



**Simpósio de Métodos
Numéricos em Engenharia**

25 a 27 de outubro, 2017

Modelo Matemático para Problemas Multiníveis de Produção em Máquinas Paralelas

Talita Mariana Pinho Schimidt¹

Cassius Tadeus Scarpin²

Gustavo Valentim Loch³

Alexandre Checoli Choueiri⁴

Programa de Pós Graduação em Método Numéricos em Engenharia

Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Curitiba, Brasil

¹talitapschimidt@gmail.com, ²cassiusts@gmail.com, ³gustavogvalentim@gmail.com, ⁴alexandrechecoli@gmail.com

Resumo— Processos produtivos que ocorrem em mais de um estágio produtivo se caracterizam pela necessidade de sincronia entre os estágios e, em geral, pela dependência que há entre eles. Esta configuração exige que sejam realizadas as atividades de dimensionamento e sequenciamento de lotes de forma integrada, o que torna tanto os modelos quanto a resolução dos problemas complexos. Assim, o objetivo deste trabalho é propor um modelo matemático que possa ser aplicado na resolução do Problema Multinível em um ambiente de máquinas paralelas idênticas. Bem como propor diferentes abordagens de resolução, sendo estas, resolução por meio do modelo exato e abordagens heurísticas. Tanto para resolução do modelo exato quanto para a abordagem heurística utiliza-se o software de otimização Gurobi versão 7.0. Para abordagem heurística proposta, utiliza-se como solução inicial a primeira solução incumbente encontrada pelo *solver*, chamada neste trabalho de abordagem MIP Sol, e a partir desta solução inicial aplica-se uma heurística de melhoria. No que concerne aos resultados obtidos neste trabalho, para alguns problemas a abordagem heurística apresentou desempenho satisfatório quando comparada à resolução do modelo matemático exato (MIP Pura) para problemas de pequeno porte, em relação ao tempo de resolução e qualidade de solução. Concluiu-se que as abordagens de resolução propostas são satisfatórias, uma vez que quando aplica-se a abordagem heurística utiliza-se tempo até mais de 50% menor para resolução dos problemas gerados.

Palavras-chave—*artigo; Dimensionamento de Lotes; Sequenciamento da Produção; Multiníveis, Heurísticas.*

I. INTRODUÇÃO

O Planejamento e Controle da Produção (PCP) se trata de uma importante área de estudo, que exerce papel fundamental para o bom desempenho das indústrias de um modo geral. É uma atividade que considera a melhor forma de se utilizar os recursos produtivos, com o objetivo de satisfazer suas metas em certo período, denominado horizonte de planejamento.

O dimensionamento de lotes é um dos mais importantes e difíceis problemas no planejamento da produção [1]. Modelos matemáticos que envolvem Dimensionamento de Lotes (*Lot sizing*) tem por objetivo determinar o tamanho dos lotes a serem produzidos em um determinado horizonte de planejamento. Buscam, desta forma, minimizar custos de produção e estoque, atender às demandas e respeitar as limitações de capacidade [2].

Já a programação da produção pode ser definida como a decisão de quando e como cada tarefa deve ser realizada, para que certos objetivos sejam cumpridos. Podendo estes serem: redução de estoques; entregas realizadas no tempo correto; realização da produção no

menor tempo possível ou, então, minimização de ociosidade dos recursos na execução das tarefas de produção [3]. O sequenciamento é um problema de programação da produção em que uma ordenação dos postos de trabalho determina completamente uma sequência. O problema mais simples de sequenciamento é aquele que possui um único recurso e todos os tempos de processamento são determinísticos [4].

O presente trabalho trata especificamente de um ambiente de produção que se caracteriza como Multinível. Esta configuração, em geral, requer sincronia entre os estágios devido à dependência que existe entre eles. O fato de um nível depender do outro exige a realização do dimensionamento e sequenciamento de lotes de forma integrada.

Diante deste contexto, o objetivo deste trabalho é propor um modelo matemático que possa ser aplicado na resolução do Problema Multinível em um ambiente de máquinas paralelas idênticas, que possuem intervalo de permanência em estoque intermediário. Além disso, propor uma abordagem heurística de solução e comparar com a resolução realizada por meio do software de otimização utilizado.

II. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Problemas de Produção Multiníveis (ou Multiestágios) se caracterizam por satisfazer necessidades de cenários industriais em que a produção ocorre em mais de um estágio. De modo geral, um ambiente produtivo que possui configuração multiestágio deve possuir sincronia entre todos os níveis, característica que exige que as atividades de Dimensionamento de Lotes (*Lot sizing*) e Sequenciamento da Produção (*Scheduling*) sejam realizadas de forma simultânea.

Nos casos abordados, além de existirem dois estágios produtivos, há também estoque intermediário entre estes, como ilustrado na Figura 1. Busca-se abordar processos onde este estoque intermediário possui características como:

- Tempo máximo de permanência*: cenários produtivos que possuem tempo de validade para os produtos semiacabados. Isto é, há um tempo permitido de permanência deste produto fora da embalagem primária. Além disso, o não cumprimento desta especificação pode impactar em descarte de um lote ou correção do mesmo, quando possível.
- Tempo mínimo de permanência*: ambientes produtivos onde o estoque intermediário existe para a realização de um processo antes que o produto seja encaminhado para o estágio posterior. Neste caso, os itens possuem tempo mínimo de permanência, necessário para realização deste processo.

Os dois estágios são constituídos por máquinas paralelas idênticas, sendo que o número de máquinas em cada estágio pode variar para cada problema. Além disso, este trabalho tem por objetivo abranger o maior número possível de indústrias que possuem produção multiestágio. Sendo assim, os modelos a serem apresentados neste trabalho tratam de configurações de ambientes que possuem setup

dependente e não dependente da sequência, ambos os casos permitindo a característica em que pode haver ou não preservação da preparação das máquinas de um período para outro.

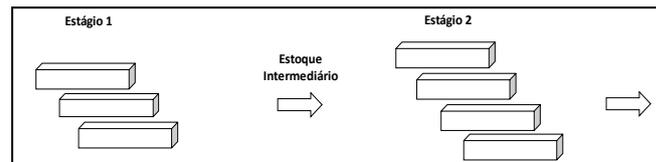


Figura 1. Ilustração do ambiente de produção estudado. Fonte: Os autores (2017).

Segundo Florian et al. 1980, os problemas a serem tratados nesta pesquisa possuem complexidade de resolução NP Completa. Neste caso, à medida que o número de variáveis aumenta de maneira linear, o espaço de busca cresce exponencialmente [5].

III. REVISÃO DA LITERATURA

A. Dimensionamento de Lotes e Sequenciamento da Produção

Nos últimos anos os modelos matemáticos aplicados à programação da produção evoluíram quanto às suas formulações, visando o objetivo comum de atender às necessidades reais das indústrias [6]. Desta forma, na literatura são encontrados modelos matemáticos que abrangem de forma simultânea o dimensionamento de lotes e o sequenciamento da produção. Trabalhos importantes, que apresentam modelos matemáticos que realizam estas duas atividades simultaneamente podem ser citados, como: [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15] e [16].

Modelos integrados de dimensionamento e sequenciamento de lotes pretendem responder questões como: Quanto, quando e em que sequência produzir os itens, de forma a minimizar custos tais como custo de estoque, atrasos e preparação? Se forem consideradas várias máquinas, deve-se ainda determinar quais itens serão produzidos em cada máquina. Na literatura, encontra-se revisões acerca destes temas: Dimensionamento de Lotes [17], [1]; Sequenciamento da Produção [3], [4]; e estas duas atividades realizadas de forma integrada [10].

B. Problemas de Produção Multiníveis

Alguns processos de produção possuem sua organização de modo que ocorrem em mais de um estágio (ou nível) produtivo. Neste caso, a produção de um estágio pode depender da produção do estágio anterior ter sido finalizada. Em certos ambientes produtivos, é desejável que em cada estágio o dimensionamento e o sequenciamento dos lotes de produção sejam definidos de forma simultânea, uma vez que estas decisões são dependentes uma da outra [15].

Em busca de satisfazer tais necessidades, apresentam o Modelo Geral para Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes Multiestágio (*Multi-level lot sizing and scheduling*) [10]. Este modelo considera que a produção

de um item final requer a produção de itens intermediários, os quais são produzidos em estágios anteriores.

Ambientes de produção que possuem configuração em mais de um estágio produtivo vêm sendo estudados recentemente, uma vez que diversos trabalhos nesta área têm sido publicados nos últimos anos. Desta forma, pode-se citar trabalhos como: [15], [18], [19], [20], [16], [21], [22], [23], [24], [25] e [26]. Estes trabalhos tratam de diferentes abordagens e aplicações para o Problema de Produção em Multiestágios.

IV. MODELO MATEMÁTICO

A. Modelo Matemático com dois estágios e estoque intermediário

No trabalho [25] apresenta-se um modelo matemático aplicado à produção de placas eletrônicas, ambiente este que possui dois estágios produtivos e estoque intermediário entre estes. Neste caso a existência de estoque intermediário se dá à necessidade de tempo mínimo de permanência dos itens, entre o primeiro e segundo estágio para a secagem das placas. Os parâmetros, variáveis, bem como o modelo matemático apresentam-se a seguir.

QUADRO I: PARÂMETROS ADICIONAIS PARA GERAÇÃO DOS PROBLEMAS

Índices	Descrição
$\theta: (=I, II)$	Estágios Produtivos;
$i, j: (=1, \dots, N)$	Itens i e j a serem produzidos;
$k: (=1, \dots, K^\theta)$	Máquinas pertencentes ao estágio θ ;
$t: (=1, \dots, T)$	Períodos;
$s: (=1, \dots, W)$	Subperíodos;

Fonte: Adaptado de Ulbricht (2015).

QUADRO II: PARÂMETROS ADICIONAIS PARA GERAÇÃO DOS PROBLEMAS

Parâm.	Descrição
N	Número de itens;
T	Número de períodos no horizonte de planejamento;
W	Número total de subperíodos em todo o horizonte de planejamento;
W_t	Conjunto de subperíodos contidos no período t ;
K^θ	Número de máquinas pertencentes ao estágio θ ;
α_{k^θ}	Conjunto de itens que podem ser produzidos na máquina k , no estágio θ ;
CA_{kt}^θ	Capacidade de produção do estágio θ , na máquina k , no período t ;
CP_{ik}^θ	Custo de produção para produzir o item i na máquina $k \in \theta$, no estágio θ ;
CH_k^θ	Custo em minutos extra do funcionamento de cada máquina k , no estágio θ ;
CS_{ijk}^θ	Custo de <i>setup</i> para produzir o item j imediatamente após o item i na máquina $k \in \theta$, no estágio θ ;
ST_{ijk}^θ	Tempo de <i>setup</i> para produção do item j imediatamente após o item i na máquina $k \in \theta$, no estágio θ ;
ST_{oik}^θ	Tempo de <i>setup</i> para produzir o item i na máquina $k \in \theta$, no estágio θ , no início do horizonte de planejamento;
TP_{ik}^θ	Tempo consumido para produção de uma unidade do item i na máquina $k \in \theta$, no estágio θ ;
LM_{ik}^θ	Lote mínimo do item i que poderá ser produzido na máquina $k \in \theta$, no estágio θ ;
x_{iko}^θ	É igual a 1, se a máquina $k \in \theta$, do estágio θ , está preparada para produzir o item i , no início do horizonte de planejamento; 0, caso contrário;

ME_{kt}^θ	Quantidade máxima permitida em minutos extra, para produção na máquina $k \in \theta$, no período t , no estágio θ ;
$I_{i,0}^{II}$	Quantidade do item i , com demanda não atendida no estágio II, no início do horizonte de planejamento;
$I_{i,0}^+$	Quantidade do item i , existente no estoque intermediário no início do horizonte de planejamento;
Q_{it}^+	Quantidade máxima permitida de estoque intermediário, do item i , no período t ;
Q_{it}^{II}	Quantidade máxima permitida de demanda não atendida no estágio II, do item i , no período t ;
D_{it}	Demanda do item i no período t ;
TE_i	Tempo mínimo de permanência em estoque intermediário, de um lote do item i ;
CE_i	Custo por período, para manter uma unidade do item i , no estoque intermediário;
G_i	Custo por período, do atraso de entrega da produção do item i , no estágio II;
M	Número suficientemente grande.
Var.	Descrição
q_{iks}^θ	Quantidade do item i produzido na máquina $k \in \theta$, no subperíodo s , no estágio θ ;
qe_{it}	Quantidade do item i enviada ao estoque intermediário no período t ;
x_{iks}^θ	É igual a 1, se a máquina $k \in \theta$, está preparada para produzir o item i no subperíodo s , no estágio θ ; 0, caso contrário;
z_{iks}^θ	É igual a 1, quando o item i é produzido na máquina $k \in \theta$, no subperíodo s , no estágio θ ; 0, caso contrário;
ze_{it}	É igual a 1, quando o item i é produzido no estágio I, no período t em alguma das máquinas $k \in \theta$; 0, caso contrário;
y_{ijk}^θ	É igual a 1, se há <i>setup</i> do item i para o item j na máquina $k \in \theta$ no subperíodo s , no estágio θ ; 0, caso contrário;
hm_{ikt}^θ	Instante de término do lote do item i em cada período t em cada máquina $k \in \theta$, no estágio θ ;
ht_{it}^I	Instante de término do lote do item i em cada período t em todas as máquinas (estágio I);
he_{it}^I	Instante de término do lote do item i em cada período t (estágio I), somado ao tempo mínimo em que o lote deve permanecer em estoque intermediário;
ht_{ikt}^{II}	Instante em que o item i inicia o processamento no estágio II, na máquina $k \in \theta$, no período t ;
e_{kt}^θ	Quantidade em minutos extra para produção na máquina $k \in \theta$, no período t , no estágio θ ;
I_{it}^+	Quantidade do item i , armazenada no estoque intermediário no final do período t ;
I_{it}^{II}	Quantidade do item i , com demanda não atendida no final do período t , no Estágio II.

Fonte: Adaptado de Ulbricht (2015).

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } z \\
 & = \sum_{\theta} \sum_{i \in \alpha_{K^\theta}} \sum_{j \in \alpha_{K^\theta}} \sum_{k=1}^{K^\theta} \sum_{s=1}^W CS_{ijk}^\theta \cdot y_{ijk}^\theta \\
 & + \sum_{\theta} \sum_{i \in \alpha_{K^\theta}} \sum_{k=1}^{K^\theta} \sum_{s=1}^W CP_{ik}^\theta \cdot q_{iks}^\theta \\
 & + \sum_{\theta} \sum_{k=1}^{K^\theta} \sum_{t=1}^T CH_k^\theta \cdot e_{kt}^\theta \\
 & + \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (G_i \cdot I_{i,t}^{II} + CE_i \cdot I_{it}^+) \quad (1)
 \end{aligned}$$

Conjuntos de Restrições comuns aos dois estágios:

$$TP_{ik}^\theta \cdot q_{iks}^\theta \leq (CA_{kt}^\theta + ME_{kt}^\theta) \cdot x_{iks}^\theta \quad (\text{IV})$$

$$q_{iks}^\theta \geq LM_{ik}^\theta \cdot (x_{iks}^\theta - x_{ik,s-1}^\theta) \quad (3)$$

$$\sum_{i \in \alpha_{K^\theta}} x_{iks}^\theta = 1 \quad (4)$$

$$y_{ijks}^\theta \geq x_{ik,s-1}^\theta + x_{jks}^\theta - 1 \quad (5)$$

$$LM_{ik}^\theta \cdot z_{iks}^\theta \leq q_{iks}^\theta \leq \sum_{t=1}^T D_{it} \cdot z_{iks}^\theta \quad (6)$$

$$\sum_{s \in W_t} z_{iks}^\theta \leq 1 \quad (7)$$

$$\sum_{i \in \alpha_{K^\theta}} z_{ik(s-1)}^\theta \geq \sum_{i \in \alpha_{K^\theta}} z_{iks}^\theta \quad (8)$$

$$hi_{jkt}^\theta \geq hi_{ikt}^\theta + TP_{ik}^\theta \cdot \sum_{s \in W_t} q_{iks}^\theta + ST_{ijk}^\theta \quad (9)$$

$$+ M \cdot \sum_{s \in W_t} y_{ijks}^\theta - M$$

$$hi_{ikt}^\theta \leq M \cdot \sum_{s \in W} z_{iks}^\theta \quad (10)$$

$$hi_{ik1}^\theta \geq ST_{oik}^\theta \cdot z_{ik}^\theta \quad (11)$$

$$hm_{ikt}^\theta = hi_{ikt}^\theta + TP_{ik}^\theta \cdot \sum_{s \in W_t} q_{iks}^\theta \quad (12)$$

$$e_{kt}^\theta \geq hm_{ikt}^\theta - CA_{kt}^\theta \quad (13)$$

$$e_{kt}^\theta \leq ME_{kt}^\theta \quad (14)$$

Conjuntos de Restrições: Estoque intermediário, demanda e sincronia entre estágios:

$$ht_{it}^1 \geq hm_{ikt}^1 \quad (15)$$

$$ht_{it}^1 \leq M \cdot ze_{it} \quad (16)$$

$$qe_{it} = \sum_{k=1}^{K^1} \sum_{s \in W_t} q_{iks}^1 \quad (17)$$

$$ze_{it} \leq \sum_{k=1}^{K^1} \sum_{s \in W_t} q_{iks}^1 \leq M \cdot ze_{it} \quad (18)$$

$$he_{it}^1 = ht_{it}^1 + TE_i \cdot ze_{it} \quad (19)$$

$$\sum_{k=1}^{K^{II}} \sum_{s \in W_t} q_{iks}^{II} = qe_{it} + I_{i,t-1}^+ - I_{it}^+ \quad (20)$$

$$I_{it}^+ \leq MI_{it}^+ \quad (21)$$

$$\sum_{k=1}^{K^{II}} \sum_{s \in W_t} q_{iks}^{II} - I_{i,t-1}^{-II} + I_{it}^{-II} = D_{it} \quad (22)$$

$$I_{it}^{-II} \leq MI_{it}^{-II} \quad (23)$$

$$hi_{ikt}^{II} \geq he_{it}^1 \quad (24)$$

Conjuntos de Restrições: Domínio das Variáveis:

$$\begin{aligned} q_{iks}^\theta, I_{it}^+, I_{it}^{-II} &\in Z^+ \quad \forall \theta, k \in K^\theta, i, t, s \\ x_{iks}^\theta, z_{iks}^\theta, ze_{it} &\in \{0,1\} \quad \forall \theta, k \\ &\in K^\theta, i, t, s \\ y_{ijks}^\theta, hm_{ikt}^\theta, e_{kt}^\theta, qe_{it} & \\ ht_{it}^1, he_{it}^1, & \\ hi_{ikt}^{II} \geq 0 &\quad \forall \theta, k \\ &\in K^\theta, i, j, t, s \end{aligned} \quad (25)$$

B. Modelo Matemático para dois estágios e intervalo de tempo de permanência em estoque intermediário

No modelo matemático apresentado em [25] há a exigência de estoque intermediário entre os dois estágios de produção, que é necessário para secagem das placas. Neste caso, após o cumprimento do tempo mínimo para o processo de secagem, no momento em que houver máquina disponível para processamento no segundo estágio o item passa para o estágio posterior, ou pode permanecer em espera até que se possa prosseguir a produção. Não há restrição de tempo máximo e nem risco de vencimento do produto que está em estoque intermediário.

Já para fábricas que produzem, por exemplo, cosméticos, bebidas, medicamentos; não existe a necessidade de permanência entre os estágios produtivos para algum procedimento. Em contrapartida, existe um tempo máximo permitido que o produto pode permanecer em estoque intermediário.

Neste caso, o estoque intermediário consiste em um espaço físico onde os produtos acabados permanecem fora da sua embalagem primária, até que se tenha disponibilidade das máquinas que realizam a envase no segundo estágio. O tempo máximo de permanência dos itens está relacionado à volatilidade dos produtos, ou seja, produtos mais voláteis podem permanecer por um tempo menor fora da embalagem primária. Vale ressaltar que o não cumprimento desta especificação pode levar ao descarte ou reprocessamento do lote, uma vez que permanecendo mais tempo que o permitido fora da embalagem o produto perde seu valor, não havendo o resultado esperado ao chegar no cliente.

Sendo assim, com o objetivo de abranger em um modelo situações comuns à diferentes tipos de fábricas, que possuem multiestágios de produção e estoque intermediário, estabeleceu-se um limite entre o tempo mínimo e tempo máximo de permanência dos itens entre os estágios.

O conjunto de restrições (19) é substituído pelo conjunto (26) e (27), e adiciona-se a condição (28):

$$he_{it}^1 = ht_{it}^1 + TE_i \cdot ze_{it} \quad ()$$

$$he_{it}^1 \leq ht_{it}^1 + TMax_i \cdot ze_{it} \quad (26)$$

$$he_{it}^1 \geq ht_{it}^1 + TMin_i \cdot ze_{it} \quad (27)$$

$$he_{it}^1 \geq ht_{it}^1 \quad (28)$$

O conjunto de restrições representado por (26) e (27) estabelecem um limite entre tempo mínimo e máximo de permanência em estoque intermediário para o item i. Se o tempo mínimo de permanência for zero, o conjunto (27) se

igual a ao conjunto (28), o que impõe que o instante de término de processamento do lote do item i no período t no estágio I, somado ao tempo que o item permaneceu no estoque intermediário seja maior ou igual (quando Tempo de permanência for zero) ao instante de término do processamento no primeiro estágio. Sendo assim, se houver máquina disponível no segundo estágio o item pode passar direto do primeiro para o segundo estágio.

V. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

Apresenta-se nesta seção os métodos de resolução aplicados nos problemas de Programação Inteira Mista a serem gerados. Além da resolução dos problemas gerados, utilizando o modelo matemático apresentado na seção IV, abordagem chamada MIP Pura neste trabalho, aplicou-se também uma abordagem heurística que consiste em encontrar uma solução inicial e aplicar uma heurística de melhoria a partir desta.

A. MIP Sol

A MIP Sol trata-se de uma *Callback*, função interna disponível na interface de programação do *software* de otimização *Gurobi*. Em geral, é uma função que é solicitada pelo solver a cada melhoria de solução, ou seja, a cada nova solução obtida. Utilizou-se este recurso nesta pesquisa para encontrar uma solução inicial para um problema de Programação Inteira Mista (MIP Problem).

A função *Callback* permite monitorar um processo de otimização em andamento, sendo que neste monitoramento critérios de parada podem ser informados.

Neste trabalho o critério utilizado foi em relação à solução encontrada. Sendo assim, ao se chegar na primeira solução factível para o problema abordado, ou seja, a primeira solução incumbente encontrada pelo solver, interrompe-se a execução da MIP Sol. Esta solução é salva e a resolução do problema recomeça com a solução incumbente como a solução inicial. Partindo desta solução inicial aplica-se uma heurística de melhoria.

B. RINS (Relaxation Induced Neighborhood Search)

A heurística RINS se trata de uma heurística de melhoria, ou seja, que tem como objetivo melhorar uma solução inicial já existente. Esta metodologia de resolução foi proposta em 2005 com objetivo de resolver problemas de Programação Inteira Mista (PIM) [27].

A RINS fundamenta-se no conceito de busca em vizinhança e na relaxação do modelo matemático, aplicada também a ideia de fixar algumas das variáveis inteiras de uma determinada solução. Segundo, é necessário partir de uma solução factível para que a RINS seja aplicada ao modelo.

VI. TESTES COMPUTACIONAIS, RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os testes computacionais foram realizados em um computador com sistema operacional 64 Bits, *Microsoft Windows 7 Professional*, processador AMD A10 PRO-7800B R7, 12 Compute Cores 4C + 8G, 3.50 GHz e 8 GB de

memória RAM. Todos os testes foram realizados para as duas diferentes abordagens de resolução, sendo estas:

- MIP Pura*: consiste na resolução dos problemas de Programação Inteira Mista gerados, pelo *solver*.
- MIP Sol + RINS*: utiliza-se a primeira solução incumbente encontrada pelo *solver* como a solução inicial do problema, a partir desta, aplica-se a cada 50 nós explorados a heurística de melhoria RINS.

Para fins de comparação estabeleceu-se como critério de parada para as duas abordagens, 24 horas de teste ou até que se encontre a solução ótima.

A. Geração dos Problemas a serem resolvidos

Foram gerados problemas com 4 e 10 itens a serem produzidos, ambos contando com 4 máquinas no ambiente produtivo. Além disso, para os problemas de maior porte (10 itens) gerou-se *setup* dependente e não dependente da sequência.

As instâncias foram geradas de acordo com metodologia apresentada em [25] e os demais parâmetros necessários foram gerados como apresenta-se a seguir (Quadro 1).

- Tempo máximo de permanência em estoque intermediário de um lote do item i*: Este parâmetro varia com o item, ou seja, com as propriedades do produto. Sendo assim, considerou-se que os produtos podem permanecer entre 1 e 3 períodos de 8 horas de trabalho em estoque intermediário;
- Tempo mínimo de permanência em estoque intermediário de um lote do item i*: Assim como o Tempo máximo, varia com as propriedades do item. Considerou-se que o produto pode não ter tempo mínimo (zero) ou ter um processo que leve no máximo 1 período;
- Tempos de *setup* dependente da sequência: gerou-se uma matriz no intervalo entre 15 e 40 minutos de *setup*, variando com a sequência em que se produz.

QUADRO III: PARÂMETROS ADICIONAIS PARA GERAÇÃO DOS PROBLEMAS

Parâmetros	Simb.	Unid.
Tempo máximo de permanência em estoque intermediário de um lote do item i	$TMax_i$	min
Tempo mínimo de permanência em estoque intermediário de um lote do item i	$TMin_i$	min
Tempo de <i>setup</i> (dependente da sequência) para processar o item j imediatamente após o item i na máquina k pertencente ao estágio θ	ST_{ijk}^θ	min

Fonte: Os autores (2017).

Todos os problemas gerados possuem 2 máquinas paralelas idênticas disponíveis por estágio.

B. Resultados e Discussões

Esta seção contempla os resultados dos testes computacionais realizados para as duas classes de problemas

gerados neste trabalho. Os resultados foram analisados de acordo com o tempo e qualidade de solução.

Os valores de GAP apresentados foram calculados de acordo com abaixo.

$$GAP (\%) = \frac{\text{Solução Factível} - \text{Melhor Limitante Inferior Conhecido}}{\text{Solução Factível}} \times 100$$

Apresentam-se os resultados obtidos para os testes realizados para 4 itens (Tabela 1) e para os problemas gerados para 10 itens (Tabela 2).

TABELA I: TESTES REALIZADOS PARA PROBLEMAS COM 4 ITENS.

Abordagem de resolução	Solução	Status da solução	Tempo de Resolução (seg)	Tempo para solução ótima (seg)	Tempo para provar otimalidade (seg)
MIP Pura	1992	Solução Ótima	13515,0	0	8551,00
MIP Sol + RINS	1992	Solução Ótima	10005,0	0	1953,43
					4964,00
					8051,57

Fonte: Os autores (2017).

Observa-se na Tabela 1 que a abordagem que aplica a heurística RINS partindo da primeira solução incumbente apresenta o melhor resultado, no que diz respeito a tempo de solução, uma vez que as duas abordagens levaram à solução ótima. No entanto, é possível também observar que dentro do tempo de solução, a abordagem MIP Sol + RINS levar um tempo maior para provar a otimalidade que a MIP Pura.

TABELA II: TESTES REALIZADOS PARA PROBLEMAS COM 10 ITENS.

Problema	Abordagem de resolução	Solução	Status da solução	Lower Bound	GAP (%)
Setup não dependente	MIP Pura	2715,00	Factível	2411,00	11,20
	MIP Sol + RINS	2724,00	Factível	2419,00	11,49
Setup dependente	MIP Pura	2778,00	Factível	2203,00	20,70
	MIP Sol + RINS	5647,00	Factível	2333,00	60,99

Fonte: Os autores (2017)

A primeira análise que cabe ser realizada é quanto aos tempos de *setup* serem ou não dependentes da sequência em que se produz. Assim, é possível verificar que os problemas que possuem *setup* dependente da sequência apresentam maior dificuldade de resolução. Sendo que para as duas abordagens os valores de GAP obtidos mostram que estão mais distantes da solução ótima, quando comparados aos resultados obtidos para problemas com *setup* que independe da sequência.

Quando a comparação é em relação à abordagem de resolução, observa-se que para os dois casos, as duas abordagens necessitaram das 24 horas de solução e não atingiram a solução ótima. Ainda, tanto para *setup* dependente quanto para não dependente da sequência, a

abordagem MIP Pura apresentou melhor resultado quanto à qualidade de solução no tempo de teste.

VII. CONCLUSÕES

Apresentou-se neste trabalho um modelo matemático para problemas de produção multiestágio com estoque intermediário. O Modelo apresentado aborda a existência de estoque intermediário entre os níveis de produção e intervalo para o tempo de permanência dos itens. Vale ressaltar que o não cumprimento destes tempos impacta no descarte ou reprocesso dos lotes, gerando custos para as indústrias que possuem característica de data de validade quanto aos produtos.

Apresentou-se duas abordagens de resolução para o modelo proposto neste trabalho. Para os problemas menores, que possuem 4 itens a serem resolvidos, a abordagem MIP Sol + RINS apresentou melhores resultados quanto à tempo de solução, uma vez que as duas abordagens atingiram a solução ótima. Neste caso, a abordagem heurística levou menos de 3 horas para encontrar e provar a solução ótima, enquanto a abordagem MIP Pura necessitou de 1 hora a mais para encontrar a mesma solução.

Já para os problemas com 10 itens a abordagem MIP Pura apresentou melhor resultado para os problemas com *setup* dependente e não dependente da sequência. Para nenhum caso encontrou-se a solução ótima dentro das 24 horas de teste. Além disso, observou-se maior complexidade de solução quando se tem um problema com *setup* dependente da sequência.

REFERÊNCIAS

- [1] B. Karimi, S. M. T. Fatemi Ghomi, and J. M. Wilson, "The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms," *Omega*, vol. 31, no. 5, pp. 365–378, 2003.
- [2] N. Brahimi, S. Dauzere-Peres, N. M. Najid, and A. Nordli, "Single item lot sizing problems," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 168, no. 1, pp. 1–16, 2006.
- [3] M. L. PINEDO, "Planning and scheduling in manufacturing and services." 2005.
- [4] K. R. Baker and D. Trietsch, *Principles of Sequencing and Scheduling*. 2009.
- [5] D. S. GAREY, M.R.; JOHNSON, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. San Francisco, 1979.
- [6] G. Ulbricht, "A Production Programming Model Multistage with Intermediate Stocks," vol. 9, no. 43, pp. 2111–2124, 2015.
- [7] B. FLEISCHMANN, "The discrete lot-sizing and scheduling problem," *European Journal of Operational Research*, pp. 337–348, 1990.
- [8] K. DREXL, A., HAASE, "Proportional lotsizing and scheduling," *Int. J. Prod. Econ.*, vol. 40, pp. 73–87, 1995.
- [9] B. Fleischmann and H. Meyr, "The general lotsizing and scheduling problem," *OR Spektrum*, vol. 19, no. 1, pp. 11–21, 1997.
- [10] a. Drexl and a. Kimms, "Lot sizing and scheduling — Survey and extensions," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 99, no. 2, pp. 221–235, 1997.
- [11] A. HAASE, K.; KIMMS, "Lot sizing and scheduling with sequence-dependent setup costs and times and efficient rescheduling opportunities," *Int. J. Prod. Econ.*, vol. 66, pp. 159–169, 2000.
- [12] H. Meyr, "Simultaneous Lotsizing and Scheduling by Combining Local Search with Dual Reoptimization," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 120, pp. 311–326, 2000.
- [13] H. Meyr, "Simultaneous lotsizing and scheduling on parallel

- machines,” *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 139, no. 2, pp. 277–292, 2002.
- [14] F. M. B. Toledo and V. A. Armentano, “A Lagrangian-based heuristic for the capacitated lot-sizing problem in parallel machines,” *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 175, no. 2, pp. 1070–1083, 2006.
- [15] D. Ferreira, “Abordagens para o Problema Integrado de Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes da Produção de Bebidas,” *Tese doutorado*, p. 247, 2006.
- [16] D. Ferreira, R. Morabito, and S. Rangel, “Solution approaches for the soft drink integrated production lot sizing and scheduling problem,” *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 196, no. 2, pp. 697–706, 2009.
- [17] L. Buschkühl, F. Sahling, S. Helber, and H. Tempelmeier, *Dynamic capacitated lot-sizing problems: a classification and review of solution approaches*, 15th ed. Springer Berlin Heidelberg, 1995.
- [18] S. A. De Araujo, M. N. Arenales, and A. R. Clark, “Joint rolling-horizon scheduling of materials processing and lot-sizing with sequence-dependent setups,” *J. Heuristics*, vol. 13, no. 4, pp. 337–358, 2007.
- [19] T. S. A. MOHAMMAD M; FATEMI S. M. T., KARIMI B., “Development of heuristics for multiproduct multi-level capacitated lotsizing problem with sequence-dependent setups,” *J Appl Sci*, vol. 9, no. 2, pp. 296–303, 2009.
- [20] D. Ferreira, R. Morabito, and S. Rangel, “Um modelo de otimização inteira mista e heurísticas relax and fix para a programação da produção de fábricas de refrigerantes de pequeno porte,” *Produção*, vol. 18, no. 1, pp. 76–88, 2008.
- [21] R. TOLEDO, C. F. M.; FRANÇA P. M.; MORABITO, “A. Multi-population genetic algorithm to solve the synchronized and integrated two-level lot sizing and scheduling problem,” *Int J Prod Res*, vol. 47, no. 11, pp. 3097–3119, 2009.
- [22] S. Helber and F. Sahling, “Int . J . Production Economics A fix-and-optimize approach for the multi-level capacitated lot sizing problem,” *Intern. J. Prod. Econ.*, vol. 123, no. 2, pp. 247–256, 2010.
- [23] S. Transchel, S. Minner, J. Kallrath, N. Löhndorf, and U. Eberhard, “A hybrid general lot-sizing and scheduling formulation for a production process with a two-stage product structure,” *Int. J. Prod. Res.*, vol. 49, no. 9, pp. 2463–2480, 2011.
- [24] F. Seeanner and H. Meyr, “Multi-stage simultaneous lot-sizing and scheduling for flow line production,” *OR Spectr.*, vol. 35, pp. 33–73, 2013.
- [25] G. Ulbricht, “Um Modelo De Planejamento Da Produção Multiestágio Com Estoques Intermediários Limitados,” Universidade Federal do Paraná, 2015.
- [26] A. Boonmee and K. Sethanan, “A GLNPSO for multi-level capacitated lot-sizing and scheduling problem in the poultry industry,” *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 250, no. 2, pp. 652–665, 2016.
- [27] E. Danna, E. Rothberg, and C. Le Pape, “Exploring relaxation induced neighborhoods to improve MIP solutions,” *Math. Program.*, vol. 102, no. 1, pp. 71–90, 2005.