SMNE UFPR
Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia
25 a 27 de outubro, 2017

Redução de Ordem de Modelo Numérico Aplicado à Análise Dinâmica

D.Negri
J.M.Crichigno Filho
Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade do Estado de Santa Catarina
Joinville, Brasil
doglas.negri@gmail.com

***Resumo*—A análise por elementos finitos requer, na grande maioria das vezes, a comparação dos resultados obtidos com alguma solução de referência para sua validação. Geralmente, estas referências são dados obtidos por via experimental. Porém, existe uma incompatibilidade no número de graus de liberdade destas duas análises. Por isso, este trabalho visa a estudar duas propostas de técnicas de redução do número de graus de liberdade do modelo numérico que serão comparados entre si e com um modelo de ordem completa. São comparadas as frequências naturais obtidas pela análise modal e a função resposta em frequência do modelo de elementos finitos de uma viga livre-livre. Por fim, apresentam-se as potencialidades e limitações dos métodos propostos.**

Palavras-chave*—redução de ordem de modelo; análise dinâmica; Guyan; SEREP;

I. Introdução

Em análise dinâmica de estruturas quando se procura comparar os resultados obtidos por via numérica com os obtidos por via experimental, enfrenta-se a dificuldade de os modelos dinâmicos diferirem tanto no número de modos de vibração como no número de graus de liberdade.

Em termos de compatibilidade entre os graus de liberdade considerados na análise experimental e numérica, faz-se necessário reduzir a dimensão do modelo numérico para uma dimensão compatível com a do modelo experimental (Métodos de Redução) ou expandir o modelo experimental para a dimensão do modelo numérico (Métodos de Expansão). Nesta proposta, para esta adequação, serão utilizados os seguintes métodos de redução: Método de Redução de Guyan ou Condensação Estática [1] e *SEREP - System Equivalent Reduction-Expansion Process* [2].

Diante do exposto, o objetivo deste trabalho é estudar a aplicação de algoritmos de redução de ordem de modelo numérico *(Guyan* e *SEREP)* aplicado a análises dinâmicas, mantendo-se as características originais do sistema.

II. Materias e Métodos

Um modelo de elementos finitos de uma viga de alumínio (E=70GPa e ρ=2750Kg/m³) com 300mm de comprimento, 20mm de largura e 5mm de espessura, de condição de contorno livre-livre, foi implementado no programa *Scilab 6.0.0* utilizando elemento de viga com dois graus de liberdade por nó, juntamente com os dois algoritmos de redução de ordem de modelo propostos *(SEREP* e *Guyan).*

A primeira técnica estudada, também conhecida como método estático foi apresentado por *Guyan* [1] em 1965, mas ainda hoje é muito popular no meio científico. Baseia-se na resolução de um problema estático, onde são contabilizados os graus de liberdade principais (*masters)* e secundários (*slaves).* O modelo simplificado resulta da resolução do seguinte problema estático

$$\begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Onde, assume-se que as forças estáticas e dinâmicas aplicadas nos graus de liberdade não considerados no procedimento experimental (*slaves)* são nulas. O que corresponde a dizer que:

$$\{F_s\} = 0. \tag{2}$$

Da resolução da parte inferior da equação (1) resulta uma relação entre os deslocamentos nos pontos *slaves* e *masters*.

$$[K_{sm}]\{u_m\} + [K_{sm}]\{u_m\} = \{F_s\} = 0, \tag{3}$$

$$\{u_s\} = -[K_{ss}]^{-1}[K_{sm}]\{u_m\}. \tag{4}$$

A parcela superior conduz a uma equação onde $\{u_s\}$ é substituído por (4), de forma a obtermos a seguinte relação entre força e deslocamento.

$$\{F_m\} = \left[[K_{mm}] - [K_{ms}][K_{ss}]^{-1}[K_{sm}]\right]\{u_m\}. \tag{5}$$

Sendo a matriz de rigidez reduzida do sistema definida pela seguinte expressão.

$$K^{Red} = [K_{mm}] - [K_{ms}][K_{ss}]^{-1}[K_{sm}]. \tag{6}$$

A nova matriz de rigidez relaciona os esforços com os deslocamentos apenas nos graus de liberdade principais (*masters*). No entanto, esta matriz já contabiliza a influência dos restantes graus de liberdade não contabilizados experimentalmente (*slaves*).

Guyan [1] propõe a definição de uma matriz de transformação, capaz de realizar a redução da dimensão das matrizes de massa e rigidez obtidas pelo Método dos Elementos Finitos *(MEF)*.

$$\begin{Bmatrix} u_m \\ u_s \end{Bmatrix} = [T]_{Guyan}\{u_m\}, \tag{7}$$

onde,

$$[T]_{Guyan} = \begin{bmatrix} I \\ -[K_{ss}^{-1}][K_{sm}] \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Esta técnica prevê o mesmo tratamento para as matrizes de massa e rigidez que podem ser definidas a partir das obtidas pelo *MEF*.

$$[K_{mm}^{Red}] = [T]^T\left[K_{mef}\right][T]; \tag{9}$$

$$[M_{mm}^{Red}] = [T]^T\left[M_{mef}\right][T]. \tag{10}$$

O segundo método de redução estudado foi apresentado em (1989) [2] e fundamentalmente caracteriza-se por definir uma matriz de transformação entre o sistema reduzido e o global, a partir do conhecimento das formas naturais de vibração extraídas do modelo numérico completo.

O método *SEREP* recorre à partição da matriz modal obtida pelo *MEF*, associada aos graus de liberdade comuns ao modelo experimental (*masters*) representada por:

$$[U_m], \tag{11}$$

que por inversão se transforma na matriz modal inversa generalizada que possui as mesmas dimensões da original.

$$[U_m^{-1}]. \tag{12}$$

A matriz de transformação entre o sistema reduzido e o completo é obtida por:

$$[T]_{SEREP} = \begin{bmatrix} U_m \\ U_s \end{bmatrix}[U_m^{-1}] = [U][U_m^{-1}], \tag{13}$$

onde para a situação em que o número de graus de liberdade considerados no processo experimental é igual ao número de modos de vibração considerados na análise dinâmica o processo simplifica-se, resultando na matriz transformação

$$[T]_{SEREP} = \begin{bmatrix} U_m \\ U_s \end{bmatrix}[U_m^{-1}] = \begin{bmatrix} I \\ U_s U_m^{-1} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

No entanto, na maior parte das situações práticas é muito comum o número de graus de liberdade *masters* ser superior ao número de modos necessários na análise, resultando na necessidade de definir a matriz modal inversa generalizada com dimensões coerentes com as demais matrizes da equação.

$$[U_m^{-1}] = ([U_m]^T[U_m])^{-1}[U_m]^T. \tag{15}$$

Depois de ajustadas as dimensões da matriz modal inversa generalizada, é então possível obter a matriz de transformação que permite a obtenção das matrizes características do sistema global no sistema reduzido. Estas correspondem às expressões:

$$[K_{mm}^{Red}] = [T]^T\left[K_{mef}\right][T]; \tag{16}$$

$$[M_{mm}^{Red}] = [T]^T\left[M_{mef}\right][T]. \tag{17}$$

III. Resultados e Discussões.

A Tabela I apresenta os resultados das análises modais para os 5 primeiros modos obtidas pelo modelo completo (*Full Model)* após a redução das matrizes de massa e rigidez pelo método *Guyan* e pelo método *SEREP*.

Tabela I: Frequências Naturais (Hz)

Modo	Analítico	*Full Model*	Guyan	SEREP
1	288,12	288,12	288,12	288,12
2	794,21	794,21	794,21	794,21
3	1556,96	1556,98	1556,99	1556,98
4	2573,73	2573,83	2573,86	2573,86
5	3844,72	3845,01	3845,13	3845,12

A Fig. 1 apresenta os resultados obtidos para a *FRF* no ponto *1FY1UY*, que se refere a *FRF* obtida da medição da resposta no grau de liberdade 1 na direção *Z* submetido a uma excitação nos mesmos ponto e direção.

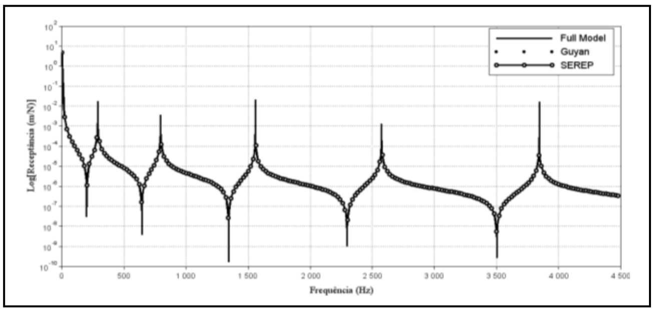

Figura 1. *FRF's* - *Full Model versus* Métodos de Redução.

IV. Conclusões.

As técnicas de redução de ordem de modelo estudadas mostraram-se bastante eficientes para reduzir o número de graus de liberdade para um número desejado. Esta cotação é validada observando tanto os resultados da análise modal quanto as *FRF's.*

Referências

[1] R.J.Guyan, "Reduction of stiffness and mass matrices". AIAA Journal, vol. 3, pp. 380-380, 1965.

[2] J.O'Callahan, P.Avitabile, R.Riemer. "System equivalent reduction expansion process (SEREP)". Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference, vol. 1, pp. 29-37, 1989.