SMNE UFPR
Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia
25 a 27 de outubro, 2017

Solução Analítica e Numérica de uma Equação Diferencial Parcial via Método das Características

Fábio Pinheiro da Silva
Adilandri Mércio Lobeiro
Eudes José Arantes
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Departamento Acadêmico de Matemática (DAMAT)
Campo Mourão, Brasil
fabio.2012@alunos.utfpr.edu.br
alobeiro@utfpr.edu.br
eudesarantes@utfpr.edu.br

Liliana Madalena Gramani
Eloy Kavisky
Universidade Federal do Paraná (UFPR)
Departamento de Matemática (DMAT)
Curitiba, Brasil
gramani@ufpr.br
eloy.dhs@ufpr.br

***Resumo*—O Método das Características é consagrado por resolver numéricamente equações diferenciais parciais hiperbólicas. Neste trabalho, obteve-se tanto a solução analítica, quanto a numérica utilizando as equações das curvas características do problema, demonstrando assim sua importância. Por fim, comparou-se os resultados obtidos para visualizar a eficiência do método.**

***Palavras-chave*—Método das Caracteísticas; Solução Análitica; Solução Numérica;**

I. Introdução

O Método das Características (MC) é um método numérico consagrado para resolver Equações Diferenciais Parciais (EDPs) da forma hiperbólica [1]. O método consiste em utilizar propriedades inerentes da equação conhecidas como curvas características e as Invariantes de Riemann para transformar o problema de resolver EDPs no problema de resolver Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) [2].

É de praxe utilizar o MC para obter-se a solução numérica de problemas hiperbólicos, entretanto, neste trabalho é demonstrado a possibilidade de usá-lo também para obtenção de solução analítica. Como estudo de caso, optou-se por resolver o seguinte Problema de Cauchy

$$\left|\begin{array}{lll} u_{xx}+u_{xt}-2u_{tt}=-1 & \text{em} & 0<x<1, t>0 \\ u(x,0)=u_t(x,0)=x & \text{em} & 0\leq x\leq 1, t=0. \end{array}\right. \tag{1}$$

II. Desenvolvimento

Uma equação diferencial parcial de segunda ordem, quase linear, na incógnita $u(x,t)$, é definida por

$$Lu = F\left(x,t,u,u_x,u_t\right), \tag{2}$$

sendo

$$\begin{array}{lllll} L & : & C^2(\Omega) & \longrightarrow & C^0(\Omega) \\ & & u & \longmapsto & Lu = A(x,t)u_{xx}+B(x,t)u_{xt}+C(x,t)u_{tt}, \end{array}$$

onde $A, B, C : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções reais que dependem das variáveis independentes x e t. Além disso, para todo $(x,t)\in\Omega$ pelo menos um dos coeficientes, A, B ou C é não nulo, e

$$\begin{array}{lllll} F & : & \Omega\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,t,\xi,\eta,\varsigma) & \longmapsto & F(x,t,\xi,\eta,\varsigma). \end{array} \tag{3}$$

Considere

$$\delta = C(x,t)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - B(x,t)\left(\frac{dt}{ds}\right)\left(\frac{dx}{ds}\right) + A(x,t)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2,$$

denomina-se curva característica para a equação $Lu = F$, a curva γ sobre a qual

$$\delta \quad = \quad 0 \; . \tag{4}$$

e curvas não características sobre γ se $\delta \neq 0$.

A seguir, ilustra como encontrar as curvas características [3].

i) Se $A(x,t) \neq 0$ sobre γ, as curvas características de L são as soluções da equação diferencial ordinária:

$$A(x,t)\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - B(x,t)\left(\frac{dt}{dx}\right) + C(x,t) \quad = \quad 0. \tag{5}$$

ii) Se $C(x,t) \neq 0$ sobre γ, as curvas características de L são as soluções da equação diferencial ordinária:

$$C(x,t)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - B(x,t)\left(\frac{dx}{dt}\right) + A(x,t) \quad = \quad 0. \tag{6}$$

iii) Se $A(x,t) = C(x,t) = 0$ sobre γ, as curvas características de L são as retas $x =$ constante , $t =$ constante , isto é, a dupla família de retas paralelas aos eixos coordenados.

A equação (2) é hiperbólica em Ω, quando $\Delta = B^2(x,t) - 4A(x,t)C(x,t) > 0$, parabólica em Ω quando $\Delta = 0$ e elíptica em Ω quando $\Delta < 0$.

Tem-se da equação (1) que

$$A(x,t) = 1 \neq 0 \quad , \quad B(x,t) = 1 \quad \text{e} \quad C(x,t) = -2. \tag{7}$$

e portanta ela é hiperbólica, pois $\Delta = 9 > 0$.

Para obter a solução analítica do problema 1 é necessário encontrar as curvas características. Como $A(x,t) = 1 \neq 0$, ao substituir A, B e C na equação (5), obtém-se

$$\frac{dt}{dx} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{dt}{dx} = -1, \tag{8}$$

que são respectivamente, as inclinações positiva e negativa das curvas características

$$t - 2x = k_1 \quad \text{e} \quad t + x = k_2. \tag{9}$$

As equações das curvas características são de extrema importância não só para obter-se a solução numérica, mas também a analítica, pois mediante a mudança de variável

$$\xi \quad = \quad t - 2x \tag{10}$$

e

$$\eta \quad = \quad t + x \; , \tag{11}$$

encontra-se $u(x,t) = w(\xi, \eta)$, em que $w_{\xi\eta} = 1/9$. Ao retornar as variáveis independentes x e t, obtém-se

$$u(x,t) \quad = \quad \frac{1}{9}(t-2x)(t+x) + \Theta(t-2x) + \Psi(t+x), \tag{12}$$

onde Θ e Ψ são funções arbitrárias de classe $C^2(\Omega)$ e $C^1(\Omega)$, respectivamente.

Utilizando as condições iniciais do problema de Cauchy

$$u(x,0) \quad = \quad u_t(x,0) = x \tag{13}$$

encontra-se

$$u(x,t) \quad = \quad \frac{t^2}{2} + xt + x, \tag{14}$$

que corresponde a sua solução analítica.

Como exemplo, utilizou-se MC para calcular a solução numérica do problema 1 nos pontos R, S e T e comparar com a analítica. As coordenadas nos pontos iniciais P, Q e W são $(0.4, 0)$, $(0.5, 0)$ e $(0.6, 0)$, respectivamente, conforme ilustra a Figura 1.

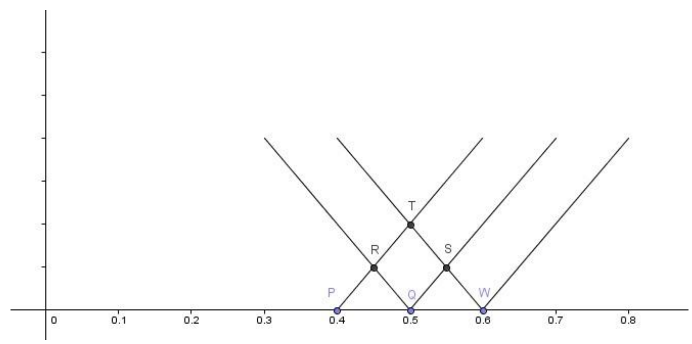

Figura 1: Diagrama de Pontos

A seguir tem-se uma comparação entre a solução numérica e analítica dos pontos mencionados, conforme ilustra a Tabela I.

Tabela I: Tabela Numérica Comparativa

	x	t	p	q	u Numérica	u Analítica
P	$0,4$	0	1	$0,4$	$0,4$	$0,4$
Q	$0,5$	0	1	$0,5$	$0,5$	$0,5$
W	$0,6$	0	1	$0,6$	$0,6$	$0,6$
R	$13/30$	$2/30$	$32/30$	$15/30$	$418/900$	$418/900$
S	$16/30$	$2/30$	$32/30$	$18/30$	$514/900$	$514/900$
T	$14/30$	$4/30$	$34/30$	$18/30$	$484/900$	$484/900$

onde $p(x,0) = u_x(x,0)$ e $q(x,0) = u_t(x,0)$.

III. Conclusão

De acordo com o exposto no trabalho, conclui-se a eficiência do Método das Caracteristicas tanto para obtenção da solução analítica, quanto numérica, do Problema de Cauchy.

Referências

[1] M. B. Abbott, An Introduction to the Method of Characteristics. 1966.
[2] A. M. Lobeiro, Solução das Equações de Saint Venant em Uma e Duas Dimensões Usando o Método das Características. Tese de Doutorado, UFPR, 2013.
[3] L. A. J. Medeiros, and J. L. Ferrel, and A. Biazutti, Métodos Clássicos em Equações Diferenciais Parciais. UFRJ-IM, 1999.