



**Simpósio de Métodos
Numéricos em Engenharia**

25 a 27 de outubro, 2017

Análise de Von Neumann de um Modelo Dispersivo de Ondas Internas

Willian Carlos Lesinhovski
Ailín Ruiz de Zárate Fabregas
PPGM/Departamento de Matemática
Universidade Federal do Paraná
Curitiba, Brasil

Resumo—Neste trabalho é realizado um estudo sobre a estabilidade de um esquema numérico para um sistema do tipo Boussinesq para ondas internas. Através da Análise de von Neumann obtiveram-se três condições suficientes para que o método numérico proposto para a versão linearizada do sistema seja estável. Tais condições foram corroboradas por experimentos computacionais e serviram de base para a implementação de um esquema numérico para a versão fracamente não linear do sistema que também se mostrou estável nos testes.

Palavras-chave—método espectral; derivação numérica; transformadas de Fourier;

I. INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por objeto de estudo um modelo reduzido para ondas internas obtido a partir das equações de Euler para duas camadas de fluidos imiscíveis, invíscidos, irrotacionais e incompressíveis. O modelo fracamente não linear apresentado em [1], que descreve a evolução ao longo do tempo t da onda interna descrita por $\eta(x, t)$ junto com a média da velocidade horizontal da camada superior $u(x, t)$ é dado pelo sistema

$$\begin{cases} \eta_t - [(1 - \alpha\eta)u]_x = 0 \\ u_t + \alpha u u_x - \eta_x = \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta [u]_{xt} + \frac{\beta}{3} u_{xxt}, \end{cases} \quad (1)$$

onde o domínio é periódico na variável x e o operador pseudodiferencial \mathcal{T}_δ , conhecido como transformada de Hilbert na faixa, é definido no domínio das frequências como

$$\widehat{\mathcal{T}_\delta[f]}(k) = i \coth(\delta k) \widehat{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z}^*. \quad (2)$$

Consideramos também a versão linearizada do sistema (1):

$$\begin{cases} \eta_t = u_x, \\ u_t - \frac{\rho_2}{\rho_1} \sqrt{\beta} \mathcal{T}_\delta [u]_{xt} - \frac{\beta}{3} u_{xxt} = \eta_x. \end{cases} \quad (3)$$

Primeiramente é feito um estudo de estabilidade numérica para uma discretização do sistema (3). Os resultados obtidos para o sistema linearizado são testados no esquema numérico para o sistema fracamente não linear por meio de experimentos computacionais.

II. DISCRETIZAÇÃO DO MODELO LINEARIZADO

A discretização do sistema (3) é feita mediante o método de linhas, vide [2]. Como o problema é periódico na variável x , para a discretização espacial considerou-se uma malha uniforme de N pontos no intervalo $[0, 2l]$, com N um número par e $\Delta x = 2l/N$. Pode-se escrever esta discretização matricialmente como o seguinte sistema de $2N$ equações diferenciais ordinárias na variável t :

$$\begin{bmatrix} \eta_t \\ u_t \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} \eta \\ u \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & C \\ P^{-1}C & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

A matriz P é obtida mediante transformada de Fourier discreta

utilizando (2). Devido às características do modelo, considera-se C uma matriz real, anti-simétrica ($C^T = -C$) e Toeplitz circulante. Sob estas condições três possibilidades de discretização de derivadas foram escolhidas: diferenças finitas de quarta ordem e cinco pontos, diferenciação por B-Spline linear por partes e diferenciação espectral. A discretização temporal é feita através do método de Runge-Kutta de quarta ordem no intervalo $[0, T]$ com passo Δt . Esta escolha é feita pois os autovalores da matriz D são imaginários puros. Detalhes podem ser vistos em [4].

III. ANÁLISE DE VON NEUMANN

O esquema numérico é dito estável se para escolhas adequadas de Δx e Δt , existe uma constante positiva C_s que não depende de n nem de Δt tal que vale a desigualdade

$$\|[\eta^n, \mathbf{u}^n]^T\| \leq C_s \|[\eta^0, \mathbf{u}^0]^T\|, \quad \forall n \Delta t \leq T. \quad (5)$$

Pelas características do sistema (3), a estabilidade do método é garantida desde que uma das seguintes desigualdades seja verdadeira,

$$\sigma = \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \gamma_1 \sqrt{1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\sqrt{\beta}}{\delta}}, \quad (6)$$

$$\mu = \frac{\Delta t}{\sqrt{\Delta x}} \leq \gamma_2 \sqrt{\sqrt{\beta} \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}, \quad (7)$$

$$\Delta t \leq \gamma_3 \sqrt{\frac{\beta}{3}}, \quad (8)$$

onde γ_1 , γ_2 e γ_3 são constantes positivas que dependem dos autovalores de C mas que não dependem de Δx .

IV. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

O esquema numérico para o sistema fracamente não linear foi feito seguindo de perto o sistema linearizado com as devidas adaptações para os termos não lineares. A abordagem matricial utilizada na análise de estabilidade não foi implementada diretamente para diminuir o custo computacional e no lugar do produto de matrizes foi usado o algoritmo FFT do Matlab.

Como condição inicial $\eta(x, 0)$ escolheu-se um perfil de onda próximo ao que seria uma onda viajante do sistema (1). Este perfil é dado pela solução da equação (9) que foi resolvida utilizando o método de Newton. A condição $u(x, 0)$ é calculada em função de $\eta(x, 0)$ considerando o sistema linearizado pois é mais fácil de tratar.

$$\alpha \frac{3}{2} \tilde{\eta}^2 + \left[1 - \frac{1}{c^2}\right] \tilde{\eta} - \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta [\tilde{\eta}_y] - \frac{\beta}{3} \tilde{\eta}_{yy} = 0. \quad (9)$$

A Fig. 1 mostra os resultados para o sistema linearizado e a Fig. 2 mostra os resultados para o sistema fracamente não linear. Nos dois casos foi utilizado o maior valor possível para Δt dentro das

condições de estabilidade com os seguintes valores: $\Delta x = 0.0031$, $\Delta t = 0.0516$, $\rho_2/\rho_1 = 2$, $\alpha = \beta = 0.001$ e $\delta = 1.1084$.

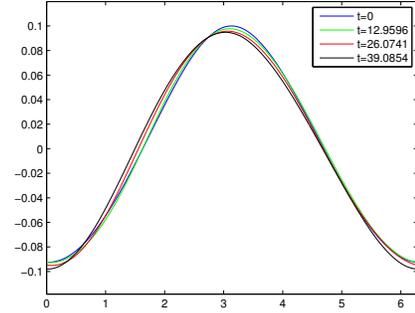


Figura 1: Gráfico de η para o sistema linearizado

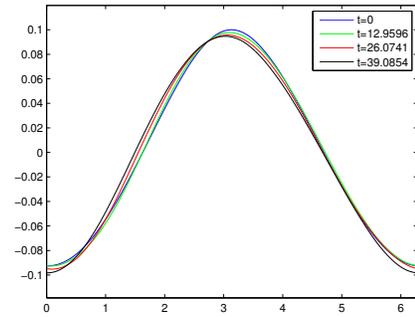


Figura 2: Gráfico de η para o sistema fracamente não linear

V. CONCLUSÃO

Neste trabalho é provado que o esquema numérico proposto para o sistema linearizado (3) é estável. Experimentos computacionais corroboraram a estabilidade deste esquema e indicaram que a sua versão para o sistema fracamente não linear (1) também é estável sob as mesmas condições.

AGRADECIMENTOS

À Capes, pelo auxílio financeiro recebido através de bolsa de estudos.

REFERÊNCIAS

- [1] J. S. Brodzinski, Estudo de um modelo dispersivo não linear para ondas internas. Tese de Doutorado, UFPR, 2016.
- [2] D. G. A. Vigo, A. R. de Zárate, S. P. Oliveira and A. Nachbin. Fully discrete stability and dispersion analysis for a linear dispersive internal wave model, *Computational and Applied Mathematics*, 33:203-221, 2014.
- [3] A. R. de Zárate, Um modelo reduzido para ondas internas interagindo com estruturas submarinas a profundidades intermediárias. Tese de Doutorado, IMPA, 2007.
- [4] W. C. Lesinovsky, Análise de Von Neumann de um Modelo Dispersivo de Ondas Internas. Dissertação, UFPR, 2017.