



**Simpósio de Métodos
Numéricos em Engenharia**

25 a 27 de outubro, 2017

Solução de problemas de treliças espaciais com o método do Ponto Médio

Luiz Antonio Farani de Souza
Curso de Engenharia Civil, UTFPR
Apucarana, Brasil
lasouza@utfpr.edu.br

Resumo— Neste trabalho é desenvolvido um algoritmo para o método do Ponto Médio, com convergência de ordem cúbica, associado à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear. Análises estáticas de dois problemas de treliças espaciais com não linearidade geométrica são realizadas com o programa Matlab por meio do Método dos Elementos Finitos Posicional. As trajetórias de equilíbrio com pontos limites das estruturas são obtidas.

Palavras-chave— *Treliça espacial; Ponto Médio; Elementos Finitos Posicional; Gradiente Conjugado.*

I. INTRODUÇÃO

Para se realizar a análise não linear de estruturas com maior precisão é de extrema importância que sejam empregados métodos que possam considerar, de maneira apropriada, os efeitos de grandes rotações e deslocamentos. Simulações são realizadas com o *software* Matlab de dois problemas de treliças espaciais com comportamento não linear geométrico encontrados na literatura, cuja solução aproximada é obtida por meio do método do Ponto Médio, com convergência de ordem cúbica, associado à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear. As estruturas são discretizadas com o Método dos Elementos Finitos Posicional desenvolvido por [1]. Classificado como sendo uma formulação Lagrangeana Total, esse método é fundamentado no princípio da mínima energia potencial e as incógnitas fundamentais do problema são as posições nodais do elemento finito. Os sistemas de equações lineares gerados da discretização por elementos finitos a cada iteração no processo incremental são resolvidos com o método do Gradiente Conjugado.

II. METODOLOGIA

A equação que governa o equilíbrio estático de um sistema estrutural pode ser descrita por [2]:

$$\mathbf{g} = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{d}), \quad (1)$$

na qual \mathbf{F}_{int} é o vetor de forças internas (avaliado em função do vetor de coordenadas nos pontos nodais da estrutura \mathbf{d}), e λ é o parâmetro de força responsável pelo escalonamento do vetor \mathbf{F}_r , sendo este um vetor de referência e de magnitude arbitrária. A metodologia para a solução de problemas estruturais não lineares deve ser capaz de traçar a trajetória de equilíbrio completa, identificando e passando por todos os pontos críticos. No método de Comprimento de Arco Linear, a trajetória de iteração é mantida sempre ortogonal à tangente inicial em cada passo. A expressão para o subincremento do parâmetro de força é dada por:

$$\delta\lambda^{(k)} = -\frac{\Delta\mathbf{u}^{(0)T} \delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{\Delta\mathbf{u}^{(0)T} \delta\mathbf{u}_r^{(k)}}, \quad (2)$$

na qual $\delta\mathbf{u}_g^{(k)}$ é a parcela referente às forças desequilibradas \mathbf{g} , $\delta\mathbf{u}_r^{(k)}$ é o vetor dos deslocamentos residuais e $\Delta\mathbf{u}^{(0)}$ é o incremento inicial dos deslocamentos nodais. O método do Ponto Médio [3] é adaptado para o problema não linear estrutural, cujo esquema iterativo é dado pelas seguintes equações:

$$\mathbf{K}(\mathbf{y}^{(k)}) \delta\mathbf{u}_2^{(k)} = \delta\lambda_2^{(k)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k-1)}), \quad (3)$$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\mathbf{u}_2^{(k)}, \quad (4)$$

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \frac{1}{2} \delta\mathbf{u}_1^{(k)}, \quad (5)$$

$$\delta \mathbf{u}_1^{(k)} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k-1)})]^{-1} [\delta \lambda_1^{(k)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k-1)})]. \quad (6)$$

III. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Os resultados numéricos de dois problemas de treliças espaciais com comportamento não linear geométrico encontrados na literatura são apresentados nesta seção. Salienta-se que as unidades de medida dos problemas estudados foram mantidas conforme a referência bibliográfica original para efeito de comparação.

A. Treliça espacial com 4 barras

Considere, na Fig. 1, uma treliça espacial com quatro barras e cinco nós, apoiada por pinos em sua base e solicitada por uma força concentrada P no seu topo. A área da seção transversal é $A = 1,0 \text{ in}^2$ e o módulo de elasticidade longitudinal é $E = 1,0 \times 10^6 \text{ lbf/in}^2$ para todas as barras. Na Fig. 2a aparece a trajetória de equilíbrio (deslocamento vertical no nó 3 *versus* força P) com dois pontos Limites de Força obtida com o modelo implementado, comparado-a com alguns pontos de equilíbrio obtidos por [4]. Na simulação com o método do Ponto Médio foram necessários 20 passos de força e 32 iterações acumuladas até a convergência para a solução, para uma tolerância de $1,0 \times 10^{-6}$ e incremento de força $\Delta P = 0,1 \text{ lbf}$. A configuração deformada da treliça é apresentada na Fig. 2b.

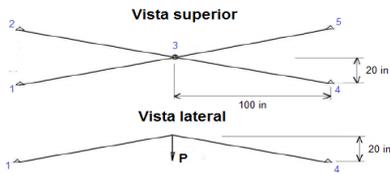


Figura 1. Modelo estrutural da treliça espacial com quatro barras.

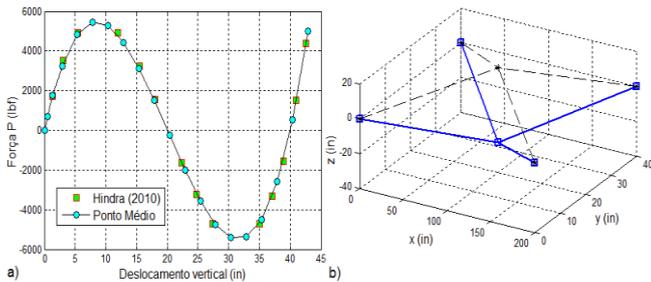


Figura 2. a) Trajetória de equilíbrio; e b) Treliça deformada.

B. Treliça espacial com 8 barras

Uma treliça espacial abatida com oito barras e nove nós, submetida a uma força P aplicada no seu ápice, é mostrada na Fig. 3. Todas as barras têm área $A = 10 \text{ in}^2$ e módulo de elasticidade longitudinal de $1,0 \times 10^4 \text{ lbf/in}^2$. Os oito nós externos são apoiados com suportes do tipo pino e o nó central é deixado sem restrições. Na simulação com o método do Ponto Médio foram necessários 19 passos de força e 35 iterações acumuladas até a convergência para a solução, para uma tolerância de $1,0 \times 10^{-6}$ e incremento de força $\Delta P = 0,05 \text{ lbf}$. Na Fig. 4a é apresentada a curva deslocamento vertical no nó 1 *versus* força P obtida com o

modelo implementado, comparando-a com alguns pontos de equilíbrio obtidos por [4]. Verifica-se, nessa figura, a presença de dois Pontos Limites de Força na trajetória, caracterizados por tangentes horizontais, ou seja, paralelas ao eixo de deslocamentos. O primeiro ponto limite representa a força máxima P em que a estrutura pode suportar antes do *snap-through*. Nas posições intermediárias, a força P decresce e reverte de sinal duas vezes enquanto o deslocamento continua a crescer. Quando o efeito *snap-through* termina no segundo ponto limite, a estrutura começa a suportar valores adicionais de força. Na Figura 4b aparece a treliça deformada.

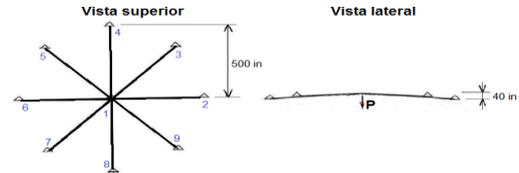


Figura 3. Modelo estrutural da treliça espacial com oito barras.

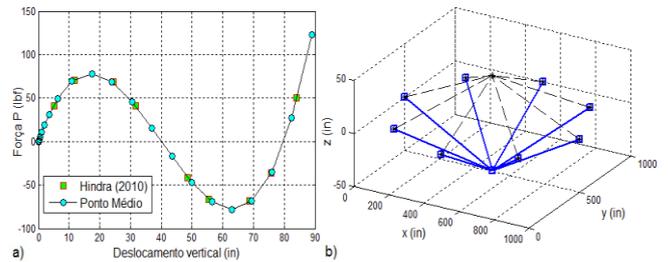


Figura 4. a) Trajetória de equilíbrio; e b) Treliça deformada.

IV. CONCLUSÃO

O código computacional desenvolvido com o método de solução do Ponto Médio, associado à técnica de Comprimento de Arco Linear, conseguiu traçar a trajetória de equilíbrio completa das estruturas estudadas, identificando e ultrapassando os pontos limites existentes. A implantação e montagem segura de treliças espaciais com grandes vãos exige que seu comportamento não linear seja bem compreendido por meio de análises estruturais.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece à UTFPR pelo apoio para a realização da pesquisa.

REFERÊNCIAS

- [1] H. B. Coda, "Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no MEF", Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.
- [2] D. P. Maximiano, A. R. D. Silva, R. A. M. Silveira, "Iterative strategies associated with the normal flow technique on the nonlinear analysis of structural arches", Revista Escola de Minas (Impresso), vol. 67, pp. 143-150, 2014.
- [3] M. Frontini, E. Sormani, "Third-order methods from quadrature formulae for solving systems of nonlinear equations", Appl. Math. Comput., vol. 149, n. 1, pp. 771-782, 2004.
- [4] G. A. Hrinda, "Snap-Through Instability Patterns in Truss Structures", NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia 2383, 2010.