



**Simpósio de Métodos  
Numéricos em Engenharia**

**25 a 27 de outubro, 2017**

# Formulação do Indicador de Friberg Aplicado ao Método dos Elementos Finitos Generalizados

Maicon Felipe Malacarne

Marcos Arndt

Paulo de Oliveira Weinhardt

Roberto Dalledone Machado

Thamara Petroli

Programa de Pós-Graduação em  
Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE)  
Universidade Federal do Paraná (UFPR)  
Curitiba-PR, Brasil

**Resumo**—Este trabalho apresenta a formulação matemática e as adaptações necessárias para a aplicação do Indicador de Erro de Friberg no Método dos Elementos Finitos Generalizados na análise de problemas de vibração livre. Também apresenta uma aplicação do método em uma viga de Euler-Bernoulli.

**Palavras-chave**— *MEFG; MEF; Indicador de Friberg; Convergência.*

## I. INTRODUÇÃO

O problema da determinação das frequências de vibração de uma estrutura é de grande importância na análise estrutural. Conhecer as frequências naturais de vibração auxilia na confiabilidade estrutural, uma vez que, se algum fator externo (ventos, terremotos, etc.) acaba excitando alguma das frequências naturais, por um período de tempo relativamente significativo, pode ocorrer o fenômeno da ressonância, o que implica num possível comprometimento da estrutura [1].

A determinação das frequências estruturais via Método dos Elementos Finitos (MEF) ou Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), parte do problema de valor de contorno que governa o problema, passando para um problema de autovalores e autovetores generalizado [2]. Frequentemente, em problemas práticos as matrizes envolvidas possuem grandes dimensões, devido ao elevado número de graus de liberdade, tornando essa análise complexa [3].

O indicador de Friberg, proposto em [4], tem finalidade de fazer uma projeção adimensional de quanto irá variar um determinado autovalor pré-selecionado, depois que o Método

dos Elementos Finitos p-hierárquico (MEF-p) é aplicado ao problema, sendo necessário que haja uma aproximação inicial obtida via MEF. A principal vantagem é que o novo sistema de equações não precisa ser resolvido. Deste modo, se o MEF-p for aplicado em apenas um dos elementos da malha, o indicador medirá a variação na frequência escolhida, provocada pelo acréscimo de novas funções naquele elemento. Segundo [5], é possível identificar qual dos elementos influencia de maneira mais significativa, ou seja, o elemento que apresentar a maior variação no seu indicador de Friberg contribuirá mais para a convergência da aproximação.

O objetivo deste trabalho é descrever detalhadamente a formulação necessária para que o indicador de Friberg possa ser aplicado no MEFG, visto que, de acordo com [3], [6], [7], [8], [9], [10] e [11], este é um método recorrente na literatura e apresenta bons resultados na análise dinâmica de barras, vigas, treliças, pórticos, equação da onda bidimensional e estado plano de tensões, especialmente na obtenção de frequências mais elevadas.

De acordo com [16], o MEFG que na ocasião denominava-se PUFEM, permite ao usuário incluir conhecimentos a priori sobre o problema, isso gera um ganho considerável em termos de precisão numérica e convergência, permitindo também a construção de espaços de aproximação mais suaves do que no MEF convencional.

## II. FORMULAÇÃO DO INDICADOR

A equação diferencial que descreve o problema de vibração livre não amortecida é apresentada em [12], sendo:

$$[M].\{\ddot{u}\} + [K].\{u\} = 0 \quad (1)$$

Onde  $[M]$  é a matriz de massa,  $\{\ddot{u}\}$  é o vetor aceleração,  $[K]$  é a matriz de rigidez e  $\{u\}$  é o vetor dos deslocamentos. A partir da equação (1) e fazendo algumas considerações detalhadas em [13], chega-se ao seguinte problema de autovalores e autovetores generalizado:

$$([K] - \lambda_i.[M]).\{\Phi_i\} = 0 \quad (2)$$

Sendo  $\{\Phi_i\}$  o  $i$ -ésimo autovetor associado ao  $i$ -ésimo autovalor  $\lambda_i$ . Uma aproximação para a solução da equação (1) utilizando o MEF pode ser escrita como:

$$u = \sum_{j=1}^n N_j \cdot a_j \quad (3)$$

Onde  $N_j$  são as funções de forma usualmente polinomiais e  $a_j$  são os graus de liberdade nodais. Ao aplicar o MEF, pode-se escrever uma segunda aproximação para a solução da equação (1), de maneira hierárquica de modo que:

$$u = \sum_{i=1}^n N_i \cdot a_i + \sum_{j=1}^m N_j \cdot b_j \quad (4)$$

Onde  $N_j$  são as novas funções enriquecedoras obtidas a partir da partição da unidade e  $b_j$  são os graus de liberdade de campo [14]. Supondo também que o sistema de equações do MEF tem dimensão  $n$ , então o sistema de equações do MEF tem dimensão  $m + n$ , sendo possível escrever a matriz de rigidez e a matriz de massa em bloco:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K]_{n \times n} & [K]_{n \times m} \\ [K]_{m \times n} & [K]_{m \times m} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} [M]_{n \times n} & [M]_{n \times m} \\ [M]_{m \times n} & [M]_{m \times m} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Substituindo as equações (5) e (6) na equação (2), tem-se:

$$\left( \begin{bmatrix} [K]_{n \times n} & [K]_{n \times m} \\ [K]_{m \times n} & [K]_{m \times m} \end{bmatrix} - \lambda_i \cdot \begin{bmatrix} [M]_{n \times n} & [M]_{n \times m} \\ [M]_{m \times n} & [M]_{m \times m} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_n \\ \Phi_m \end{Bmatrix} = 0 \quad (7)$$

O autovalor  $\lambda_i^n$  derivado do subsistema referente ao MEF, pode ser escrito por meio do Quociente de Rayleigh:

$$\lambda_i^n = \frac{K_i}{M_i} = \frac{(\Phi_i^t \cdot K_{n \times n} \cdot \Phi_i)}{\Phi_i^t \cdot M_{n \times n} \cdot \Phi_i} \quad (8)$$

Assim o autovalor  $\lambda_i^{n+m}$  do sistema aumentado pela aplicação do MEF, para o sistema de dimensão  $(n + m \times n + m)$ , também pode ser escrito como:

$$\lambda_i^{n+m} = \frac{K_i}{M_i} = \frac{(\theta_i^t \cdot K_{n+m \times n+m} \cdot \theta_i)}{\theta_i^t \cdot M_{n+m \times n+m} \cdot \theta_i} \quad (9)$$

A variação relativa para o  $i$ -ésimo autovalor, ligado ao enriquecimento usando o MEF, pode ser aproximado por:

$$\text{Variação relativa} = V_{i,j} \approx \frac{\lambda_i^n - \lambda_i^{n+m}}{\lambda_i^n} \quad (10)$$

Portanto quanto maior for o valor de  $V_{i,j}$ , maior será a variação do  $i$ -ésimo autovalor, provocada pelo acréscimo das funções do MEF.

Supondo ainda que  $\lambda_i$  seja uma função de duas variáveis independentes, ou seja, dependendo apenas da rigidez  $K_i$  e da massa  $M_i$ , então é possível expandir a função  $\lambda_i(K_i, M_i)$  em uma série de Taylor, quando acontece uma variação na rigidez  $\Delta K_i$  e uma variação na massa  $\Delta M_i$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \lambda_i(K_i + \Delta K_i, M_i + \Delta M_i) &\approx \lambda_i(K_i, M_i) + \frac{\partial \lambda_i(K_i, M_i)}{\partial K_i} \cdot \Delta K_i \\ &+ \frac{\partial \lambda_i(K_i, M_i)}{\partial M_i} \cdot \Delta M_i \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \lambda_i(K_i, M_i)}{\partial K_i^2} \cdot \Delta K_i^2 \\ &+ \frac{\partial^2 \lambda_i(K_i, M_i)}{\partial K_i \partial M_i} \cdot \Delta K_i \cdot \Delta M_i \\ &+ \frac{\partial^2 \lambda_i(K_i, M_i)}{\partial M_i^2} \cdot \Delta M_i^2 + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

A série (11) pode ser truncada nos três primeiros termos, sendo escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lambda_i(K_i + \Delta K_i, M_i + \Delta M_i) - \lambda_i(K_i, M_i) &\approx \frac{\partial \lambda_i(K_i, M_i)}{\partial K_i} \cdot \Delta K_i \\ &+ \frac{\partial \lambda_i(K_i, M_i)}{\partial M_i} \cdot \Delta M_i \end{aligned} \quad (12)$$

Ou seja:

$$\Delta \lambda_i \approx \frac{\partial \lambda_i(K_i, M_i)}{\partial K_i} \cdot \Delta K_i + \frac{\partial \lambda_i(K_i, M_i)}{\partial M_i} \cdot \Delta M_i \quad (13)$$

Como as derivadas parciais são facilmente obtidas e substituídas em (13), dividindo os dois lados por  $\lambda_i$ , tem-se:

$$\frac{\Delta \lambda_i}{\lambda_i} \approx \frac{1}{M_i} \cdot \Delta K_i \cdot \frac{1}{\lambda_i} - \frac{K_i}{M_i^2} \cdot \Delta M_i \cdot \frac{1}{\lambda_i} \quad (14)$$

Onde (14) pode ser simplificado em:

$$\frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i} \approx \frac{\Delta K_i}{K_i} - \lambda_i \cdot \frac{\Delta M_i}{K_i} \quad (15)$$

Partindo de (8) e (9), pode-se escrever  $\Delta K_i$  e  $\Delta M_i$  como:

$$\Delta K_i = (\{\Phi_i^t\}_n \cdot [K_{n \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n) - (\{\theta_i^t\}_{n+m} \cdot [K_{n+m \times n+m}] \cdot \{\theta_i\}_{n+m}) \quad (16)$$

$$\Delta M_i = (\{\Phi_i^t\}_n \cdot [M_{n \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n) - (\{\theta_i^t\}_{n+m} \cdot [M_{n+m \times n+m}] \cdot \{\theta_i\}_{n+m}) \quad (17)$$

Onde  $\{\Phi_i\}$  são os autovetores do sistema  $(n \times n)$  e  $\{\theta_i\}$  os autovetores do sistema  $(n+m \times n+m)$ . Admitindo que a matriz de rigidez e matriz de massa são simétricas, então pelas propriedades matriciais:  $[K]_{m \times n} = [K]_{n \times m}^t$ ,  $[M]_{m \times n} = [M]_{n \times m}^t$ , logo:

$$(\{\theta_i^t\}_m \cdot [K_{m \times n}] \cdot \{\theta_i\}_n) = (\{\theta_i^t\}_n \cdot [K_{n \times m}] \cdot \{\theta_i\}_m)^t \quad (18)$$

Analogamente:

$$(\{\theta_i^t\}_m \cdot [M_{m \times n}] \cdot \{\theta_i\}_n) = (\{\theta_i^t\}_n \cdot [M_{n \times m}] \cdot \{\theta_i\}_m)^t \quad (19)$$

Assim as segundas parcelas do lado esquerdo de (16) e (17) podem ser expressas em forma matricial conforme (7), da seguinte forma:

$$\Delta K_i = (\{\Phi_i^t\}_n \cdot [K_{n \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n) - (\{\theta_i^t\}_n \cdot [K_{n \times n}] \cdot \{\theta_i\}_n + 2 \cdot \{\theta_i^t\}_m \cdot [K_{m \times n}] \cdot \{\theta_i\}_n + \{\theta_i^t\}_m \cdot [K_{m \times m}] \cdot \{\theta_i\}_m) \quad (20)$$

$$\Delta M_i = (\{\Phi_i^t\}_n \cdot [M_{n \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n) - (\{\theta_i^t\}_n \cdot [M_{n \times n}] \cdot \{\theta_i\}_n + 2 \cdot \{\theta_i^t\}_m \cdot [M_{m \times n}] \cdot \{\theta_i\}_n + \{\theta_i^t\}_m \cdot [M_{m \times m}] \cdot \{\theta_i\}_m) \quad (21)$$

Admitindo que quando o autovetor se encontra próximo da convergência para uma determinada aproximação da solução de (1), as variações são mínimas então é viável considerar  $\{\Phi_i\} \approx \{\theta_i\}$ , então:

$$\Delta K_i = -2 \cdot \{\Phi_i^t\}_m \cdot [K_{m \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n - \{\Phi_i^t\}_m \cdot [K_{m \times m}] \cdot \{\Phi_i\}_m \quad (22)$$

$$\Delta M_i = -2 \cdot \{\Phi_i^t\}_m \cdot [M_{m \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n - \{\Phi_i^t\}_m \cdot [M_{m \times m}] \cdot \{\Phi_i\}_m \quad (23)$$

Substituindo (22) e (23) em (15), obtém-se:

$$\frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i} \approx \frac{-2 \cdot \{\Phi_i^t\}_m \cdot [K_{m \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n - \{\Phi_i^t\}_m \cdot [K_{m \times m}] \cdot \{\Phi_i\}_m}{K_i} + \lambda_i \cdot \left( \frac{2 \cdot \{\Phi_i^t\}_m \cdot [M_{m \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n + \{\Phi_i^t\}_m \cdot [M_{m \times m}] \cdot \{\Phi_i\}_m}{K_i} \right) \quad (24)$$

Que também pode ser escrito como:

$$\frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i} \approx \frac{-2 \cdot \{\Phi_i^t\}_m \cdot ([K_{m \times n}] - \lambda_i \cdot [M_{m \times n}]) \cdot \{\Phi_i\}_n}{\{\Phi_i^t\}_n \cdot [K_{n \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n} - \left( \frac{\{\Phi_i^t\}_m \cdot ([K_{m \times m}] - \lambda_i \cdot [M_{m \times m}]) \cdot \{\Phi_i\}_m}{\{\Phi_i^t\}_n \cdot [K_{n \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n} \right) \quad (25)$$

Como uma aproximação inicial é obtida utilizando o MEF, então  $\lambda_i$  é conhecido e basta determinar  $\{\Phi_i\}_m$  para que seja possível se obter uma aproximação para a variação relativa no autovalor. Tomando parte do sistema (7), escreve-se:

$$[K]_{m \times n} \cdot \{\Phi_n\} + [K]_{m \times m} \cdot \{\Phi_m\} - \lambda_i \cdot ([M]_{m \times n} \cdot \{\Phi_n\} + [M]_{m \times m} \cdot \{\Phi_m\}) = 0 \quad (26)$$

Ou seja:

$$([K]_{m \times n} - \lambda_i [M]_{m \times n}) \cdot \{\Phi_n\} = -([K]_{m \times m} - \lambda_i [M]_{m \times m}) \cdot \{\Phi_m\} \quad (27)$$

Como no MEEG, a matriz  $([K]_{m \times m} - \lambda_i [M]_{m \times m})$  é não singular, uma vez que corresponde a relação entre as próprias funções de enriquecimento já multiplicadas pelas funções do MEF, então a inversa  $([K]_{m \times m} - \lambda_i [M]_{m \times m})^{-1}$  existe. Logo é possível obter  $\{\Phi_m\}$  de (27), tal que:

$$\{\Phi_m\} = -([K]_{m \times m} - \lambda_i [M]_{m \times m})^{-1} \cdot ([K]_{m \times n} - \lambda_i [M]_{m \times n}) \cdot \{\Phi_n\} \quad (28)$$

Substituindo (28) em (25), tem-se:

$$\frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i} \approx \frac{-2 \cdot \{\Phi_i^t\}_m \cdot ([K_{m \times n}] - \lambda_i [M_{m \times n}]) \cdot \{\Phi_i\}_n}{\{\Phi_i^t\}_n \cdot [K_{n \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n} + \left( \frac{\{\Phi_i^t\}_m \cdot ([K]_{m \times m} - \lambda_i [M]_{m \times m}) \cdot \{\Phi_n\}}{\{\Phi_i^t\}_n \cdot [K_{n \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n} \right) \quad (29)$$

Ou equivalente a,

$$\frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i} \approx - \frac{\{\Phi_i^t\}_m \cdot ([K_{m \times n}] - \lambda_i [M_{m \times n}]) \cdot \{\Phi_i\}_n}{\{\Phi_i^t\}_n \cdot [K_{n \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n} \quad (30)$$

Mas  $\{\Phi_m\}^t$  é facilmente obtido de (28), então se:

$$A = \{\Phi_n^t\} \cdot ([K]_{m \times n} - \lambda_i [M]_{m \times n})^t \cdot (([K]_{m \times m} - \lambda_i [M]_{m \times m})^{-1})^t \quad (31)$$

e,

$$B = \frac{([K_{m \times n}] - \lambda_i [M_{m \times n}]) \cdot \{\Phi_i\}_n}{(\{\Phi_i^t\}_n \cdot [K_{n \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n)} \quad (32)$$

Portanto:

$$\eta_i = \frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i} \approx A * B \quad (33)$$

A equação (33) representa uma aproximação para a variação ocorrida no autovalor  $\lambda_i$ , provocada pela incorporação do MEEG no processo de aprimoramento da

solução inicial obtida via MEF. Desta forma se o MEFG for aplicado, é possível medir a variação provocada no autovalor  $\lambda_i$ . Esse processo se torna atrativo quando mais níveis de enriquecimento são aplicados no problema. Logo é possível realizar comparações dos valores do indicador de Friberg e descobrir qual tipo de enriquecimento produz a melhor aproximação.

Esta formulação foi baseada na descrição encontrada em [5], onde Duarte aplica o indicador de Friberg [4] no MEF-p. No presente trabalho foram feitas as adaptações necessárias para a utilização do indicador de Friberg no MEFG, desta forma o indicador aqui apresentado pode ser utilizado para a investigação de diferentes tipos de análises.

### III. SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Adotou-se o problema de determinar as frequências de vibração de uma viga de Euler-Bernoulli uniforme e bi rotulada (figura 1), sujeita a vibração livre, encontrada em [7], com as seguintes características: comprimento  $L = 1,0\text{ m}$ , módulo de elasticidade  $E = 1,0 \frac{N}{m^2}$ , massa específica  $\rho = 1,0 \frac{Kg}{m^3}$ , momento de inércia  $I = 1,0\text{ m}^4$  e área da seção transversal  $A = 1,0\text{ m}^2$ . A viga é analisada com apenas um elemento, possuindo dois graus de liberdade por nó (deslocamento lateral e rotação) e totalizando quatro graus de liberdade.

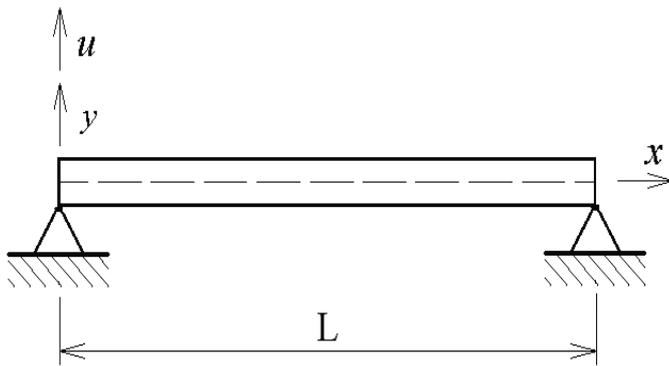


Figura 1- Viga Uniforme Bi-Rotulada.

Inicialmente aplica-se o MEF com funções de forma sendo polinômios de Hermite, que são obtidos através do método proposto por [17]. Ao aplicar as condições de contorno no sistema global  $4 \times 4$ , tem-se um novo sistema restringido de dimensão  $2 \times 2$ . Ao solucionar esse sistema são encontradas aproximações iniciais para as duas primeiras frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . Como neste caso a solução analítica do problema pode ser encontrada em [7], é possível calcular o erro relativo considerando quatro casas decimais, conforme apresentado na Tabela I.

TABELA I: RESULTADOS MEF

Frequência	MEF	Analítico	Erro Relativo %
$\omega_1$	10,9544	9,8696	11%

Frequência	MEF	Analítico	Erro Relativo %
$\omega_2$	50,1996	39,4784	27%

Observa-se que os resultados encontrados via MEF apresentam um erro relativo significativo. Dessa forma, com o objetivo de reduzir o erro e obter melhores aproximações para as duas frequências, aplica-se o MEFG MMA detalhado em [7], com sete níveis de enriquecimento, gerando um sistema restringido de dimensão  $16 \times 16$ . Solucionando esse novo sistema encontram-se os resultados apresentados na Tabela II.

TABELA II: RESULTADOS MEFG MMA

Frequência	MEFG MMA	Analítico	Erro Relativo %
$\omega_1$	9,8696	9,8696	0%
$\omega_2$	39,4784	39,4784	0%

Percebe-se que o MEFG MMA se mostrou eficiente, pois as aproximações coincidiram com a solução analítica, ao solucionar o sistema de dimensão  $16 \times 16$ .

Então com a finalidade de validar o indicador apresentado em (33), adota-se o sistema inicial de dimensão  $2 \times 2$  correspondente ao MEF, com  $[K]_{n \times n} = [K]_{2 \times 2}$  e  $[M]_{n \times n} = [M]_{2 \times 2}$ . Como neste caso, o incremento de cada nível do enriquecimento do MEFG MMA provoca um aumento de duas linhas e duas colunas no sistema inicial, considera-se esse incremento como sendo  $[K]_{m \times n}$ ,  $[K]_{m \times m}$  e  $[M]_{m \times n}$ ,  $[M]_{m \times m}$ . Desta forma o indicador pode ser calculado sempre que um novo grau de liberdade (G.L.) é inserido, assim se tem uma projeção adimensional da variação da frequência, provocada pelo acréscimo do grau de liberdade.

Se o indicador for calculado quatorze vezes, esse processo apresentará também a influência de cada nível na convergência da aproximação, sem a necessidade é claro de solucionar o novo sistema. Porém como se trata de um exemplo para a validação numérica, o novo sistema é solucionado sempre que um novo grau de liberdade é acrescentado.

Escolhendo a primeira frequência  $\omega_1$  como frequência alvo para o cálculo do indicador, têm-se os resultados apresentados pela Tabela III.

TABELA III: INDICADOR DE FRIBERG (A\*B) – PRIMEIRA FREQUÊNCIA

Níveis	G.L.	A*B	$\omega_1$	Erro
1	3	0,1622	10,2626	0,3930
	4	0,3023	9,8703	0,0004
2	5	0,3026	9,8696	0,0000
	6	0,3026	9,8696	0,0000
3	7	0,3026	9,8696	0,0000
	8	0,3026	9,8696	0,0000
7	15	0,3026	9,8696	0,0000
	16	0,3026	9,8696	0,0000

A solução aproximada coincide com a solução analítica 9,8696 quando o quinto grau de liberdade é acrescentado. Esta tendência é equivalente à apresentada pelo indicador de Friberg, pois este convergiu para o valor de 0,3026 assim que o quinto grau de liberdade foi inserido, demonstrando que não haveria uma melhora significativa no valor da aproximação de  $\omega_1$  com o acréscimo de mais graus de liberdade. Este resultado também é confirmado pela figura 2. Todas as frequências deste trabalho estão na unidade *rad/s*.

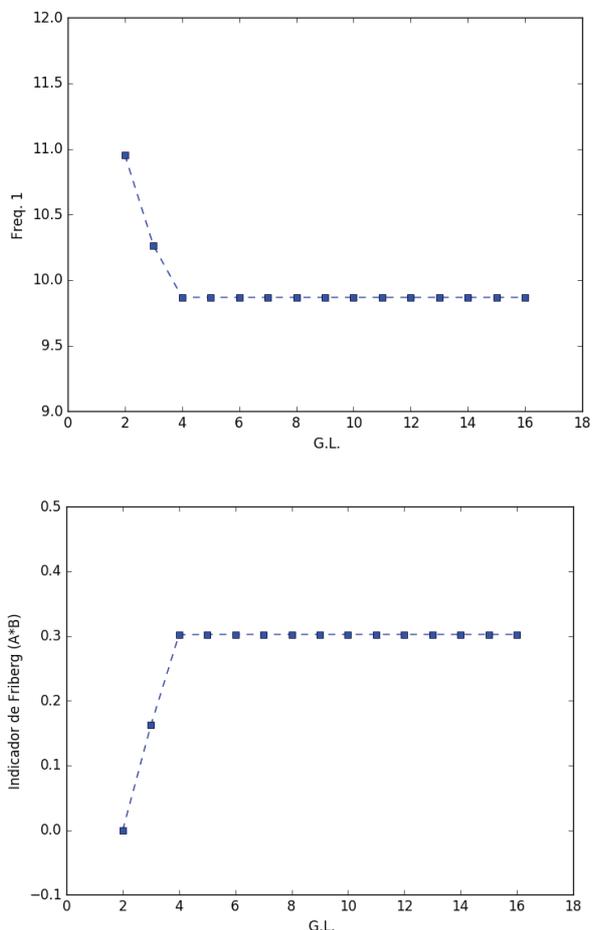


Figura 2- Comportamento de  $\omega_1$  e do Indicador de Friberg em relação ao aumento do número de graus de liberdade.

Portanto, é necessário um sistema de dimensão 5x5 para determinar  $\omega_1$  com a precisão de quatro casas decimais, gerando uma redução do sistema global de 68,75%, em relação ao sistema de dimensão 16x16 com sete níveis de enriquecimento e esta redução pode ser alcançada com o uso do indicador.

O procedimento anterior também pode ser realizado alterando-se a frequência alvo para  $\omega_2$ , onde o indicador projeta a variação da segunda frequência provocada pelo acréscimo de cada grau de liberdade correspondente aos níveis de enriquecimento do MEF. Os resultados encontram-se na Tabela IV.

TABELA IV: INDICADOR DE FRIBERG (A\*B) – SEGUNDA FREQUÊNCIA

Níveis	G.L.	A*B	$\omega_2$	Erro
1	3	0,1054	45,2225	5,7441
	4	1,6882	39,5273	0,0489
2	5	1,6904	39,5253	0,0469
	6	1,7402	39,4788	0,0004
3	7	1,7402	39,4787	0,0001
	8	1,7403	39,4784	0,0000
4	9	1,7403	39,4784	0,0000
	10	1,7403	39,4784	0,0000
.	.	.	.	.
7	15	1,7403	39,4784	0,0000
	16	1,7403	39,4784	0,0000

A aproximação para  $\omega_2$  coincidiu com a solução analítica 39,4784 quando o sistema 8x8 foi solucionado, sendo que este resultado é idêntico ao que ocorre com os valores do indicador de Friberg, uma vez que este também convergiu para 1,7403 depois que o oitavo grau de liberdade foi inserido, conforme pode-se observar na figura 3.

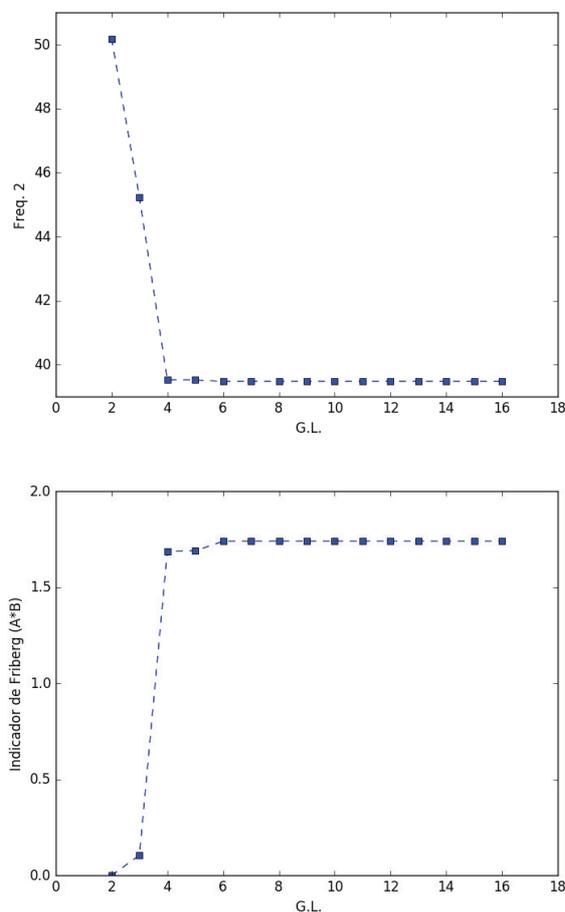


Figura 3- Comportamento de  $\omega_2$  e do Indicador de Friberg em relação ao aumento do número de graus de liberdade.

Logo, para obter uma aproximação para  $\omega_2$  com quatro casas decimais é necessário resolver um sistema de equações de dimensão 8x8, gerando uma redução de 50 % na dimensão

do sistema global quando o MEFG MMA é aplicado com 7 níveis de enriquecimento, ou seja, em relação ao sistema de dimensão 16x16.

Na análise das duas primeiras frequências verifica-se que as perturbações geradas pelo acréscimo de novos graus de liberdade de campo vindos do MEFG MMA, são representadas corretamente pelos valores do indicador de Friberg. Isto verifica a eficácia do indicador, pois quanto maior é o valor do indicador, maior será a variação da frequência alvo [15].

Embora o exemplo aqui abordado seja relativamente simples, ele permite concluir que o indicador pode ser aplicado no MEFG, mesmo em problemas mais complexos, onde se espera um ganho maior com a utilização do mesmo.

#### IV. CONCLUSÕES

Este trabalho reuniu a formulação e as considerações necessárias para a aplicação do indicador de Friberg no MEFG. Apresentou-se também uma simulação numérica onde se verifica a propriedade do indicador em apontar as variações ocorridas em uma determinada frequência pré-selecionada, sem a necessidade de solucionar novamente o problema de autovalores generalizado. Comumente o usuário vai inserindo mais níveis de enriquecimento e resolvendo o sistema, até que a aproximação chegue próxima da convergência. Com a utilização do indicador proposto pode-se estimar a melhora da aproximação com a inserção de novos graus de liberdade antes da resolução do problema de autovalores.

A simulação numérica apresentada contém apenas um elemento e a variação da frequência alvo, medida pelo indicador, é originada pelo acréscimo de mais níveis de enriquecimento. A partir da formulação apresentada, sugere-se a possibilidade de realizar comparações entre diferentes tipos de enriquecimento identificando o mais eficiente.

Nos trabalhos futuros pretende-se partir de uma malha com mais elementos e investigar a contribuição de cada elemento da malha para a convergência da solução, selecionando regiões onde o enriquecimento é mais eficiente. Isso pode gerar um ganho computacional considerável. Também pretende-se analisar o condicionamento dos sistemas envolvidos, pois a estabilidade numérica é um fator importante na análise numérica.

#### REFERÊNCIAS

- [1] N. F. Santos, "Estudo e controle de vibrações em lajes e edifícios". Dissertação de mestrado. Universidade do Porto. 2009.
- [2] J. M. Melenk, I. Babuska, "The partition of unity finite element method: basic theory and applications". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, n. 1-4, p. 289-314, 1996.
- [3] T. Petroli, "Condicionamento do problema de autovalores obtido do Método dos Elementos Finitos Generalizados na Dinâmica de Estruturas". Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016.
- [4] P.O. Friberg, "An error Indicator for the generalized eigenvalue problem using the hierarchical Finite Element Method". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 23, pp. 91-98. 1986.
- [5] H.V. Duarte, "Estimador de Erro para a Formulação p do Método dos Elementos Finitos Aplicado ao Problema Fluido Estrutura", Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.
- [6] A. J. Torii, "Análise Dinâmica de Estruturas com o Método dos Elementos Finitos Generalizado". Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.
- [7] M. Arndt, "O Método dos Elementos Finitos Generalizado Aplicado à Análise de Vibrações Livres de Estruturas Reticuladas". Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.
- [8] P. D. Weinhardt, "Estudo da Estabilidade do Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado à Análise Dinâmica". Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Paraná, 2016.
- [9] M. F. Malacarne, "Métodos Aproximados Aplicáveis à Resolução de Problemas de Valor de Contorno". Resumo expandido. *Anais do 1º SMNE*. 2016.
- [10] Q. Z. Xiao, B. L. Karihaloo, "Implementation of hybrid crack element on a general finite element mesh and in combination with XFEM". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 196, p. 1864-1873, 2007.
- [11] R. Gracie, G. Ventura, T. Belytschko, "A new fast finite element method for dislocations based on interior discontinuities." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 69, p. 423-441, 2007.
- [12] H. U. Soriano, "Introdução à Dinâmica das estruturas". 1 ed., Vol.1, Elsevier, Rio de Janeiro, 2014.
- [13] G. F. Carey, J. T. Oden, "Finite elements". New Jersey: Prentice-Hall, 1984. v.2: A second course.
- [14] T. Petroli, M. Arndt, R. D. Machado, "Estabilidade de Métodos Enriquecidos Aplicados à Análise Dinâmica de Viga de Euler-Bernoulli *Anais do 1º SMNE*, 2016.
- [15] P.O. Friberg, P. Moller, "An adaptive procedure for eigenvalue problems using the hierarchical Finite Element Method". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, pp. 319-335, 1987.
- [16] J.M. Melenk, On generalized Finite element methods. Ph.D. thesis, University of Maryland, 1995.
- [17] C. E. Augarde, Generation of shape functions for straight beam elements. *Computers and Structures*, v. 68, p. 555-560, 1998.