

IV Simpósio Paranaense de Modelagem, Simulação e Controle de Processos ISSN : 1984-7521	Artigo: 27
	Páginas: 197 - 204

ANÁLISE DE RESPOSTA A UM DEGRAU DE UM PROCESSO DE TIPO FOPDT PARA PID DE ORDEM INTEIRA E PARA CONTROLADOR DE ORDEM FRACIONÁRIA

Guilherme Koiti Tanaka Sasaki, Gabriel Filetti Martins, Cid Marcos G. Andrade*

1- Universidade Estadual de Maringá – UEM – PR, cidmga@yahoo.com.br

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma sucinta comparação qualitativa, com base nos gráficos de resposta de sistema controlados a um degrau, entre um controlador de ordem inteira pelo método de Ziegler-Nichols e duas formas de sintonia de controle fracionário: o método de Valério e de Padula. A semelhança entre todas estas regras de sintonia é a de que todas trabalham com a função transferência de primeira ordem com atraso (FOPDT).

Palavras-chave: Controlador de ordem fracionária, Cálculo fracionário, Sistemas de controle, Controlador PID convencional, feedback negativo.

1. Introdução

Dentre os controladores, o PID se apresenta como o tipo mais utilizado em indústrias [1]. De fato, em um levantamento feito em 1989 pela Associação de Fabricantes de Instrumentos de Medição Elétrica no Japão (JEMIMA), 90% dos controladores presentes em fábrica são do tipo PID [2]. Em outra pesquisa realizada em 2001, indicou que 90% dos controladores usados na indústria americana também eram PID [3].

Diante destes fatos, sempre querendo buscar formas de se aprimorar equipamentos para diminuir seu custo e otimizar suas funções, se chegou a obtenção do controlador fracionário, uma evolução do controlador convencional e que possuem também vários tipos, sendo que neste estudo será utilizado o $PI^\lambda D^\mu$, uma forma generalizada do controlador PID que além dos parâmetros também utilizados na ordem inteira (K_p , K_d e K_i), também utilizam dois parâmetros que variam a ordem do integrador e do diferenciador (λ e μ), sendo que estes novos parâmetros não precisam ser inteiros.

Neste artigo, para uma dada função transferência de modelo FOPDT, serão analisados os gráficos de resposta a uma variação degrau para um controlador PID de ordem inteira, com sintonia feita pelo método de Ziegler-Nichols, e para controlador fracionário, realizada pelas sintonias de métodos de Padula [5] e Valério [4]. Os gráficos de resposta serão analisados e comparados de forma qualitativa. O programa usado para cálculo será o MATLAB, com a toolbox FOMCON [6].

O trabalho tem a sua divisão feita de modo que na seção 2 será apresentada uma introdução teórica para melhor embasamento do artigo, na seção 3, estarão os resultados e discussão dos gráficos sendo por fim introduzida a seção 4 que apresentará a conclusão deste trabalho.

2. Introdução Teórica

Nesta seção serão apresentados alguns conceitos considerados relevantes para o embasamento do trabalho.

2.1. Controlador

O controlador de um sistema de controle em malha fechada vai ler a variável manipulada e atuará para tentar deixar a variável controlada no valor estipulado do Setpoint, cujo sinal de saída de um PID convencional é dado pela Eq. (1):

$$\frac{P(s)}{\varepsilon(s)} = K_p + K_d s + \frac{K_i}{s} \quad (1)$$

Os controladores PID foram usados vários anos na indústria para controle de processos, sendo que a principal razão pela sua ampla utilização se deve pela sua forma simples e boa performance. Um controlador do tipo PID fracionário é uma extensão do PID clássico e são menos sensíveis a mudanças de parâmetros de um sistema controlado e também de um controlador[8].

Uma equação diferencial para ordem fracionária em um sistema de controle pode ser expressada como a Eq. (2):

$$\begin{aligned} \frac{a_n d^{\alpha_n} y(t)}{dt^{\alpha_n}} + \frac{a_{n-1} d^{\alpha_{n-1}} y(t)}{dt^{\alpha_{n-1}}} + \dots + \frac{a_0 d^{\alpha_0} y(t)}{dt^{\alpha_0}} \\ = \frac{b_m d^{\beta_m} x(t)}{dt^{\beta_m}} + \frac{b_{m-1} d^{\beta_{m-1}} x(t)}{dt^{\beta_{m-1}}} + \dots + \frac{b_0 d^{\beta_0} x(t)}{dt^{\beta_0}} \end{aligned} \quad (2)$$

Em que $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_0 \geq 0$ e $\beta_m > \beta_{m-1} > \dots > \beta_0 \geq 0$ são constantes.

O controlador fracionário $PI^\lambda D^\mu$ pode atingir o amortecimento com maior facilidade [7]. Este controlador foi introduzido por Igor Podlubny em 1994 para um sistema de ordem fracionária.

Sua função transferência generalizada é indicado por:

$$C(s) = \frac{P(s)}{\varepsilon(s)} = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} + K_d s^\mu \quad (3)$$

Com λ e $\mu \geq 0$, onde $C(s)$ é a saída do controlador, $P(s)$ é o sinal do controlador e $\varepsilon(s)$ é o erro do sinal, K_p é a constante de ganho proporcional, K_i é a constante de ganho de integração, K_d a constante de ganho derivativo, λ é a ordem da integração e μ a ordem do diferenciador.

Os controladores PID são casos particulares do controlador fracionário, onde λ e μ são iguais a 1.

2.2. Cálculo Fracionário

Esta parte da matemática permite descrever um objeto ou um fenômeno de forma mais precisa que o método de ordem inteira. Existem diversas definições distintas para esta parte do cálculo. Serão apresentadas então as definições de Riemann-

Liouville, a de Caputo, que possuem grande semelhança entre si, e a Definição de Grunwald-Letnikov, que é um método baseado em diferenças finitas [9].

Seja $\beta > 0$ e n o menor número inteiro maior que β , assim a derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem β de uma função f é definida a seguir:

$$D^\beta f(t) = D^n [J^{n-\beta} f(t)] \quad (4)$$

e $D^\beta f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t)$, se $\beta = n$.

Para um caso geral, a integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem α , com $\alpha > 0$, é dada por:

$$(J^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad (5)$$

sendo Γ a função gama.

Para Caputo, para um valor $\beta > 0$, com n o menor inteiro maior que β , a derivada de ordem β de f é:

$$D_*^\beta f(x) = J^n [D^{n-\beta} f(x)], \quad (6)$$

Com

$$D_*^\beta f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s) ds}{(t-s)^{\beta+1-n}}, & n-1 < \beta < n \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \beta = n. \end{cases} \quad (7)$$

Outro método comum para o cálculo fracionário é conhecido como método de Grunwald-Letnikov, este método é definido como [7]:

$${}_a D_t^\alpha = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh) \quad (8)$$

Onde $\frac{t-a}{h}$ é a parte inteira e a e t são os limites do operador, n é o valor inteiro que satisfaz a condição $n-1 < \alpha < n$.

A parte binomial tem sua forma indicada abaixo:

$$\binom{n}{r} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-r+1)} \quad (9)$$

Este método é usado para o desenvolvimento numérico do cálculo fracionário.

2.3. Métodos de Sintonia

Os métodos de sintonia usados neste artigo são para funções transferência de processos que se encaixam no modelo de FOPDT, ou seja:

$$G(s) = \frac{K}{Ts+1} e^{-sL}$$

onde L é o atraso aparente, T a constante de tempo e K é o ganho da função transferência.

2.3.1. Ziegler-Nichols(Z-N) de malha aberta

O sistema é deixado em malha aberta, e executando uma perturbação degrau unitário no processo, seu gráfico deve ter o conhecido formato “S”. A partir deste gráfico, tiram-se dois dados, o tempo de subida T e o atraso L . Estes valores podem ser usados para calcular os parâmetros do controlador PID, conforme a tabela que segue:

Tabela 1 – Valores para se encontrar os parâmetros do PID pelo método de Z-N.

K_p	K_i	K_d
$\frac{1,2T}{KL}$	$\frac{K_p}{2L}$	$0,5K_pL$

2.3.2. Método de sintonia de Valério

Encontrados os valores de L e T [6], os conjunto de valores usados aqui são dados pela tabela a seguir, e deve ser lido, usando a tabela 2, conforme a Eq. (11):

Tabela 2: Parâmetros do segundo conjunto de regras para se usar quando $0,1 \leq \frac{T}{K} \leq 50$.

	K_p	K_i	λ	K_d	μ
1	-1,0574	0,6014	1,1851	0,8793	0,2778
L	24,5420	0,4025	-0,3464	-15,0846	-2,1522
$\frac{T}{K}$	0,3544	0,7921	-0,0492	-0,0771	0,0675
L^2	-46,7325	-0,4508	1,7317	28,0388	2,4387
$\left(\frac{T}{K}\right)^2$	-0,0021	0,0018	0,0006	0,0000	-0,0013
$\frac{TL}{K}$	-0,3106	-1,2050	0,0380	1,6711	0,0021

$$K_p = -1,0574 + 24,5420L + 0,3544\left(\frac{T}{K}\right) - 46,7325L^2 \dots$$

$$\dots - 0,0021\left(\frac{T}{K}\right)^2 - 0,3106\left(\frac{TL}{K}\right) \quad (11)$$

E assim por diante. Este conjunto de valores foi feito para $5 \leq \frac{T}{K} \leq 50 \wedge L \leq 0,5$. Apenas um conjunto de valores é necessário para se encontrar os parâmetros. Este conjunto foi elaborado sob as seguintes especificações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{cg} = 0,5rad/s \\ \varphi_m = 57^\circ \\ \omega_h = 10rad/s \\ \omega_l = 0,01rad/s \\ H = -20dB \\ N = -20dB \end{array} \right. \quad (12)$$

2.3.3. Método de Padula

Além dos valores de T e L já vistos, neste método é acrescentado uma nova variável, que representa a dificuldade em controlar o processo, que é:

$$\tau = \frac{L}{L + T} \quad (13)$$

O controlador fracionário neste caso é definido da seguinte forma:

$$C = K_p \frac{(T_i s^\lambda + 1)}{T_i s^\lambda} + \frac{(T_d s^\mu + 1)}{\left(\frac{T_d}{N}\right) s + 1} \quad (14)$$

Para este método, será usado o filtro de Oustaloup. O filtro é definido como uma aproximação baseada na distribuição recursiva de polos e zeros. Considere um intervalo adequado de frequências (ω_b, ω_h) , então o filtro pode ser definido como:

$$G_f(s) = s^q = K \prod_{k=-N}^N \frac{s + \omega'_k}{s + \omega_k}, \quad (15)$$

onde os polos, zeros e o ganho do filtro podem ser avaliados recursivamente, e são ilustrados a seguir:

$$\omega_k = \omega_b \left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{\frac{k+N+\frac{1}{2}(1+q)}{2N+1}}; \quad \omega'_k = \omega_b \left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{\frac{k+N+\frac{1}{2}(1-q)}{2N+1}}; \quad K = \omega_h^q, \quad (16, 17, 18)$$

em que q será a ordem da integral ou da derivada e $(2N + 1)$ é a ordem do filtro.

Esta regra de sintonia procura minimizar o IAE simultaneamente com a máxima sensibilidade M_s , indicados como se segue:

$$IAE = \int_0^\infty |e(t)| dt = \int_0^\infty |r(t) - y(t)| dt; \quad M_s = \max_{\omega \in [0, +\infty)} \frac{1}{1 + C(s)P(s)}, \quad (19, 20)$$

que representa a máxima distância do gráfico de Nyquist do ponto crítico $(-1, 0)$. E os parâmetros para este controlador ficam:

$$K_p = \frac{1}{K} (a\tau^b + c); \quad T_i = T^\lambda \left(a \left(\frac{L}{T}\right)^b + c \right); \quad T_d = T^\mu \left(a \left(\frac{L}{T}\right)^b + c \right) \quad (21, 22, 23)$$

Sendo que para cada um destes parâmetros, a , b e c tem diferentes valores, para um determinado tipo de controle. Aqui, será adotado $M_s = 1,4$ e com controle servo, cujos valores das variáveis se encontram nas tabelas 5, 6, 7 e 8.

Tabela 5 - Valores de a, b e c para K_p , considerando $M_s = 1,4$, com controle servo.

a	b	c
0,6503	-0,9166	-0,6741

Tabela 6 - Valores de a, b e c para T_i , considerando $M_s = 1,4$, com controle servo.

a	b	c
0,04701	-0,2611	0,9276

Tabela 7 - Valores de a, b e c para T_d , considerando $M_s = 1,4$, com controle servo.

a	b	c
0,3563	1,2	0,0003108

Tabela 8 – Valores de λ e μ , considerando $M_s = 1,4$, com controle servo.

λ	μ
1	1,1 se $\tau < 1$ 1,2 se $0,1 \leq \tau$

2.3.4. Matlab

Será utilizado também o MATLAB, um software voltado para o cálculo numérico, integrando o cálculo de matrizes, processamento de sinais e construção de gráficos, para o processamento de dados. E nele o cálculo será feito pelo auxílio do toolbox FOMCON [6], especializado em controle fracionário.

3. Resultados e Discussão

Seja a função transferência de segunda ordem de um processo dada pela Eq. (24):

$$G_p = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \quad (24)$$

E o sistema de controle baseado no diagrama de blocos tem a seguinte forma:

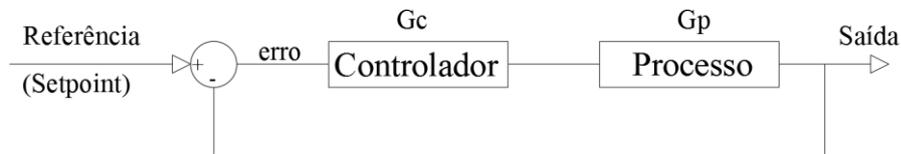


Figura 1: Diagrama de blocos do processo.

Primeiramente, deve-se aproximar esta função transferência para uma FOPDT, usando o modelo de redução de ordem de norma H2 sub-ótimo, descrito em [10], que terá a forma:

$$G_p = \frac{0,631}{s + 0,631} e^{-0,484s} \quad (25)$$

O gráfico de resposta a um degrau no setpoint do sistema, sob os controladores sintonizados pelos métodos descritos anteriormente, é dado pela figura 2:

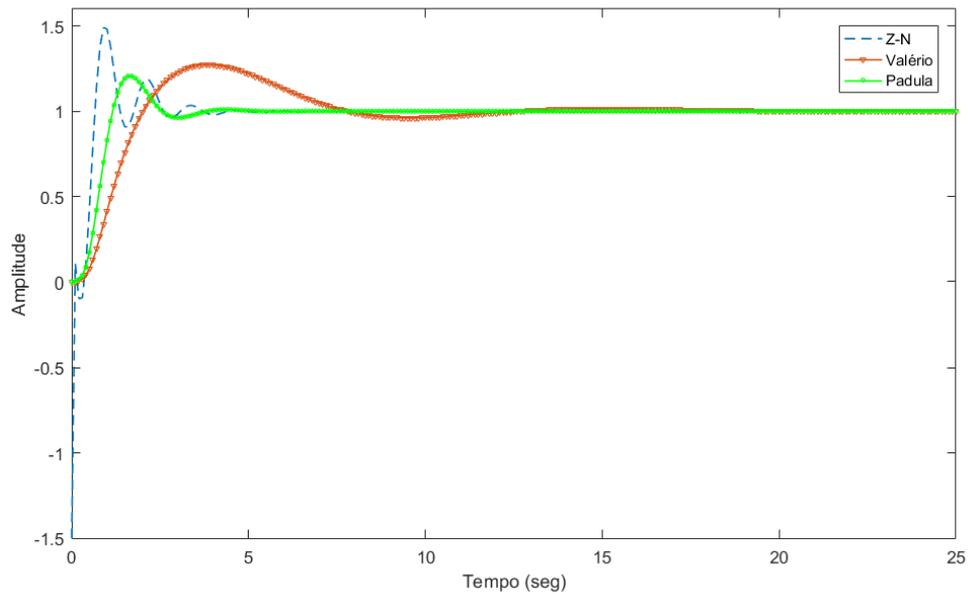


Figura 2: Gráfico de resposta a um degrau para vários tipos de controlador.

São observadas algumas imperfeições oscilatórias para a resposta de Ziegler-Nichols que podem ser explicadas pela aproximação de Padé, usada para aproximar o atraso em uma função racional na associação em feedback do sistema controlado. Deve-se notar que em comparação ao sistema controlado pelo método de Ziegler-Nichols, o método de Valério apresenta menor overshoot, e menor tempo de acomodação que o controlador de ordem inteira.

Finalmente, pelo método de Padula, a equação do controlador foi encontrado para os seguintes valores:

$$N = 3; \omega_b = 20 \text{ rad/s e } \omega_h = 30 \text{ rad/s;}$$

É perceptível que seu overshoot é o mais baixo dentre os três tipos de controle apresentado, e a estabilidade do sinal após a variação degrau é atingida rapidamente.

Também foi feito o cálculo do IAE e ISE de cada método, para validar o que foi inferido visualmente no gráfico, o que pode ser visto na tabela 9.

Tabela 9 – IAE e ISE dos métodos de controle utilizados.

Ziegler-Nichols		Valério		Padula	
IAE	ISE	IAE	ISE	IAE	ISE
3,1883	6,5100	2,5151	1,5494	1,6069	1,2334

4. Conclusão

Pelas curvas dos gráficos de resposta obtidos conclui-se, neste caso, que os controladores fracionários obtiveram melhor resposta a um degrau, porém nem sempre isto pode ser verdade, é possível que um controlador de ordem inteira tenha melhor eficácia do que um controlador fracionário. Ainda, percebe-se que o método de Padula obteve a melhor curva de resposta, com pouca oscilação e com valor de pico muito próximo da unidade, cujo gráfico de resposta ainda atinge rapidamente a estabilidade. Isto se prova pelos valores encontrados de IAE e ISE dados pela tabela 9.

5. Referências

- 1 K.J. Astrom. PID Controllers: Theory, Design and Tuning. 2; Instrument Society of America, 1995, 343;
- 2 S. Yamamoto; I. Hashimoto. Recent status and future needs: the view from Japanese industry; Proceedings of the fourth international conference on chemical process control, Texas, 1991, 1-28;
- 3 L. Desborough; R. Miller. Increasing customer value of industrial control performance monitoring – Honeywell's experience; Proceeding of 6th international conference chemical process control, Tucson, 2001, 172-192;
- 4 V. Duarte. Ziegler-Nichols Type Tuning Rules for Fractional PID Controllers. ASME, EUA, Califórnia, 2005, ResearchGate;
- 5 F. Padula; A. Visioli. Tuning rules for optimal PID and fractional-order PID controllers. Journal of Process Control 21, 2011; 69-81;
- 6 Tepljakov A.; Petlenkov E.; Belikov J. FOMCON: a MATLAB toolbox for fractional order system identification and control; ReserachGate, 2011
- 7 P. Shah; S. Agashe. Review of fractional PID controller. Mechatronics, 2016, 38, 29-41
- 8 Y. Chen; I. Petras; D. Xue. Fractional Order Control – A Tutorial; American Control Conference, 2009; USA.
- 9 J. P. C. Dos Santos, et al. Cálculo de Ordem Fracionária e Aplicações; Sigmae, vol. 1; n. 1; p.18-32; Alfenas; 2012.
- 10 C. A. Monje et. al. Fractional-order Systems and Controls – Fundamentals and Applications, Springer-Verlag, London, 2010.