SMNE UFPR
Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia
25 a 27 de outubro, 2017

Uma abordagem de Circuitos Elétricos utilizando Sistemas Lineares

Giovane Rodrigues de Oliveira
Instituto Federal de Santa Catarina
IFSC - Campus Rau
Jaraguá do Sul, Brasil
giovane.ro@ifsc.edu.br

Sander Joner
Instituto Federal de Santa Catarina
IFSC - Campus Rau
Jaraguá do Sul, Brasil
sander.joner@ifsc.edu.br

***Resumo*— Métodos de resolução de sistemas lineares são muito importantes para a formação de acadêmicos de engenharia elétrica uma vez que as bases de circuitos elétricos utilizam essas técnicas. Além disso, em outras disciplinas do curso se farão muito úteis. Dessa forma, este trabalho tem o objetivo de apresentar e comparar os principais métodos de identificação de correntes de redes elétricas usando sistemas lineares e assim, fortalecer as bases de cursos de engenharia elétrica por meio da apresentação de recursos de resolução de sistemas lineares diversos e fundamentais para a continuidade na graduação. Utilizando um circuito genérico será feita esta comparação. Observou-se que alguns métodos podem se tornar mais demorados. Isso pode depender do número de variáveis e na grande quantidade de valores fracionados, fatores que requerem muita atenção. Dessa forma, sugere-se utilizar para matrizes até 3x3 o método de Cramer, e em último caso o método de inversão de matrizes, uma vez que requerem a inversão da matriz do sistema linear. Os métodos de Gauss são mais recomendados para as matrizes de maior número de linhas e colunas.**

***Palavras-chave*— corrente contínua; circuito resistivo; sistema linear; Lei de Ohm; Lei de Kirchhoff das Tensões.**

I. INTRODUÇÃO

Estudantes de engenharia elétrica, em seus estudos iniciais, cursam disciplinas de análise de circuitos elétricos que são as bases para as demais disciplinas do curso. Tais unidades curriculares iniciam seus currículos com circuitos de corrente contínua, frequentemente chamados de circuitos CC, os quais apresentam relações lineares entre todas as correntes e tensões presentes na rede. Esses circuitos originam equações lineares simultâneas as quais são resolvidas por diversos métodos de resolução de sistemas lineares.

Dessa forma, com base em um circuito elétrico de corrente contínua genérico, este artigo tem o objetivo de apresentar e comparar as principais técnicas de identificação de correntes de redes elétricas usando sistemas lineares. Assim, em um mesmo circuito, com métodos diferentes serão determinadas todas as correntes presentes na malha, de forma a comparar os métodos e facilitar os trabalhos de acadêmicos de engenharia elétrica que iniciam seus estudos em circuitos elétricos.

Trata-se de uma revisão bibliográfica a qual tem como justificativa fortalecer as bases de cursos de engenharia elétrica por meio da apresentação de recursos de resolução de sistemas lineares diversos e fundamentais para a continuidade na graduação. Essas técnicas de determinação provirão aos alunos melhor assertividade nas análises de circuitos e maior sucesso acadêmico nas disciplinas seguintes do curso de engenharia elétrica. Além disso, essas ferramentas poderão ser úteis em outras unidades curriculares sendo assim essenciais para acadêmicos em engenharia.

II. Revisão Bibliográfica

Para a elaboração deste trabalho, será necessária a divisão em dois grupos gerais, um no qual será apresentado, de forma sucinta, o funcionamento de circuitos elétricos e como determinar as equação de sua malha, e outra na qual serão apresentados os métodos de resolução de sistemas lineares. Assim, será iniciado pela introdução aos circuitos elétricos.

A. Introdução aos circuitos elétricos

Com o objetivo de obter um sistema de equações lineares a partir de um circuito elétrico é necessária introdução de alguns conceitos e leis que governam o comportamento dos circuitos elétricos. Tais preceitos serão apresentados nos itens a seguir.

1) Caracterização:

Os circuitos elétricos são interconexões de componentes elétricos que podem ser descritos por um modelo matemático [3]. Seus componentes devem estar ligados como uma rede na qual deve conter pelo menos um caminho fechado para ser considerado um circuito elétrico. Cada caminho fechado do circuito compõe um laço, a interligação entre dois ou mais componentes representa um nó e, a região do circuito que contém apenas um componente, e um nó em cada uma das extremidades, é um ramo [6].

No entanto, o circuito elétrico não teria utilidade sem que fluísse uma corrente elétrica através de seus componentes. A corrente elétrica é o movimento das cargas no circuito. Ela é gerada pela fonte de alimentação que promove uma diferença de potencial entre seus terminais, os quais são opostos no circuito. Caso não haja diferença de potencial entre os terminais do circuito, a corrente não flui [4]. Assim, através dos componentes do circuito que podem ser ativos (fornecem diferença de potencial ao circuito) ou passivos (consomem a diferença de potencial do circuito), percorre a corrente advinda do componente ativo chamado de fonte de alimentação. Tal corrente é totalmente consumida pelos componentes passivos chamados resistores [3].

A corrente sai do terminal positivo da fonte de alimentação, que fornece energia para o sistema, em seguida entra no terminal positivo dos componentes passivos, que consomem a energia do sistema, e retorna para a fonte pelo seu terminal negativo. Essa é a convenção de sinal positiva, chamada de convenção passiva de sinal [3]. Em geral, componentes ativos fornecem energia para o circuito e componentes passivos consomem, sem haver perdas, no caso de um sistema ideal.

2) Lei de Ohm:

A Lei de Ohm estabelece que a tensão entre os terminais de um componente passivo é diretamente proporcional à corrente que flui através dele [3]. Para se tornar uma equação é necessária uma constante de proporcionalidade que é dada pela resistência. A resistência é medida em ohms (Ω), a tensão em volts (V) e a corrente em ampères (A). A Lei de Ohm é representada pela equação na qual (V) é a tensão, (I) é a corrente e (R), a resistência. Ela é dada pela Equação (1):

$$V = RI \tag{1}$$

A tensão tem como unidade volts (V), a resistência é medida em ohms (Ω), e a corrente em ampères (A).

3) Lei de Kirchhoff das Tensões:

Também conhecida como segunda lei de Kirchhoff, a Lei de Kirchhoff das tensões (LKT) estabelece que a soma algébrica das tensões ao longo de qualquer laço é nula [3]. Dessa forma, por meio da Equação (1) obtêm-se as tensões nos resistores que somadas em cada laço deve original um valor nulo. Assim, serão obtidas as equações lineares necessárias para a determinação das correntes nos ramos.

B. Métodos de resolução de sistemas lineares

Sistema de equações lineares é um conjunto finito de equações lineares da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$ de n incógnitas. Para que seja possível determinar as incógnitas de um sistema de equações lineares, ou seja, seja consistente, é necessário que o número de incógnitas seja igual ao número de equação do sistema [2].

1) Método de Inversão de Matrizes:

Dada uma matriz A, quadrada de dimensão n, deve-se obter a matriz inversa A^{-1} tal que $AA^{-1} = I$ na qual I é a matriz identidade, isto é, todos os elementos são nulos excetuando os da diagonal principal, que são iguais a 1. Dessa forma, tendo uma multiplicação de duas matrizes originando uma terceira matriz C, da forma AB=C, sendo B a matriz coluna de incógnitas a ser determinada, é necessário apenas multiplicar em ambos os lados direito da igualdade pela matriz inversa de A para obter a equação $A^{-1}AB=A^{-1}C$. Como $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, a solução do sistema de equações lineares se dará pela multiplicação simples de duas matrizes A^{-1} e C apresentada [1] a seguir, dada pela Equação (2):

$$B = A^{-1}C \tag{2}$$

Assim, por meio desta multiplicação de duas matrizes, obtém-se uma matriz coluna na qual os termos serão x_1, x_2, x_3,... a_n.

2) Método de Gauss Simples:

Primeiramente é necessário formar uma matriz com os coeficientes das equações e na última coluna colocar os valores dispostos após a igualdade, esta é chamada de matriz aumentada [2]. Dessa forma o método de Gauss consiste em zerar coluna a coluna os termos abaixo da diagonal principal. Isso significa que serão eliminados todos os termos da variável anterior nas próximas linhas. O processo consiste em tornar a matriz em diagonal superior e as etapas podem ser descritas [1] por:

- Dividir a primeira linha pelo valor de a_{11}.

- Subtrair ou somar das próximas linhas $a_{11}.a_{n1}$ de modo a zerar todos os termos abaixo do a_{11}.

- Realizar o mesmo procedimento para cada um dos elementos da diagonal principal.

Assim, chega-se a matriz triangular superior, também chamada de matriz escalonada, que terá a última incógnita isolada, aplicando nas equações anteriores, obtêm-se todas as incógnitas, processo chamado de retro substituição [2]. O método de Gauss simples é chamado também de eliminação gaussiana.

O método de Gauss simples pode ser feito com trocas de linhas, por algumas vezes algum pivô, elemento da diagonal principal, pode ser nulo. Para evitar uma divisão por zero, troca-se linhas e realizam-se os passos normais do método. Este processo é chamado de método de Gauss com troca de linhas ou com pivoteamento parcial [1].

3) Método de Gauss Jordan:

Este método é uma continuação do método de Gauss simples, pois a partir da matriz escalonada, tenta-se zerar os termos da acima de da diagonal principal. Este processo deve ser feito da última para a primeira coluna de forma a deixar todas as variáveis isoladas [2]. Este processo torna a matriz reduzida por linhas.

4) Método de Cramer:

Dada uma matriz A, quadrada de dimensão n, cujos termos são coeficientes de sistema linear, multiplicada pela matriz de incógnitas resulta na matriz b, ou seja, é um sistema do tipo Ax = b, na qual a matriz x é matriz coluna de termos x_1, x_2, x_3...x_n e b é uma matriz coluna de termos b_1, b_2, b_3...b_n. A regra de Cramer determina que as incógnitas x_1, x_2, x_3...x_n, podem ser encontradas pelo determinante da matriz C originada pela substituição da coluna n da matriz A, respectivamente, pela matriz coluna b, dividido pelo determinante da matriz A [2], ou seja, as incógnitas podem ser determinadas pela equação (3) para todas as n incógnitas:

$$x_n = (\det C)/\det(A) \tag{3}$$

O método de Cramer pode ser utilizado para a resolução de matrizes quadradas qualquer grau, no entanto, para matrizes 3x3 a obtenção do determinante de A e C fica facilitado pela possibilidade da utilização da *Regra de Sarrus* [5].

III. Metodologia

De forma a verificar todos os métodos de resolução de sistemas lineares, por meio de um circuito genérico, serão determinadas todas as correntes em todos os laços da rede. Será respeitada a convenção passiva de sinais em conjunto com a Lei de Ohm e todos os cálculos serão feitos para todos os métodos apresentados. Assim, o circuito para análise será o da Figura (1):

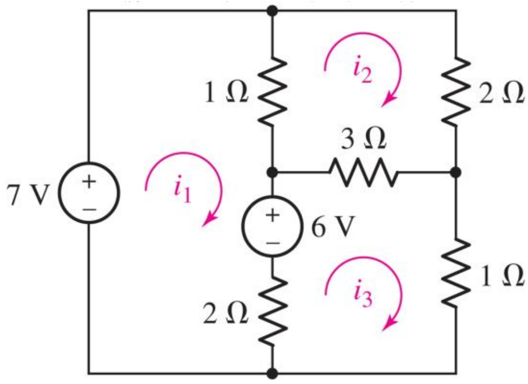

Figura 1. Circuito genérico para análise verificação dos métodos de resolução de sistemas lineares.

Para a comparação dos métodos, serão usadas as correntes em cada uma dos componentes na qual I_a é a corrente que sai da fonte de 7 V, I_b é a corrente que passa pelo resistor de 1 Ω à esquerda, I_c é a corrente que passa pelo resistor de 2 Ω à direita, I_d é a corrente que passa pelo resistor de 3, I_e é a corrente que passa pelo resistor de 2 Ω à esquerda e é a mesma corrente que flui pela fonte de 6 V, I_f é a corrente que passa pelo resistor de 1 Ω à direita. A representação das correntes é dada pela Figura (2):

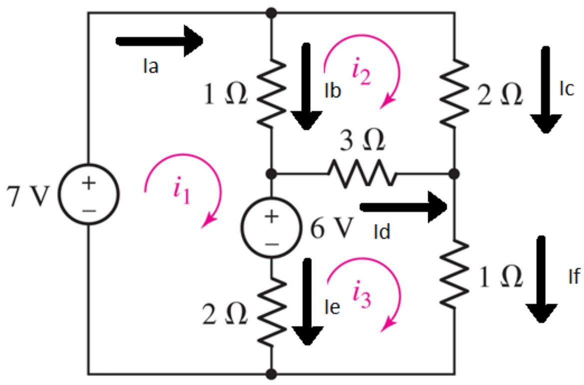

Figura 2. Convenção das correntes a serem encontradas pelos diferentes métodos.

Assim, utilizando a Lei de Kirchhoff das tensões realizada nos três laços do circuito, com i_1, i_2 e i_3 como incógnitas chega-se a três equações. Três equações e três incógnitas indicam que o sistema é possível e determinável. As equações dos laços da direita, superior esquerdo e inferior direito estão dadas, respectivamente, pelas Equações (4), (5) e (6):

$$3i_1 - i_2 - 2i_3 = 1 \quad (4)$$

$$-i_1 + 6i_2 - 3i_3 = 0 \quad (5)$$

$$-2i_1 - 3i_2 + 6i_3 = 6 \quad (6)$$

A partir dos métodos de resolução de sistemas lineares, as incógnitas i_1, i_2 e i_3 serão determinadas e as correntes no circuito podem ser descobertas pelas Equações (7) até (12):

$$i_a = i_1 \quad (7)$$

$$i_b = i_1 - i_2 \quad (8)$$

$$i_c = i_2 \quad (9)$$

$$i_d = i_3 - i_2 \quad (10)$$

$$i_e = i_1 - i_3 \quad (11)$$

$$i_f = i_3 \quad (12)$$

Essas são as equações das correntes nos componentes do circuito que serão utilizadas para a verificação das correntes encontradas pelos métodos apresentados, ou seja, todos os métodos devem chegar aos mesmos valores de correntes.

IV. Resultados e Discussões

A resolução dos métodos será dada na mesma ordem na qual foram apresentadas. Assim, o primeiro método será o de inversão de matrizes.

1) Método de inversão de matrizes:

Utilizando do método de inversão de matrizes, primeiramente é necessário formar a matriz A, de coeficientes das Equações (4), (5) e (6). Assim, a matriz A é dada pela Equação (13):

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Fazendo a inversão da matriz A obtém-se a matriz A^{-1} que é dada pela Equação (14):

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{13} & \frac{4}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{14}{39} & \frac{11}{39} \\ \frac{5}{13} & \frac{11}{39} & \frac{17}{39} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Considerando a matriz como a matriz coluna de elementos $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b_3 = 6$, pode-se fazer a multiplicação conforme a Equação (2), de $B = A^{-1}C$ como demonstrado na Equação (15):

$$B = A^{-1}C = \begin{bmatrix} \frac{9}{13} & \frac{4}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{14}{39} & \frac{11}{39} \\ \frac{5}{13} & \frac{11}{39} & \frac{17}{39} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Assim, de acordo com as Equações (7) até (12) chega-se aos valores das correntes procuradas em Ampères (A) dadas pelas Equações (16) até (21):

$$i_a = 3 \quad (16)$$

$$i_b = 3 - 2 = 1 \quad (17)$$

$$i_c = 2 \quad (18)$$

$$i_d = 3 - 2 = 1 \quad (19)$$

$$i_e = 3 - 3 = 0 \quad (20)$$

$$i_f = 3 \quad (21)$$

As Equações (16) até (21) têm seus valores em Ampères (A) e deverão ser obtidos também pelos demais métodos.

2) Método de Gauss Simples:

Tomando a matriz aumentada referente ao sistema de equações lineares compostos pelas Equações (4), (5) e (6), ela é dada pela Equação (22):

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 6 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & 6 & 6 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Convertendo a matriz aumentada na forma escalonada chega-se a Equação (23):

$$\begin{bmatrix} 1 & -{}^{1}\!/_{3} & -{}^{2}\!/_{3} & {}^{1}\!/_{3} \\ 0 & 1 & -{}^{11}\!/_{17} & {}^{1}\!/_{17} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Realizando a retro substituição chega-se as soluções apresentadas pelas Equações (16) até (21).

3) Método de Gauss Jordan:

A partir da matriz escalonada da Equação (23), realizam-se processos de subtração de linhas com o objetivo de torna-la reduzida por linhas. Tal processo consiste em zerar os termos acima da diagonal principal, resultando em uma matriz com apenas os pivôs. Dessa forma, a matriz resultante será a matriz dada pela Equação (24):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Substituindo estes resultados nas equações das correntes no circuito dadas pelas Equações (7) à (12) chega-se as soluções apresentadas pelas Equações (16) até (21).

4) Método de Cramer:

Dada matriz A é dada pela Equação (13) e a matriz B como a matriz coluna de elementos $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b_3 = 6$. Primeiramente, calculando o determinante de A pela Equação (25):

$$det\ A = det \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{bmatrix} = 39 \quad (25)$$

Para a determinação da primeira incógnita, é necessário substituir a matriz B na primeira coluna de A e calcular o determinante desta matriz, chamada de C_1. O determinante desta matriz é dado pela Equação (26):

$$det\ C_1 = det \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ 6 & -3 & 6 \end{bmatrix} = 117 \quad (26)$$

Para as outras duas incógnitas, deve-se obter a matriz C deve-se substituir a matriz B na coluna da respectiva incógnita. Dessa forma, chega-se aos determinantes de C_2 e C_3 dados pelas Equações (27) e (28):

$$det\ C_2 = det\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \end{bmatrix} = 78 \tag{27}$$

$$det\ C_3 = det\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 0 \\ -2 & -3 & 6 \end{bmatrix} = 117 \tag{28}$$

As soluções das incógnitas são das pela Equação (3) e são apresentadas nas Equações (29) à (31):

$$x_1 = \frac{\det C_1}{\det A} = \frac{117}{39} = 3 \tag{29}$$

$$x_2 = \frac{\det C_2}{\det A} = \frac{78}{39} = 2 \tag{30}$$

$$x_3 = \frac{\det C_3}{\det A} = \frac{117}{39} = 3 \tag{31}$$

Substituindo estes resultados nas equações das correntes no circuito dadas pelas Equações (7) à (12) chega-se as soluções apresentadas pelas Equações (16) até (21).

V. CONCLUSÕES

Todos os métodos são eficazes para resolução de sistemas lineares em circuitos elétricos de corrente contínua. No entanto, alguns métodos podem se tornar mais demorados. Isso pode depender do número de variáveis e na grande quantidade de valores fracionados, fatores que requerem muita atenção e exatidão.

Para matrizes até 3x3, o método de Cramer é muito útil, pois a partir de apenas quatro determinantes é possível chegar à solução. Entretanto para matrizes maiores, ele se torna mais demorado, pois o determinante não pode ser calculado por replicação de duas colunas, sendo necessário utilizar outro método para achar o determinante, por exemplo, o de cofatores. Sugere-se usar o método de Gauss para estas matrizes.

Os métodos de Gauss são mais trabalhosos, no entanto mais fáceis, pois não é necessário cálculo de determinantes e as soluções se dão utilizando apenas operações elementares entre linhas. Contudo, esses métodos exigem muita atenção, pois a cada operação requer uma nova matriz escrita, o que se não tiver tempo hábil, pode ser grande fonte de erros. Dessa forma, sugere-se o método de Gauss para matrizes superiores a 3x3.

O método de inversão de matrizes é o método mais complicado dos apresentados, pois, como já diz o nome, exige a inversão da matriz. Este processo é demorado como o de Gauss e exige uma multiplicação de matrizes no final para obterem-se as soluções. Dessa forma, sugere-se usá-lo para matrizes pequenas, de preferência apenas para 2x2. O processo de inversão pode ser grande fonte de equívoco devido ao grande número de operações e reescrita da matriz.

No entanto, foram apresentados apenas alguns métodos, mais comuns em livros de graduação. Existem outros métodos, alguns mais complexos, dessa forma, sugere-se para novas pesquisas a busca de métodos de resolução de equações lineares alternativos para matrizes maiores que 3x3 que não exijam tanta reescrita, assim evitando erros.

REFERÊNCIAS

[1] A. Borche, “Métodos numéricos”, Porto Alegre, Editora da UFRGS, 2008.

[2] H. Anton, C. Rorres, “Álgebra linear com aplicações”, Porto Alegre, Bookman, 8ª edição, 2001.

[3] J. D. Irwin, M. R. Nelms, “Análise básica de circuitos para engenharia”, Rio de Janeiro, LTC, 10ª edição, 2016.

[4] L. E. Frenzel Junior, “Eletrônica moderna: fundamentos, dispositivos, circuitos e sistemas”, Porto Alegre, AMGH, 2016.

[5] L. R. Dante, “Matemática: contexto e aplicações”, São Paulo, Ática, v. 3, 2010.

[6] W. H. Hayt Junior, J. E. Kemmerly, S. M. Durbin, “Análise de circuitos em engenharia”, Porto Alegre, AMGH, 8ª edição, 2014.