Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia
25 a 27 de outubro, 2017
SMNE UFPR

Inferência Bayesiana para testes acelerados "step-stress" simples com dados de falha sob censura tipo II e distribuição Gama

Karlla Delalibera Chagas
pósMAC, Unesp
Presidente Prudente, Brasil
karlladelalibera@gmail.com

Fernando Antonio Moala
Departamento de Estatística, Unesp
Presidente Prudente, Brasil
femoala@fct.unesp.br

***Resumo*—Foi realizado um estudo sobre como modelar dados que advém de um teste acelerado. Para isso, foi considerado o caso em que a carga de estresse aplicada foi do tipo "step-stress" simples. Para a modelagem, foi utilizado o modelo "step-stress" simples com censura tipo II, na qual foi considerado que os tempos de vida dos itens em teste seguiam uma distribuição Gama. Foi realizada uma abordagem clássica, por meio do método de máxima verossimilhança, e também uma abordagem Bayesiana, usando prioris Gama, para estimar os parâmetros da distribuição. Este trabalho objetivou realizar a comparação desses dois métodos por meio de simulações para diferentes tamanhos amostrais, através de alguns índices, foi verificado qual desses dois métodos inferenciais se aproximou mais dos verdadeiros valores dos parâmetros.**

***Palavras-chave*—Testes acelerados; Step-Stress; MCMC; Máxima Verossimilhança; Distribuição Gama.**

I. Introdução

Com o crescente avanço da tecnologia, o mercado industrial vem se mostrando cada vez mais interessado em produzir produtos com maior qualidade, buscando em um segundo momento avaliar a qualidade desses produtos, de modo que o tempo entre a sua produção e a sua inserção no mercado, seja miníma.

Para avaliar confiabilidade e a qualidade de um produto, é preciso realizar alguns tipos de testes. De modo intuitivo, é possível pensar que quanto maior é a qualidade de um produto, mais difícil é avaliar a sua confiabilidade. Isto porque ao realizar os testes em condições normais de funcionamento do produto, ou seja, realizar um experimento colocando n produtos em testes e esperar até que eles falhem, muito tempo de teste será exigido.

Com base nesse contexto, que surge os testes de vida acelerados. Esse método tem como objetivo acelerar a ocorrência da falha de um produto, submetendo o mesmo a condições elevadas de estresse.

Ao realizar um experimento de testes acelerados, é preciso definir qual carga de estresse será aplicada nos itens que serão testados. Como descrito por [6], existem diferentes cargas de estresse, sendo que neste trabalho foi adotada a carga de estresse do tipo "step-stress", na qual um conjunto de itens é submetido a um nível de estresse alto por um período de tempo pré-determinado. Caso esses itens não falhem até esse período, o nível de estresse é elevado para um novo nível, e o processo se repete até o final do estudo.

Assim, após realizar um experimento de testes acelerados do tipo "step-stress", os tempos de falhas obtidos podem ser modelados por diferentes distribuições de probabilidades, como pode ser visto em [6]. Neste trabalho foi considerado que os tempos de falha seguem uma distribuição Gama.

II. Propósito

O objetivo deste trabalho foi realizar um estudo sobre testes acelerados do tipo "step-stress" simples, considerando que os tempos de falha sob censura tipo II seguem uma distribuição Gama.

Foi realizada uma análise estatística dos tempos de falha, na qual foi utilizado os dois principais métodos inferenciais: a inferência clássica e a inferência bayesiana. Na literatura, esses dois métodos são de grande destaque, porém frequentemente os métodos bayesianos têm produzindo melhores resultados, principalmente quando há poucos dados.

Neste trabalho foram abordados os dois métodos, na qual foi realizado a comparação deles por meio de simulações, considerando diferentes tamanhos amostrais e diferentes funções de perda.

III. MÉTODOS

Para realizar a análise estatística dos tempos de falhas de um teste acelerado do tipo "step-stress", foi feito primeiramente a formulação do modelo baseado em [1], em que foi adotado o modelo de exposição cumulativa proposto por [6]. Além disso, foi considerado que os tempos observados tanto no nível de estresse x_1 quanto no nível de estresse x_2, seguem uma distribuição Gama com parâmetro de forma comum α e parâmetros de escala θ_1 e θ_2.

Seja F_1 e F_2 as distribuições dos tempos de falha nos níveis de estresse x_1 e x_2, além disso seja θ_1 e θ_2 os parâmetros de escala associados a essas funções, respectivamente.

A função de distribuição cumulativa do modelo step-stress simples com dados sob censura tipo II e considerando a distribuição Gama para os níveis de estresse x_1 e x_2, é dada por:

$$G(t) = \begin{cases} G_1(t) = F_1(t) \quad ,0 < t < \tau_1 \\ \\ G_2(t) = F_2\left(t - \tau_1 + \dfrac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1\right) \quad ,\tau_1 \leq t < \infty \end{cases}, \tag{1}$$

em que:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \int_0^{\frac{t}{\theta_1}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\ F_2\left(t - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1\right) &= \int_0^{\frac{t-\tau_1+\frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1}{\theta_2}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \end{aligned},$$

na qual $t > 0$ e, ainda, $\alpha > 0$ $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$ são parâmetros desconhecidos. A função densidade de probabilidade é dada por:

$$g(t) = \left\{ \begin{array}{l} g_1(t) = f_1(t) \quad ,0 < t < \tau_1 \\ \\ g_2(t) = f_2\left(t - \tau_1 + \dfrac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1\right) \quad ,\tau_1 \leq t < \infty \end{array} \right\}, \tag{2}$$

em que:

$$f_1(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta_1^{\alpha}} t^{\alpha-1} exp\left\{-\frac{t}{\theta_1}\right\}.$$

$$f_2\left(t - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta_2^{\alpha}}\left(t - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1\right)^{\alpha-1} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{\theta_2}\left(t - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1\right)\right\}.$$

Para o modelo step-stress simples com dados sob censura tipo II, adotado neste trabalho, foi considerado n unidades em teste que foram submetidas a um nível de estresse inicial x_1. Essas unidades permaneceram nesse nível de estresse até um tempo pré-determinado τ_1. Após esse tempo, as unidades que não falharam foram submetidas a um nível de estresse mais elevado, denotado por x_2.

No caso de censura tipo II, o experimento só acaba quando r unidades falham, de modo que as $n - r$ unidades que não falham são censuradas. Seja n_1 o número de unidades que falharam no primeiro nível de estresse, e n_2, o número de unidades que falharam no segundo nível de estresse.

A. *Funções de Perda*

Em um contexto de simulação, ao realizar uma estimação já conhecendo o verdadeiro valor do parâmetro, é possível observar que grande parte das vezes existe diferença entre o valor estimado e o valor verdadeiro. Por exemplo, vamos considerar $\hat{\theta}$ uma estimativa de θ. Como visto em [5], uma maneira de calcular a perda que ocorre ao estimar um parâmetro, é por meio da diferença entre a estimativa e o verdadeiro valor, isto é, $\hat{\theta} - \theta$. Caso $\hat{\theta} = \theta$, pode-se concluir que a estimativa coincidiu com o verdadeiro valor. Caso $\hat{\theta} < \theta$, conclui-se que houve uma subestimação, e caso $\hat{\theta} > \theta$, diz que houve uma superestimação.

Desta maneira, a perda que ocorre quando um parâmetro θ é estimado por $\hat{\theta}$ pode ser representada por meio da função de perda, denotada por $l(\hat{\theta}, \theta)$.

Na literatura de confiabilidade, há dois tipos de funções de perda: a do tipo simétrica e a do tipo assimétrica. Usualmente grande parte dos trabalhos utilizam as funções de perda simétrica, que possuem como estimador de Bayes a média, a mediana e a moda a posteriori. Neste trabalho foi adotada a função de perda simétrica Erro Absoluto, em que o estimador de Bayes é a mediana a posteriori e foi adotado como função de risco, o Erro Quadrático Médio (EQM).

Essas funções de perda têm como característica considerar peso igual quando ocorre uma superestimação ou subestimação. Em outras palavras, a gravidade de ocorrer uma superestimação ou subestimação é a mesma.

Todavia, em muitos casos, utilizar funções de perda simétrica não é recomendável. Ellah [4] discute que em situações aonde o interesse é estimar a função de confiabilidade ou a função de risco, ter uma superestimação é muito mais grave do que uma subestimação. Devido a isso, utilizar funções de perda assimétrica é o mais indicado.

Portanto, estão apresentadas a seguir as duas funções de perda assimétrica mais conhecidas: a função de perda LINEX e a função de perda de entropia geral.

1) Função de perda LINEX: A função de perda LINEX é uma das mais importantes funções de perda assimétrica utilizadas na literatura. Como visto em [4], essa função foi introduzida por Varian (1975) e pode ser expressa do seguinte modo:

$$L(\triangle) \propto \exp(c\triangle) - c \triangle - 1, \tag{3}$$

em que $c \neq 0$, $\triangle = (\hat{\theta} - \theta)$ e $\hat{\theta}$ é uma estimativa para θ.

O parâmetro c é um parâmetro que dá forma à função. Sendo assim, como visto em [4] para valores de $c > 0$ a superestimação tem maior gravidade que a subestimação. Por outro lado, se $c < 0$, a subestimação é mais grave que a superestimação. Portanto, o estimador de Bayes quando utiliza-se essa função é dado por:

$$\hat{\theta}_{BL} = -\frac{1}{c} \ln\{E_\theta\left[\exp(-c\theta)\right]\} \ , \tag{4}$$

em que $E_\theta(\cdot)$ é a esperança a posteriori em relação a densidade a posteriori de θ.

Como visto em Sindhu et.al [7], a função de risco quando utilizamos a função de perda LINEX é dada por:

$$Risco(\hat{\theta}) = \ln[E_\theta(c\theta)] + cE_\theta(\theta). \tag{5}$$

2) Função de perda de entropia geral: A função de perda de entropia geral é uma importante função de perda assimétrica utilizada na literatura. Esta função foi introduzida por [3] e pode ser expressa do seguinte modo:

$$L(\theta, \hat{\theta}) \propto \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^q - q \ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right) - 1, \tag{6}$$

em que q $(q \neq 0)$ é um parâmetro de forma da função e $\hat{\theta}$ é uma estimativa para θ.

Como visto em [3], para valores de $q > 0$ o erro positivo tem maior gravidade que um erro negativo. Consequentemente se $q < 0$, o erro negativo é mais grave que o erro positivo. Assim, o estimador de Bayes utilizando a função de perda de entropia geral é dado por:

$$\hat{\theta}_{BE} = \left[E_\theta(\theta^{-q})\right]^{-\frac{1}{q}}, \tag{7}$$

em que $E_\theta(\cdot)$ é a esperança a posteriori em relação a densidade a posteriori de θ.

Como visto em Sindhu et.al [7], a função de risco quando utilizamos a função de perda de Entropia geral é dada por:

$$Risco(\hat{\theta}) = \ln[E_\theta(\theta^{-q})] + qE_\theta[\ln(\theta)]. \tag{8}$$

B. Método Clássico - Método de Máxima Verossimilhança

O objetivo do método de máxima verossimilhança é obter o vetor de parâmetros $\Theta = (\alpha, \theta_1, \theta_2)$ que maximiza a função de verossimilhança. Assim, como visto em [2] a função de verossimilhança de α, θ_1 e θ_2 baseada em uma amostra com censura tipo II, pode ser escrita do seguinte modo:

$$L(\alpha, \theta_1, \theta_2|\mathbf{t}) = \frac{n!}{(n-r)!}\left[\prod_{i=1}^{r} g(t_{i:n})\{1 - G(t_{r:n})\}^{n-r}\right], \tag{9}$$

em que $r = n_1 + n_2$. Portanto, utilizando as expressões apresentadas em (1) e (2), é possível construir a função de verossimilhança para α, θ_1 e θ_2, isto é:

$$\begin{aligned}
L(\alpha, \theta_1, \theta_2|\mathbf{t}) &= \frac{n!}{(n-r)!}\left\{\prod_{i=1}^{n_1} f_1(t_{i:n})\right\} \times \\
&\times \left\{\prod_{i=n_1+1}^{r} f_2\left(t_{i:n} - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1\right)\right\} \times \\
&\times \left\{1 - F_2\left(t_{r:n} - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1\right)\right\}^{n-r} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!}\frac{\left(\prod_{i=1}^{n_1} t_i\right)^{\alpha-1}\left(\prod_{i=n_1+1}^{r} t_i - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1\right)^{\alpha-1}}{\theta_1^{\alpha n_1}\theta_2^{\alpha n_2}\left(\Gamma(\alpha)\right)^r} \times \\
&\times \exp\left\{-\frac{1}{\theta_1}\left(\sum_{i=1}^{n_1} t_i\right) - \frac{1}{\theta_2}\left(\sum_{i=n_1+1}^{r} t_i - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1\right)\right\} \times \\
&\times \left\{1 - F_2\left(t_r - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\tau_1\right)\right\}^{n-r},
\end{aligned} \tag{10}$$

em que:

$$0 < t_{1:n} < \cdots < t_{n_1:n} < \tau_1 \leq t_{n_1+1:n} < \cdots < t_{r:n} < \infty.$$

Ao aplicar o $\ln$ na equação apresentada em (10) e derivar em relação aos parâmetros α, θ_1 e θ_2, são chamadas de "equações de verossimilhança". Assim, os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros α, θ_1 e θ_2 podem ser obtidos resolvendo essas equações por meio de métodos iterativos, como por exemplo, o Método de Newton-Raphson.

C. Análise Bayesiana utilizando prioris Gama

O grande ganho de se trabalhar com a inferência Bayesiana está no fato de poder inserir na análise estatística informações de um especialista ou de estudos anteriores.

Para isso, considere um parâmetro θ desconhecido, em que $p(\theta)$ é a distribuição a priori desse parâmetro. A informação sobre θ pode ser aumentado por meio da função de verossimilhança, que é a informação que vem dos dados. O produto da distribuição a priori com a função de verossimilhança, resulta em uma distrubuição mais atualizada, que é a distribuição a posteriori $p(\theta|x)$, sendo esta a de maior interesse.

Neste trabalho, foi considerado que cada um dos parâmetros α, θ_1 e θ_2 seguem uma distribuição Gama. Isto é, $\alpha \sim Gama(a_1, b_1)$, $\theta_1 \sim Gama(a_2, b_2)$ e $\theta_2 \sim Gama(a_3, b_3)$, em que a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 e b_3 são conhecidos.

Como não há informações nem de um especialista e nem de estudos anteriores, foi assumido um caráter não-informativo para os parâmetros neste estudo, ou seja, foi considerado $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a_3 = b_3 = 0.01$.

Assumiu-se também a independência a priori para os parâmetros, fazendo-se necessário determinar a priori conjunta, que nada mais é do que o produto das prioris. Ou seja:

$$\pi(\alpha, \theta_1, \theta_2) = \left\{ \frac{1}{\Gamma(a_1) b_1^{a_1}} \alpha^{a_1 - 1} e^{-\alpha/b_1} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\Gamma(a_2) b_2^{a_2}} \theta_1^{a_2 - 1} e^{-\theta_1/b_2} \right\} \left\{ \frac{1}{\Gamma(a_3) b_3^{a_3}} \theta_2^{a_3 - 1} e^{-\theta_2/b_3} \right\} =$$

$$= \frac{\alpha^{a_1 - 1} \theta_1^{a_2 - 1} \theta_2^{a_3 - 1}}{\Gamma(a_1) b_1^{a_1} \Gamma(a_2) b_2^{a_2} \Gamma(a_3) b_3^{a_3}} \exp\left\{ -\left(\frac{\alpha}{b_1} + \frac{\theta_1}{b_2} + \frac{\theta_2}{b_3} \right) \right\}. \tag{11}$$

Por fim, a distribuição a posteriori para os parâmetros α, θ_1 e θ_2 é representada de forma mais simples, que é a forma proporcional ao produto da função de verossimilhança (10) e da distribuição a priori conjunta (11), isto é:

$$p(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}) \propto \pi(\alpha, \theta_1, \theta_2) L(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}) \tag{12}$$

Isto é:

$$p(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t}) \propto \pi(\alpha, \theta_1, \theta_2) L(\alpha, \theta_1, \theta_2 | \mathbf{t})$$

$$\propto \frac{\alpha^{a_1 - 1} \theta_1^{a_2 - 1} \theta_2^{a_3 - 1} \left(\prod_{i=1}^{n_1} t_i \right)^{\alpha - 1} \left(\prod_{i=n_1+1}^{r} t_i - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1 \right)^{\alpha - 1}}{(\Gamma(\alpha))^r \theta_1^{\alpha n_1} \theta_2^{\alpha n_2}} \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{\alpha}{b_1} - \frac{\theta_1}{b_2} - \frac{\theta_2}{b_3} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{\theta_1} \left(\sum_{i=1}^{n_1} t_i \right) - \frac{1}{\theta_2} \left(\sum_{i=n_1+1}^{r} t_i - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1 \right) \right\} \times$$

$$\times \left\{ 1 - F_2 \left(t_r - \tau_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \tau_1 \right) \right\}^{n-r}. \tag{13}$$

É possível ver que a densidade a posteriori resultante é analiticamente complexa de ser tratada, fazendo-se necessário a utilização de métodos numéricos, por exemplo, o método de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC).

D. Descrição da Simulação

Como o nosso objetivo é comparar o método de máxima verossimilhança e o método bayesiano, foram realizadas simulações utilizando a linguagem de programação R.

Assim, foram geradas amostras de diferentes tamanhos com 50% e 70% de censura, em que para cada tamanho amostral diferente considerado houveram 1000 amostras. Os valores dos parâmetros foram fixados anteriormente, e foi aplicado os dois métodos inferenciais em cada amostra, para assim obter estimativas para os parâmetros.

Utilizando os algorítmos elaborados em linguagem R, foi realizado:

- Para o método Clássico, foram geradas 1000 amostras (para cada tamanho amostral diferente), na qual foi realizado a estimação pelo método de máxima verossimilhança para cada amostra, e posteriormente calculado os índices de: Probabilidade de Cobertura (PC), Erro Quadrático Médio (EQM) e Mediana das estimativas.
- Para o método Bayesiano, foram usadas as mesmas 1000 amostras geradas (para cada tamanho amostral diferente). Foi utilizado o algoritmo de Metropolis-Hastings, em que para cada amostra foram gerados 60000 valores da distribuição a posteriori, descartado os 20000 primeiros valores e aplicado lags de tamanho 30, a fim de diminuir a correlação entre os valores gerados. Posteriormente foi aplicado os estimadores de Bayes referente as funções de perda: Erro Absoluto, LINEX (foi considerado c = 0.7) e Entropia (foi considerado q = 0.7). Após isso, foram calculados os índices de: Probabilidade de Cobertura (PC), Função de risco e Mediana das estimativas.

Vale ressaltar que o algoritmo utilizado para gerar valores aleatórios do modelo step-stress simples com dados sob censura tipo II e considerando a distribuição Gama, pode ser visto em Alkhalfan [1].

IV. RESULTADOS

Os resultados usando diferentes tamanhos amostrais com 50% e 70% de censura estão resumidos nas tabelas a seguir e através dos índices calculados, foi possível dizer qual método obteve os melhores resultados. As estatísticas apresentadas nas tabelas são a Mediana (Estimativa) das estimativas dos parâmetros α, θ_1 e θ_2, a Função de risco (Risco) e a Probabilidade de Cobertura (PC).

Tabela I: Considerado $\alpha = 2$, $\theta_1 = 9.4877$, $\theta_2 = 4.4816$, $\tau_1 = 10$ e $n = 14$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco
$n = 14$	$r = 4$	α	*Máxima Verossimilhança*	2.4493	0.9590	52.6522
			Quadrática	2.0178	0.9840	6.2639
			Linex	1.9025	0.9840	3.1096
			Entropia	1.8101	0.9840	0.1000
		θ_1	*Máxima Verossimilhança*	9.9905	0.8190	295.9146
			Quadrática	14.6911	0.9770	204.9944
			Linex	5.3892	0.9770	24.0351
			Entropia	10.0603	0.9770	0.2769
		θ_2	*Máxima Verossimilhança*	2.2057	0.6320	19.9181
			Quadrática	3.5514	0.9630	19.8380
			Linex	2.6061	0.9630	8.0340
			Entropia	2.7929	0.9630	0.2436
	$r = 7$	α	*Máxima Verossimilhança*	2.4516	0.9680	24.7515
			Quadrática	1.9161	0.9810	3.5151
			Linex	1.8294	0.9810	2.6568
			Entropia	1.7283	0.9810	0.0862
		θ_1	*Máxima Verossimilhança*	7.0992	0.7580	113.6965
			Quadrática	10.7950	0.9880	126.2990
			Linex	5.1594	0.9880	18.9259
			Entropia	8.3914	0.9880	0.2180
		θ_2	*Máxima Verossimilhança*	3.1803	0.7230	9.6402
			Quadrática	4.4063	0.9650	12.8764
			Linex	3.3087	0.9650	6.8482
			Entropia	3.8437	0.9650	0.1404

Tabela II: Considerado $\alpha = 2$, $\theta_1 = 9.4877$, $\theta_2 = 4.4816$, $\tau_1 = 10$ e $n = 20$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco
$n = 20$	$r = 6$	α	*Máxima Verossimilhança*	2.2266	0.9580	20.8503
			Erro Absoluto	1.9029	0.9740	4.3447
			Linex	1.8343	0.9740	2.5079
			Entropia	1.7459	0.9740	0.0719
		θ_1	*Máxima Verossimilhança*	10.1738	0.8700	175.1154
			Erro Absoluto	13.5570	0.9720	170.1686
			Linex	6.0009	0.9720	21.2775
			Entropia	10.8867	0.9720	0.2045
		θ_2	*Máxima Verossimilhança*	2.8604	0.6990	19.0871
			Erro Absoluto	4.2331	0.9630	21.9242
			Linex	3.0025	0.9630	8.3523
			Entropia	3.4691	0.9630	0.2089
	$r = 10$	α	*Máxima Verossimilhança*	2.2660	0.9570	8.1982
			Erro Absoluto	1.8832	0.9660	2.3011
			Linex	1.8083	0.9660	2.3116
			Entropia	1.7254	0.9660	0.0635
		θ_1	*Máxima Verossimilhança*	7.9504	0.8060	132.0238
			Erro Absoluto	10.9064	0.9660	126.3313
			Linex	5.7870	0.9660	17.5998
			Entropia	9.3106	0.9660	0.1688
		θ_2	*Máxima Verossimilhança*	3.6886	0.8020	6.7548
			Erro Absoluto	4.6907	0.9680	9.2339
			Linex	3.6754	0.9680	6.3765
			Entropia	4.2683	0.9680	0.1039

Tabela III: Considerado $\alpha = 2$, $\theta_1 = 9.4877$, $\theta_2 = 4.4816$, $\tau_1 = 10$ e $n = 34$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco
$n = 34$	$r = 10$	α	*Máxima Verossimilhança*	2.0648	0.9490	2.9075
			Erro Absoluto	1.8612	0.9600	1.3998
			Linex	1.7992	0.9600	2.0829
			Entropia	1.7385	0.9600	0.0452
		θ_1	*Máxima Verossimilhança*	10.4847	0.8910	149.0386
			Erro Absoluto	12.8095	0.9470	141.1586
			Linex	6.9812	0.9470	17.9348
			Entropia	11.4030	0.9470	0.1322
		θ_2	*Máxima Verossimilhança*	3.2057	0.7500	13.3805
			Erro Absoluto	4.2627	0.9610	17.0017
			Linex	3.1539	0.9610	7.5497
			Entropia	3.6060	0.9610	0.1722
	$r = 17$	α	*Máxima Verossimilhança*	2.1544	0.9510	2.9940
			Erro Absoluto	1.8934	0.9410	1.3046
			Linex	1.8434	0.9410	2.0587
			Entropia	1.7907	0.9410	0.0399
		θ_1	*Máxima Verossimilhança*	8.5184	0.8420	75.0898
			Erro Absoluto	10.4022	0.9510	86.4545
			Linex	6.4486	0.9510	14.4856
			Entropia	9.4632	0.9510	0.1078
		θ_2	*Máxima Verossimilhança*	4.0475	0.8420	5.0578
			Erro Absoluto	4.6963	0.9470	6.6099
			Linex	3.9820	0.9470	5.6504
			Entropia	4.4670	0.9470	0.0605

Tabela IV: Considerado $\alpha = 2$, $\theta_1 = 9.4877$, $\theta_2 = 4.4816$, $\tau_1 = 10$ e $n = 50$.

n	r	θ_i	Métodos/Funções	Estimativa	PC	Risco
$n = 50$	$r = 15$	α	*Máxima Verossimilhança*	1.9974	0.9400	1.3825
			Erro Absoluto	1.8458	0.9450	0.7634
			Linex	1.8003	0.9450	1.8651
			Entropia	1.7518	0.9450	0.0304
		θ_1	*Máxima Verossimilhança*	10.4741	0.9240	65.6712
			Erro Absoluto	12.1534	0.9430	79.6864
			Linex	7.4769	0.9430	15.2280
			Entropia	11.2247	0.9430	0.0900
		θ_2	*Máxima Verossimilhança*	3.6442	0.7890	9.5798
			Erro Absoluto	4.5032	0.9750	13.1939
			Linex	3.4386	0.9750	7.2740
			Entropia	3.9722	0.9750	0.1419
	$r = 25$	α	*Máxima Verossimilhança*	2.0905	0.9550	1.0652
			Erro Absoluto	1.9200	0.9510	0.6478
			Linex	1.8776	0.9510	1.8894
			Entropia	1.8373	0.9510	0.0273
		θ_1	*Máxima Verossimilhança*	8.8656	0.8760	44.8303
			Erro Absoluto	10.2563	0.9540	55.3030
			Linex	6.8865	0.9540	12.8219
			Entropia	9.5415	0.9540	0.0754
			Empírica	8.8922	0.6810	43.8704
		θ_2	*Máxima Verossimilhança*	4.1713	0.8710	2.9992
			Erro Absoluto	4.6601	0.9560	3.6621
			Linex	4.1365	0.9560	5.1127
			Entropia	4.5018	0.9560	0.0395

Tabela V: Considerado $\alpha = 2$, $\theta_1 = 9.4877$, $\theta_2 = 4.4816$, $\tau_1 = 10$ e $n = 100$.

n	r	θ_i	**Métodos/Funções**	**Estimativa**	**PC**	**Risco**
$n = 100$	$r = 30$	α	Máxima Verossimilhança	1.9859	0.9360	0.3302
			Erro Absoluto	1.9086	0.9450	0.2756
			Linex	1.8743	0.9450	1.7609
			Entropia	1.8518	0.9450	0.0149
		θ_1	Máxima Verossimilhança	10.4063	0.9360	25.8901
			Erro Absoluto	11.1810	0.9420	31.3009
			Linex	8.3309	0.9420	11.7631
			Entropia	10.8243	0.9420	0.0428
		θ_2	Máxima Verossimilhança	4.0366	0.8290	7.5759
			Erro Absoluto	4.6253	0.9650	9.6453
			Linex	3.7450	0.9650	6.4246
			Entropia	4.3086	0.9650	0.1037
	$r = 50$	α	Máxima Verossimilhança	2.0585	0.9430	0.3244
			Erro Absoluto	1.9722	0.9390	0.2542
			Linex	1.9394	0.9390	1.7992
			Entropia	1.9224	0.9390	0.0136
		θ_1	Máxima Verossimilhança	9.0550	0.8960	17.3059
			Erro Absoluto	9.6868	0.9430	21.0392
			Linex	7.6207	0.9430	10.4058
			Entropia	9.3819	0.9430	0.0368
		θ_2	Máxima Verossimilhança	4.3294	0.9130	1.5209
			Erro Absoluto	4.5604	0.9550	1.7393
			Linex	4.2981	0.9550	4.7205
			Entropia	4.4997	0.9550	0.0185

V. Discussões

Os resultados apresentados nas tabelas I a V, mostraram que para todos os tamanhos amostrais considerados, tanto para 70% quanto para 50% de censura, o método bayesiano com as funções de perda Erro absoluto, Linex e Entropia apresentaram as melhores probabilidades de cobertura, estando de um modo geral dentro do esperado, isto é, com probabilidades de cobertura próximas de 95%. É fácil ver as probabilidades de cobertura dos parâmetros tendem a se aproximar de 95%, conforme o tamanho de n aumenta.

Pelos valores das funções de risco, é possível ver que à medida que o tamanho de n aumenta esses valores tendem a diminuir. Temos que para 50% de censura, foi obtido valores menores da função de risco do que quando foi considerado 70%. Além disso, o método bayesiano com função de perda de Entropia, apresentou os menores valores da função de risco para todos os tamanhos amostrais e porcentagens de censura. Para amostras de tamanho pequeno a função de perda Erro Absoluto, usualmente utilizada, apresentou valores muito altos quando comparado com a função de perda de Entropia, ressaltando mais uma vez a importância de se trabalhar com essa função assimétrica.

As estimativas realizadas por cada método, mostraram que tanto o método clássico quanto o método bayesiano (funções de perda Erro Absoluto, Linex e Entropia), para todos os tamanhos amostrais, estão razoavelmente próximos dos verdadeiros valores dos parâmetros que são $\alpha = 2$, $\theta_1 = 9.4877$, $\theta_2 = 4.4816$. É possível ver que a medida que o tamanho de n aumenta, as estimativas de todos os parâmetros ficaram cada vez mais próximas do verdadeiro valor.

De um modo geral, foi concluido que o método bayesiano com função de perda de Entropia obteve os melhores resultados, isto é, se aproximou razoavelmente do verdadeiro valor dos parâmetros, com os menores valores da função de risco e as melhores probabilidades de cobertura.

VI. Conclusão

O objetivo principal deste trabalho foi abordar a metodologia de testes acelerados, utilizando o modelo "step-stress" simples com dados sob censura tipo II e considerando a distribuição Gama.

Para atingir esse objetivo, o primeiro passo foi realizar a construção do modelo "step-stress" simples, na qual foi considerado o modelo de exposição cumulativa.

Como o intuito era comparar o método clássico com o método bayesiano, foi realizado um estudo por meio de simulações, em que foi considerado diferentes tamanhos amostrais com 50% e 70% de censura.

Os resultados obtidos nas simulações mostraram que para todos os tamanhos amostrais considerados, o método bayesiano com função de perda de Entropia obteve os melhores resultados, isto é, se aproximou razoavelmente dos verdadeiros valores dos parâmetros, com os menores valores da função de risco e as melhores probabilidades de cobertura.

Além disso mostrou-se a importância de se trabalhar com funções de perda assimétrica, uma vez que a função de perda Erro Absoluto, convencionalmente usada, não apresentou bons resultados.

Agradecimentos

Agradeço a fundação CAPES pelo apoio financeiro e por me possibilitar dedicar-me integralmente e exclusivamente ao mestrado.

Referências

[1] L. Alkhalfan. Inference for a Gamma step-stress model under censoring, PhD thesis, McMaster University, Hamilton, July (2012).

[2] B.C. Arnold, N. Balakrishnan and H.N. Nagaraja, A first course in order statistics, John Wiley and Sons, New York, 1992.

[3] R. Calabria and G. Pulcini, Point estimation under asymmetric loss functions for left-truncated exponential samples, Communications in Statistics - Theory and Methods, London, 1996.

[4] A.H.A. Ellah, Parametric prediction limits for generalized exponential distribution using record observations, Applied Mathematics and Information Sciences, U.S.A.,2009.

[5] A. F. M. S. Islam, Loss functions, utility functions and Bayesian sample size determination, University of London, 2011, London, February.

[6] W. B. Nelson, Accelerated testing: statistical models, test plans, and data analysis, John Wiley and Sons, Cap. 10, vol. 1, New York, 2004.

[7] T.N.Sindhu, N.Feroze and M.Aslam, Bayesian Analysis of the Kumaraswamy Distribution under Failure Censoring Sampling Scheme,International Journal of Advanced Science and Technology, 51, 2013.