



**Simpósio de Métodos  
Numéricos em Engenharia**

**25 a 27 de outubro, 2017**

# *Implementação da função Mittag-Leffler do modelo de Zener Fracionário para caracterização de materiais viscoelásticos no domínio do tempo*

Ana Paula Delowski Ciniello  
Instituto Federal do Paraná - IFPR  
Curitiba, Brasil  
[ana.delowski@ifpr.edu.br](mailto:ana.delowski@ifpr.edu.br)

Jucélio Tomás Pereira  
Carlos Alberto Bavastri  
Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Mecânica (PGMEC)  
Universidade Federal do Paraná - UFPR  
Curitiba, Brasil  
[jucelio.tomas@ufpr.br](mailto:jucelio.tomas@ufpr.br) [bavastri@ufpr.br](mailto:bavastri@ufpr.br)

**Resumo**—Este artigo visa apresentar uma implementação da função Mittag-Leffler utilizada para a caracterização de materiais viscoelásticos no domínio do tempo, considerando o modelo constitutivo de Zener fracionário. Para tanto é considerado um conjunto de pontos obtidos experimentalmente através de ensaios de tração uniaxial, com diferentes taxas de deformação constantes e deformação inicial nula. A finalidade dessa implementação é reduzir o tempo computacional despendido com essa operação.

**Palavras-chave**—Materiais viscoelásticos, modelo constitutivo de Zener fracionário, função de Mittag-Leffler, domínio do tempo.

## I. INTRODUÇÃO

Durante as últimas décadas tem-se visto um grande aumento da utilização de materiais poliméricos em aplicações na engenharia estrutural. A boa aceitação de componentes mecânicos fabricados a partir desse tipo de material decorre, em parte, da facilidade com que estes podem ser moldados em praticamente qualquer formato e, em parte, por causa do seu excelente desempenho geral em ambientes corrosivos e como elemento dissipador de energia mecânica.

Os polímeros podem ser materiais altamente viscoelásticos, sendo que suas propriedades mecânicas variam muito, dependendo da velocidade de aplicação dos carregamentos. Por esse motivo, é importante ter em mãos modelos que possibilitem prever, com precisão, o comportamento mecânico desse tipo de material viscoelástico (MVE) durante sua vida útil ou prever seu comportamento em uma ampla faixa de frequências.

A modelagem matemática do comportamento mecânico de MVEs deve, portanto, ser realizada tanto no domínio da frequência quanto no domínio do tempo. Na abordagem no domínio da frequência, em geral, a ideia é impor um carregamento harmônico com frequência variável e amplitude conhecida e usar algum modelo dinâmico do sistema para obter o módulo de armazenamento e o fator de perda em um intervalo de frequências pré-determinado [1-2]. Já no domínio do tempo, a ideia é impor um histórico de tensões e obter um histórico de deformações ou, ao contrário, impor um histórico de deformações e obter um histórico de tensões e, em seguida, aplicar um modelo do sistema [3-5]. Geralmente, em ambos os domínios, a modelagem é um processo de identificação inversa.

Uma forma de representar matematicamente os modelos de comportamento viscoelástico linear é através de

equações diferenciais de ordem inteira. A principal vantagem de se utilizar essa ferramenta está na facilidade de armazenar e manipular os termos, quase sempre triviais, em suas derivadas e integrais. Uma desvantagem é que, para representar bem o comportamento do material, em geral, é necessário um elevado número de termos, o que gera um maior custo computacional [6].

Outra forma de representar esses materiais é por meio de modelos baseados em cálculo fracionário (CF). Esses modelos têm vantagens sobre a viscoelasticidade linear clássica (baseada em derivadas de ordem inteira) visto que um menor número de termos são exigidos para uma boa representação do comportamento material – por exemplo, quatro ou cinco parâmetros – o que, *a priori*, facilita o cálculo e a simulação numérica [7].

Com isso, as equações diferenciais do modelo mecânico escritas em termos de derivadas de ordem inteira são substituídas por equações envolvendo diferenciações de ordem não-inteiras (não necessariamente de ordem fracionária). Entre os vários modelos possíveis [8], o modelo de Zener fracionário (ZF) se mostra bastante eficiente para prever o comportamento material com variação da frequência [9].

Assim, o principal objetivo deste trabalho é apresentar a implementação da função Mittag-Leffler utilizada para a caracterização de materiais viscoelásticos no domínio do tempo, considerando o modelo constitutivo de Zener fracionário.

Neste artigo, é apresentada uma breve revisão teórica de conceitos que se fazem importantes para o desenvolvimento da metodologia apresentada (integrais e derivadas fracionárias, funções de Mittag-Leffler, modelo constitutivo de Zener fracionário). Na sequência, é apresentada a implementação da função Mittag-Leffler. O texto é encerrado apresentando as conclusões finais.

## II. CONCEITOS TEÓRICOS

### A. Integrais e Derivadas Fracionárias

Existem várias definições de derivadas fracionárias e integrais fracionárias, entre as quais destacam-se as definições de Riemann-Liouville, Caputo, Riesz, Erdélyi-Kober, Weyl, Grünwald-Letnikov, Hadamard, Chen, entre outras [10].

Considerando que, no presente estudo, o sistema estrutural encontra-se inicialmente em repouso, não há necessidade de se tratar as informações que ocorrem para um tempo  $t < 0$ . Assim, para este trabalho, são mais apropriadas as definições de Riemann-Liouville [8]. Para tanto, seja a função  $f(t)$ ,  $t \in (a, b)$ ,  $\alpha$  um número real positivo e  $\Gamma$  a função gamma de Euler [11]. A integral fracionária de Riemann-Liouville à esquerda de ordem  $\alpha$  é definida por

$${}_a I_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (1)$$

e a integral fracionária de Riemann-Liouville à direita de ordem  $\alpha$  é definida por

$${}_x I_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt. \quad (2)$$

Com isso, Mainardi [8] define as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville à esquerda e à direita de ordem  $\alpha$  e  $n$  sendo um número inteiro e positivo, tal que  $n-1 \leq \alpha < n$ , respectivamente, como

$${}_a D_x^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left[ {}_a I_x^{n-\alpha} f(x) \right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \quad (3)$$

e

$${}_x D_b^\alpha f(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left[ {}_x I_b^{n-\alpha} f(x) \right] = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f(t) dt. \quad (4)$$

### B. Funções do tipo Mittag-Leffler

O interesse pelas funções do tipo Mittag-Leffler (ML) decorre da estreita ligação destas funções com equações diferenciais e integrais de ordem fracionária e equações integrais do tipo Abel [12]. Neste caso, como a natureza da função exponencial é a solução de equações diferenciais de ordem inteira e coeficientes constantes, a função ML tem um papel análogo para solução de equações diferenciais de ordem não inteira.

A função ML para um parâmetro, denotada por  $E_\nu(z)$  com  $\nu > 0$ , é definida por uma representação em série, convergente em todo plano complexo [13], na forma

$$E_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1 + \nu n)}, \quad \nu > 0, z \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

Segundo Mainardi [8], para a convergência da série de potências na Eq. 5, o parâmetro  $\nu$  pode ser complexo, desde que  $\text{Re}(\nu) > 0$ .

Uma extensão da função ML é obtida substituindo a constante aditiva 1 do argumento da função Gama (Eq. 5) por um parâmetro complexo arbitrário  $\mu$ . Assim, a representação da função ML em dois parâmetros,  $\nu$  e  $\mu$ , é da forma

$$E_{\nu, \mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + \nu n)}, \quad \text{Re}(\nu) > 0, \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

No corrente trabalho, a função ML é de ordem  $\nu \in (0,1) \subset \mathbb{R}$  e o argumento  $z$  é sempre real e negativo. Nesse caso, esse argumento é convenientemente redefinido como

$$z = -\left(\frac{t}{\tau_a}\right)^\nu \quad (7)$$

onde  $\tau_a \in \mathbb{R}$  é um parâmetro fixo e é característico do sistema analisado. Assim, das Eqs. 5 e 6 tem-se

$$E_\nu \left( -\left(\frac{t}{\tau_a}\right)^\nu \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t/\tau_a)^{\nu n}}{\Gamma(1 + \nu n)} \quad (8)$$

e

$$E_{\nu, \mu} \left( -\left(\frac{t}{\tau_a}\right)^\nu \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t/\tau_a)^{\nu n}}{\Gamma(\mu + \nu n)}. \quad (9)$$

Algumas importantes propriedades limites dessa função de ML para um parâmetro podem ser destacadas a partir da Eq. 8. Analisando os comportamentos assintóticos para um tempo muito pequeno e para um tempo muito grande, tem-se

$$E_\nu \left( -\left(\frac{t}{\tau_a}\right)^\nu \right) \sim \begin{cases} 1 - \frac{(t/\tau_a)^\nu}{\Gamma(1 + \nu)}, & \left(\frac{t}{\tau_a}\right) \rightarrow 0^+, \\ \frac{(t/\tau_a)^{-\nu}}{\Gamma(1 - \nu)}, & \left(\frac{t}{\tau_a}\right) \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (10)$$

Para  $(t/\tau_a) \geq 0$  a função ML apresenta um decréscimo muito rápido para  $(t/\tau_a) \rightarrow 0^+$  e quando  $(t/\tau_a) \rightarrow +\infty$  ocorre um decréscimo muito lento [8].

Existem várias integrais associadas às funções ML que podem ser estabelecidas pela aplicação das fórmulas das funções Gamma e Beta e de outras técnicas. Destaca-se aqui a seguinte integral associada à função ML [14]:

$$\int_0^t \eta^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(\omega \eta^\alpha) d\eta = t^\beta E_{\alpha, \beta+1}(\omega t^\alpha), \quad \alpha, \beta, \omega \in \mathbb{C}, \quad \text{Re}(\alpha) > 0, \quad \text{Re}(\beta) > 0. \quad (11)$$

Considerando o caso especial onde  $\beta = 1$  e  $\omega = -1$ , a Eq. 11 conduz a

$$\int_0^t E_\alpha(-\eta^\alpha) d\eta = t E_{\alpha, 2}(-t^\alpha) \quad (12)$$

onde  $E_{\alpha, 2}(\cdot)$  é a função ML com dois parâmetros (Eq. 6).

Com vistas à sua aplicação no modelo constitutivo do MVE, a Eq. 12 é rearranjada considerando a variável limite superior de integração  $t$  como  $t = t_k/\tau_a$ , onde  $t_k$  é um tempo qualquer. Assim, realizando uma transformação de coordenadas onde  $\eta = \frac{t_k - \xi}{\tau_a}$ , tem-se que o lado esquerdo da Eq. 12 torna-se

$$\begin{aligned} \int_0^t E_\alpha(-\eta^\alpha) d\eta &= \int_{t_k}^0 E_\alpha \left( -\left(\frac{t_k - \xi}{\tau_a}\right)^\alpha \right) \left(-\frac{1}{\tau_a}\right) d\xi \\ &= \frac{1}{\tau_a} \int_0^{t_k} E_\alpha \left( -\left(\frac{t_k - \xi}{\tau_a}\right)^\alpha \right) d\xi. \end{aligned} \quad (13)$$

Igualando esse resultado ao lado direito da Eq. 12, tem-se o importante resultado para o corrente trabalho:

$$\int_0^{t_k} E_\alpha \left( -\left(\frac{t_k - \xi}{\tau_a}\right)^\alpha \right) d\xi = t_k E_{\alpha, 2} \left( -\left(\frac{t_k}{\tau_a}\right)^\alpha \right). \quad (14)$$

### C. Modelo constitutivo de Zener Fracionário para MVEs

Os modelos constitutivos são utilizados como idealizações do comportamento mecânico dos materiais. As modificações de modelos clássicos da viscoelasticidade podem ser obtidas, por exemplo, propondo uma relação entre a tensão e a deformação no material baseadas em derivadas de ordem não inteira (frequentemente denominadas na literatura de derivadas fracionárias). As derivadas de ordem inteira dependem somente do comportamento local da função, enquanto que as derivadas fracionárias dependem de toda a história da função. Isso fica evidente pelas Eqs. 1 a 4.

Entre as várias possibilidades de modelos constitutivos destaca-se aqui o modelo de Zener fracionário (ZF) (Fig. 1) que, no domínio da frequência, mostrou-se eficiente para prever o comportamento de MVEs [9]. Considerando um elemento de MVE baseado no modelo mecânico da Fig. 1, a equação diferencial que relaciona a tensão normal (ou cisalhante)  $\sigma(t)$  com a deformação longitudinal (ou cisalhante)  $\varepsilon(t)$  para problemas unidimensionais, é dada por [15]

$$\sigma(t) + \frac{\eta}{R_1 + R_2} \frac{d^\nu}{dt^\nu} \sigma(t) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \varepsilon(t) + \frac{\eta R_2}{R_1 + R_2} \frac{d^\nu}{dt^\nu} \varepsilon(t) \quad (15)$$

sendo  $R_1$  e  $R_2$  os módulos de rigidez dos elementos elásticos,  $\eta$  o coeficiente de viscoelasticidade e  $\nu$  a ordem de diferenciação do amortecedor de Scott-Blair [8].

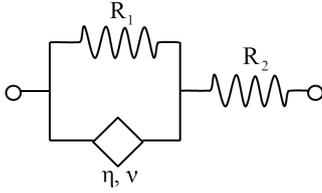


Figura 1. Modelo de Zener Fracionário

Definindo os parâmetros  $E_\infty = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ ,  $r_\mu = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$  e  $\tau_a^\nu = \frac{\eta}{R_1 + R_2}$ , pode-se escrever a Eq. 15 como

$$\sigma(t) + \tau_a^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \sigma(t) = E_\infty \varepsilon(t) + E_\infty r_\mu \tau_a^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \varepsilon(t). \quad (16)$$

Um dos ensaios clássicos para caracterização de um MVE no domínio do tempo é o ensaio de relaxação, em que o material é submetido a uma deformação constante  $\varepsilon_0$  e a tensão, dependente do tempo, decresce gradativamente. Para um material sólido viscoelástico, a tensão decresce até atingir um ponto de equilíbrio, enquanto que para fluidos viscoelásticos a tensão tende a zero. Nesse ensaio, ocorre um rearranjo da estrutura do material sob deformação constante, dissipando parte da energia interna em forma de calor, e parte pode ser recuperada quando a tensão é retirada.

No ensaio de relaxação, uma deformação constante  $\varepsilon_0$  é aplicada e a tensão  $\sigma(t)$  é medida. Se o comportamento do material é linear, a rigidez do material é variável com o tempo e pode ser representada por  $E(t) = \sigma(t)/\varepsilon_0$ . Esta função  $E(t)$  obtida é denominada módulo de relaxação e representa a tensão por unidade de deformação aplicada e é um comportamento característico do material.

A função módulo de relaxação do modelo de ZF pode ser obtida pela solução da Eq. 16, considerando  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$  constante, e é dada por [15]

$$E(t) = E_\infty \left[ 1 + r_\mu E_\nu \left( - \left( \frac{t}{\tau_a} \right)^\nu \right) \right]. \quad (17)$$

Utilizando a expansão assintótica apresentada na Eq. 10, destacam-se dois importantes parâmetros materiais desse MVE. São eles: o módulo de relaxação instantâneo,  $E_0$ , dado por

$$E_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} (E(t)) = E_\infty (1 + r_\mu) \quad (18)$$

e o módulo de relaxação de equilíbrio,  $E_\infty$ ,

$$E_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} (E(t)). \quad (19)$$

Os MVEs também podem ser definidos como materiais com memória, ou seja, o estado de tensões num dado ponto do material, para um certo instante de tempo, não depende somente do estado de deformações naquele mesmo instante, mas também de toda a história de deformação à qual aquele ponto material esteve sujeito. A recíproca, por sua vez, também é verdadeira. Essa relação pode ser descrita por meio do Princípio da Superposição de Boltzmann [16], se o material for viscoelástico linear. Nesse caso, para um ensaio específico de tração uniaxial ou de cisalhamento puro, o comportamento do material pode ser representado levando-se em consideração que em cada instante a deformação é incrementada de  $\Delta \varepsilon$  em intervalos de tempo  $\Delta \xi$ . Assim, a expressão obtida em termos da função módulo de relaxação  $E(t)$  é

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t-\xi) \frac{d\varepsilon(\xi)}{d\xi} d\xi, \quad (20)$$

onde  $\frac{d\varepsilon(\xi)}{d\xi}$  é a taxa de deformação a cada instante  $\xi$  e  $0 \leq \xi < t$ .

No caso especial onde o material é carregado a uma taxa de deformação constante, ou seja

$$\frac{d\varepsilon(\xi)}{d\xi} = \dot{\varepsilon} = \text{constante}, \quad (21)$$

a tensão representada pela Eq. 20 pode ser reescrita como

$$\sigma(t) = \dot{\varepsilon} \int_0^t E(t-\xi) d\xi. \quad (22)$$

Substituindo a Eq. 17 na Eq. 22, e utilizando a integral mostrada na Eq. 14 tem-se a tensão em um sólido viscoelástico descrito segundo o modelo de ZF, em um instante  $t_k$  qualquer, deformado a uma taxa constante  $\dot{\varepsilon}$  posta como

$$\begin{aligned}\sigma^z(t_k) &= E_\infty \dot{\epsilon} \left[ t_k + r_\mu \dot{\epsilon} \int_0^{t_k} E_\nu \left( - \left( \frac{t-\xi}{\tau_a} \right)^\nu \right) d\xi \right] \\ &= E_\infty \dot{\epsilon} t_k \left[ 1 + r_\mu E_{\nu,2} \left( - \left( \frac{t_k}{\tau_a} \right)^\nu \right) \right].\end{aligned}\quad (23)$$

### III. METODOLOGIA

#### A. Implementação da função Mittag-Leffler

Observa-se, pela Eq. 23, que o argumento da função ML é dado por

$$c = - \left( \frac{t}{\tau_a} \right)^\nu. \quad (24)$$

Ou seja, definidos os parâmetros materiais ( $\tau_a$  e  $\nu$ ) o argumento pode ser obtido para qualquer tempo  $t$ . Entretanto, a avaliação desta função é significativamente onerosa, visto que a mesma resulta da obtenção de um longo somatório (Eq. 9), o qual é fortemente dependente da precisão desejada.

Com o intuito de reduzir o tempo despendido com essa operação, optou-se por realizar uma aproximação dos valores da função ML no intervalo no qual se encontra uma família de pontos obtidos experimentalmente através de um conjunto de ensaios uniaxiais de tração (ou cisalhamento puro) com diferentes taxas de deformação constantes e deformação inicial nula (curvas tensões-deformações).

Para uma dada configuração, o argumento  $c$  da função ML só é dependente do tempo  $t$ . Nesse sentido, o processo de aproximação da função ML se baseia em obter valores extremos do argumento  $c$  para cada curva  $ic$ -ésima ( $1 \leq ic \leq \text{Número de Curvas}$ ):

$$c_{\text{inf}}|_{ic} = - \left( \frac{\text{tempo}_{\text{max}}|_{ic}}{\tau_a} \right)^\nu, \quad (25)$$

e

$$c_{\text{sup}}|_{ic} = - \left( \frac{\text{tempo}_{\text{min}}|_{ic}}{\tau_a} \right)^\nu. \quad (26)$$

Nesse caso,  $\text{tempo}_{\text{min}}|_{ic}$  é o tempo no primeiro ponto amostrado (e não nulo) da  $ic$ -ésima curva. Igualmente  $\text{tempo}_{\text{max}}|_{ic}$  é o tempo do último ponto.

Com isso, podem ser obtidos os valores extremos entre todas as curvas:

$$c_{\text{inf}} = \min \left\{ c_{\text{inf}}|_{ic} \mid (1 \leq ic \leq \text{Número de Curvas}) \right\}, \quad (27)$$

$$c_{\text{sup}} = \max \left\{ c_{\text{sup}}|_{ic} \mid (1 \leq ic \leq \text{Número de Curvas}) \right\}. \quad (28)$$

Em seguida, o intervalo  $[c_{\text{inf}}, c_{\text{sup}}]$  é dividido em um número suficiente de pontos uniformemente espaçados em uma escala logarítmica. Para cada ponto, calcula-se a função ML através do algoritmo apresentado por Gorenflo [12]. Estes pontos e os respectivos valores da função ML são tabelados e armazenados.

De posse do argumento da função ML para o  $k$ -ésimo ponto a ser avaliado via Eq. 23, da  $ic$ -ésima curva, recorre-se à tabela previamente obtida e, localizado o intervalo no qual o argumento pertence, obtém-se o valor correspondente da função ML para o argumento avaliado através de uma interpolação linear. Realizando esse procedimento, observa-se uma significativa redução no tempo computacional com o cálculo da função Mittag-Leffler, todas as vezes que essa recorrência se faz necessária.

A curva tensão-deformação mostrada na Fig. 2 refere-se a um “pseudo-ensaio” experimental de um material fictício. O objetivo dessa figura é mostrar que os valores da função Mittag-Leffler obtidos através da metodologia descrita convergem para os valores da função Mittag-Leffler obtidos via algoritmo apresentado por Gorenflo et al. (2002). O tempo computacional gasto para a identificação desse material utilizando o algoritmo apresentado por Gorenflo et al. (2002) foi de 5771 segundos, enquanto que o tempo computacional gasto na metodologia descrita anteriormente foi de 4886 segundos. Além disso, graficamente observa-se que não há uma diferença significativa entre os resultados obtidos.

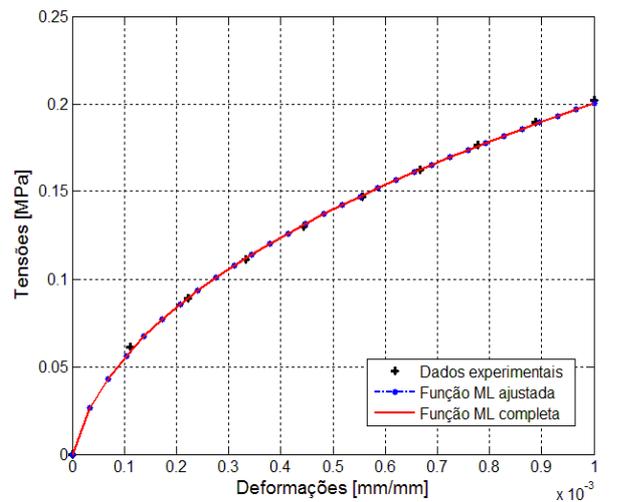


Figura 2. Visão geral da curva.

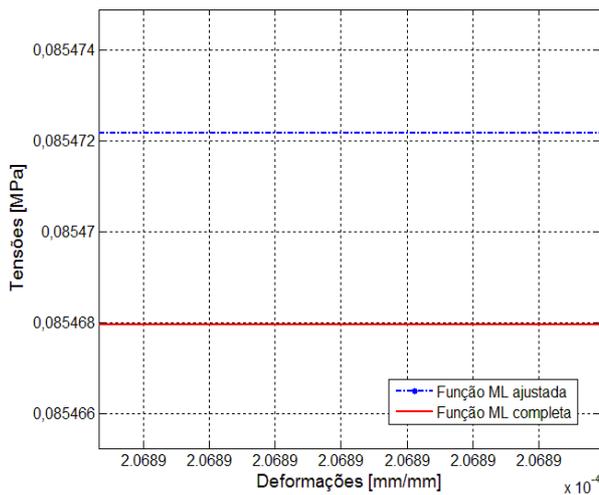


Figura 3. Visão da região em destaque

#### IV. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi proposta uma forma de implementação da função ML para a caracterização de MVE no domínio do tempo, tendo por base o modelo constitutivo de ZF. Com esse fim, os dados experimentais extraídos de curvas de tensão-deformação, em diferentes taxas de deformação foram utilizados para a análise.

Observou-se que a metodologia apresentada para a implementação da função ML apresenta uma boa convergência. Isso fica evidente na representação gráfica das Fig. 2 e 3, onde os dados experimentais são confrontados com os resultados obtidos da implementação da função ML apresentada por Gorenflo [12] (curva vermelha) e pela metodologia proposta aqui (curva azul). Além disso, observou-se uma melhora significativa no tempo computacional gasto, tendo em vista que essa função é avaliada para cada ponto experimental, das diferentes famílias de curvas.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Moreira RAS, Melo FJQ, Rodrigues JFD, "Static and dynamic characterization of composition cork for sandwich beam cores," J Mater Sci 45, 2010.
- [2] Martinez-Agíre M, Elejabarrieta MJ, "Characterization and modeling of viscoelastically damped sandwich structures," Journal Mechanical Sciences 52, 2010.
- [3] Liu Q, Subhash G, "Higher-order fractional constitutive equations of viscoelastic materials involving three different parameters and their relaxation and creep functions," Journal Mechanics of Materials 38, 2016.
- [4] Plaseied A, Fatemi A, "Deformation response and constitutive modeling of vinyl ester polymer including strain rate and temperature effects. J Mater Sci 43, 2008.
- [5] Chae SH, Zhao JH, Edwards DR, Ho PS, "Characterization of the viscoelasticity of molding compounds in the time domain," J Electron Mater 39, 2010.

- [6] Brinson HL, Brinson LC, "Polymer Engineering Science and Viscoelasticity," Springer Science, New York, 2008.
- [7] Pritz T, "Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials," J Sound Vib 195, 1996.
- [8] Mainardi F, "Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models," Imperial College Press, London, 2010.
- [9] Pritz T, "Five-parameter fractional derivative model for polymeric damping materials," J Sound Vib 265, 2003.
- [10] Kilbas AA, Srivastava HM, Trujillo JJ, "Theory and Applications of Fractional Differential Equations," North-Holland Mathematics Studies, New York, 2006.
- [11] Li C, Zeng F, "Numerical Methods for Fractional Calculus," CRC Press, Florida, 2015.
- [12] Gorenflo R, Loutchko J, Luchko Y (2002) Computation of the Mittag-Leffler function  $E_{\alpha, \beta}(z)$  and its derivative. Fractional Calculus & Applied Analysis 5, 2002.
- [13] Haubold HJ, Mathai AM, Saxena RK, "Mittag-Leffler functions and their applications," Journal of Applied Mathematics 2011.
- [14] Shukla AK, Prajapati JC, "On a generalization of Mittag-Leffler function and its properties," J Math Anal Appl 336, pp.797-811, 2007.
- [15] Mainardi F, Spada G (2011), "Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology," Eur Phys J pp., pp.133:160, 2011.
- [16] Christensen RM, "Theory of Viscoelasticity: An Introduction," 2nd ed., Academic Press, New York, 1982.