



**Simpósio de Métodos
Numéricos em Engenharia**

25 a 27 de outubro, 2017

Propagação de onda em meios porosos com constituente sólido incompressível

*Romulo Brito da Silva
Instituto de Matemática*

Programa de Pós Graduação em Informática, UFRJ
Rio de Janeiro, Brasil
romulo.silva@ppgi.ufrj.br

I-Shih Liu

*Instituto de Matemática
UFRJ
Rio de Janeiro, Brasil
liu@im.ufrj.br*

Resumo—O objetivo do trabalho consiste na análise de propagação de ondas planas em um material poroelástico contendo dois componentes. Essa análise é realizada por meio de ondas harmônicas, onde supõe-se que estas possuem pequena amplitude. Através da variação da porosidade do meio, fornecemos um estudo qualitativo das velocidades de propagação e atenuação das ondas longitudinais P_1 , P_2 e transversais S . Além disso, indicamos a importância prática de tais resultados.

Palavras-chave—teoria de misturas, teoria de meios porosos, propagação de ondas, relação de dispersão, poroelasticidade.

I. INTRODUÇÃO

O estudo de propagação de onda em meio poroso saturado teve início com os trabalhos de *Terzaghi* [1], [2] em mecânica dos solos. Essa abordagem obteve continuidade com a teoria de *Biot* nos anos 50. Entretanto, como mencionado em [3], existiam alguns problemas de caráter conceitual no modelo. Esses problemas foram expostos com o próprio avanço no campo da termodinâmica do contínuo.

São previstas experimentalmente dois tipos de ondas acústicas que se propagam no meio poroso. A onda primária, ou onda P, é uma onda de compressão e o deslocamento das partículas ocorre na direção da propagação. A outra, é uma onda de cisalhamento, chamada de onda S, e o deslocamento das partículas ocorre na direção transversal à propagação. Ambas as ondas P e S, se propagam essencialmente no meio sólido. Entretanto, na teoria formulada por *Biot* [4], [5], uma terceira onda foi prevista. Essa onda se propaga na mistura sólido e fluido, cuja deslocamento das partículas é paralelo a direção de propagação, como ocorre com a onda P. Por essa

razão, foi batizada de onda P2 e sua amplitude sofre uma forte atenuação. Em função da atenuação dessa onda, a detecção experimental e mensuramento só veio a ocorrer anos depois de sua previsão teórica, mais precisamente nos anos 80 [6], onde foram realizadas uma série de experimentos em um material poroso saturado artificial (água e vidro sinterizado).

II. PROBLEMAS EM POROELASTICIDADE

A teoria de poroelasticidade é baseada nas equações de balanço de massa parcial e de momento parcial para os constituintes fluido e sólidos [7],

Variáveis independentes: $\{d_f, d_s, \chi_f, \chi_s\}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\phi d_f)}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \text{grad}(\phi d_f) + \phi d_f \text{div} \mathbf{v}_f = 0, \\ \frac{\partial((1-\phi)d_s)}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \text{grad}((1-\phi)d_s) \\ + (1-\phi)d_s \text{div} \mathbf{v}_s = 0, \\ \phi d_f \left(\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \text{grad} \mathbf{v}_f \right) + \phi \text{grad} P - \text{div} \bar{T}_f \\ + \phi \mathbf{r} = \phi d_f \mathbf{g}, \\ (1-\phi)d_s \left(\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \text{grad} \mathbf{v}_s \right) + (1-\phi) \text{grad} P \\ - \text{div} \bar{T}_s + (1-\phi) \mathbf{r} = (1-\phi) d_s \mathbf{g}. \end{array} \right. \quad (1)$$

Variáveis constitutivas:

$$\begin{aligned}\bar{T}_f &= \bar{T}_f(d_f, F_s, V), & \bar{T}_s &= \bar{T}_s(d_f, F_s, V), \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}(d_f, F_s, V), & P &= P(d_f, F_s),\end{aligned}\quad (2)$$

onde ϕ é a porosidade do meio, d_s e d_f são as densidades de massa reais do constituinte sólido e fluido respectivamente, \mathbf{v}_s e \mathbf{v}_f são as velocidades do constituintes sólido e fluido, P é a poro pressão do fluido, \bar{T}_f é a tensão extra do fluido, \bar{T}_s é a tensão efetiva do sólido, \mathbf{r} forças de resistividade á passagem do fluido no meio e \mathbf{g} força da gravidade.

O sistema (1)₁₋₄ possui mais variáveis constitutivas do que equações, uma vez que a teoria constitutiva considera a porosidade como variável. Dessa forma, o sistema não possui uma solução determinística, sendo subdeterminado com o conjunto $\{\chi_s, \chi_f, d_f, d_s, \phi\}$ de variáveis a determinar. Com o objetivo de resolver esse problema realizamos a hipótese que consiste em considerar a incompressibilidade do constituinte do sólido.

III. ANÁLISE DA PROPAGAÇÃO DE ONDA EM MEIO POROSO VIA ONDAS HARMÔNICAS

Vamos fornecer uma análise qualitativa e quantitativa da propagação de onda em um meio poroso. Uma explicação razoável para que essa análise tenha sido realizada por meio de ondas harmônicas, se baseia no fato da existência de uma interpretação análoga à modelagem do fenômeno de propagação de onda através do deslocamento de uma superfície singular [8]. A análise dos modelos de propagação de ondas harmônicas foi realizadas com base no trabalho [3].

A. Sistemas de Equações de Governo via Ondas Harmônicas com Constituinte Sólido Incompressível

Com a hipótese de incompressibilidade do constituinte sólido, podemos fornecer um sistema unicamente determinado.

Variáveis independentes: $\{\phi, d_f, \chi_f, \chi_s\}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial(\phi d_f)}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \text{grad}(\phi d_f) + \phi d_f \text{div} \mathbf{v}_f = 0, \\ -\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \text{grad} \phi\right) + (1 - \phi) \text{div} \mathbf{v}_s = 0, \\ d_f \dot{\mathbf{v}}_f + \text{grad} P + \mathbf{r} = d_f \mathbf{g}, \\ (1 - \phi) \left(d_s \dot{\mathbf{v}}_s - d_f \dot{\mathbf{v}}_f\right) - \text{div} \bar{T}_s \\ -\mathbf{r} = (1 - \phi)(d_s - d_f) \mathbf{g}. \end{cases} \quad (3)$$

Variáveis constitutivas:

$$\begin{aligned}\bar{T}_s &= \bar{T}_s(\phi, d_f, F_s), & \mathbf{r} &= \mathbf{r}(\phi, d_f, F_s, V), \\ P &= P(\phi, d_f, F_s).\end{aligned}\quad (4)$$

Considerando o sistema (3), onde foram desprezados os suprimientos de força externa e os termos de segunda ordem em V ,

$$\bar{T}_f = \phi d_f (\psi_f - \psi_f^0) I + \phi d_f \frac{\partial \psi_f}{\partial V} \otimes V \approx o(2), \quad (5)$$

podemos escrever em componentes cartesianas,

$$\begin{cases} d_f \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi \frac{\partial d_f}{\partial t} + v_i^f (\phi_{,i} d_f + \phi d_{f,i}) \\ + \phi d_f v_{i,i}^f = 0, \\ -\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + v_i^s \phi_{,i}\right) + (1 - \phi) v_{i,i}^s = 0, \\ d_f \left(\frac{\partial v_i^f}{\partial t} + v_j^f v_{i,j}^f\right) + (P_\phi \phi_{,i} + P_{d_f} d_{f,i} \\ + P_{F_s j k} F_{j k,i}^s) + (R(v_i^f - v_i^s) + R_{d_f} d_{f,i} \\ + R_\phi \phi_{,i} + R_{F_s j k} F_{j k,i}^s) = 0, \\ (1 - \phi) \left(d_s \left(\frac{\partial v_i^s}{\partial t} + v_j^s v_{i,j}^s\right) - d_f \left(\frac{\partial v_i^f}{\partial t} \right. \right. \\ \left. \left. + v_j^f v_{i,j}^f\right)\right) - (H_{\phi i j} \phi_{,j} + H_{d_f i j} d_{f,j} \\ + H_{F_s i j k l} F_{j k,l}^s) - (R(v_i^f - v_i^s) + R_{d_f} d_{f,i} \\ + R_\phi \phi_{,i} + R_{F_s j k} F_{j k,i}^s) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= RV - \frac{P}{d_f} \text{grad} d_f + d_f \text{grad} \psi_f^0 = \\ &RV + R_{d_f} \text{grad} d_f \\ &+ R_\phi \text{grad} \phi + R_{F_s} \cdot \text{grad} F_s\end{aligned}\quad (7)$$

e definimos,

$$\frac{\partial P}{\partial A} = P_A, \quad \frac{\partial \bar{T}_s}{\partial A} = H_A, \quad (8)$$

para denotar as derivadas parciais com relação à quantidade A que pode ser tensorial, vetorial ou escalar.

Vamos admitir que o sistema esteja em equilíbrio e que as variáveis independentes $\{\phi, d_f, \chi_f, \chi_s\}$ sejam dadas por,

$$\phi = \bar{\phi} + \hat{\phi} e^\zeta, \quad d_f = \bar{d}_f + \hat{d}_f e^\zeta, \quad (9)$$

$$\chi_f = \bar{\chi}_f + \hat{\chi}_f e^\zeta, \quad \chi_s = \bar{\chi}_s + \hat{\chi}_s e^\zeta,$$

com $\zeta = i(\omega t - k \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})$, onde $\mathbf{x} = \chi_s(\mathbf{X}_s, t)$. Além disso,

$$\begin{aligned}\bar{\chi}_f &= \chi_f(\mathbf{X}_f, 0), & \bar{\chi}_s &= \chi_s(\mathbf{X}_s, 0), \\ \bar{\phi} &= \phi(\mathbf{x}, 0), & \bar{d}_f &= d_f(\mathbf{x}, 0).\end{aligned}\quad (10)$$

Portanto, no estado de referência homogeneamente deformado, consideramos as quantidades $\bar{\phi}$, \bar{d}_f , $\bar{\chi}_f$ e $\bar{\chi}_s$ constantes.

As funções em (9), podem ser entendidas como funções que se dividem nas contribuições de onda progressiva,

$$e^{i(\omega t - Re(k) \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})}$$

e de atenuação

$$e^{iIm(k)\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}},$$

de modo que $e^{i(\omega t - Re(k)\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})} e^{iIm(k)\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}} = e^{i(\omega t - k\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})}$, onde $k = Re(k) + iIm(k)$ é o número de onda e, dessa forma, $U = \frac{\omega}{Re(k)}$ é a velocidade de fase e $Im(k)$ é o fator de atenuação da onda.

Com essas hipóteses e definições, obtemos algumas identidades necessárias para o restante do texto,

$$\frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial t} = i\omega \hat{\mathbf{x}}_s e^\zeta \quad \text{então} \quad \mathbf{v}_s = \hat{\mathbf{v}}_s e^\zeta, \quad (11)$$

onde $\hat{\mathbf{v}}_s = i\omega \hat{\chi}_s$.

Derivando em relação a coordenada material \mathbf{X}^s ,

$$\chi_{i,a}^s = \chi_{i,a}(\mathbf{X}^s, 0) - ik n_a x_{i,a} \hat{\chi}_i^s e^\zeta, \quad (12)$$

segue que

$$F_{ia}^s = F_{0ia}^s - \frac{k}{\omega} \hat{v}_i^s n_a F_s^{ai} e^\zeta. \quad (13)$$

Logo,

$$F_s = F_0^s - \frac{k}{\omega} \hat{\mathbf{v}}_s \otimes F_s^T \mathbf{n} e^\zeta. \quad (14)$$

Supomos que as amplitudes das ondas sejam pequenas, portanto podemos assumir que os produtos dessas amplitudes sejam desprezíveis. O termo F_0^s é o tensor que caracteriza o estado homogeneamente deformado de referência na matriz sólida, ou seja, para $t = 0$, temos $F_0^s = \frac{\partial \chi_i^s(X_a^s, 0)}{\partial X_a^s}$. Além disso, para o segundo gradiente de deformação do constituinte sólido temos,

$$F_s = F_0^s - \frac{k}{\omega} \hat{\mathbf{v}}_s F_s^T \mathbf{n} e^\zeta \quad (15)$$

$$F_{ia,k}^s = (F_{0ia}^s - \frac{k}{\omega} \hat{v}_i^s n_a F_{0s}^{aj} e^\zeta)_{,k}$$

Portanto

$$\text{grad } F_s = i \frac{k^2}{\omega} \hat{\mathbf{v}}_s \otimes F_s^T \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} e^\zeta. \quad (16)$$

Definindo a velocidade do constituinte fluido do meio como $\mathbf{v}_f = \hat{\mathbf{v}}_f e^\zeta$, obtemos as mesmas relações acima. Dessa forma, podemos rescrever as equações (6)₍₁₋₄₎ em termos das identidades acima explicitadas,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega}{k} \hat{\phi} \bar{d}_f + \frac{\omega}{k} \bar{\phi} \hat{d}_f - \bar{\phi} \bar{d}_f \hat{\mathbf{v}}_f \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \frac{\omega}{k} \hat{\phi} + (1 - \bar{\phi}) \hat{\mathbf{v}}_s \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \frac{\omega}{k} \hat{\phi} (P_\phi + R_\phi) \mathbf{n} + \frac{\omega}{k} \hat{d}_f (P_{d_f} + R_{d_f}) \mathbf{n} \\ - \frac{\omega^2}{k^2} \bar{d}_f \hat{\mathbf{v}}_f - \frac{\omega}{ik^2} R (\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) - \hat{\Pi} \hat{\mathbf{v}}_s = 0, \\ \frac{\omega}{k} \hat{\phi} (H_\phi + IR_\phi) \mathbf{n} + \frac{\omega}{k} \hat{d}_f (H_{d_f} + IR_{d_f}) \mathbf{n} \\ + \frac{\omega^2}{k^2} (1 - \bar{\phi}) (\bar{d}_s \hat{\mathbf{v}}_s - \bar{d}_f \hat{\mathbf{v}}_f) \\ - \frac{\omega}{ik^2} R (\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) - \hat{Q} \hat{\mathbf{v}}_s = 0. \end{array} \right. \quad (17)$$

Onde definimos os tensores $\hat{\Pi}$ e \hat{Q} da seguinte forma,

$$\hat{\Pi}_{ik} = (R_{F_s} + P_{F_s})_{ka} F_s^{ja} n_j n_i, \quad (18)$$

$$\hat{Q}_{ik} = (\delta_{ij} R_{F_s ka} + (H_{F_s})_{ijk a}) F_s^{la} n_l n_j,$$

B. Onda Harmônica Plana Longitudinal com Constituinte Sólido Incompressível

Restringimos o estudo ao caso em que as velocidades dos constituintes fluido e sólido são paralelas ao vetor normal à frente de onda, $\hat{\mathbf{v}}_f = \hat{v}_f \mathbf{n}$ e $\hat{\mathbf{v}}_s = \hat{v}_s \mathbf{n}$, respectivamente. Com essas hipóteses e fazendo $U = \frac{\omega}{k}$ no sistema (17), podemos escrever

$$\left\{ \begin{array}{l} U \hat{\phi} \bar{d}_f + U \bar{\phi} \hat{d}_f - \bar{\phi} \bar{d}_f \hat{v}_f = 0, \\ U \hat{\phi} + (1 - \bar{\phi}) \hat{v}_s = 0, \\ U \hat{\phi} \hat{P}_\phi + U \bar{d}_f \hat{P}_{d_f} - U^2 \left(\frac{R}{i\omega} + \bar{d}_f \right) \hat{v}_f \\ + U^2 \left(\frac{R}{i\omega} - \frac{1}{U^2} \mathbf{n} \cdot \hat{\Pi} \mathbf{n} \right) \hat{v}_s = 0, \\ U \hat{\phi} \hat{H}_\phi + U \bar{d}_f \hat{H}_{d_f} - U^2 \left((1 - \bar{\phi}) \bar{d}_f + \frac{R}{i\omega} \right) \hat{v}_f \\ + U^2 \left((1 - \bar{\phi}) \bar{d}_s \frac{R}{i\omega} - \frac{1}{U^2} \mathbf{n} \cdot \hat{Q} \mathbf{n} \right) \hat{v}_s = 0, \end{array} \right. \quad (19)$$

onde

$$\hat{P}_\phi = P_\phi + R_\phi, \quad \hat{P}_{d_f} = P_{d_f} + R_{d_f}, \quad (20)$$

$$\hat{H}_\phi = R_\phi + \mathbf{n} \cdot H_\phi \mathbf{n}, \quad \hat{H}_{d_f} = R_{d_f} + \mathbf{n} \cdot H_{d_f} \mathbf{n}.$$

Para a existência de soluções não triviais do sistema (19), devemos exigir que o determinante da matriz de coeficiente seja nulo,

$$\det \begin{vmatrix} \bar{d}_f & \bar{\phi} & -\bar{\phi} \bar{d}_f & 0 \\ 1 & 0 & 0 & (1 - \bar{\phi}) \\ \hat{P}_\phi & \hat{P}_{d_f} & -U^2 \left(\frac{R}{i\omega} + \bar{d}_f \right) & M_{34} \\ \hat{H}_\phi & \hat{H}_{d_f} & M_{43} & M_{44} \end{vmatrix} = 0, \quad (21)$$

onde

$$\begin{aligned} M_{34} &= U^2 \left(\frac{R}{i\omega} - \frac{1}{U^2} \mathbf{n} \cdot \hat{\Pi} \mathbf{n} \right), \\ M_{43} &= -U^2 \left((1 - \bar{\phi}) \bar{d}_f + \frac{R}{i\omega} \right), \\ M_{44} &= U^2 \left((1 - \bar{\phi}) \bar{d}_s + \frac{R}{i\omega} - \frac{1}{U^2} \mathbf{n} \cdot \hat{Q} \mathbf{n} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Consideramos as simplificações relatadas em [7],

$$\begin{aligned} \hat{P}_\phi &= 0, \quad \hat{\Pi} = 0, \quad \hat{H}_\phi = 0, \quad \hat{H}_{d_f} = 0, \\ \hat{Q}_{ik} &= (H_{F_s})_{ijk\alpha} F_s^{la} n_l n_j = L_{ijkl} n_j n_l, \end{aligned} \quad (23)$$

onde,

$$L_{ijkl} = \frac{\partial T_s^{ij}}{\partial F_s^{ka}} F_s^{la} \quad (24)$$

é o tensor de elasticidade do constituinte sólido. É usualmente assumido que o tensor de elasticidade seja fortemente elíptico e a compressibilidade seja positiva, ou seja,

$$P_{d_f} = \frac{\partial P}{\partial d_f} > 0, \quad L_{ijkl} u_i v_j u_k v_l > 0, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \neq 0. \quad (25)$$

Podemos escrever a equação biquadrada, resultado de (21) e das considerações (23) como,

$$\begin{aligned} (U^2 - c_1^2)(U^2 - c_2^2) - \frac{(1 - \phi) d_f}{\phi} \frac{d_f}{d_s} c_2^2 U^2 \\ + \frac{R}{i\omega} (\gamma U^4 - \eta U^2) = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

onde

$$\gamma = \frac{(1 - \phi) d_s + \phi d_f}{(1 - \phi) d_f d_s}, \quad \eta = \frac{c_1^2}{d_f} + \frac{c_2^2}{\phi(1 - \phi) d_s}. \quad (27)$$

Com $c_1 = \sqrt{\frac{\mathbf{n} \cdot \hat{Q} \mathbf{n}}{(1 - \phi) d_s}}$, $c_2 = \sqrt{\hat{P}_{d_f}}$, onde c_1 e c_2 representam as velocidades de propagação das ondas longitudinais no sólido elástico e no fluido elástico respectivamente. As soluções de (26) são denominadas ondas $P1$ e $P2$. Note que quando $\omega \rightarrow \infty$, para a equação (26), obtemos

$$(U^2 - c_1^2)(U^2 - c_2^2) - \frac{(1 - \phi) d_f}{\phi} \frac{d_f}{d_s} c_2^2 U^2 = 0, \quad (28)$$

e recuperamos os resultados para ondas de aceleração em [7]. E quando $\omega \rightarrow 0$, temos:

$$U^2 = \frac{\phi(1 - \phi) d_s c_1^2 + c_2^2 d_f}{\phi(1 - \phi) d_s + \phi^2 d_f} \quad \text{ou} \quad U = 0. \quad (29)$$

C. Ondas Transversais com Constituinte Sólido Incompressível

Do sistema de equações para meio poroso saturado com densidade do constituinte sólido (d_s) constante (17), supondo $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$ e $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 1$ tal que $\hat{\mathbf{v}}_f = \hat{v}_f \mathbf{m}$ e $\hat{\mathbf{v}}_s = \hat{v}_s \mathbf{m}$ e, realizando os mesmos passos anteriores, segue que

$$\det \begin{vmatrix} U^2 \left(\frac{R}{i\omega} - \frac{1}{U^2} \mathbf{m} \cdot \hat{\Pi} \mathbf{m} \right) & -U^2 \left(\frac{R}{i\omega} + \bar{d}_f \right) \\ M_{21} & M_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad (30)$$

onde

$$\begin{aligned} M_{21} &= U^2 \left((1 - \bar{\phi}) \bar{d}_s + \frac{R}{i\omega} - \frac{1}{U^2} \mathbf{m} \cdot \hat{Q} \mathbf{m} \right), \\ M_{22} &= -U^2 \left((1 - \bar{\phi}) \bar{d}_f + \frac{R}{i\omega} \right) \left(\frac{R}{i\omega} + d_f \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Resolvendo (32) e utilizando as hipóteses (23) e (25), obtemos o seguinte polinômio,

$$\begin{aligned} U^2 + \frac{R}{i\omega} \left(\frac{(1 - \phi)(d_s - d_f) + d_f}{(1 - \phi) d_s d_f} \right) U^2 - c_s^2 \\ - \frac{R}{i\omega} \frac{c_s^2}{d_f} = 0 \quad \text{ou} \quad U = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

em que $c_s = \sqrt{\frac{\mathbf{m} \cdot \hat{Q} \mathbf{m}}{(1 - \phi) d_s}}$. Analisando o comportamento para baixas frequências, ou seja, quando $\omega \rightarrow 0$,

$$U^2 = \frac{c_s^2 (1 - \phi) d_s}{((1 - \phi) d_s + \phi d_f)}. \quad (33)$$

E para frequências muito altas,

$$U^2 = \frac{\mathbf{m} \cdot \hat{Q} \mathbf{m}}{(1 - \phi) d_s}. \quad (34)$$

A relação de dispersão (32), nos fornece a velocidade de fase e atenuação sofrida pela onda de cisalhamento.

IV. RESULTADOS NUMÉRICOS

O problema $\det(M) = 0$, como em (23) e (32), nos fornece um polinômio característico $f(\omega, k) = 0$, cuja solução resulta em uma relação de dispersão que descreve os efeitos da propagação da onda. Essa equação conecta a frequência ω e o número de onda k que, dependendo da escolha da variável independente, nos fornece as velocidades de fase $v_{fase} = \frac{\omega}{Re(k)}$ das ondas no plano $\omega \times v_{fase}$ ou da atenuação no plano $\omega \times Im(k)$.

Na legenda das figuras abaixo, em S_n e $P(1, 2)_n$, o índice n representa a porcentagem de poros presentes no meio. Por conveniência, vamos adotar as seguintes notações para os limites das velocidades de fase no modelo com densidade do constituinte sólido constante, que chamaremos de forma mais compacta por Modelo-1.

$$P1_0, P2_0, S_0 := \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega}{\text{Re}\{k(\omega)\}},$$

$$P1_\infty, P2_\infty, S_\infty := \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega}{\text{Re}\{k(\omega)\}}.$$

E pra os resultados obtidos em [3],

$$P1_0^w, P2_0^w, S_0^w := \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega}{\text{Re}\{k(\omega)\}},$$

$$P1_\infty^w, P2_\infty^w, S_\infty^w := \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega}{\text{Re}\{k(\omega)\}}.$$

Para a atenuação neste trabalho,

$$K1_0, K2_0, KS_0 := \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Im}\{k(\omega)\},$$

$$K1_\infty, K2_\infty, KS_\infty := \lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{Im}\{k(\omega)\},$$

e, para denotar os resultados em [3],

$$K1_0^w, K2_0^w, KS_0^w := \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Im}\{k(\omega)\},$$

$$K1_\infty^w, K2_\infty^w, KS_\infty^w := \lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{Im}\{k(\omega)\}.$$

Os resultados abaixo, Fig.1 - Fig.6, mostram a velocidade da fase e a atenuação das ondas $P1$, $P2$ e S para a porosidade assumindo os seguintes valores $\phi = \{20\%, 40\%, 60\%, 80\%\}$. A velocidade da fase e / ou a atenuação de algumas ondas apresentam mudanças nas posições quando as consideramos com outro valor para a porosidade, Fig. 2, Fig.3 e Fig.6. Esse comportamento também foi encontrado em [9], na qual a relação de dispersão foi gerada com a velocidade de fase versus frequência. Entretanto, ao invés da variação de porosidade, o trabalho em [9] considera a permeabilidade variando. Como a permeabilidade (ou resistividade) do meio está relacionada à porosidade, esperamos o mesmo tipo de resultados qualitativos para os gráficos de velocidade da fase e / ou atenuação.

Para gerar os gráficos de velocidade de fase e atenuação, variando os valores de porosidade do meio. É preciso adaptar a velocidade das ondas de propagação (tanto para as velocidades c_1 quanto para a velocidade c_s para o sólido elástico puro) utilizadas em [3], com porosidade $\phi = 0.4$. Essas velocidades adaptadas são utilizadas nas relações de dispersão em (26) e (32) para a determinação das onda longitudinais e transversais, respectivamente. Após a realização desses cálculos, obtemos os seguintes resultados:

$$c_1 = \frac{1,936}{\sqrt{1-\phi}} \text{ m/s}, \quad c_2 = 1,000 \text{ m/s},$$

$$c_s = \frac{1,162}{\sqrt{1-\phi}} \text{ m/s}.$$
(35)

Os gráficos foram gerados com auxílio do *Maple 13* com o conjunto de dados:

$$c_1 = \frac{1,936}{\sqrt{1-\phi}} \text{ m/s}, \quad c_2 = 1,000 \text{ m/s},$$

$$c_s = \frac{1,162}{\sqrt{1-\phi}} \text{ m/s}, \quad d_s = 4,167 \text{ kg/m}^3,$$

$$d_f = 650 \text{ kg/m}^3, \quad R = 10^{-8} \text{ kg/m}^3,$$
(36)

onde os parâmetros d_s e d_f são as densidades reais dos constituintes sólidos e fluidos, respectivamente.

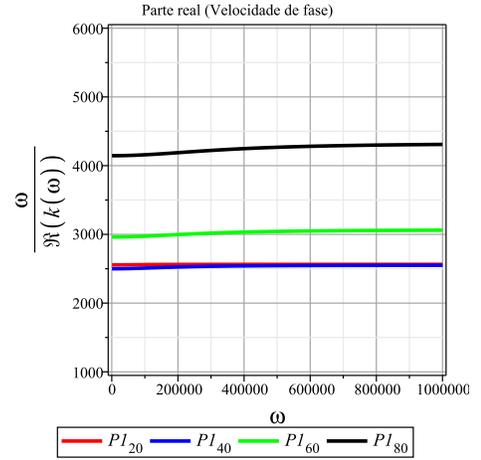


Figura 1. Velocidade de fase vs frequência da onda $P1$, variando a porosidade.

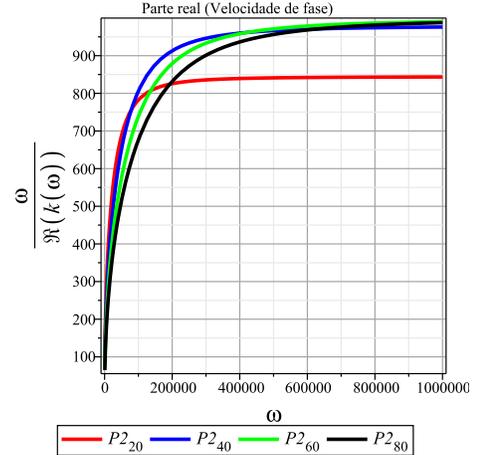


Figura 2. Velocidade de fase vs frequência da onda $P2$, variando a porosidade.

Os resultados numéricos abaixo foram gerados com os parâmetros de acoplamento $Q = 0.7 \text{ GPa}$ e tortuosidade $a = 1.75$, o que fornece uma porosidade $\phi = 0.4$, por meio da relação $\phi = \frac{1}{2a-1}$, extraído da teoria em [3]. O restante dos dados são os mesmos exibidos em (36).

O parâmetro material Q tem o significado de considerar o acoplamento entre as tensões parciais entre dos constituintes do meio. Este parâmetro fornece apenas alterações no comportamento quantitativo das ondas $P1$ e $P2$ como ressaltado em [3]. A tortuosidade é um parâmetro macroscópico relacionado à distribuição microestrutural da porosidade do meio. Esse parâmetro representa a resistência oferecida pelos poros da matriz sólida, devido ao caráter randômico, à velocidade do constituinte fluido.

Por conveniência, tomamos os resultados numéricos obtidos em [3] como dados reais para efeito de comparação. Essa

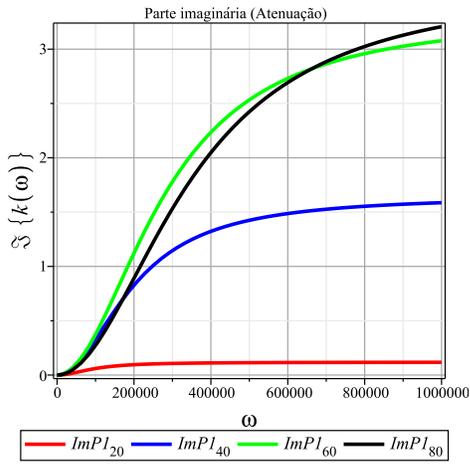


Figura 3. Atenuação vs frequência da onda $P1$, variando a porosidade.

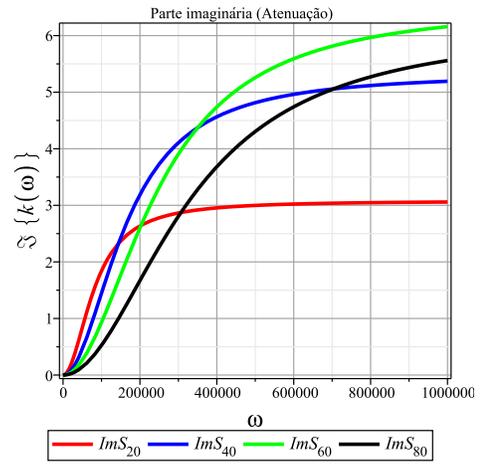


Figura 6. Atenuação vs frequência da onda S , variando a porosidade.

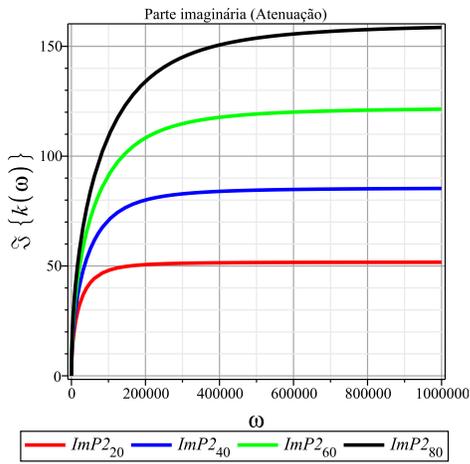


Figura 4. Atenuação vs frequência da onda $P2$, variando a porosidade.

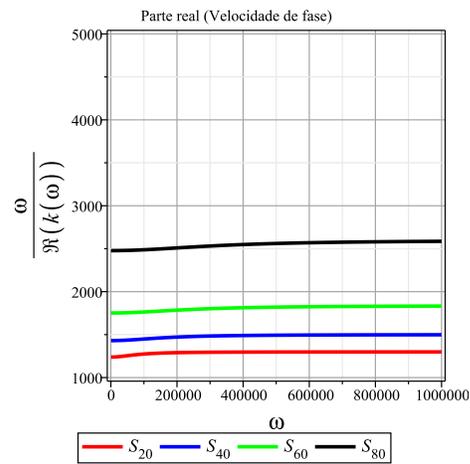


Figura 5. Velocidade de fase vs frequência da onda S variando a porosidade.

percentual.

Os valores das velocidades de onda $P1$ e S para baixas frequências ($\omega \rightarrow 0$) foram $P1_0 = 2,499$ m/s e $S_0 = 1,430$ m/s enquanto em comparação os resultados que foram encontrados em [3] têm os valores $P1_0^w = 2,505$ m/s e $S_0^w = 1,430$ m/s. As diferenças relativas em baixas frequências para ondas $P1$ e S para ambos os modelos foram, respectivamente, 0,25% e 0%. Enquanto para altas frequências as velocidades das onda $P1$, $P2$ e S alcançadas, foram $P1_\infty = 2,552$ m/s, $P1_\infty^w = 2,517$ m/s, $P2_\infty = 979$ m/s, $P2_\infty^w = 687$ m/s, $S_\infty = 1,500$ m/s e $S_\infty^w = 1,468$ m/s. As diferenças relativas, em altas frequências, entre os resultados para a onda $P1$, $P2$ e S entre os dois modelos, é de aproximadamente 1.35%, 42.5% e 2.12%, respectivamente.

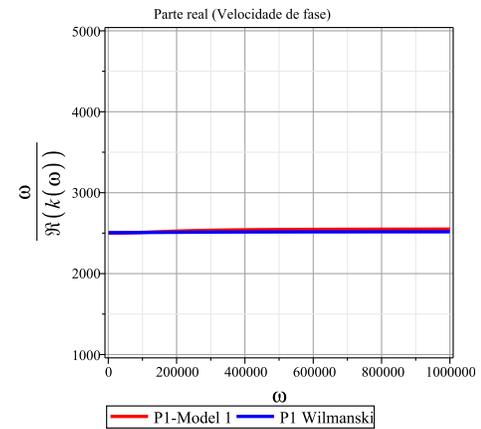


Figura 7. Velocidade de fase da onda $P1$ neste trabalho e o resultado de Wilmanski, ambos com porosidade, $\phi = 40\%$.

V. CONCLUSÕES

comparação será realizada por meio da diferença relativa

Os resultados obtidos através do modelo de ondas harmônicas planas com base na teoria de meios poroelásticos em

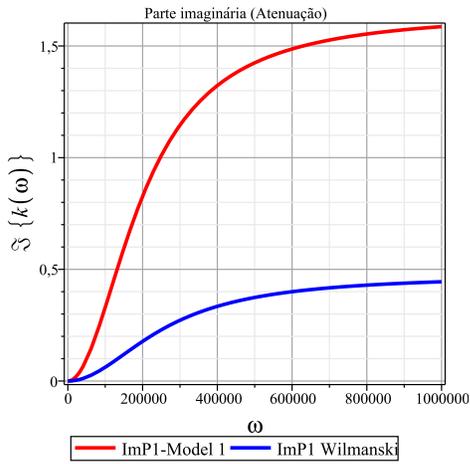


Figura 8. Atenuação da onda $P1$ neste trabalho e resultado obtido em Wilmanski, ambos com porosidade, $\phi = 40\%$.

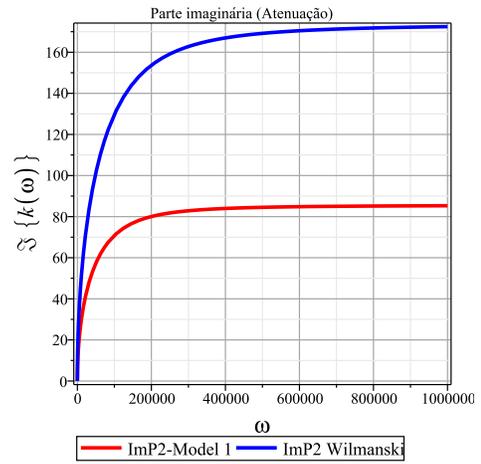


Figura 10. Atenuação da onda $P2$ neste trabalho e resultado obtido em Wilmanski, ambos com porosidade, $\phi = 40\%$.

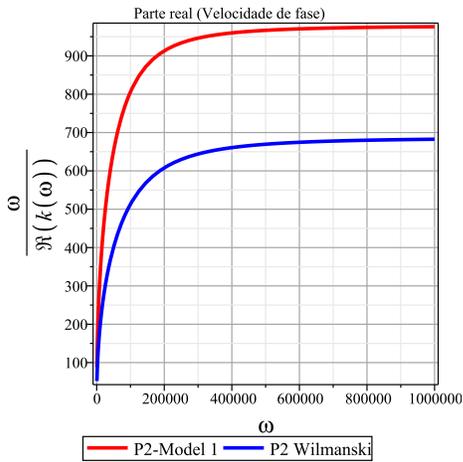


Figura 9. Velocidade de fase da onda $P2$ neste trabalho e o resultado de Wilmanski, ambos com porosidade, $\phi = 40\%$.

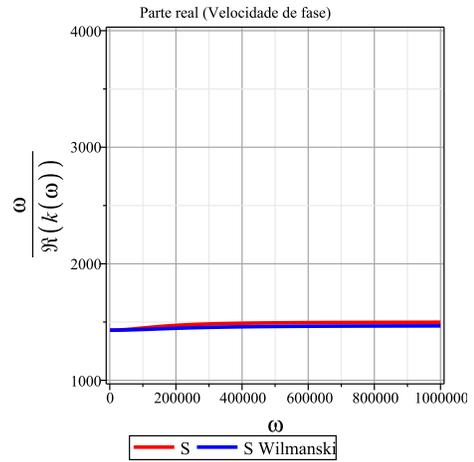


Figura 11. Velocidade de fase da onda S neste trabalho e o resultado de Wilmanski, ambos com porosidade, $\phi = 40\%$.

[7], possuem boa concordância qualitativa e, em alguns casos, quantitativa com os resultados de propagação de ondas acústica encontrados em [3]. Esses resultados mostram que as velocidades de fase da onda $P1$ possui velocidade de propagação superior a velocidade da onda $P2$ e, a atenuação sofrida pela onda $P2$ é muito mais forte do que a encontrada para a onda $P1$. Como apontado pela literatura, por exemplo em [3] ou em [4] e [5], a velocidade da onda $P2$ é em torno de 30% a 40% menor do que o valor alcançado pela velocidade da onda $P1$. Além disso, com essa análise ilustramos como a variação na porosidade do meio afeta quantitativamente a velocidade de fase e atenuação, mas não qualitativamente. Consideramos uma teoria em que o meio pode se encontrar homogeneamente deformado no estado de referência, que em geral é anisotrópico. Embora tenhamos considerado o meio em seu estado natural, indeformado (isotrópico), em nosso estudo numérico.

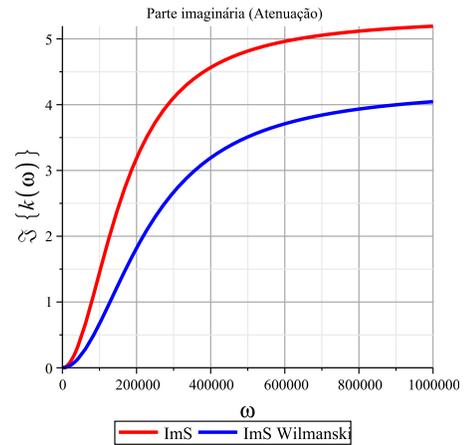


Figura 12. Atenuação da onda S neste trabalho e resultado obtido em Wilmanski, ambos com porosidade, $\phi = 40\%$.

Ressaltamos que um dos principais interesses nesses resultados é o de fornecer a existência de hidrocarbonetos nas armadilhas petrolíferas, onde são realizados experimentos *in situ* que consistem na leitura de dados obtidos através da reflexão de ondas acústicas em diferentes meios do qual o solo é composto. De acordo com a resposta dessas ondas, podemos classificar as camadas de rochas presentes na região as quais fornecem indícios sobre a presença de reservatórios.

AGRADECIMENTOS

Agradecimentos ao CENPES/BR, pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

- [1] Terzaghi, K. Theory of consolidation, *John Wiley and Sons*, pp. 265-296, Inc, 1943.
- [2] Terzaghi, K. Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage, Leipzig und Wien, Principle of soil mechanics, *Eng. News Record*, 1925.
- [3] Wilmanski, K., A few remarks on Biot's model and linear acoustics of poroelastic saturated materials, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 26(6), pp. 509-536, 2006.
- [4] Biot, M. A. General theory of three dimensional consolidation. *Journal of applied physics*, 12(2), pp. 155-164, 1941.
- [5] Biot, M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid In Low frequency range. *The Journal of the acoustical Society of america*, 28(2), pp. 168-178, 1956.
- [6] Plona, T. J. Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies. *Applied physics letters*, 36(4), pp. 259-261, 1980.
- [7] Liu, I-S. A Mixture Theory of Porous Media and Some Problems of Poroelasticity, In Continuous Media with Microstructure 2, *Springer International Publishing*, pp. 267-285, 2016.
- [8] Truesdell, C. Rational thermodynamics, *Springer*, cap. 4, pp. 171-219, 2012.
- [9] Wilmanski, K., and Albers, B.: Acoustic Waves in Porous Solid-Fluid Mixtures. Dynamic response of granular and porous materials under large and catastrophic deformations, 11, 285 (2003).