SMNE UFPR
Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia
25 a 27 de outubro, 2017

Estabilidade do Método de Modos Admissíveis para Análise de Vibrações Livres de Viga de Euler-Bernoulli

Thamara Petroli
Marcos Arndt
Roberto Dalledone Machado
PPGMNE - UFPR
Programa de Pós Graduação em Métodos Numéricos
Curitiba, Brasil
thamarapetroli@gmail.com
arndt.marcos@gmail.com
roberto.dalledonemachado@gmail.com

***Resumo*—Quando métodos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos ou o Método dos Elementos Finitos Generalizados, são aplicados na análise dinâmica de estruturas a solução numérica recai em um problema de autovalores e autovetores generalizados. Mesmo que esses métodos apresentem grande eficácia, é possível encontrar sensibilidade na solução numérica do problema de autovalores e autovetores, ou ainda em alguns casos encontram-se autovalores negativos, indicando que há uma perturbação na estabilidade do método. Portanto este trabalho visa realizar uma análise sobre a sensibilidade gerada na construção numérica das matrizes de massa e rigidez do Método de Elementos Finitos - Modos Admissíveis para a viga de Euler-Bernoulli, verificando se o número de condição da matriz de massa pode ser empregado como alguma medida de sensibilidade.**

***Palavras-chave*—Estabilidade, Condicionamento, Problema de Autovalores Generalizado, Método de Elementos Finitos, Análise dinâmica.**

I. Introdução

Na maioria dos problemas matemáticos, encontrar a solução analítica nem sempre é uma tarefa simples. Logo, uma das alternativas para contornar esse problema, é a utilização de métodos aproximados. O Método dos Elementos Finitos (MEF) possibilita obter uma solução aproximada de sistemas de equações diferenciais, atualmente se tornando uma das principais ferramentas utilizadas. O Método de Elementos Finitos Generalizados (MEFG), por sua vez, é baseado nas ideias do Método da Partição da Unidade (MPU), desenvolvido por [12].

Como o MEF e o MEFG são métodos aproximados, as soluções podem conter erros de aproximação. Na aplicação proposta por [1] foram encontrados casos de sensibilidade do problema e ainda foi observado que os ajustes feitos na precisão empregada nos cálculos computacionais influenciavam na determinação das matrizes de massa e rigidez obtidas através da integração numérica, afetando assim na precisão e convergência do MEFG. Leung e outros [11], tentando encontrar uma maneira de avaliar a sensibilidade do problema de vibração, ao utilizar o método *p*-Fourier e MEF, calcularam o número de condição da matriz de massa, de forma a encontrar uma "medida"de sensibilidade.

O número de condição pode ser definido como quociente entre o maior e o menor autovalores da matriz [4], ou seja, o número de condição está diretamente ligado aos autovalores. É possível ainda associar o número de condição com a sensibilidade de uma matriz A qualquer, como em [15]. Ou ainda, é possível associar a ele sensibilidade de um problema de autovalores, [9].

Tendo em vista esse e outros casos, [13] faz um estudo sobre a

Fundação Araucária e Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Capes

sensibilidade da matriz de massa em alguns casos onde são aplicados o MEF e MEFG, analisando o problema de autovalores generalizado, gerado pela equação $Ax = \lambda Bx$, já que, se uma matriz é hermitiana, e recebe uma perturbação, então haverá um incremento nos seus autovalores [14]. Assim este trabalho visa fazer esta mesma análise para a aplicação do Método dos Modos Admissíveis (MMA) de Viga de Euler-Bernoulli, e verificar até que ponto as perturbações geradas pelas aproximações do método de construção dessas matrizes podem influenciar no desempenho e precisão do método.

II. Problema de Autovalores Generalizado

Um *problema de autovalores generalizado* é definido pela equação:

$$P(\lambda)x = (A - \lambda B)x = 0 \Longleftrightarrow Ax = \lambda Bx \quad (1)$$

E se a matriz $B = I$, matriz identidade, o problema generalizado é chamado de *problema de autovalores padrão*, ou somente *problema padrão*.

Para este trabalho são necessárias as seguintes definições:

- Uma matriz A é dita *Hermitiana*, se $A = (\overline{A})^T$, onde $\overline{A}$ é a matriz conjugada de A.
- Sejam λ_i's autovalores da matriz A, então:
  - Se $\lambda_i > 0\ \forall i$, então A é *definida positiva*;
  - Se $\lambda_i \geq 0\ \forall i$, então A é chamada de *semi-definida positiva*;
  - Se $\lambda_i < 0\ \forall i$, então A é *definida negativa*;
  - Se $\lambda_i \leq 0\ \forall i$, então A é *semi-definida negativa*;
  - A matriz A é *indefinida* quando existem autovalores positivos e negativos.

O conceito de condicionamento é definido através da análise da sensibilidade da solução do problema de autovalores à pequenas variações nos dados de entrada.

Um problema é dito *bem condicionado* se pequenas perturbações nos dados de entrada resultam em pequenas variações nos dados de saída. Caso contrário, quando pequenas perturbações nos dados de entrada causam grandes perturbações nos dados de saída, tem-se um problema *mal condicionado*.

O problema de autovalores generalizado, Eq.(1), pode ser bem ou mal condicionado. Quando a matriz A é hermitiana e trata-se de um problema padrão, então este é um problema bem condicionado [5]. Mas a situação muda completamente quando o problema é generalizado, que em geral é mal condicionado, principalmente quando as matrizes não são hermitianas [2].

Lidar com matrizes hermitianas e definida positivas traz algumas vantagens, uma delas é que existem algoritmos que facilitam encontrar os autovalores das matrizes, de maneira a ter uma medida de condicionamento. Outra vantagem, é que pode-se transformar um problema de autovalor generalizado em um problema padrão. Assim se as matrizes A e B são hermitianas e B é definida positiva, então pode-se decompor B como produto de matrizes não singulares, $B = LL^*$, através da Decomposição de Cholesky, por exemplo. Assim o problema se transforma em:

$$(L^{-1}A(L^*)^{-1})\overline{x} = \lambda\overline{x} \quad (2)$$

Como os espaços do domínio são invariantes [8], as propriedades são preservadas após a transformação, isto é, os autovalores são os mesmos, e se $\overline{x}$ é autovetor da Eq.(2), então $x = (L^*)^{-1}\overline{x}$ satisfaz a Eq.(1). Portanto, quando um problema de autovalores generalizado tem as matrizes A e B hermitianas e B é definida positiva; então este é um problema bem condicionado, porque pode ser reduzido a um problema padrão, com mesmos autovalores e que, por sua vez, é bem condicionado.

III. Análise Dinâmica de Estruturas

A análise de vibrações livres em estruturas não amortecidas recai no problema [3]:

$$K\phi = \omega^2 M\phi \quad (3)$$

onde K é a matriz de rigidez, M a matriz de massa, ω a frequência natural e ϕ o vetor do modo de vibração natural.

As matrizes K e M, quando provêm da forma fraca de Galerkin referente ao equilíbrio dinâmico do sistema para vibrações de viga de Euler-Bernoulli uniforme, são dadas na forma:

$$K = [k_{ij}] = EI\int_\Omega \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial x^2}d\Omega \quad (4)$$

$$M = [m_{ij}] = \rho A\int_\Omega \Phi_i\Phi_j d\Omega \quad (5)$$

onde E é o módulo de elasticidade, I o momento de inércia, A a área da seção transversal, ρ a massa específica, as Φ's são funções de interpolação e Ω o domínio global do problema. A escolha das funções de interpolação depende do método aproximado a ser empregado.

A. Métodos Enriquecidos

Considerando que o elemento de viga reta uniforme possui dois graus de liberdade por nó, deslocamento lateral e rotação, e fazendo uso de funções de forma do MEF convencional, e da adição de outras funções enriquecedoras, a solução aproximada no domínio em questão pode ser definida como

$$u = u_{MEF} + u_{ENRIQ} = \mathbf{N}^T\mathbf{q} + \Phi^T\mathbf{c}, \quad (6)$$

onde u_{MEF} é a componente do MEF baseada nos graus de liberdade nodais e u_{ENRIQ} é a componente de enriquecimento. O MMA proposto por [7] não usa a partição da unidade. O MEFG MMA usa, baseada nos graus de liberdade de campo; e:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^T &= [\ \psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \psi_4\ ], \\ \mathbf{q}^T &= [\ v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\ ], \\ \Phi^T &= [\ F_1 \quad F_2 \quad \ldots \quad F_r \quad \ldots \quad F_n\ ], \\ \mathbf{c}^T &= [\ c_1 \quad c_2 \quad \ldots \quad c_n\ ], \end{aligned} \tag{7}$$

sendo que $\mathbf{q}$ corresponde ao vetor de graus de liberdade nodais do elemento do MEF convencional, $\mathbf{N}$ é o vetor que contém as funções de forma cúbicas do MEF ψ_i, Φ o vetor das funções enriquecedoras F_j e $\mathbf{c}$ o vetor de graus de liberdade de campo.

1) Método dos Modos Admissíveis (MMA): Este método foi desenvolvido por [6] e [7], e utiliza modos admissíveis restritos na interface como funções enriquecedoras. As funções enriquecedoras no domínio $\Omega = [0, 1]$ são dadas por

$$\begin{aligned} F_r(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\rho A L}} \Bigg[& cos(\lambda_r \xi) - \frac{1 + (-1)^r e^{-\lambda_r}}{1 - (-1)^r e^{-\lambda_r}} sen(\lambda_r \xi) - \\ & \frac{e^{\lambda_r \xi} - (-1)^r e^{-\lambda_r (1-\xi)}}{1 - (-1)^r e^{-\lambda_r}} \Bigg]. \end{aligned} \tag{8}$$

sendo $r = 1, 2, \ldots,$ L o comprimento da viga, A a área da seção transversal, ρ a massa específica (consideradas unitárias nesse trabalho); λ_r são autovalores associados à equação característica

$$cos(\lambda_r) - \frac{2e^{-\lambda_r}}{1 + e^{-2\lambda_r}} = 0. \tag{9}$$

Por construção do método, como apresentado por [1], sabe-se que as matrizes K e M são matrizes hermitianas e, como M é definida positiva [10], pode-se decompor M de maneira a transformar o problema que antes era de autovalor generalizado em um problema padrão bem condicionado. Logo se $\overline{x}$ é autovetor na Eq.(2), então $x = (L^*)^{-1}\overline{x}$ satisfaz a Eq.(3). Portanto, pelas definições anteriores segue que os autovalores são reais e positivos, ou seja, $\omega^2 \in \mathbb{R}$.

Como mencionado acima tem-se que a matriz de massa é definida positiva nos problemas de vibração livre, logo não haveriam motivos para medir o condicionamento do sistema, pois ele seria bem condicionado e os autovalores são reais e positivos. Entretanto, dependendo da precisão empregada no cálculo numérico das matrizes de massa e rigidez, observa-se que o problema continua mal condicionado numericamente, sendo necessário verificar a sensibilidade numérica da matriz de massa, pois o bom condicionamento do problema depende desta ser numericamente definida positiva.

IV. Análise da Sensibilidade

Para a realização das análises, variou-se o número de dígitos significativos (precisão) para a aproximação numérica (integração numérica) das matrizes de massa, calculando-se o erro absoluto das aproximações em relação aos valores exatos (integração exata). As matrizes geradas, no software Maple, tem 5 níveis de enriquecimento ($n_l = 5$), variando o número de dígitos significativos (4 e 10 dígitos). Para determinação das matrizes aproximadas foi empregada a quadratura de Gauss.

As Figuras 1 a 4 apresentam, a título de ilustração, a distribuição do erro nas matrizes de massa e rigidez para uma precisão de 4 e 10 dígitos significativos para o MMA (ou seja quando as matrizes são indefinidas versus quando são definidas positivas).

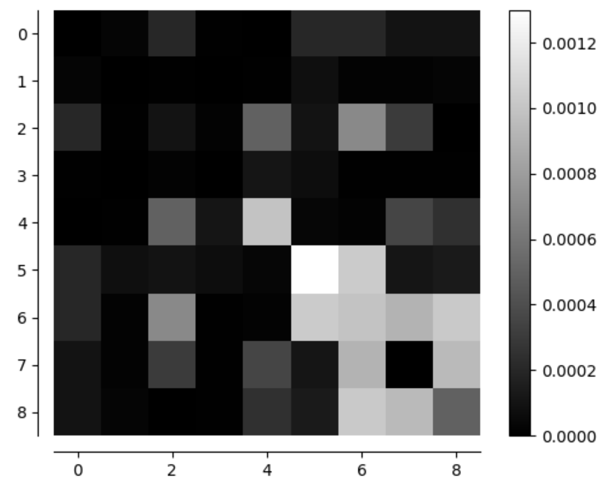

Figura 1: *Matriz de Massa com 4 dígitos.*

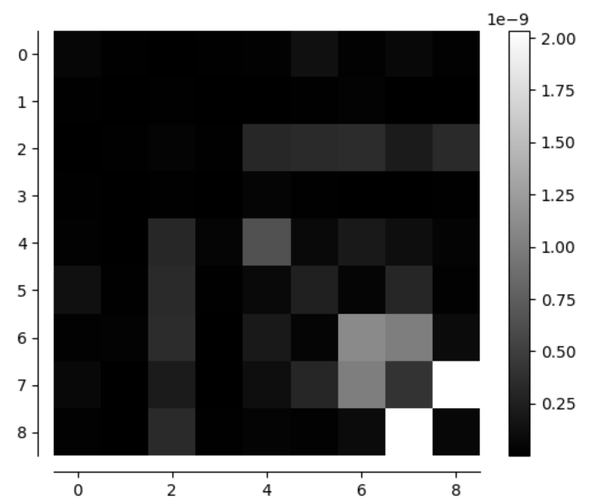

Figura 2: *Matriz de Massa com 10 dígitos.*

MMA - Viga de Euler Bernoulli

Número de Níveis	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de dígitos significativos	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4
Ordem do número de condição	10^4	10^4	10^4	10^5	10^5	10^5	10^5	10^5	10^5	10^6

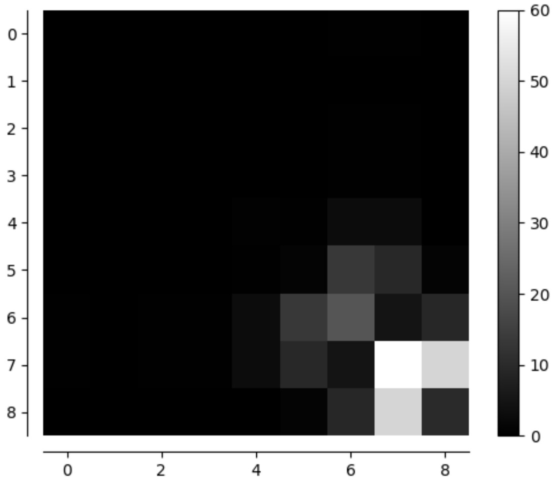

Figura 3: *Matriz de Rigidez com 4 dígitos.*

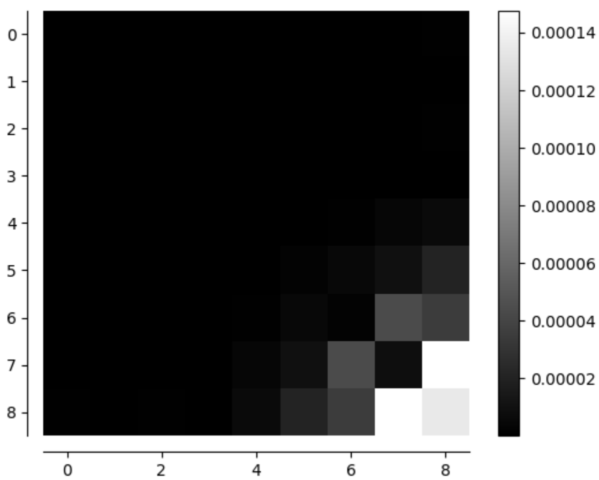

Figura 4: *Matriz de Rigidez com 10 dígitos.*

Nota-se a dispersão do erro, ou seja, o aumento da precisão faz com que a parte que apresenta os maiores níveis de enriquecimento (no caso, nível 5) das matrizes contenha os erros mais altos, embora sejam pequenos.

Considerando o erro das aproximações, uma segunda análise foi feita, mas agora observando a partir de qual precisão a matriz de massa torna-se definida positiva e a ordem do número de condição dessa matriz (Tabela 1). Em seguida é apresentada graficamente (Figura 5) a relação entre o número de dígitos significativos e a ordem do número de condição.

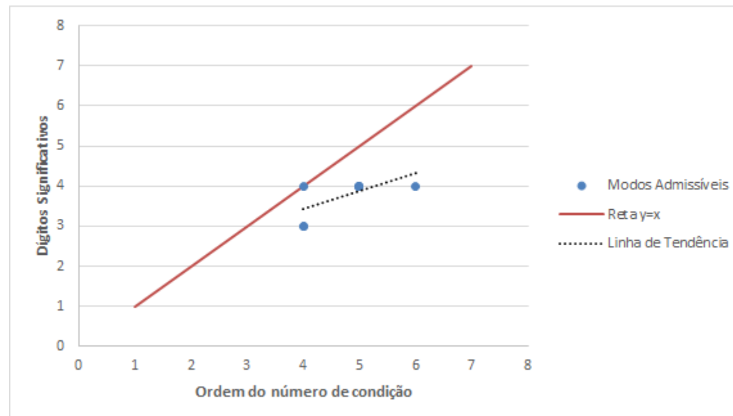

Figura 5: *Ordem do número de condição versus número de dígitos significativos*

Nota-se que a potência da ordem do número de condição se aproxima da precisão necessária para que a matriz M torne-se definida positiva. Por exemplo, com 6 níveis de enriquecimento a matriz é definida positiva a partir de 4 dígitos de precisão e a ordem do número de condição é 10^5.

V. CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi fazer uma análise do problema de autovalores generalizado e a perturbação gerada pelas aproximações das matrizes, como em [13], mas para o Método de Modos Admissíveis (MMA). Observou-se que mesmo com todo suporte matemático garantindo que o problema de autovalores generalizado da vibração livre da viga de Euler-Bernoulli seja bem condicionado, ainda assim encontra-se grande sensibilidade no problema da Eq.(3). Assim como em [13], essa sensibilidade está diretamente ligada com os erros de aproximação gerados pelo MMA, na construção numérica das matrizes de massa e rigidez, provocando perturbações nos autovalores. Pela análise realizada, as mesmas conclusões que [13] encontrou são aplicadas para este trabalho, que as aproximações numéricas e analíticas são boas, apesar da sensibilidade do problema.

Ainda pode-se observar uma correlação direta entre a potência da ordem do número de condição da matriz de massa e a quantidade de dígitos significativos (precisão) necessária para que a matriz de massa torne-se numericamente definida-positiva, ou seja, quando a mesma satisfaz as hipóteses para o bom condicionamento. Logo, a ordem de grandeza do número de condição da matriz de massa pode ser utilizada para estimar a precisão necessária na construção da matriz de massa e, portanto, ser também empregada na comparação de estabilidade de diferentes propostas de funções de enriquecimento para o MMA.

Agradecimentos

Ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE), à Universidade Federal do Paraná (UFPR), à Fundação Araucária e à CAPES pelo apoio e oportunidade.

Referências

[1] Arndt, M., 2009. *O Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado à Análise de Vibrações Livres de Estruturas Reticuladas*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná.

[2] Bazán, F.S.V., 2003. *Autovalores de Polinômios Matriciais: Sensibilidade, Computação e Aplicações.* Notas de Minicurso: 24°CBM, Florianópolis.

[3] Chopra, A. K., 2012. *Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering.* New Jersey: Prentice Hall.

[4] Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E, Witt, R. J., 2002. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis.* University of Wisconsin: Madison.

[5] Demmel, J., Bai, Z., Dongarra, J., Ruhe, A.,and Vorst, H.v.d., 2000. *Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems.* Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics - SIAM.

[6] Engels, R. C., 1992. *Finite element modeling of dynamic behavior of some basic structural members.* Journal of Vibration and Acoustics, v. 114, p. 3-9.

[7] Ganesan, N.; and Engels, R. C., 1992. Hierarchical Bernoulli-Euler beam finite elements. *Computers & Structures*, vol. 43, n. 2, pp. 297-304.

[8] Golub, G.H., and Loan, C.F.V., 1996. *Matrix Computations.* Baltimore and London: The Johns Hopking University Press.

[9] Golub, G. H. and Wilkinson, J. H., 1976. *Ill-Conditioned eigensystems and the computation of the Jordan canonical form* SIAM Review, vol.18, n. 4, p. 578 - 619.

[10] Inman, D. J., 1996. *Engineering vibration*. New Jersey: Prentice-Hall.

[11] Leung, A.Y.T, Zhu, B., Zheng, J., and Yang, H., 2004. *Analytic trapezoidal Fourier p-element for vibrating plane problems.* Journal of Sound and Vibration, vol.271, pp. 67 - 81.

[12] Melenk, J. M.; and Babuska, I., 1996. *The partition of unity finite element method: basic theory and applications.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 139, n. 1-4, pp. 289 - 314.

[13] Petroli, T. 2016. *Condicionamento do Problema de Autovalores Obtido do Método de Elementos Finitos Generalizados na Dinâmica de Estruturas*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná.

[14] Stewart, G.W.,and Sun, J., 1990. *Matrix Perturbation Theory.* Boston: Academic Press.

[15] Wilkinson, J.H., 1965. *The Algebraic Eigenvalue Problem.* Oxford: Claredon Press.