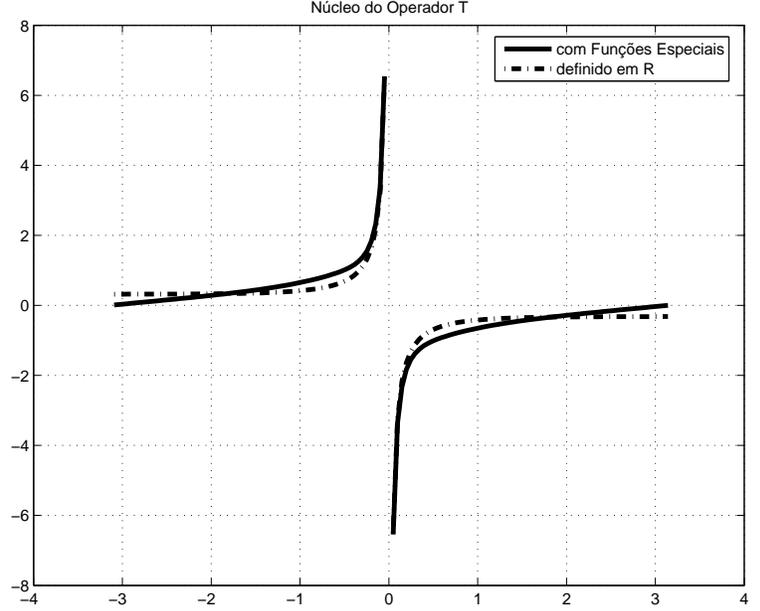


Figura 3: Núcleo do operador: o núcleo no caso periódico plotado a partir das funções especiais (—); o núcleo no caso não periódico plotado no intervalo $[-\pi, \pi]$ (- · -).

calculada truncando sua q -série dada em (53). Os dados utilizados foram:

- $L = \pi$;
- $\delta = \frac{\pi}{2}$;
- $N = 128$;
- $x_k = -\pi + \frac{2\pi}{N}k$, onde $k = 1, \dots, N$.

O parâmetro m que é requerido na função ellipj do Matlab foi encontrado impondo a condição $\frac{K'(m)}{K(m)} = \frac{\delta}{L}$. Para tal, foi utilizada a função $\operatorname{ellipke}$ do Matlab, colocando diversos valores de m ($m = 0.001 : 0.001 : 1 - 0.001$) para calcular os valores de K e K' e interpolando, encontrou-se o valor de m de forma que $\frac{K'(m)}{K(m)} = \frac{\delta}{L}$.

Tabela I: Comparação do Núcleo

	Erro absoluto	Erro relativo
Caso não periódico no intervalo com o caso periódico por funções especiais	0,3256	0,3759 \approx 38%

Nota-se que o erro é grande, confirmando a necessidade de uma abordagem sistemática para calcular o núcleo periódico.

Além disso, no caso periódico, tem-se a expressão do núcleo dado pela série de Fourier, (51). No entanto, esta série não converge pontualmente, apenas no sentido das distribuições. Por esse motivo não foram utilizadas aproximações por truncamento da série que exibem valores que alternativamente são quase nulos ou não em um mesmo ponto como ilustrado nas figuras 4, 5.

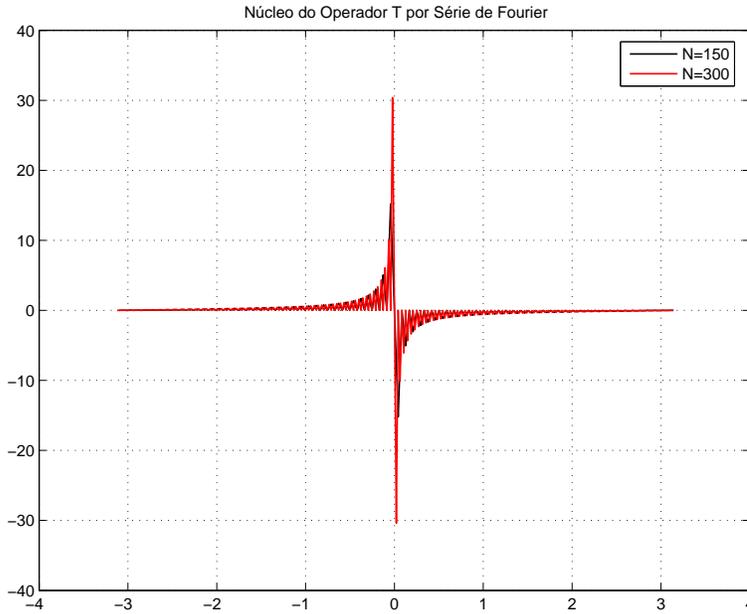


Figura 4: Núcleo do operador no caso periódico dado pela Série de Fourier truncada para malhas encaixadas.

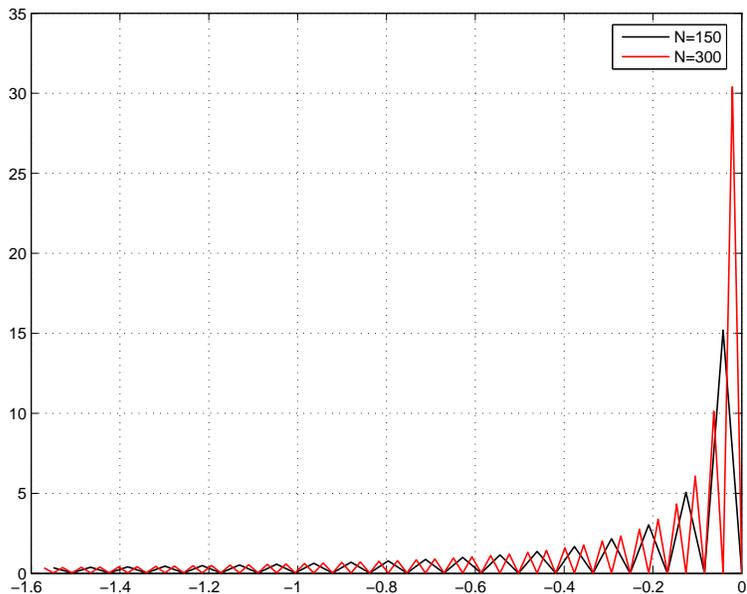


Figura 5: Núcleo do operador no caso periódico dado pela série de Fourier truncada para malha encaixadas, detalhe da figura anterior.

Na implementação foram usados os mesmos parâmetros L , δ e x_k .

V. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi realizado o estudo de um operador pseudodiferencial que aparece nos sistemas do tipo Boussinesq para ondas

intermediárias e nas equações derivadas destes. O núcleo estudado no caso periódico é diferente do caso não periódico, uma vez que é dado pelas funções especiais enquanto que o outro é dado pela contangente hiperbólica, respectivamente. Essa diferença foi verificada comparando ambos numericamente. Além disso, a série de Fourier truncada não fornece uma boa aproximação numérica do núcleo periódico por convergir apenas no sentido das distribuições.

Em trabalhos futuros, pretende-se implementar a Regra do Trapézio Alternada para calcular o operador atuando em funções suaves.

REFERÊNCIAS

- [1] L. Abdelouhab, J.L. Bona, M. Felland e J.-C. Saut: *Nonlocal models for nonlinear, dispersive waves*. Physica D, 40: 360-392, 1989.
- [2] M. J. Ablowitz, A. S. Fokas, J. Satsuna e H. Segur: *On the periodic intermediate long wave equation*. Journal of Physics, A 15: 781-786, 1982.
- [3] M. P. de Borja: *The intermediate long-wave equation in weighted Sobolev space*. Matemática Contemporânea, 3: 09-20, 1992.
- [4] P. F. Byrd e M. D. Friedman: *Handbook of Elliptic Integrals for Scientists and Engineers*. New York: Springer, 1971.
- [5] W. Choi e R. Camassa: *Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system*. Journal of Fluid Mechanics, 396: 01-36, 1999.
- [6] R.I. Joseph: *Solitary waves in finite depth fluid*. Journal of Physics, A, 10: L225-L227, 1977.
- [7] Kodama, Y, Satusuma, J. e Ablowitz, M.J.: *Nonlinear Intermediate Long-Wave Equation: Analysis and Method of Solution*. Physical Review Letters, 46: 687-690, 1981.
- [8] T. Kubota, D. Ko e L. Dobbs: *Propagation of weakly non linear internal waves in a stratified fluid of finite depth*. AIAA J. Hydrodynamics, 12: 157-165, 1978.
- [9] A. Ruiz de Zárate: *A Reduced Model for Internal Waves Interacting with Submarine Structures at Intermediate Depth, Tese do Doutorado*. IMPA, Rio de Janeiro: 2007.
- [10] A. Ruiz de Zárate e A. Nachbin: *A Reduced Model for Internal Waves Interacting with topography at Intermediate Depth*. Commun. Math. Sci., 6: 385-396, 2008.