



**Simpósio de Métodos
Numéricos em Engenharia**

25 a 27 de outubro, 2017

O Método dos Elementos Finitos Aplicado na Análise de Vibrações Livres de Problemas Submetidos ao Estado Plano de Tensões

Ricardo Custódio

Marcos Arndt

PPGMNE

Universidade Federal do Paraná - UFPR

Curitiba/PR, Brasil

ricardocustodio@utfpr.edu.br

Resumo—O presente artigo tem por objetivo verificar a resposta da aplicação do Método dos Elementos Finitos em um problema de vibração livre não amortecida, para uma estrutura submetida ao estado plano de tensões. Inicialmente alguns conceitos básicos relativo ao método são apresentados, posteriormente é proposta uma análise numérica utilizando elementos quadriláteros de quatro e oito nós, afim de investigar os valores das frequências naturais de vibrações e o erro relativo entre as malhas utilizadas. Observa-se que a taxa de convergência para o uso de elementos de oito nós é superior a taxa de convergência para elementos com quatro nós, entretanto o tempo de processamento para o uso de elementos com 8 nós diminui em relação ao tempo de processamento com elementos de quatro nós.

Palavras-chave—: Método dos Elementos Finitos; Vibração Livre e Estado Plano de Tensão.

I. INTRODUÇÃO

A medida em que os avanços tecnológicos ocorrem no exercício da engenharia, acabam por surgir novas técnicas para a solução de problemas que necessitam ser sanados para uma melhor descrição e modelagem numérica do comportamento de materiais e sistemas estruturais.

A determinação dos autovalores é tão importante na engenharia, quanto no campo da matemática, pois muitos problemas de análise

dinâmica recaem em problemas matemáticos de autovalores e autovetores, como por exemplo, em problemas da dinâmica estrutural, onde os autovalores representam frequências naturais de vibração. Porém, existem dificuldades na aproximação numérica dos autovalores de ordem mais altas, podendo prejudicar a qualidade de previsão das respostas dinâmicas, conforme apresentado por [1], [12].

O Método dos Elementos Finitos (MEF) pode ser considerado um método já estabelecido devido ao nível de desenvolvimento apresentado, que permite a sua utilização por muitos profissionais das mais variadas áreas, tais como os campos da engenharia civil, elétrica, bioengenharia, dentre outras. Nas análises bidimensionais as formas mais simples para se atribuir a discretização de um domínio, são os elementos triangulares e retangulares, porém, ambos elementos possuem baixa possibilidade de aproximação precisa da forma geométrica do domínio a ser discretizado, de modo que as possibilidades de aumento na precisão da solução de um dado problema, podem ser exploradas através do desenvolvimento de novas funções de forma. [2].

Existem casos de problemas, cuja solução é independente de uma das coordenadas de referência, devido a geometria, condições de contorno ou devido aos carregamentos externos, os problemas desta natureza estão submetidos ao Estado Plano de Tensões (EPT) e Estado Plano de Deformações (EPD), onde agora os efeitos dos

fenômenos físicos atuam não apenas em uma direção, mas em duas. Em ambos os casos os problemas são descritos por um sistema de equações diferenciais parciais, que são expressas em termos de duas variáveis dependentes que podem representar, por exemplo, duas componentes de um vetor de deslocamento [11].

II. O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é amplamente conhecido, por ser bem aplicável em problemas com geometrias diversas. Quanto a solução de um problema via MEF, é possível obter soluções mais precisas através do chamado refino-h, ou então através do refino-p, ou ainda por meio da combinação de ambos [1]. Existe uma vasta bibliografia dedicada ao assunto do MEF, cujas formulações e aplicações são apresentadas por [7], [9] e [11].

A. MATRIZ DE RIGIDEZ E MASSA ELEMENTAR

O problema dinâmico relativo ao EPT é governado por um sistema de equações diferenciais parciais, descrito nas seguintes expressões [8]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2)$$

Onde ρ é a massa específica do material, σ_x , σ_y , τ_{xy} as tensões normais e tangenciais, u e v são os deslocamentos horizontal e vertical. Os problemas de vibração livre não amortecida são problemas típicos de autovalores e autovetores. Aplicando-se o método de Galerkin no sistema de equações (1) e (2), chega-se na formulação geral do problema generalizado de autovalores e autovetores [?]:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\bar{x} = \bar{0} \quad (3)$$

Onde \mathbf{K} e \mathbf{M} representam as matrizes de rigidez e massa, λ o quadrado da frequência natural de vibração e \bar{x} os autovetores. As matrizes de rigidez e massa são dadas por:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (4)$$

$$\mathbf{M} = \rho \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (5)$$

$$\mathbf{D} = D_0 \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$D_0 = \frac{E}{(1-\nu^2)} \quad (7)$$

Onde \mathbf{B} representa a matriz das derivadas primeiras das funções de forma, \mathbf{D} o tensor de relações constitutivas, \mathbf{N} a matriz das funções de forma, ρ e t a densidade e espessura do elemento finito. Convertendo as Eq.(4) e Eq.(5) (as quais estão referenciadas aos eixos cartesianos) para um sistema de coordenadas naturais, Fig.(1), surge o termo Jacobiano, J , de modo de \mathbf{K} e \mathbf{M} ficam:

$$\mathbf{K} = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |J| d\xi d\eta \quad (8)$$

$$\mathbf{M} = \rho t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} |J| d\xi d\eta \quad (9)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \dots & \phi_4 & 0 & \dots & \phi_n & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \dots & \phi_4 & 0 & \dots & \phi_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

A matriz \mathbf{N} é onde são armazenadas as funções de forma ϕ_n utilizadas para a aproximação da solução do exemplo numérico proposto no presente estudo. A integração das matrizes \mathbf{K} e \mathbf{M} são obtidas pelo processo de integração Gauss-Legendre, neste caso são utilizados três pontos de integração, os quais são suficientes para obtenção valor exato das matrizes [7].

B. ELEMENTO FINITO QUADRILATERAL COM 4 NÓS

Para a solução aproximada de problemas em duas dimensões é possível o emprego do elemento finito quadrilateral com 4 nós, Fig. (1), (2 graus de liberdade por nó), cuja formulação pode ser encontrada em [11].

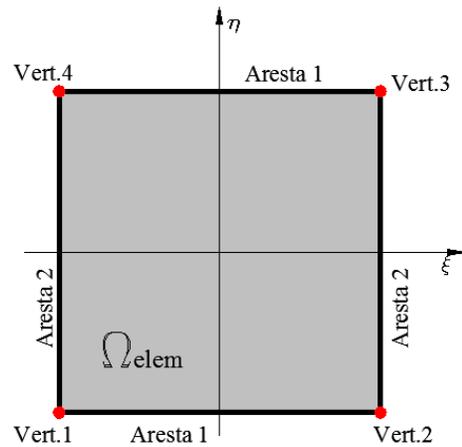


Figura 1: Elemento quadrilateral de 4 nós.

As funções de forma utilizadas para este elemento podem ser obtidas com base nos polinômios de Legendre [11] e são apresentadas

nas figuras 2 e 3.

$$\phi_1^4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (11)$$

$$\phi_2^4 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (12)$$

$$\phi_3^4 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (13)$$

$$\phi_4^4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (14)$$

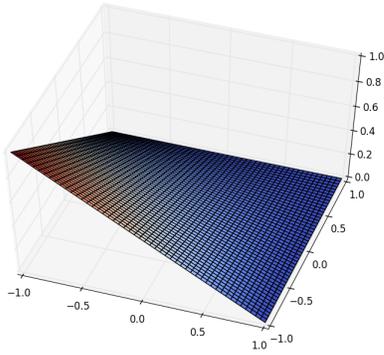


Figura 2: Exemplo de uma função de forma ϕ_1^4 para um elemento quadrilateral de 4 nós.

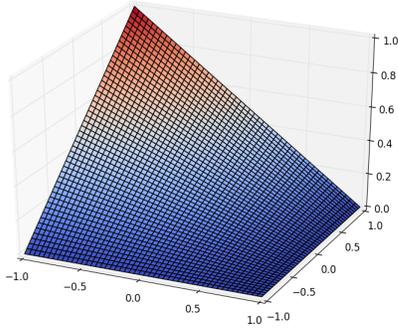


Figura 3: Exemplo de uma função de forma ϕ_4^4 para um elemento quadrilateral de 4 nós.

C. ELEMENTO FINITO QUADRILATERAL COM 8 NÓS

Afim de aumentar a precisão da solução, é possível realizar um refinamento do tipo p, via inserção de novos graus de liberdade no elemento mestre, Fig. 4. Tal procedimento consiste no aumento do espaço de funções (extensão para ordens mais altas dos polinômios de Legendre) definidas no domínio elementar. A seguir são apresentadas as funções de forma para graus polinomial 2, exemplificadas nas figuras 5 e 6:

$$\phi_1^8 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-\xi - \eta - 1) \quad (15)$$

$$\phi_2^8 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1) \quad (16)$$

$$\phi_3^8 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1) \quad (17)$$

$$\phi_4^8 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1) \quad (18)$$

$$\phi_5^8 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \quad (19)$$

$$\phi_6^8 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2) \quad (20)$$

$$\phi_7^8 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \quad (21)$$

$$\phi_8^8 = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2) \quad (22)$$

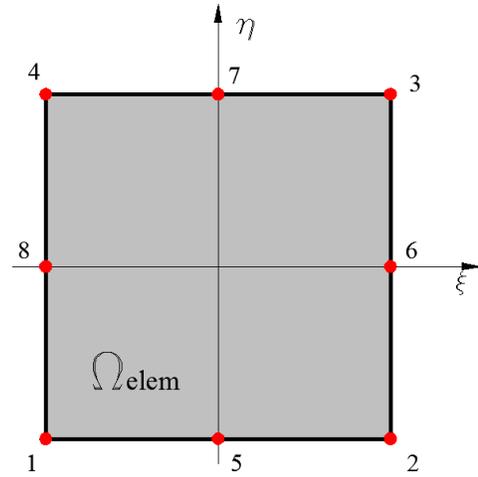


Figura 4: Elemento quadrilateral de 8 nós.

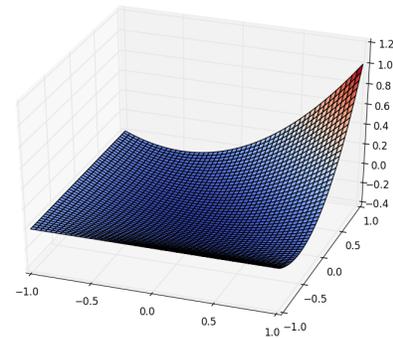


Figura 5: Exemplo de uma função de forma ϕ_2^8 para um elemento quadrilateral de 8 nós.

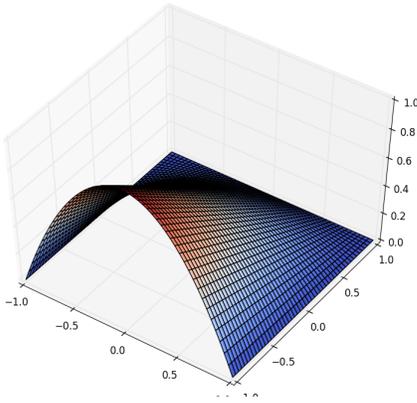


Figura 6: Exemplo de uma função de forma ϕ_5^8 para um elemento quadrilateral de 8 nós.

III. EXEMPLO NUMÉRICO

O modelo estudado está apresentado na Fig. 7, o qual consiste em uma peça de formato L, com densidade $\rho = 7500\text{kg/m}^3$, módulo elástico $E = 210\text{GPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. Os resultados das frequências naturais de vibração, foram obtidos através do MEF convencional e estão apresentados na Tabela 1 e figuras 10 e 11. As malhas de elementos finitos utilizadas possuem 3, 12 e 192 elementos, tanto para o elemento mestre com quatro nós (MEF-4) quanto para o elemento mestre de oito nós (MEF-8). Nas figuras 8 e 9 constam alguns exemplos das malhas geradas para a solução numérica do modelo proposto.

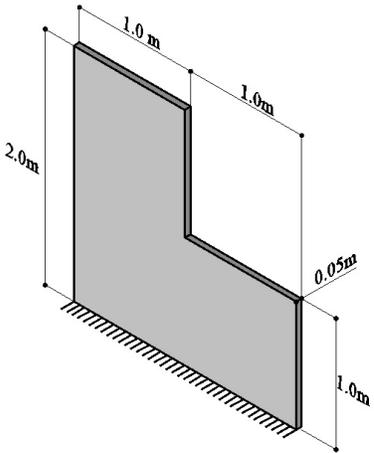


Figura 7: Estrutura em formato L, com engastamento na base.

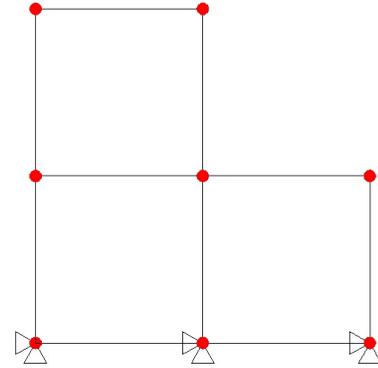


Figura 8: Malha com 3 elementos (4 nós por elemento) totalizando 10 graus de liberdade livres e 6 graus de liberdade restringidos.

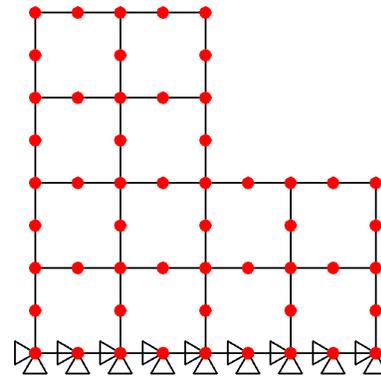


Figura 9: Exemplo de uma malha com 12 elementos (8 nós por elemento) totalizando 88 graus de liberdade livres e 18 graus de liberdade restringidos.

Tabela I: RESULTADOS APROXIMADOS PARA AS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO (rad/s)

Freq. (i)	MEF 4			MEF 8		
	3 Elementos	12 Elementos	192 Elementos	3 Elementos	12 Elementos	192 Elementos
	16 G.L	42 G.L	450 G.L	18 G.L	106 G.L	1282 G.L
1	2123.2312	1928.1409	1794.6701	1899.8869	1823.1872	1775.9081
2	4952.6227	4645.6203	4385.8611	4582.0013	4424.2145	4347.4476
3	5522.8128	4877.0504	4614.1093	4765.4494	4615.3097	4599.2707
4	9169.0052	8297.7950	7587.7485	7996.3406	7618.2823	7509.1652
5	12291.8361	9718.1258	8948.9834	9197.1974	8945.8034	8893.4566
6	14237.3742	12197.3462	10845.5739	11528.9109	10889.6996	10719.2908
7	14833.5830	12790.0027	11183.5070	12247.4851	11215.6039	11043.4334
8	18705.4889	13677.4367	12350.8255	13222.1039	12329.3999	12253.9372
9	20018.1969	16353.8602	13354.0013	15828.0398	13450.1809	13110.3665
10	21244.7907	17438.9913	14981.6086	16592.8647	15115.2221	14711.5466

Na Tabela 1 constam as frequências naturais de vibração aproximadas obtidas através da implementação computacional realizada por meio da linguagem Python.

É notável a diferença entre o tempo de processamento para o MEF-4 e MEF-8, como por exemplo, nas malhas constituídas por 192 elementos, onde o tempo de processamento do MEF-4 foi de 2.05 segundos enquanto que no MEF-8 o tempo computado foi de 31.03 segundos. Para as malhas com três elementos os tempos de processamento corresponderam a 0.13 segundos para o MEF-4 e 0.17 segundos para o MEF-8, não tendo tanta expressividade em termos tempo gasto para o processamento. Entretanto dependendo da complexidade da estrutura, este tempo pode ser demasiadamente longo para o uso do MEF-8. A medida em que se aumentam o número de elementos na malha, e conseqüentemente o número de graus de liberdade, a diferença entre os tempos de processamento ficam acentuados porque alguns aspectos de implementação diferem entre o MEF-4 e o MEF-8, como por exemplo, na integração numérica, onde o número de pontos de Gauss para o MEF-4 são suficientes para quatro pontos, já no MEF-8 o número de pontos de Gauss necessários são nove.

É possível observar que para o MEF-8 as frequências aproximadas são inferiores em relação aos resultados do MEF-4, isto é, quando comparadas para o mesmo número de elementos, demonstrando uma taxa de convergência superior em relação ao MEF-4. No entanto para a obtenção das frequências naturais ainda mais próximas da solução analítica, torna-se necessário aumentar o refinamento das malhas para ambos os Métodos. Na figura 10 está representado a distribuição gráfica dos resultados obtidos na Tabela 1, enquanto que na Figura 11, são demonstrados os erros relativos obtidos com relação aos resultados do MEF-8 com 1282 graus de liberdade.

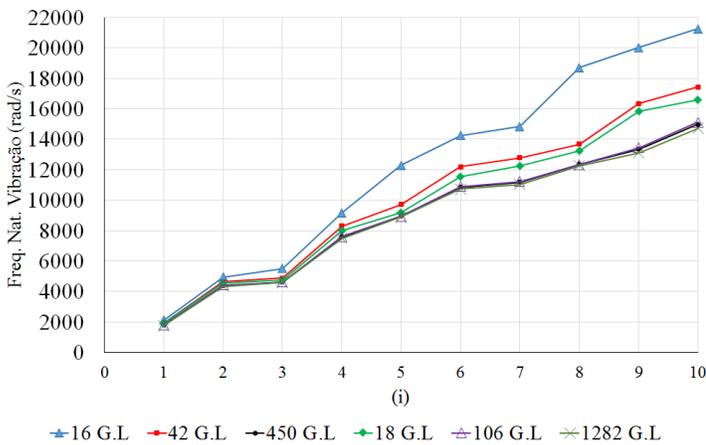


Figura 10: Gráfico da distribuição das 10 primeiras frequências naturais de vibração.

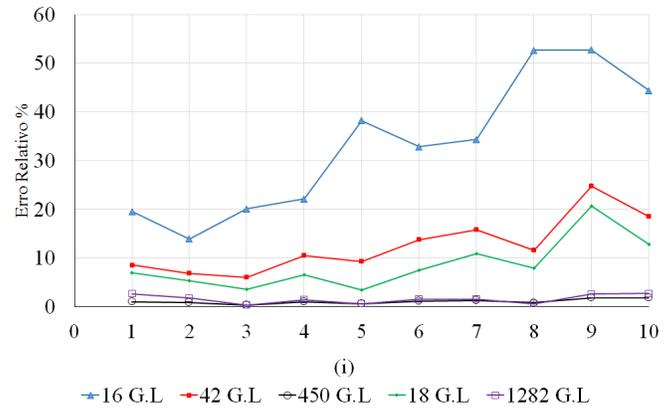


Figura 11: Gráfico representativo do erro relativo, tomando-se como base as frequências obtidas para a aplicação numérica de 1282 graus de liberdade.

IV. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo analisou *a priori* a resposta do MEF para um problema de vibração livre de uma estrutura submetida ao estado plano de tensões, bem como a apresentação da estrutura necessária para a utilização do método. Na simulação da peça em L foi observado que o uso de um elemento mestre com oito nós tende a apresentar uma resposta de convergência mais acentuada do que para um elemento com quatro nós, isso considerando o mesmo número de elementos componentes na malha. Como continuação do estudo, o próximo objetivo será a comparação com os resultados obtidos pelo Método dos Elementos Finitos Generalizados, afim de verificar a taxa de convergência das frequências naturais de vibrações. Outra proposta será a de engastar a peça em L no seu topo, uma vez que neste caso os modos de vibração tendem a se tornar mais complexos, visto que a solução numérica fica mais dificultosa para a solução numérica.

AGRADECIMENTOS

Os autores registram neste preâmbulo, o agradecimento à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo fomento a pesquisa, e para a Universidade Federal pela estrutura fornecida para o desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- [1] M. Arndt, *O Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado À Análise de Vibrações Livres de Estruturas Reticuladas*, Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia. Curitiba. Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia. 2009.
- [2] B. M. Irons Ergatoudis., & O. C. Zienkiewicz, *Curved, Isoparametric, "Quadrilateral" Elements For Finite Element Analysis*, Int. J. Solids Structures, 1998.
- [3] I. Babuska, & J.M. Melenk, *The partition of unity method*. Int. J. Numer. Methods Eng. 40, 727-758. 1997.
- [4] C. A. Duarte, D. J. Kim, *An Investigation of the Implementation of the p-Version Finite Element Method*. Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 23, pp. 1-21. 2008.

- [5] A. Houmat, *In-plane vibration of plates with curvilinear plan-forms by a trigonometrically enriched curved triangular p-element*. Thin-Walled Structures 46 (2008), pp 103-111. 2007.
- [6] A.Y.T. Leung, B. Zhu, J. Zheng, H. Yang, *Analytical trapezoidal fourier p-element for vibrating plane problems*. J. Sound Vib. 271, 67-81. 2004.
- [7] M. Petyt, *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*. 2 ed. Cambridge University Press. 2010.
- [8] J. N. Reddy, *An Introduction to the Finite Element Method*, . McGraw-Hill, New York. 1993.
- [9] L. Segerlind, *Applied Finite Element Analysis*. Vol I. John Wiley & Sons, Inc. Canada. 1984.
- [10] P. Solin, & K. Segeth, & I. Dolezel, *Higher-Order Finite Element Methods*. Chapman & Hall/ CRC. 2004.
- [11] B. Szabó, & I. Babuska, *Finite Element Analysis*. Vol II. John Wiley & Sons, Inc. Canada. 1991.
- [12] A.J. Torii, *Análise Dinâmica de Estruturas com o Método Dos Elementos Finitos Generalizado*, Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia. Curitiba. Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia. 2012.