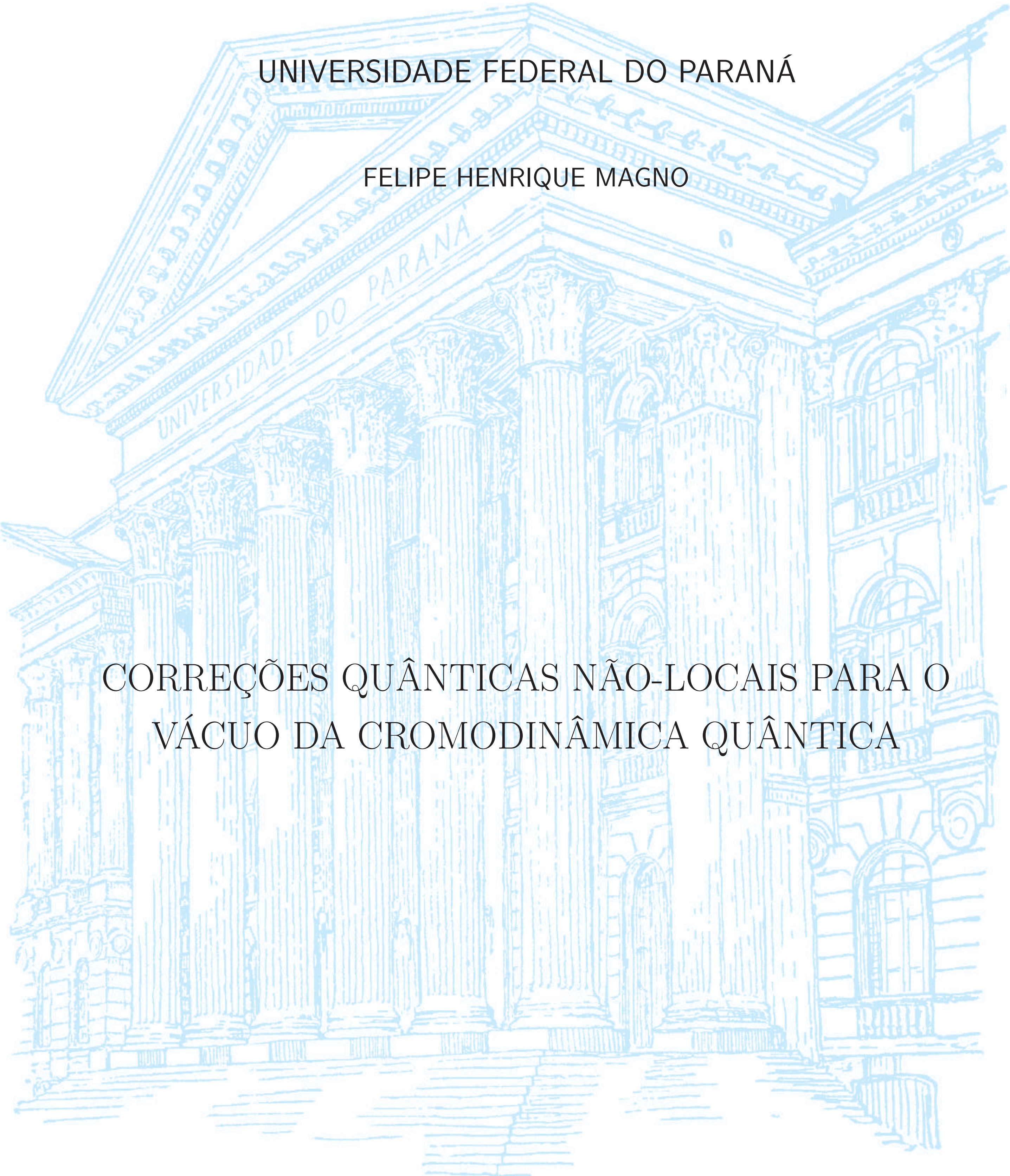

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

FELIPE HENRIQUE MAGNO

CORREÇÕES QUÂNTICAS NÃO-LOCAIS PARA O VÁCUO DA CROMODINÂMICA QUÂNTICA

CURITIBA - PR, BRASIL

2024

FELIPE HENRIQUE MAGNO

CORREÇÕES QUÂNTICAS NÃO-LOCAIS PARA O VÁCUO DA CROMODINÂMICA QUÂNTICA

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Iberê O. Kuntz de Souza

CURITIBA - PR, BRASIL

2024

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Magno, Felipe Henrique
Correções quânticas não-locais para o vácuo da cromodinâmica quântica / Felipe Henrique Magno. – Curitiba, 2024.
1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física.

Orientador: Iberê Oliveira Kuntz de Souza

1. Cromodinâmica quântica. 2. Instantons. 3. Feynman, Integrais de. 4. Glúons. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Souza, Iberê Oliveira Kuntz de. IV. Título.

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **FELIPE HENRIQUE MAGNO** intitulada: **"Correções quânticas não-locais para o vácuo da Cromodinâmica Quântica" .**, sob orientação do Prof. Dr. IBERE OLIVEIRA KUNTZ DE SOUZA, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 14 de Agosto de 2024.

Assinatura Eletrônica
15/08/2024 09:40:12.0
IBERE OLIVEIRA KUNTZ DE SOUZA
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
15/08/2024 10:38:26.0
CÉSAR AUGUSTO DARTORA
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
15/08/2024 10:02:34.0
MARCUS WERNER BEIMS
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Eliane e Marcos. Por seu sacrifício e afeição. Espero um dia poder orgulhá-los.

Ao meu orientador, professor Iberê. Pelo zelo, por sua paciência e, para além de tudo, pela oportunidade.

Ao meu trio, Amanda, Gabriel e Vitor. Por formarem o QFTs (e agregado). À Amanda, por me avisar do “novo professor”. Ao Gabriel, pelas extensas horas de correções de contas e pela renascença das cruzadas! E, ao Vitor, por pelo menos ser um bom vizinho.

Ao meu calouro-ancião, Cictor. Por sua mais infinita, do que seus próprios infinitos, tolerância. Por sua amizade. E, principalmente, por sua raridade no ambiente acadêmico. Invejo seus futuros alunos pelo excelente professor que eles terão!

Aos frequentadores das infames 116 e 113. Barbara, João, Matheus, Guido, Paulo, Thiago, Valéria, Henrique, Pedro, Vitorino, Thayná e Ed. Por, mesmo sem buscar, encontrar amigos.

À minha amiga, Delane, a quem apreço não é suficiente. Espero um dia voltar a conviver contigo, você fez falta aqui em Curitiba.

Aos meus amigos de longa data, Aline, Fabieli e Alex. Pela benquerença, por sua enorme generosidade e, principalmente, pela convivência durante estes anos. Que nossa amizade perdure!

“It is remarkable, Hardin, how the religion of science has grabbed hold.”

Foundation
Isaac Asimov

RESUMO

Neste estudo, detalhamos os procedimentos para calcular o propagador dos glúons em um campo de fundo genérico. Este propagador incorpora uma correção quântica de um laço, abrangendo todos os fenômenos físicos que ocorrem linearmente em $\hbar$. A forma específica do termo de correção de um laço advém do formalismo não-local, o qual emprega termos não-polinomiais, na construção da ação efetiva em teorias de campo. A introdução desse propagador vestido com as correções traz novos graus de liberdade à teoria e nos possibilita explorar problemas ainda não entendidos dentro do contexto da teoria quântica de campos. Neste estudo em particular, discutimos sobre o estado atual do regime não perturbativo da cromodinâmica quântica, com ênfase na análise do vácuo da teoria e na abordagem proposta através do uso de *instantons* como uma solução viável. Em última instância, nosso objetivo é calcular o propagador na presença de *instantons*. Tal resultado pode revelar graus de liberdade não perturbativos e fornecer noções sobre o problema da massa em cromodinâmica quântica.

Palavras-chaves: Cromodinâmica quântica. *Instantons*. Integral de caminho de Feynman. Propagador vestido. Ação efetiva.

ABSTRACT

In this study, we detail the procedures to calculate the gluon propagator in a generic background field. This propagator incorporates a one-loop quantum correction, covering all physical phenomena that occur linearly in $\hbar$. The specific form of the correction term for a loop comes from non-local formalism, which uses non-polynomial terms in the formulation of effective action in field theories. The introduction of this propagator dressed with corrections brings new degrees of freedom to the theory and allows us to explore problems not yet understood within the context of quantum field theory. In this particular study, we discuss the current state of the non-perturbative regime of quantum chromodynamics, with an emphasis on analyzing the vacuum of the theory and the proposed approach through the use of *instantons* as a viable solution. Ultimately, our goal is to calculate the propagator in the presence of *instantons*. Such a result can reveal non-perturbative degrees of freedom and provide insights into the mass problem in quantum chromodynamics.

Keywords: Quantum chromodynamics. Instantons. Feynman path integral. Dressed propagator. Effective action.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO . . . 8

2 QUANTIZAÇÃO FUNCIONAL E A AÇÃO EFETIVA . . . 11
2.1 Integral de caminho em mecânica quântica . . . 11
2.1.1 Ordenamento temporal de operadores . . . 15
2.1.2 Funcional gerador . . . 16
2.2 Integral de caminho em teoria quântica de campos . . . 17
2.2.1 Teoria escalar livre . . . 18
2.3 Ação efetiva . . . 22
2.4 Ação efetiva não-local . . . 26

3 REPRESENTAÇÃO DE KÄLLÉN-LEHMANN . . . 28
3.1 Propagador exato . . . 28
3.2 Correções de laço ao propagador . . . 31

4 TEORIAS DE YANG-MILLS . . . 33
4.1 Grupos de Lie . . . 33
4.2 Teorias de *gauge* . . . 36
4.3 Cromodinâmica quântica . . . 39
4.4 Propagador livre dos glúons: primeira parte . . . 41
4.5 A condição de fixação de *gauge* . . . 42
4.6 Propagador livre dos glúons: segunda parte . . . 45

5 SOLUÇÃO DE *INSTANTONS* PARA O VÁCUO DA CDQ . . . 48
5.1 *Instantons* em mecânica quântica . . . 48
5.2 Poço simétrico duplo . . . 53
5.3 *Instantons* em Yang-Mills . . . 56

6 PROPAGADOR VESTIDO . . . 60
6.1 Ação efetiva para os glúons . . . 60
6.2 Propagador vestido: caso com campo de fundo nulo . . . 65
6.3 Propagador vestido: campo de fundo de *instantons* . . . 69

7 CONCLUSÕES . . . 73

Referências . . . 74

APÊNDICE A – INTEGRAL GAUSSIANA 79

1 Introdução

Com a emergência da teoria de *gauge* como a estrutura básica na descrição das interações eletromagnética, fraca e forte, construiu-se o que hoje conhecemos como modelo padrão de física de partículas. Uma verdadeira enciclopédia de física contemporânea foi estabelecida, contendo as propriedades intrínsecas exibidas pelas partículas elementares que compõem a matéria ordinária e que regem suas interações, bem como as linhas de pesquisas fronteiriças com seus desenvolvimentos recentes e desafios persistentes [1].

A teoria quântica de campos (TQC), baseada na teoria de *gauge*, foi o estopim que norteou o progresso do nosso entendimento acerca das interações fundamentais ao articular as ideias e ferramentas advindas de três pilares da física moderna: mecânica quântica, teoria da relatividade restrita e o conceito de campos clássicos. Sua capacidade de síntese e tratamento matemático tornou possível fundamentar a física de partículas elementares e fornecer técnicas essenciais para a física nuclear [2], física da matéria condensada [3, 4] e, até mesmo, astrofísica [5] e gravitação [6].

Apesar do intenso progresso da TQC nas últimas décadas, ela ainda falha em abranger a pluralidade de fenômenos físicos existentes. Por exemplo, o tratamento gravitacional no contexto de TQC ainda é uma questão em aberto, e grande parte das abordagens atuais permanecem especulativas. Sem pormenorizar, é possível afirmar que a construção de uma teoria de *gauge* mais acurada e abrangente, capaz de descrever uma ampla gama de fenômenos das interações fundamentais, enfrenta um desafio significativo devido à abundância de simetrias nos modelos. No entanto, na natureza verificamos que diversas simetrias são quebradas. Como exemplo, o fato de não encontrarmos anti-partículas no cotidiano indica um desequilíbrio no número de partículas e anti-partículas existentes. Isto se refere à quebra de alguma simetria e, neste caso, a denominamos como Violação de CP (carga-paridade) [7].

Neste estudo, abordamos um problema decorrente da quebra de simetria quiral [8], um processo fundamental para a geração das massas das partículas não-elementares, como os núcleons. A necessidade de um mecanismo específico para as partículas não-elementares torna-se evidente ao investigarmos as massas das partículas elementares, como quarks, léptons e bósons, cujas massas são explicadas pelo mecanismo de Higgs [9] e pelo potencial de Yukawa [10]. Observa-se que as massas das partículas elementares não se somam de maneira trivial quando se combinam em estados ligados, resultando em uma diferença significativa na massa das partículas não-elementares. Essa discrepância é evidenciada na Tabela 1, onde apresentamos as massas dos núcleons e das partículas elementares associadas à sua composição

Partículas	Massa (Mev)
Quark up	2
Quark down	4
Próton	938
Nêutron	940

Tabela 1 – Massa das partículas elementares e não-elementares. Retirado de [1].

Essas questões refletem diretamente as limitações do nosso conhecimento sobre a Cromodinâmica Quântica (CDQ) [11]. A CDQ é a teoria que descreve a força forte por meio de uma teoria de Yang-Mills [12], que é uma teoria de *gauge* baseada em um grupo unitário especial $SU(3)$. Embora a CDQ seja amplamente entendida e experimentalmente testada no limite de altas energias [13–15], a sua estrutura de vácuo ainda é tópico de muita discussão [16–23], visto que a maior parte do ferramental desenvolvido não pode ser aplicado no regime de baixas energias, devido à sua complexa dependência com a constante de acoplamento associada.

Uma teoria que obteve destaque, e moderado sucesso, na explicação da estrutura do vácuo da CDQ, isto é, seu estado de miníma energia, está diretamente relacionada a um fenômeno quântico de grande relevância: a capacidade de tunelamento entre estados. Esta solução de movimento ficou conhecida na literatura como *instantons* [23].

Neste cenário de dúvidas e investigações persistentes em TQC, abordagens além do Modelo Padrão têm se tornado cada vez mais proeminentes. As propostas são diversas e abrangem desde extensões para mais dimensões [24], modelos supersimétricos [25–27] e teoria de cordas [28, 29]. Por outro lado, métodos alternativos a essas abordagens, muitas vezes controversas, têm se destacado, como as ações efetivas em TQC. Essas ações são funcionais que encapsulam todas as informações sobre um sistema quântico em ordens de $\hbar$, focando exclusivamente no processo de quantização funcional dos campos. Em essência, a ação efetiva é uma modificação da ação clássica que incorpora correções quânticas, garantindo a preservação do princípio da ação mínima.

Embora as correções quânticas não sejam um assunto recente em TQC [30–32], hoje possuímos uma abordagem dada pelo formalismo de Barvinsky e Vilkovisky [33–39] que explora uma combinação de métodos funcionais na construção da ação efetiva. Cientes de que o cálculo exato dos efeitos quânticos é impossível, os autores obtiveram sucesso na construção da ação efetiva em diferentes regimes de aproximação.

Com isto posto, neste trabalho nos propomos a estudar correções ao propagador, ou função de correlação, das partículas mediadoras da força forte, os glúons, utilizando o formalismo da ação efetiva para obter o que é conhecido na literatura como um propagador vestido. Nosso objetivo final é calcular este propagador na presença de *instantons*, estabelecendo uma conexão entre o propagador vestido genérico e a estrutura de vácuo da

CDQ. Esperamos que a inclusão de novos termos à ação clássica revele graus de liberdade não perturbativos e, dessa forma, esclareça aspectos do problema da massa na CDQ.

Para a discussão deste trabalho, organizamos o texto em uma sequência de capítulos em que abordaremos os tópicos essenciais que serão pertinentes à determinação do propagador vestido para os glúons, bem como a análise do espectro da teoria. Ao longo de todo o texto, adotaremos o sistema de unidades naturais, comumente utilizado em TQC, em que $\hbar = c = 1$, salvo casos em que a presença de $\hbar$ se faça necessária. Como consequência, temos que [comprimento] = [tempo] = $[\text{energia}]^{-1}$ = $[\text{massa}]^{-1}$. Nossa convenção para o tensor métrico é dada por $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Além disso, definimos que integrais sem limite explícito devem ser entendidas como integrais ao longo de todo o espaço-tempo. Por fim, empregaremos também a convenção de Einstein, na qual índices repetidos implicam na soma sobre os mesmos

$$a_i b^i = \sum_{i=0}^{n} a_i b^i = a_0 b^0 + a_1 b^1 + \cdots + a_n b^n. \tag{1.1}$$

No Capítulo 2, forneceremos uma introdução ao formalismo funcional. Iniciaremos nossa discussão no contexto de mecânica quântica, definindo todos os funcionais de interesse e o seu cômputo visando realizar uma transição suave para o contexto de TQC. Ainda neste capítulo apresentaremos a forma geral da ação efetiva que empregaremos neste estudo.

No Capítulo 3, apresentaremos um formalismo para a obtenção de propagadores interagentes acoplados com correções quânticas e definiremos um objeto que nos fornecerá acesso ao espectro da teoria, a função de densidade espectral.

Na sequência, introduziremos no Capítulo 4 as bases para a construção das Lagrangianas de teorias de campo com simetrias locais, isto é, a álgebra de Lie e teorias de *gauge*. Discutiremos um setor das teorias de *gauge*, a teoria de Yang-Mills, na qual focaremos no grupo $SU(3)$, responsável pela descrição da CDQ e utilizado para representar a força forte.

Discutiremos no Capítulo 5 a maneira que se obtêm a solução de *instantons*, isto é, uma das teoria que buscam descrever a estrutura de vácuo da CDQ. Permearemos, mais uma vez, no contexto de mecânica quântica antes de retomarmos a discussão para o âmbito de TQC.

O cerne deste trabalho se encontra no Capítulo 6, em que apresentaremos o desenvolvimento matemático necessário para determinar o propagador dos glúons vestido com as interações dos *instantons*. Nosso objetivo culmina na tentativa de obter a função de densidade espectral associada às interações, em última instância, com *instantons*.

Por fim, comentaremos acerca de nossas conclusões no Capítulo 7.

2 Quantização funcional e a ação efetiva

Tradicionalmente, a TQC é abordada por meio de dois formalismos: a quantização canônica e as integrais de caminho. Embora a quantização canônica ofereça uma abordagem familiar para aqueles já versados na mecânica quântica, o método de integrais de caminho apresenta vantagens significativas. Em primeiro lugar, este método permite a utilização de Lagrangianas, em vez de Hamiltonianas. Embora a distinção entre esses formalismos não seja particularmente relevante na mecânica quântica, na física de partículas o formalismo Lagrangiano é preferível por ser explicitamente covariante. Em segundo lugar, a integral de caminho possibilita a quantização de sistemas ao somar sobre todas as possíveis configurações, ao invés de utilizar relações de comutação entre operadores. Esta abordagem é especialmente valiosa para o tratamento de Lagrangianas complexas.

Assim, neste trabalho, nosso foco será predominantemente nos métodos de integração funcionais para a determinação dos objetos matemáticos de interesse. Neste capítulo, em particular, nos dedicaremos ao desenvolvimento dos conceitos fundamentais para a física de partículas, iniciando com a construção do formalismo funcional ainda no contexto da mecânica quântica e, posteriormente, expandindo para a TQC.

2.1 Integral de caminho em mecânica quântica

Se considerarmos um sistema quântico não-relativístico com somente um grau de liberdade, os autoestados do operador posição $\hat{x}$ podem ser introduzidos no espaço de Hilbert, mediante a representação de Heisenberg ou de Schrödinger [40]:

$$\begin{array}{rl} \hat{x}(t)\,|x,t\rangle = x\,|x,t\rangle & \qquad \text{(Representação de Heisenberg)} \\ \hat{x}\,|x\rangle = x\,|x\rangle & \qquad \text{(Representação de Schrödinger)} \end{array}, \tag{2.1}$$

em que t representa o parâmetro temporal. Na representação de Heisenberg os autoestados são dependentes do tempo, contudo a interposição entre ambos os formalismos se dá através da evolução temporal de $|x\rangle$. Esta é construída através da seguinte relação [41]:

$$|x\rangle = e^{-i\hat{H}t}\,|x,t\rangle\,, \tag{2.2}$$

sendo $\hat{H}$ o operador Hamiltoniano que descreve o sistema.

Um dos casos que podemos estudar, descreve somente uma partícula com energia cinética sujeita a um potencial $V(x)$ genérico independente do tempo. Neste caso, o Hamiltoniano assume a seguinte expressão

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{k}^2}{2m} + V(\hat{x}), \tag{2.3}$$

na qual os operadores de posição $\hat{x}$ e momento linear $\hat{k}$, respeitam a relação de comutação

$$\left[\hat{x}, \hat{k}\right] = i. \tag{2.4}$$

Um tópico de interesse em ambos os formalismos são as transições de um autoestado inicial $|x_i\rangle$ em um tempo t_i, para um autoestado final $|x_f\rangle$ no tempo t_f. Tal fenômeno é descrito através da representação dos elementos de matrizes, isto é, da projeção

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i\rangle = \langle x_f| e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} |x_i\rangle \,. \tag{2.5}$$

Uma forma alternativa de manejar estes elementos de matriz surge ao particionarmos o intervalo temporal em n valores infinitesimais δt, de forma que o tempo total seja expresso por

$$t_f = t_i + n\delta t. \tag{2.6}$$

Além disso, podemos fazer uso de $(n-1)$ relações de completeza dos autoestados de posição

$$\int dx_j \, |x_j\rangle \langle x_j| = \mathbb{1}, \tag{2.7}$$

para reescrever a Eq. (2.5) da seguinte forma:

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i\rangle = \int \prod_{j=1}^{n-1} dx_j \, \langle x_f| e^{-i\hat{H}\delta t} |x_{n-1}\rangle \langle x_{n-1}| e^{-i\hat{H}\delta t} |x_{n-2}\rangle \ldots \langle x_1| e^{-i\hat{H}\delta t} |x_i\rangle \,. \tag{2.8}$$

Para explicitarmos a forma de $\hat{H}$, devemos nos atentar ao fato de que $\hat{x}$ e $\hat{k}$ não comutam. Sendo assim, devemos utilizar a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff [42, 43]:

$$e^{\delta t(A+B)} = e^{\delta t A} e^{\delta t B} e^{-\frac{1}{2}(\delta t)^2 [A,B] + \mathcal{O}[(\delta t)^3]} + \cdots \tag{2.9}$$

No entanto, $\hat{x}$ e $\hat{k}$ comutam com o seu comutador, e portanto, termos de ordem cúbica são nulos e geram uma expressão fechada. E ainda, como estamos interessados no limite $\delta t \to 0$, ou seja, $n \to \infty$, podemos negligenciar o fator de $(\delta t)^2$. Cada elemento de matriz pode, então, ser resolvido ao empregarmos novamente a relação de completeza, mas desta vez referente aos autoestados de momento

$$\int \frac{dk}{2\pi} \, |k\rangle \langle k| = \mathbb{1}. \tag{2.10}$$

Desta forma, separando os termos do Hamiltoniano de acordo com a Eq. (2.9), obtemos

$$\langle x_{j+1}| e^{-i\hat{H}\delta t} |x_j\rangle = \int \frac{dk_j}{2\pi} \langle x_{j+1}| e^{-i\delta t \frac{\hat{k}^2}{2m}} |k_j\rangle \langle k_j| e^{-iV(\hat{x})\delta t} |x_j\rangle \,, \tag{2.11}$$

e atuando os operadores em suas respectivas bases, obtemos:

$$\langle x_{j+1}| e^{-i\hat{H}\delta t} |x_j\rangle = \int \frac{dk_j}{2\pi} \, e^{-i\delta t \frac{k_j^2}{2m}} e^{-i\delta t V(x_j)} \langle x_{j+1}|k_j\rangle \langle k_j|x_j\rangle \,. \tag{2.12}$$

Nos deparamos com o produto interno $\langle x|k\rangle$, cuja solução é dada por uma onda plana

$$\langle x|k\rangle = e^{ikx}. \tag{2.13}$$

Desta forma, a projeção, dada pela Eq. (2.12), se torna:

$$\langle x_{j+1}|\, e^{-i\hat{H}\delta t}\, |x_j\rangle = \int \frac{dk_j}{2\pi} e^{i\delta t[H - ik_j\dot{x}_j]}, \tag{2.14}$$

sendo que, no lado direito da igualdade, todos os objetos representam apenas funções e não mais operadores. Definimos também que

$$\dot{x}_j \equiv \frac{x_{j+1} - x_j}{\delta t}. \tag{2.15}$$

Finalmente, podemos retornar à Eq. (2.8), tomar o limite $n \to \infty$ e escrever a amplitude de transição como uma integral funcional, também chamada de integral de caminho de Feynman [44]:

$$\langle x_f|\, e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)}\, |x_i\rangle = \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}k(t)\mathcal{D}x(t)\, e^{i\int_{t_i}^{t_f} dt\left[k(t)\dot{x}(t) - H(k(t),x(t))\right]}, \tag{2.16}$$

em que definimos a medida funcional como:

$$\mathcal{D}k(t)\mathcal{D}x(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{dk_i}{2\pi} \prod_{j=1}^{n-1} dx_j. \tag{2.17}$$

Embora existam várias definições rigorosas de integração em espaços de dimensão infinita, estas não podem ser usadas para tornar a integral de caminho de Feynman uma entidade matemática rigorosamente definida com valores finitos. No entanto, é importante destacar que a medida funcional $\mathcal{D}k(t)\mathcal{D}x(t)$, ainda que não seja bem definida matematicamente, nos permite manipulações funcionais de interesse. Devemos também salientar que o lado direito da Eq. (2.16) nos fornece uma teoria quântica que depende somente da função Hamiltoniana e, portanto, de grandezas físicas que comutam entre si.

Em vista disto, se utilizarmos a forma do Hamiltoniano fornecida pela Eq. (2.3) na Eq. (2.16), obtemos uma integral Gaussiana unidimensional. Afinal, temos uma função quadrática no momento, do tipo

$$I = \int dk\; e^{-\frac{1}{2}ak^2 + Jk}, \tag{2.18}$$

que tem como resultado, conforme demonstração no Apêndice A, a seguinte expressão:

$$I = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{\frac{J^2}{2a}}. \tag{2.19}$$

Para integrais com mais de uma dimensão, é necessário generalizar a função para os diversos k_i que podem, a princípio, ser complexos. Sendo assim, definimos

$$k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \quad , \tag{2.20}$$

e então, generalizamos o termo quadrático como

$$k_i^* a_{ij} k_j = k^\dagger \mathbf{A} k, \tag{2.21}$$

com $\mathbf{A}$ representando uma matriz. Diagonalizando a matriz $\mathbf{A}$, a integral se torna somente um produto de integrais sobre os k_i, os quais possuem o mesmo resultado da integral unidimensional calculada na Eq. (2.19).

Entretanto, devemos ficar atentos a um detalhe importante. Como estamos tratando de uma matriz diagonal, o fator a agora corresponde a um autovalor da matriz $\mathbf{A}$. Contudo, estamos realizando o produto sobre todos os autovalores de uma matriz diagonal e isto corresponde ao determinante de $\mathbf{A}$. Temos então que

$$\int dk\, e^{-\frac{1}{2}k^\dagger \mathbf{A} k + J^\dagger k} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det \mathbf{A}}} e^{\frac{1}{2} J^\dagger \mathbf{A}^{-1} J}, \tag{2.22}$$

sendo n a dimensão de k.

Retornando à Eq. (2.16), verificamos que a integração no momento é

$$\int \mathcal{D}k\, e^{i\delta t\left[k\dot{x} - \frac{k^2}{2m}\right]}. \tag{2.23}$$

Portanto, se observamos que $a = i\frac{\delta t}{m}$ e $J = i\dot{x}\delta t$, chegamos em:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}k\, e^{i\delta t\left[k\dot{x} - \frac{k^2}{2m}\right]} &= \sqrt{\frac{2\pi m}{i\delta t}} e^{\frac{m(i\dot{x}\delta t)^2}{2i\delta t}} \\ &= e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi m}{\delta t}} e^{i\delta t \frac{m\dot{x}^2}{2}}, \end{aligned} \tag{2.24}$$

em que na segunda linha utilizamos a representação polar de $\sqrt{-i}$.

Tendo em vista que os fatores constantes são independentes de $x(t)$, estes podem ser absorvidos pela medida funcional $\mathcal{D}x(t)$. Desta forma, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle &= \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}x(t)\, e^{i\int_{t_i}^{t_f} dt\left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x)\right]} \\ &= \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}x(t)\, e^{i\int_{t_i}^{t_f} dt\, L(x,\dot{x})} \\ &= \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}x(t)\, e^{iS[x]}, \end{aligned} \tag{2.25}$$

sendo que na segunda linha, identificamos que o integrando no expoente é a Lagrangiana do sistema

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x} - V(x), \tag{2.26}$$

e na terceira linha, definimos $S[x]$ como a ação clássica correspondente, isto é:

$$S[x] = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(x, \dot{x}). \tag{2.27}$$

A Eq. (2.25) representa o que hoje denominamos de integral de Feynmann, ou simplesmente de integral de caminho. Esta formulação funcional é uma descrição na mecânica quântica que generaliza o princípio da ação estacionária da mecânica clássica, substituindo a noção clássica de uma trajetória única e bem definida para um sistema dado por uma soma, ou integral funcional, sobre uma infinidade de trajetórias possíveis para calcular uma amplitude de transição. A ideia básica da formulação por integral de caminho remonta a integral de Wiener que propôs resolver problemas de difusão e movimento browniano [45]. Essa ideia foi estendida para com o uso da Lagrangiana na mecânica quântica através da conjectura de Dirac, cujo artigo de 1933 deu origem à formulação por integral de caminho [46]. O método completo foi desenvolvido posteriormente por Richard Feynman [44].

2.1.1 Ordenamento temporal de operadores

Uma pergunta a ser feita é: como o valor esperado é representado no formalismo funcional? Para explorar essa questão, consideraremos a inserção de um fator $x(t)$ na integral de caminhos, em que $t_i \leq t \leq t_f$,

$$\int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}x(t)\, x(t)\, e^{iS[x]}. \tag{2.28}$$

Associamos ao parâmetro intermediário t um valor genérico $\bar{x}$ e assim, podemos separar a integração e reescrevê-la como

$$\int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}x(t) = \int d\bar{x} \int_{x_i}^{\bar{x}} \mathcal{D}x(t) \int_{\bar{x}}^{x_f} \mathcal{D}x(t), \tag{2.29}$$

a ação também pode ser dividida entre os intervalos de integração, resultando em:

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}x(t)\, x(t)\, e^{iS[x]} = \int d\bar{x} \left(\int_{x_i}^{\bar{x}} \mathcal{D}x(t) e^{i\int_{t_i}^{t} dt\, L} \right) \bar{x} \\ \times \left(\int_{\bar{x}}^{x_f} \mathcal{D}x(t)\, e^{i\int_{t}^{t_f} dt\, L} \right).\end{aligned} \tag{2.30}$$

Contudo, os termos entre parenteses são apenas os produtos internos $\langle \bar{x}, t | x_i, t_i \rangle$ e $\langle x_f, t_f | \bar{x}, t \rangle$, respectivamente. Portanto

$$\int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}x(t)\, x(t)\, e^{iS[x]} = \int d\bar{x}\, \langle x_f, t_f | \bar{x}, t \rangle\, \bar{x}\, \langle \bar{x}, t | x_i, t_i \rangle\,. \tag{2.31}$$

Utilizando a relação de completeza

$$\int d\bar{x}\, |\bar{x}, t\rangle \langle \bar{x}, t| = \mathbb{1}, \tag{2.32}$$

finalmente obtemos que

$$\int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}x(t)\, x(t)\, e^{iS[x]} = \langle x_f, t_f|\, \hat{x}(t)\, |x_i, t_i\rangle\,. \tag{2.33}$$

Assim, concluímos que os elementos de matriz dos operadores $\bar{x}(t)$ são obtidos através do cálculo da integral de caminho para a função $x(t)$ com uma função peso $e^{iS[x]}$, associada a cada caminho.

Se considerarmos mais fatores de $x(t)$, no formalismo das integrais de caminho podemos escrever:

$$\langle x_f, t_f|\, \hat{x}(t_2)\hat{x}(t_1)\, |x_i, t_i\rangle = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{D}x(t)\, x(t_1)x(t_2)\, e^{iS[x]}. \tag{2.34}$$

Aqui, verificamos a necessidade de especificar que $t_1 \leq t_2$, visto que, no lado esquerdo da Eq. (2.34) o ordenamento dos operadores é relevante, enquanto no lado direito, $x(t_1)$ e $x(t_2)$ são apenas parâmetros que comutam.

Por consequência, a fórmula que generaliza a Eq. (2.34) para n pontos é:

$$\langle x_f, t_f|\, \hat{\mathcal{T}}\Big[\hat{x}(t_1)\ldots\hat{x}(t_n)\Big]\, |x_i, t_i\rangle = \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}x(t)\, x(t_1)\ldots x(t_n)\, e^{iS[x]}, \tag{2.35}$$

em que $\hat{\mathcal{T}}$ simboliza o operador de ordenamento temporal [47, 48].

2.1.2 Funcional gerador

Uma forma condensada de representar as amplitudes de transição, que discutimos na Eq. (2.35), é fornecida pelo funcional gerador:

$$Z[j] \equiv \langle x_f, t_f|\, \hat{\mathcal{T}} e^{i\int_{t_i}^{t_f} dt\, j(t)\hat{x}(t)}\, |x_i, t_i\rangle\,, \tag{2.36}$$

sendo $j(t)$ uma função arbitrária do tempo, denominada de fonte externa, que não interfere no nosso objeto físico de interesse, visto que ao fim dos cálculos sempre tomaremos $j(t) = 0$.

A essência deste método se apresenta diante da possibilidade de realizar derivadas funcionais de Z em relação à $j(t)$. Portanto, exploraremos a propriedade da derivada funcional

$$\frac{\delta j(t)}{\delta j(t')} = \delta(t - t'). \tag{2.37}$$

Assim, constatamos que

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\delta Z[j]}{\delta j(t_1)}\right|_{j(t)=0} &= \langle x_f, t_f|\, i\hat{\mathcal{T}} \int_{t_i}^{t_f} dt\, \frac{\delta j(t)}{\delta j(t_1)} x(t)\, e^{i\int_{t_i}^{t_f} dt\, j(t)\hat{x}(t)}\, |x_i, t_i\rangle_{j(t)=0} \\
&= \langle x_f, t_f|\, i\hat{\mathcal{T}} \int_{t_i}^{t_f} dt\, \delta(t - t_1)\hat{x}(t)\, e^{i\int_{t_i}^{t_f} dt\, j(t)\hat{x}(t)}\, |x_i, t_i\rangle_{j(t)=0} \\
&= i\, \langle x_f, t_f|\, \hat{x}(t_1)\, |x_i, t_i\rangle\,.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Na segunda linha, utilizamos a definição da derivada funcional e exploramos a propriedade de filtragem da delta de Dirac. Por fim, fizemos uso de $j(t) = 0$.

Nota-se, então, a possibilidade de generalização das amplitudes de transição no formalismo funcional para n parâmetros, a partir da seguinte fórmula:

$$\langle x_f, t_f | \, \hat{\mathcal{T}} \left(x(t_1) \ldots x(t_n) \right) | x_i, t_i \rangle = \left. \frac{\delta^n Z[j]}{i^n \, \delta j(t_1) \ldots \delta j(t_n)} \right|_{j=0} . \tag{2.39}$$

Em que podemos reescrever a Eq. (2.36) no formalismo das integrais de caminho

$$Z[j] = \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}x \, e^{iS[x] + i \int_{t_i}^{t_f} \, dt \, j(t) x(t)} . \tag{2.40}$$

2.2 Integral de caminho em teoria quântica de campos

Com o formalismo que abrange o gerador funcional na mecânica quântica em mãos, podemos suavemente estender esse conceito para TQC. Contudo, há duas diferenças cruciais. A primeira está na definição das funções, as quais agora são definidas sobre o espaço-tempo, em consonância com os princípios da relatividade restrita, que exigem tratamento igualitário para ambos os parâmetros [48].

Esse formalismo possui a capacidade de descrever as interações entre as partículas elementares que constituem a matéria ordinária. Aqui, as partículas estão associadas às excitações dos campos, os quais são concebidos como sistemas dotados de um número infinito de graus de liberdade. Dessa forma, todos os resultados obtidos até o momento podem ser transpostos para formulações análogas em TQC, seguindo a correspondência estabelecida em[1]:

$$\begin{cases} \hat{x}(t) \to \hat{\varphi}(x^\mu) \\ \hat{k}(t) \to \hat{\Pi}(x^\mu) \\ j(t) \to J(x^\mu) \end{cases} , \tag{2.41}$$

sendo $\hat{\varphi}(x)$ o operador campo, $\hat{\Pi}(x)$ o momento conjugado e $J(x)$ uma fonte externa.

A segunda diferença, corresponde à escolha dos autoestados [48]. A amplitude em mecânica quântica se dá mediante os diferentes estados de posição com base no parâmetro temporal. Contudo, aqui estaremos lidando, principalmente, com elementos de matriz de operadores de campo atuando em estados de vácuo

$$\langle 0 | \, \hat{\varphi}(x) \, | 0 \rangle . \tag{2.42}$$

Na próxima seção, discutiremos melhor esse processo ao tratarmos de campos específicos.

[1] Neste primeiro momento, visando explicitar a dependência com o espaço-tempo, empregamos x^μ no argumento das funções. No entanto, simplificaremos a notação e seguiremos o padrão da literatura, utilizando somente $\varphi(x)$, uma vez que sempre trabalharemos em um espaço de quatro dimensões.

Apesar disso, essa concepção não deveria soar estranha para o leitor, especialmente ao lembrarmos de uma situação similar no contexto da mecânica quântica. Se a Lagrangiana de um sistema for independente do tempo, sabe-se que os autoestados de energia correspondem a funções de onda $\psi_n(x) = \langle x|n\rangle$. Sendo o estado fundamental de energia, que agora denominaremos também como estado de vácuo, descrito por $\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$. Podemos, também, utilizar o formalismo de Heisenberg e explicitar o parâmetro temporal

$$\psi_0(x,t) = e^{-iE_0 t}\langle x|0\rangle = \langle x| e^{-i\hat{H}t}|0\rangle = \langle x,t|0\rangle\,. \tag{2.43}$$

Portanto, de modo similar, em TQC teremos o operador campo $\varphi(x)$ atuando no autoestado de vácuo $\hat{\varphi}(x)|0\rangle$, criando uma partícula.

Logo, os valores esperados de vácuo (VEV) da teoria podem ser calculados perante o uso do funcional gerador na presença de uma fonte externa clássica $J(x)$

$$Z[J(x)] = \int \mathcal{D}\varphi(x)\, e^{iS[\varphi(x)]+i\int d^4x\, J(x)\varphi(x)}, \tag{2.44}$$

tomando $J = 0$, temos o VEV sem a fonte externa:

$$Z[0] = \int \mathcal{D}\varphi(x)\, e^{iS[\varphi(x)]}. \tag{2.45}$$

Dessa forma, de modo análogo à mecânica quântica, em TQC o cálculo dos produtos ordenados temporalmente é dado por:

$$\langle 0|\hat{\mathcal{T}}\left[\hat{\varphi}(x_1)\dots\hat{\varphi}(x_n)\right]|0\rangle = \frac{(-i)^n}{Z[0]}\frac{\delta^n Z[J(x)]}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0}, \tag{2.46}$$

no qual estamos normalizando os cálculos por $Z[0]$. Essa representação também nos permite traçar um paralelo com a função de partição em mecânica estatística e, por intermédio desta, afirmar que o funcional gerador nos traz todas as informações acerca de um sistema.

2.2.1 Teoria escalar livre

De forma semelhante ao que fizemos em mecânica quântica, estudaremos o caso mais simples, agora no contexto de TQC. Isto posto, na teoria livre, a Lagrangiana[2] para o campo escalar real é dada por [47]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi(\Box + m^2)\phi, \tag{2.47}$$

em que $\Box = \partial_\mu\partial^\mu$ é o operador d'Alembertiano covariante e m é a massa.

A equação de movimento associada à Eq. (2.47), nos fornece a equação de Klein-Gordon livre, sendo

$$(\Box + m^2)\phi = 0. \tag{2.48}$$

[2] Na verdade, estamos lidando agora com densidades Lagrangianas. Afinal, as funções campo são definidas no espaço-tempo, por isso, utilizaremos $\mathcal{L}$ para diferenciá-las.

Soluções para essa equação são dadas em função de ondas planas, tendo como a solução mais geral a superposição delas:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2E}}(a_k e^{-ikx} + a_k^* e^{ikx})\Big|_{k^0=E}, \tag{2.49}$$

onde $E \equiv \sqrt{k^2+m^2}$ é a relação de dispersão relativística e surge como imposição para manter a solução real. Os parâmetros a_k e a_k^* são interpretados somente mediante a quantização da teoria.

O princípio básico da quantização canônica é elevar as variáveis a operadores. De maneira análoga, aqui promoveremos os campos escalares $\phi(x)$ e o momento conjugado $\Pi(x)$, e imporemos a relação de comutação para o tempo igual

$$\left[\hat{\phi}(x), \hat{\Pi}(y)\right] = i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{2.50}$$

com ϕ e Π calculados nesse tempo. Além disso, destacamos que os parâmetros em negrito dependem somente da posição e a presença da delta de Dirac surge devido ao fato de x ser um parâmetro contínuo. Isto significa que promover o campo real $\phi(x)$ a um operador Hermitiano, também promove a_k ao operador $\hat{a}_k$ e a_k^* se torna o operador conjugado Hermitiano $a_k^\dagger$. Portanto

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2E}}(\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{ikx}). \tag{2.51}$$

Em vista disso, outras relação de comutação podem ser constatadas, dentre elas:

$$\left[\hat{a}_k, \hat{a}_x^\dagger\right] = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{x}), \tag{2.52}$$

e também

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_x] = \left[\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_x^\dagger\right] = 0. \tag{2.53}$$

A conexão com a física de partículas emerge na construção do espaço de Fock [49], em que associamos $\hat{a}_k$ e $\hat{a}_k^\dagger$ aos os operadores de aniquilação e criação, respectivamente. Nesse contexto, o estado de vácuo $|0\rangle$ adquire uma interpretação mais profunda, representando o estado que é aniquilado por todos os operadores $\hat{a}_k$. Portanto, para todo $\mathbf{k}$, temos que

$$\hat{a}_k|0\rangle = 0. \tag{2.54}$$

Com base na breve introdução ao contexto de TQC no formalismo canônico, retomaremos nossa empreitada inicial para explorar as implicações da quantização dos campos escalares no formalismo de Feynman.

Usaremos a notação $Z_0[J]$ para o gerador funcional da teoria livre,

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi\, e^{i\int d^4x\left[-\frac{1}{2}\phi(\Box+m^2)\phi + J(x)\phi(x)\right]}. \tag{2.55}$$

Como agora estamos lidando com matrizes, devemos utilizar a Eq. (2.22)

$$\int dk\, e^{-\frac{1}{2}k^\dagger \mathbf{A} k + J^\dagger k} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{det\mathbf{A}}} e^{\frac{1}{2}J^\dagger \mathbf{A}^{-1} J},$$

sendo $\mathbf{A} = i(\Box + m^2)$. Precisamos então, computar a matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}$. Tendo em vista que $\mathbf{A}$ é um operador diferencial, sua inversa é dada pela função de Green:

$$(\Box + m^2)G(x-y) = -i\delta(x-y). \tag{2.56}$$

Realizando uma transformada de Fourier, temos que

$$G(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} G(k)\, e^{-ik\cdot(x-y)} \quad \text{e} \quad \delta(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ik\cdot(x-y)}. \tag{2.57}$$

Assim, substituindo na Eq. (2.56), obtemos

$$\begin{aligned}(\Box + m^2)\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} G(k)\, e^{-ik\cdot(x-y)} &= i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ik\cdot(x-y)} \\ \frac{1}{(2\pi)^4}(-k^2+m^2)\, G(k) &= i\frac{1}{(2\pi)^4},\end{aligned} \tag{2.58}$$

em que atuamos o operador d'Alembertiano no termo de fase.

Desta forma, determinamos que

$$G(k) = \frac{-i}{k^2 - m^2}, \tag{2.59}$$

ou ainda no espaço das posições

$$G(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2-m^2} e^{-ik\cdot(x-y)}. \tag{2.60}$$

Retornando à Eq. (2.55), observamos que o funcional gerador adquire a seguinte expressão

$$Z_0[J] = N e^{\int d^4x\, d^4y \left[-\frac{1}{2}J(x)G(x-y)J(y)\right]}. \tag{2.61}$$

Como estamos realizando um produto interno com variáveis contínuas, surgem integrais em x e y. Ademais, N representa somente uma normalização com forma irrelevante para nossos propósitos.

Isto posto, estamos aptos a determinar a amplitude de transição de dois pontos ou, como também denominaremos, função de dois pontos:

$$\langle 0|\, \hat{\mathcal{T}} \left[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\right] |0\rangle = (-i)^2 \frac{1}{Z_0[0]} \frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x)\delta J(y)}\bigg|_{J=0}. \tag{2.62}$$

Sendo assim, iremos realizar os cálculos em partes. Iniciaremos com a avaliação da derivada funcional de primeira ordem

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(y)}\right|_{J=0} &= \frac{\delta}{\delta J(y)}\left\{N e^{\int d^4x' d^4y' \left[\frac{1}{2}J(x')G(x'-y')J(y')\right]}\right\}_{J=0} \\
&= \frac{1}{2}Z_0[0]\int d^4x' d^4y' \frac{\delta}{\delta J(y)} J(x')G(x'-y')J(y')\Big|_{J=0} \\
&= \frac{1}{2}Z_0[0]\int d^4x' d^4y' G(x'-y')\left[J(x')\delta(y'-y) + J(y')\delta(x'-y)\right]\Big|_{J=0} \\
&= \frac{1}{2}Z_0[0]\left[\int d^4x' G(x'-y)J(x') + \int d^4y' G(y-y')J(y')\right]_{J=0}.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Na primeira linha, definimos variáveis distintas x' e y' no expoente, na segunda e terceira linha, aplicamos a derivada e, na quarta linha, integramos as deltas de Dirac, explorando sua propriedade de filtragem.

Com a segunda derivada, trabalhamos da mesma maneira

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x)\delta J(y)}\right|_{J=0} &= \frac{\delta}{\delta J(x)}\left\{\frac{1}{2}Z_0[J]\left[\int d^4x' G(x'-y)J(x') + \int d^4y' G(y-y')J(y')\right]\right\}_{J=0} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)}\left[\int d^4x' G(x'-y)J(x') + \int d^4y' G(y-y')J(y')\right]_{J=0} \\
&\quad + \frac{1}{2}Z_0[J]\frac{\delta}{\delta J(x)}\left[\int d^4x' G(x'-y)J(x') + \int d^4y' G(y-y')J(y')\right]_{J=0} \\
&= \frac{1}{2}Z_0[0]\left[\int d^4x' G(x'-y)\delta(x'-x) + \int d^4y' G(y-y')\delta(y'-x)\right]_{J=0} \\
&= \frac{1}{2}Z_0[0]\left[G(x-y) + G(y-x)\right]_{J=0} \\
&= Z_0[0]\; G(x-y).
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Na primeira linha, apenas repetimos o resultado da primeira derivada, na segunda e terceira linha, aplicamos a regra do produto. Como a nova derivada de $Z_0[J]$, na segunda linha, gerará mais termos com dependência em J, e eventualmente tomaremos $J = 0$, podemos desconsiderá-los. Na quarta linha, realizamos as derivadas funcionais, enquanto na quinta linha integramos as deltas de Dirac novamente. Por fim, na última linha, utilizamos a propriedade de simetria das funções de Green e as agrupamos em somente um termo.

Finalmente, podemos retornar à Eq. (2.62) e verificar que a função $G(x-y)$ é o propagador da teoria escalar livre, também denominado na literatura como propagador de Feynman [47]

$$\langle 0|\, \hat{\mathcal{T}}\left[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\right]|0\rangle = -G(x-y). \tag{2.65}$$

Sua importância, está no fato que o propagador representa uma função capaz de especificar a amplitude de probabilidade de uma partícula viajar de um ponto para outro em um determinado período de tempo, ou viajar com uma certa energia e momento.

O caso de uma teoria escalar livre, ou seja, sem interações ou correções quânticas, acaba sendo bastante didático, como vimos. Nos próximos capítulos, iremos calcular outros propagadores e analisar as complexidades inerentes a eles

2.3 Ação efetiva

Até o momento, discutimos sobre o funcional gerador considerando o processo de quantização da teoria através da integral de caminhos da ação clássica. Nessa abordagem, podemos determinar funções de correlação associadas a todas as possíveis interações entre as partículas, incluindo aquelas não observadas a nível clássico. Estas interações são interpretadas como correções quânticas, e que são proporcionais a potências de $\hbar$. Contudo, o funcional gerador fornece um número redundante de funções de correlação, contendo também as que não contribuem para a determinação de observáveis, conhecidas como funções desconexas.

Neste contexto, construiremos um funcional alternativo chamado de ação efetiva quântica, ou simplesmente ação efetiva, denotado por $\Gamma[\varphi]$. Este funcional gera apenas as funções de correlação que contribuem para o cálculo de observáveis físicos, conhecidas como 1PI (uma partícula irredutível) [50]. Além disso, a ação efetiva pode ser entendida como uma modificação da ação clássica, incorporando correções quânticas diretamente a ela. Nessa interpretação, ao restringirmos seu domínio a uma teoria perturbativa de baixa ordem em $\hbar$, ou seja, ao ignorarmos as correções quânticas, retornamos ao regime da ação clássica [51, 52].

Vamos começar pela definição de um outro funcional gerador intermediário

$$Z[J] = e^{iW[J]}, \tag{2.66}$$

com $W[J]$ sendo um funcional que representa a soma de todos os diagramas conectados, ou ainda, todas as funções de correlação conectadas. O argumento necessário para melhor compreender este fato, se dá através da análise da teoria de pertubação transcrita nos diagramas de Feynman. Entretanto, neste trabalho, não estamos interessados em lidar com a representação diagramática. Desta forma, iremos fornecer um argumento matemático alternativo [53].

Considere que C_I é uma função de correlação que fornece um diagrama conectado do tipo I. Então, podemos obter qualquer diagrama, conectado ou não, a partir de

$$D = \frac{1}{S_D} \prod_I (C_I)^{n_I}, \tag{2.67}$$

em que n_I é o número de diagramas repetidos do tipo I e S_D é um fator de simetria que contabiliza a permutação de diagramas conectados idênticos, cuja forma é dada por

$$S_D = \prod_I n_I!. \tag{2.68}$$

Como discutimos na seção anterior, $Z[J]$ gera todas as possíveis combinações de funções de correlação. Portanto, é razoável afirmar que

$$Z[J] \sim \sum_{\{n_I\}} D \sim \sum_{\{n_I\}} \prod_I \frac{1}{n_I!}(C_I)^{n_I}, \tag{2.69}$$

sendo $\{n_I\}$ um conjunto de números correspondendo a cada D que está sendo somado. Assim, $\{n_I\}$ deve variar de 0 até ∞. Uma vez que o somatório é passivo por troca de ordem com o produtório, ao analisarmos a Eq. (2.69), podemos usar a estrutura da seguinte série conhecida

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{2.70}$$

Desta forma, podemos reescrever o funcional gerador $Z[J]$ como

$$Z[J] \sim \prod_I e^{C_I} = e^{\sum_I C_I}. \tag{2.71}$$

Por fim, temos que $Z[J]$ pode ser escrito como uma exponencial da soma de todos os diagramas conectados. Logo, redefinindo que $\sum_I C_I = iW[J]$ retornamos à Eq. (2.66).

Munidos da definição do novo gerador $W[J]$, e principalmente de sua interpretação física, podemos obter a expressão para a ação efetiva a partir da transformada de Legendre de $W[J]$ em relação a uma nova variável, o campo médio. Verificamos que

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = -i\frac{\delta \log Z}{\delta J(x)} = \langle 0|\, \hat{\phi}(x)\, |0\rangle \equiv \phi_c(x), \tag{2.72}$$

e então, definimos o VEV de $\phi(x)$, ou ainda, a função de correlação de um ponto, como o campo médio. Assim, definimos a ação efetiva em relação ao campo médio [50]:

$$\Gamma[\phi_c] \equiv W[J] - \int d^4x\, J(x)\phi_c(x). \tag{2.73}$$

Isto posto, uma relação importante a ser discutida, é a variação da ação efetiva em relação ao campo médio

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)} &= \frac{\delta W[J]}{\delta\phi_c(x)} - \int d^4y \left[\phi_c(y)\frac{\delta J(y)}{\delta\phi_c(x)} + J(y)\frac{\delta\phi_c(y)}{\delta\phi_c(x)}\right] \\
&= \int d^4y\, \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)}\frac{\delta J(y)}{\phi_c(x)} - \int d^4y\, \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)}\frac{\delta J(y)}{\phi_c(x)} - \int d^4y\, J(y)\delta(x-y) \\
&= -J(x),
\end{aligned} \tag{2.74}$$

em que usamos somente a regra da cadeia e a definição da derivada funcional. Observe que

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)} + J(x) = 0, \tag{2.75}$$

é análoga à equação usual de Euler-Lagrange, com a ação efetiva ao invés da ação clássica e um termo de fonte externa $J(x)$.

Esta relação se prova útil ao tomarmos

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(y)} &= -\frac{\delta J(y)}{\delta J(x)} \\ &= -\delta(y-x), \end{aligned} \tag{2.76}$$

e utilizarmos este resultado para observar que, aplicando a regra da cadeia novamente no lado esquerdo da Eq. (2.76), obtemos

$$\begin{aligned} \delta(y-x) &= -\int d^4z\, \frac{\delta\phi_c(z)}{\delta J(x)}\frac{\delta^2\Gamma[\phi_c(x)]}{\delta\phi_c(z)\delta\phi_c(y)} \\ &= -\int d^4z\, \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x)\delta J(z)}\frac{\delta^2\Gamma[\phi_c(x)]}{\delta\phi_c(z)\delta\phi_c(y)}. \end{aligned} \tag{2.77}$$

Portanto, o que explicitamos é a necessidade de que o primeiro termo seja a função inversa do segundo

$$\left(\frac{\delta^2\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(z)\delta\phi_c(y)}\right)^{-1} = -\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x)\delta J(z)}. \tag{2.78}$$

No entanto, utilizando a Eq. (2.72), sabemos que o lado direito da igualdade representa a função de correlação de dois pontos

$$\left(\frac{\delta^2\Gamma[\phi_c(x)]}{\delta\phi_c(z)\delta\phi_c(y)}\right)^{-1} = D(x-y), \tag{2.79}$$

em que $D(x-y)$ define o propagador completo, vestido das correções quânticas.

Em síntese, até este ponto retomamos todas as conclusões e reconstruímos os objetos que foram definidos nas seções anteriores, determinando um propagador "vestido" com as correções quânticas. Nos resta obter uma expressão fechada para a ação efetiva. Faremos isto somente considerando a expansão em um laço.

Expandiremos o campo $\phi(x)$ de forma que

$$\phi(x) = \varphi(x) + \eta(x), \tag{2.80}$$

sendo $\varphi(x)$ o campo de fundo e $\eta(x)$ pertubações ao redor do campo. Portanto, o funcional gerador $Z[J]$ deve ser reescrito como

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\eta(x)\, e^{i\left\{S[\varphi+\eta]+\int d^4x\, j(\varphi+\eta)\right\}}. \tag{2.81}$$

Podemos expandir o expoente em termos de η, de forma que

$$
\begin{aligned}
S[\varphi+\eta]+\int d^4x\, J(\varphi+\eta) = \; & S[\varphi]+\int d^4x J(x)\varphi(x) \\
& + \int d^4x \left(\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)}\bigg|_{\varphi} + J \right)\eta(x) \\
& + \frac{1}{2}\int d^4x\, d^4y\, \eta(x)\left(\frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}\bigg|_{\varphi} \right)\eta(y) \\
& + \dots\,.
\end{aligned} \tag{2.82}
$$

Entretanto, o termo linear em η é nulo, conforme o princípio de mínima ação. Assim, obtemos

$$
Z[J] = e^{i\left\{S[\varphi]+\int d^4x\, j\varphi\right\}}\int \mathcal{D}\eta(x)\, e^{i\{S[\eta]\}}, \tag{2.83}
$$

no qual $S[\eta]$ é dada por

$$
S[\eta] = \frac{1}{2}\int d^4x\, d^4y\, \eta(x)\left(\frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}\bigg|_{\varphi} \right)\eta(y). \tag{2.84}
$$

Este tipo de integral Gaussiana é solucionável analiticamente, conforme já demonstramos anteriormente na Eq. (2.22). Logo, a integral de caminho nos fornece um determinante com a seguinte expressão:

$$
\left[\det\left(-\frac{i}{2}\frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}\bigg|_{\varphi}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} = \exp\left[-\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\log\left(-\frac{i}{2}\frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}\bigg|_{\varphi}\right)\right], \tag{2.85}
$$

em que empregamos a identidade

$$
\log(\det A) = \mathrm{Tr}(\log A). \tag{2.86}
$$

Se retomarmos os mesmos passos que fizemos, isto é, redefinir $W[J]$ e $\Gamma[\phi_c]$, chegaremos na expressão fechada para a ação efetiva em um laço:

$$
\Gamma[\varphi] = S[\varphi] + \frac{i}{2}\,\mathrm{Tr}\,\log\left(-\frac{i}{2}\frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}\bigg|_{\varphi}\right) + \dots\,. \tag{2.87}
$$

É importante ressaltar que a ação efetiva foi redefinida e está sendo expressa através de um campo de fundo $\varphi(x)$. Além disso, o termo no argumento do logaritmo nada mais é do que o inverso do propagador, mas agora acoplado com os efeitos que o campo de fundo acarreta.

2.4 Ação efetiva não-local

Embora a expressão obtida para a ação efetiva na seção anterior seja viável, ainda é necessário obter a forma explícita para o termo de correção de um laço. Porém, um dos grandes desafios na quantização dos campos de *gauge* é a dependência da própria teoria com o desenvolvimento de métodos covariantes para o cálculo da ação efetiva. Neste trabalho, estamos interessados em uma abordagem específica associada à uma expansão da correção em termos dos tensores de intensidade.

Ainda que existam alguns métodos covariantes, de certa forma, todos possuem a mesma base centrada no método de tempo próprio [54]. Neste método, Schwinger demonstrou uma identidade capaz de reescrever as integrações de modo a torná-las Gaussianas e, portanto, integráveis. Houve também uma reformulação geométrica do mesmo mecanismo que determinou a expansão em curvaturas generalizadas, realizada por DeWitt [55], que impulsionou ainda mais a formulação matemática.

O tratamento de Schwinger-DeWitt pode, até hoje, ser considerado como uma estrutura genérica para o cálculo da ação efetiva e tem como ideia principal, uma expansão das funções de Green na vizinhança do cone de luz. Entretanto, um entrave significativo se apresenta mediante o fato de que a ação efetiva é uma expansão de funções locais dos campos de fundo. Isso a torna inválida quando as quantidades dimensionais do campo de fundo são maiores, em ordens de grandeza, do que o parâmetro de massa usado como parâmetro de expansão. Estas questões fazem com que a técnica original de Schwinger-DeWitt seja aplicável somente para as funções de correlação mais simples. Isso se dá, pois o cálculo de termos não-locais, isto é, não-polinomiais, das funções dos campos ou de suas derivadas, requereriam uma soma das séries de tempo próprio, técnica até então não desenvolvida.

Contudo, a ação efetiva é, em sua essência, não-local e deve admitir um limite de massa nula. Desta forma, anos mais tarde, a forma dos termos não-locais foi proposta por Barvinsky e Vilkovisky [33]. A expressão da correção de laço para os campos de *gauge* adquire, neste formalismo, a seguinte forma:

$$\Gamma \sim F_{\mu\nu}(\alpha + \beta\gamma(\Box))F^{\mu\nu}, \tag{2.88}$$

em que $F_{\mu\nu}$ representa um tensor de intensidade para uma teoria de *gauge* qualquer, α e β são somente constantes e $\gamma(\Box)$ é denominado de fator de forma, termo que confere as informações advindas da correção de laço.

Para os propósitos deste trabalho, o fator de forma possui a seguinte expressão:

$$\gamma(\Box) \sim \log\left(\frac{\Box}{\mu^2}\right), \tag{2.89}$$

sendo o fator μ^2 uma constante de regularização dimensional. Tomaremos a igualdade na Eq. (2.88) somente após introduzirmos os campos de *gauge* no Capítulo 4, e assim, inseriremos as constantes apropriadas.

No capítulo 3, retomaremos a análise dos propagadores, desta vez utilizando um formalismo alternativo que nos permitirá explorar o espectro da teoria com maior profundidade. Essa abordagem distinta servirá como ferramenta analítica fundamental após introduzirmos o propagador vestido para os glúons, utilizando o formalismo efetivo.

3 Representação de Källén-Lehmann

Neste capítulo, exploraremos uma forma alternativa para representar o propagador de uma teoria, conhecida como representação de Källén-Lehmann [53, 56]. Esta técnica é baseada em princípios gerais da relatividade restrita e do formalismo canônico da TQC e, ainda, não depende da natureza das interações nem de expansões perturbativas. Temos como objetivo definir uma função que carrega informações sobre o espectro da teoria, pois ela nos auxiliará no estudo dos graus de liberdade da CDQ no Capítulo 6.

3.1 Propagador exato

Definimos o propagador livre na Eq. (2.65), mas aqui, o reescreveremos de forma a fatorar a unidade imaginário

$$G(x-y) \equiv i \langle 0| \hat{\mathcal{T}} \hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y) |0\rangle \,, \tag{3.1}$$

em que tomaremos o campo $\hat{\varphi}(x)$ como sendo um campo normalizado por

$$\langle 0| \hat{\varphi}(x) |0\rangle = 0. \tag{3.2}$$

Além disso, sua projeção na base do momento é dada pela seguinte relação

$$\langle k| \hat{\varphi}(x) |0\rangle = e^{-ikx}. \tag{3.3}$$

Podemos ainda generalizar a normalização do estado de uma partícula para d dimensões no espaço-tempo, a partir de

$$\langle k|k'\rangle = (2\pi)^{d-1} 2\omega \delta^{d-1}(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \tag{3.4}$$

sendo $\omega = (\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}$. A notação em negrito representa a parte espacial ou o vetor momento do quadrivetor. Podemos também associar uma relação de completeza aos autoestados de momento de forma que

$$\int \tilde{dk}\, |k\rangle \langle k| = \mathbb{1}, \tag{3.5}$$

em que $\mathbb{1}$ é o operador identidade e o diferencial $\tilde{dk}$ é dado por

$$\tilde{dk} \equiv \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1} 2\omega}. \tag{3.6}$$

Temos então que o propagador no espaço de momento $G(k)$ pode ser introduzido via

$$G(x-y) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik(x-y)} G(k), \tag{3.7}$$

no qual a solução de $G(k)$ foi demonstrada na Eq. (2.59). Porém, aqui há uma pequena diferença, visto que, novamente, fatoramos a unidade imaginário, resultando em:

$$G(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon},$$

sendo que o fator $i\epsilon$ explicita o deslocamento do polo no plano complexo. É possível verificar que há dois polos isolados em $k^2 = m^2$, em que m é a massa física representada na relação de energia-momento.

Temos a intensão de tomar $x^0 > y^0$ e inserir uma relação de completeza dos autoestados de energia entre os campos na Eq. (3.1). Entretanto, devemos primeiramente explicitar quais tipos de autoestados são acessíveis. O estado de vácuo $|0\rangle$ será tratado como um estado único com energia e momento nulo. Autoestados de momento de partículas únicas $|k\rangle$ são especificados pelo vetor momento $\mathbf{k}$ e delimitados pela relação de energia $\omega = (\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}$. E ainda, o estado de multipartículas no contínuo $|k, n\rangle$ será descrito da mesma maneira, isto é, dependente do vetor momento; entretanto, o fator n contabilizará quaisquer outras dependências relativas às outras partículas. A energia destes estados agora está contida em $\omega = (\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2}$, em que $M \geq 2m$, isto é a energia necessária para haver ao menos duas partículas separadas.

Em vista disso, obtemos:

$$\begin{aligned}\langle 0| \hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y) |0\rangle = {} & \langle 0| \hat{\varphi}(x) |0\rangle \langle 0| \hat{\varphi}(y) |0\rangle \\ & + \int \tilde{dk} \langle 0| \hat{\varphi}(x) |k\rangle \langle k| \hat{\varphi}(y) |0\rangle \\ & + \sum_n \int \tilde{dk} \langle 0| \hat{\varphi}(x) |k, n\rangle \langle k, n| \hat{\varphi}(y) |0\rangle .\end{aligned} \tag{3.8}$$

Contudo, via Eq. (3.2), o primeiro termo na Eq. (3.8) é nulo enquanto o segundo pode ser simplificado através da Eq. (3.3). O somatório em n no terceiro termo deve ser entendido somente como uma esquematização, afinal, temos integrais sobre os parâmetros contínuos, aqui não especificados. Assim, a Eq. (3.8) se torna:

$$\langle 0| \hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y) |0\rangle = \int \tilde{dk}\, e^{ik(x-y)} + \sum_n \int \tilde{dk} \langle 0| \hat{\varphi}(x) |k, n\rangle \langle k, n| \hat{\varphi}(y) |0\rangle . \tag{3.9}$$

O segundo termo na Eq. (3.9) pode ser tratado ao reescrevermos o campo utilizando a evolução temporal $\varphi(x) = e^{-ikx}\varphi(0)e^{+ikx}$, o que nos permite estabelecer que:

$$\langle k, n| \hat{\varphi} |0\rangle = e^{-ikx} \langle k, n| \varphi(0) |0\rangle . \tag{3.10}$$

Consequentemente, os autoestados multipartidos podem ser simplificados como

$$\sum_n \int \tilde{dk} \langle 0| \hat{\varphi}(x) |k, n\rangle \langle k, n| \hat{\varphi}(y) |0\rangle = \sum_n \int \tilde{dk}\, e^{ik(x-y)} | \langle k, n| \hat{\varphi}(0) |0\rangle |^2. \tag{3.11}$$

Desta forma, a Eq. (3.8) se torna

$$\langle 0|\,\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)\,|0\rangle = \int \tilde{dk}\, e^{ik(x-y)} + \sum_n \int \tilde{dk}\, e^{ik(x-y)} |\,\langle k,n|\,\hat{\varphi}(x)\,|0\rangle\,|^2. \tag{3.12}$$

Feito isto, é possível definir uma nova função denominada como densidade espectral [53]:

$$\rho(s) \equiv \sum_n |\,\langle k,n|\,\hat{\varphi}(x)\,|0\rangle\,|^2 \delta(s - M^2). \tag{3.13}$$

Para um teoria típica, a função de densidade espectral pode ser representada através da Figura 1.

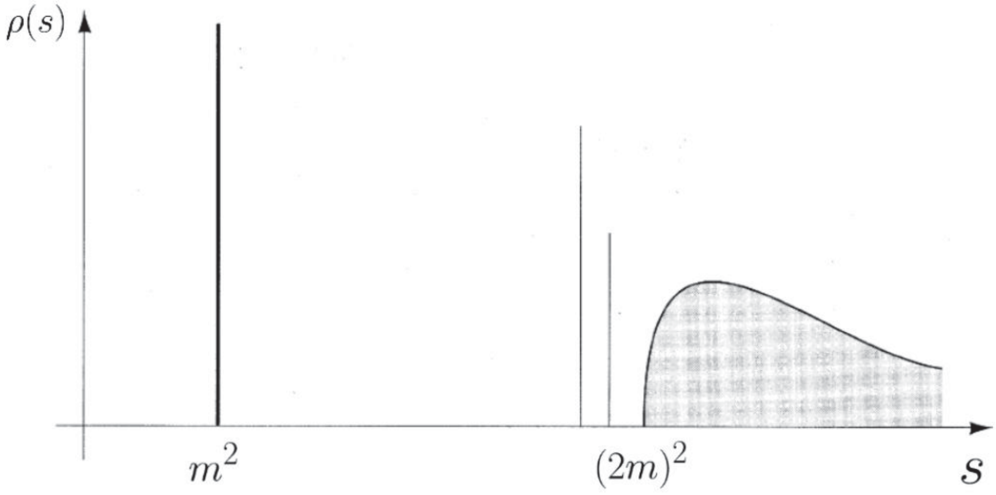

Figura 1 – Função de densidade espectral $\rho(s)$ para uma teoria de campo típica interagente. Os estados de uma partícula contribuem com uma função delta de Dirac em m^2 (o quadrado da massa da partícula). Os estados de múltiplas partículas têm um espectro contínuo começando em $(2m)^2$. Pode haver também estados ligados. Adaptado de [56].

Retomando que $\rho(s) = 0$ para $s < 4m^2$, verificamos que

$$\langle 0|\,\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)\,|0\rangle = \int \tilde{dk}\, e^{ik(x-y)} + \int_{4m^2}^{\infty} ds\, \rho(s) \int \tilde{dk}\, e^{ik(x-y)}. \tag{3.14}$$

Aqui precisamos relembrar da relação explícita de $\tilde{dk}$, presente na Eq. (3.6), e que estamos tratando deste problema em $d = 4$ dimensões. Logo

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\, e^{ik(x-y)} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2(\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}}\, e^{ik(x-y)}. \tag{3.15}$$

Dessa forma, é possível integrar sobre todas as configurações de energia e obter a seguinte expressão:

$$i\,\langle 0|\,\mathcal{T}\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)\,|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{ik(x-y)} \left[\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{4m^2}^{\infty} ds\, \rho(s) \frac{1}{k^2 - s + i\epsilon}\right]. \tag{3.16}$$

Assim, a forma do propagador exato no formalismo de Källén-Lehmann no espaço dos momentos é dada por:

$$G(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{4m^2}^{\infty} ds\, \rho(s) \frac{1}{k^2 - s + i\epsilon}. \tag{3.17}$$

3.2 Correções de laço ao propagador

As correções ao propagador exato podem ser representadas de forma genérica como uma série geométrica do tipo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}D(k) =&\frac{1}{i}G(k) + \frac{1}{i}G(k)\left[i\Pi(k^2)\right]\frac{1}{i}G(k)\\&+\frac{1}{i}G(k)\left[i\Pi(k^2)\right]\frac{1}{i}G(k)\left[i\Pi(k^2)\right]\frac{1}{i}G(k)+\dots\ ,\end{aligned} \tag{3.18}$$

em que tomamos o termo $[i\Pi(k^2)]$ advindo da soma de todas as funções de correlação 1PI, ou seja, da ação efetiva $\Gamma[\varphi]$ descrita na Eq. (2.87), mas aqui sendo representada no espaço dos momentos. Ao realizarmos a soma explicitada na Eq. (3.18), temos a forma do propagador acrescido das correções quânticas[1]

$$D(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon - \Pi(k^2)}, \tag{3.19}$$

de modo que retornaremos ao propagador livre caso $\Pi(k^2) = 0$, visto que as correções de um laço serão desprezadas. Desta forma, temos dois objetos, Eq. (3.17) e Eq. (3.19), que precisam ser reconciliados.

Partindo da Eq. (3.17), podemos explorar o uso da seguinte identidade

$$\frac{1}{x+i\epsilon} = \frac{x}{x^2+\epsilon^2} - \frac{i\epsilon}{x^2+\epsilon^2}, \tag{3.20}$$

sendo que o primeiro termo, do lado direito da igualdade, pode ser representado através da integral de valor principal [57]:

$$\int dx\, P\frac{1}{x}f(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\int dx\,\frac{x}{x^2+\epsilon^2}f(x). \tag{3.21}$$

Além disso, o segundo termo pode ser representado através da delta de Dirac no *Kernel* de Poisson [58], uma vez que

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{x+i\epsilon}\right\} = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{\epsilon^2+x^2}. \tag{3.22}$$

Assim, é possível redefinir a Eq. (3.20) como

$$\frac{1}{x+i\epsilon} = P\frac{1}{x} - i\pi\delta(x) \tag{3.23}$$

e explorar somente a parte imaginária do propagador, de forma que:

$$\mathrm{Im}[G(k)] = -\pi\delta(k^2-m^2) - \int_{4m^2}^{\infty} ds\,\rho(s)\pi\delta(k^2-s). \tag{3.24}$$

Ainda, ao realizarmos a integração em relação à s, chegamos em:

$$\mathrm{Im}[G(k)] = -\pi\delta(k^2-m^2) - \pi\rho(k^2). \tag{3.25}$$

[1] A forma exata de $\left[i\Pi(k^2)\right]$, apesar de dedutível [53], não é necessária para o emprego que temos em mente para o formalismo de Källén-Lehmann e, portanto, será omitida.

Se analisarmos a região em que $s < 4m^2$, verificamos que $\rho(s) = 0$. Portanto, dentro deste limite podemos determinar uma expressão para a função de densidade espectral

$$\pi\rho(s) = -\mathrm{Im}[G(-s)], \tag{3.26}$$

visto que $\delta(k^2 - m^2) = \delta(-s - m^2)$ sempre será nulo neste limite.

No entanto, se supormos que $\mathrm{Im}[\Pi(k^2)] = 0$ e olharmos para as Eqs. (3.19) e (3.23), podemos representar a parte imaginária do propagador utilizando uma delta de Dirac, definida como

$$\mathrm{Im}[G(k)] = -\pi\delta(k^2 - m^2). \tag{3.27}$$

Desta forma, comparando a Eq. (3.27) com a Eq. (3.25), verificamos que $\rho(k^2) = 0$. Entretanto, estamos interessados no caso não trivial, em que $\mathrm{Im}[\Pi(k^2)] \neq 0$. Para tratar deste exemplo, podemos separar a parte real e imaginária da Eq. (3.19), como segue

$$D(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 - \mathrm{Re}[\Pi(k^2)] - \mathrm{Im}[\Pi(k^2)]}, \tag{3.28}$$

e, em alusão à Eq. (3.20), chamaremos $x = k^2 + m^2 - \mathrm{Re}[\Pi(k^2)]$, enquanto $\epsilon = \mathrm{Im}[\Pi(k^2)]$. Desta forma, a parte imaginária do propagador será dada por:

$$\mathrm{Im}[D(k)] = -\frac{\mathrm{Im}[\Pi(k^2)]}{(k^2 - m^2 + \mathrm{Re}[\Pi(k^2)])^2 + (\mathrm{Im}[\Pi(k^2)])^2}. \tag{3.29}$$

Em comparação com a Eq. (3.25), podemos fazer o mesmo tipo de análise, ou seja, explorar a propriedade de filtragem da delta de Dirac, usando $k^2 \to -s$. E, por fim, determinar uma expressão para a função de densidade espectral em um cenário não trivial [53]:

$$\pi\rho(s) = \frac{\mathrm{Im}[\Pi(-s)]}{(-s - m^2 + \mathrm{Re}[\Pi(-s)])^2 + (\mathrm{Im}[\Pi(-s)])^2}. \tag{3.30}$$

A Eq. (3.30), será essencial para a determinação do espectro do propagador dos glúons vestidos com as correções quânticas que calcularemos no Capítulo 6, visto que $\rho(s)$ atua como uma função peso para as contribuições quânticas nos informando sobre as regiões de energia de maior interesse.

4 Teorias de Yang-Mills

A TQC representa uma estrutura matemática que engloba um conjunto de conceitos e técnicas fundamentais para descrever as partículas elementares e suas interações. Este arcabouço teórico sintetiza princípios da relatividade especial, teoria clássica de campos e mecânica quântica. Dentre os elementos essenciais, destaca-se o papel central das simetrias. Neste contexto, exploraremos as simetrias através das representações de grupos de Lie, analisando seus efeitos sobre campos e as álgebras associadas.

Um dos pontos relevantes desta investigação será a teoria de Yang-Mills, a qual se propõe a elucidar o comportamento das partículas elementares através da utilização de grupos de Lie não-Abelianos, ou seja, com um grupo de simetria não-comutativo. Esta teoria desempenha um papel fundamental na compreensão da CDQ, que constitui a base teórica para a descrição da interação forte entre quarks e glúons

Neste capítulo, abordaremos a construção do grupo de Lie associado à CDQ, delineando os campos relacionados aos glúons e aos quarks, assim como a ação que governa sua dinâmica. Além disso, nos concentraremos na determinação da função de correlação, mais precisamente no propagador, dos glúons livres, cuja análise será de significativa relevância nos capítulos subsequentes.

4.1 Grupos de Lie

Um grupo de Lie de grau N é definido de modo que seus elementos g dependam de parâmetros reais θ^a, em que $a = 1, \ldots, N$; sendo θ um parâmetro contínuo [49]. Um elemento genérico pode ser descrito por $g(\theta)$ em que

$$g(\theta^1, \cdots, \theta^N) \equiv g(\theta). \tag{4.1}$$

E, para definir o elemento identidade e, podemos tomar as coordenadas $\theta^a = 0$, que correspondem a $g(0) = e$, sem perda alguma de generalidade.

Uma representação linear R de um grupo é uma operação que atribui a um elemento abstrato e genérico g do grupo um operador linear $D_R(g)$:

$$g \to D_R(g). \tag{4.2}$$

O operador identidade é identificado por

$$D_R(e) = 1, \tag{4.3}$$

tal que o produto é preservado:

$$D_R(g_1) \cdot D_R(g_2) = D_R(g_1 g_2). \tag{4.4}$$

Uma representação típica é a matricial, em que um elemento g do grupo é representado por uma matriz $n \times n$ de forma que $(D_R(g))^i{}_j$, em que $i, j = 1, \ldots, n$. Ao escrever um elemento genérico como $(\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$, podemos associar um elemento g a uma transformação do espaço vetorial, sendo:

$$\varphi^i \to (D_R(g))^i{}_j \varphi^j. \tag{4.5}$$

Caso haja a necessidade de mudança da representação, em geral, a forma explícita e a dimensão de $D_R(g)$, mudará. Ainda assim, há um aspecto importante do grupo de Lie que é independente de representação, denominada de álgebra de Lie.

A álgebra de Lie está relacionada ao conceito de transformações infinitesimais. Portanto, assumindo que as representações são diferenciáveis, podemos expandir $D_R(g)$ em uma série de Taylor e analisar a região vizinha do elemento identidade $\theta = 0$, obtendo então

$$D_R(\theta = 0) \approx 1 + i\theta_a T_R^a, \tag{4.6}$$

sendo que

$$T_R^a \equiv -i \left.\frac{\partial D_R}{\partial \theta_a}\right|_{\theta=0}. \tag{4.7}$$

Denominamos T_R^a de geradores do grupo na representação R e inserimos o fator i em ambas as equações, de forma a preservar sua estrutura, mas ao mesmo tempo, buscando garantir que na representação R os geradores sejam Hermitianos e que, portanto, as matrizes $D_R(g)$ sejam unitárias.

Contudo, para um elemento genérico $g(\theta)$ do grupo, que difere da identidade, podemos generalizar a representação através dos geradores

$$D_R(g(\theta)) = e^{i\theta_a T_R^a}, \tag{4.8}$$

pois sua expansão em série de Taylor, reproduz a Eq. (4.6).

Podemos ainda explorar o axioma definido anteriormente, Eq. (4.4), isto é, o produto linear de matrizes. Ao considerarmos duas matrizes com os mesmos geradores T_R^a mas com parâmetros distintos, seu produto deve possuir a seguinte forma:

$$e^{i\alpha_a T_R^a} e^{i\beta_a T_R^a} = e^{i\delta_a T_R^a}. \tag{4.9}$$

Entretanto, devemos tomar cuidado ao exprimir a forma de δ_a, afinal, T_R^a são matrizes e portanto $e^a e^b \neq e^{a+b}$. Para determinar sua forma faremos

$$\begin{aligned}
i\delta_a T_R^a &= \log\!\left(e^{i\alpha_a T_R^a}\, e^{i\beta_a T_R^a}\right) \\
&\approx \log\left\{\left[1 + i\alpha_a T_R^a + \frac{1}{2}(i\alpha_a T_R^a)^2\right]\left[1 + i\beta_a T_R^a + \frac{1}{2}(i\beta_a T_R^a)^2\right]\right\} \\
&\approx \log\left[1 + i\beta_a T_R^a + \frac{1}{2}(i\beta_a T_R^a)^2 + i\alpha_a T_R^a - \alpha_a\beta_b T_R^a T_R^b + \frac{1}{2}(i\alpha_a T_R^a)^2\right] \\
&\approx \log\left[1 + i(\alpha_a + \beta_a)T_R^a - \frac{1}{2}(\alpha_a T_R^a)^2 - \frac{1}{2}(\beta_a T_R^a)^2 - \alpha_a\beta_b T_R^a T_R^b\right],
\end{aligned} \tag{4.10}$$

em que na primeira linha, somente tomamos o logaritmo em ambos os lados das equações. Na segunda linha, expandimos em série de Taylor ambas as exponenciais até segunda ordem no argumento do logaritmo. Na terceira linha, realizamos o produto mantendo somente os termos de ordem quadrática em α e β. E, na quarta linha, reorganizamos os termos.

Podemos realizar, novamente, uma expansão em série de Taylor mas, agora, da função logarítmica, $\log(1+x) \approx x - x^2/2$, ainda mantendo somente os termos até ordem quadrática. Logo

$$\begin{aligned} i\delta_a T_R^a =& i(\alpha_a + \beta_b)T_R^a - \frac{1}{2}(\alpha_a T_R^a)(\alpha_b T_R^b) - \frac{1}{2}(\beta_a T_R^a)(\beta_b T_R^b) \\ & - \alpha_a \beta_b T_R^a T_R^b + \frac{1}{2}(\alpha_a + \beta_a)(\alpha_b + \beta_b) T_R^a T_R^b. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Realizando os produtos,

$$\begin{aligned} i\delta_a T_R^a =& i(\alpha_a + \beta_b)T_R^a - \frac{1}{2}\alpha_a\alpha_b T_R^a T_R^b - \frac{1}{2}\beta_a\beta_b T_R^a T_R^b - \alpha_a\beta_b T_R^a T_R^b \\ & + \frac{1}{2}(\alpha_a\alpha_b + \alpha_a\beta_b + \alpha_b\beta_a + \beta_a\beta_b) T_R^a T_R^b, \end{aligned} \tag{4.12}$$

verificamos então, que é possível reagrupar diversos termos e expressá-los como

$$\begin{aligned} i\delta_a T_R^a =& i(\alpha_a + \beta_b)T_R^a - \frac{1}{2}\alpha_a\alpha_b\Big[T_R^a, T_R^b\Big] - \frac{1}{2}\beta_a\beta_b\Big[T_R^a, T_R^b\Big] - \alpha_a\beta_b T_R^a T_R^b \\ & + \frac{1}{2}\alpha_a\beta_b T_R^a T_R^b + \frac{1}{2}\alpha_a\beta_b T^b T^a, \end{aligned} \tag{4.13}$$

em que $\Big[T_R^a, T_R^b\Big]$ representa o comutador dos geradores e ainda, no último termo, apenas efetuamos a troca dos índices. Podemos reescrever um dos termos da seguinte forma:

$$\alpha_a\beta_b T_R^a T_R^b = \frac{1}{2}(\alpha_a\beta_b T_R^a T_R^b + \alpha_b\beta_a T_R^b T_R^a), \tag{4.14}$$

de modo a agrupá-los com os outros termos de $1/2$, obtendo mais um comutador dos geradores

$$\begin{aligned} i\delta_a T_R^a =& i(\alpha_a + \beta_b)T_R^a - \frac{1}{2}\alpha_a\alpha_b\Big[T_R^a, T_R^b\Big] - \frac{1}{2}\beta_a\beta_b\Big[T_R^a, T_R^b\Big] \\ & - \frac{1}{2}\alpha_a\beta_b\Big[T_R^a, T_R^b\Big] - \frac{1}{2}\alpha_a\beta_b T_R^a T_R^b + \frac{1}{2}\alpha_a\beta_b T_R^a T_R^b. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Como os dois últimos termos idênticos, podemos cancelá-los. Na sequência, podemos colocar os comutadores em evidência:

$$i\delta_a T_R^a = i(\alpha_a + \beta_b)T_R^a - \frac{1}{2}(\alpha_a\alpha_b + \beta_a\beta_b + \alpha_a\beta_b)\Big[T_R^a, T_R^b\Big]. \tag{4.16}$$

Um detalhe importante, é o fato dos termos $\alpha_a\alpha_b$ e $\beta_a\beta_b$ serem nulos, uma vez que, dada a operação de comutação, obtemos:

$$\alpha_a\alpha_b\Big[T_R^a, T_R^b\Big] = \alpha_a\alpha_b T_R^a T_R^b - \alpha_a\alpha_b T_R^b T_R^a = (\alpha_a\alpha_b - \alpha_b\alpha_a) T_R^a T_R^b = 0, \tag{4.17}$$

em que somente usamos a troca de índices e a propriedade de comutação dos parâmetros α.

Portanto, observamos que:

$$2i(\delta_c - \alpha_c - \beta_c)T_R^c = \alpha_a\beta_b\Big[T_R^a, T_R^b\Big]. \tag{4.18}$$

Podemos definir que $\gamma_c = -2(\delta_c - \alpha_C - \beta_c)$. Entretanto, como $\delta = \delta(\alpha, \beta)$, então γ deve ser linear tanto no parâmetro α quanto em β. Assim, de forma geral, $\gamma = \alpha_a\beta_b f^{ab}{}_c$, em que $f^{ab}{}_c$ são as chamadas constantes de estrutura e sua característica notável é o fato de serem independentes de representação.

Com todo este tratamento, finalmente chegamos à expressão para a álgebra de Lie, sendo esta definida pela relação de comutação entre os geradores:

$$\Big[T^a, T^b\Big] = if^{ab}{}_c T^c. \tag{4.19}$$

Visto que as constantes de estrutura definem a álgebra de Lie, o problema de encontrar todas as representações matriciais da álgebra, equivale ao problema algébrico de obter todas as soluções matriciais possíveis T_R^a da Eq. (4.19).

A partir da Eq. (4.19), podemos classificar dois tipos de grupos: Abelianos e não-Abelianos. Um grupo é chamado de Abeliano quando suas constantes de estrutura são nulas, isto ocorre quando $\delta_a = \alpha_a + \beta_a$ na Eq. (4.9). Em outras palavras, os elementos do grupo comutam entre si. A parte não trivial da álgebra de Lie se encontra na segunda classificação, isto é, nos grupos não-Abelianos, em que os elementos não comutam entre si. E, em particular, estes grupos serão o foco deste trabalho.

Até o momento, realizamos uma discussão acerca de elementos abstratos dos grupos de Lie. Contudo, os objetos que queremos explorar são os campos invariantes por simetria de Lorentz, ou seja, campos relativísticos. A questão mais imediata que precisamos resolver é: como fazer a transição? A ideia base é estabelecer operadores de campo que atuem de acordo com a álgebra de Lie.

4.2 Teorias de *gauge*

Conforme discutimos, nosso interesse recai nas teorias de Yang-Mills, o que implica na adoção de um grupo de Lie compacto. Esses grupos representam uma generalização natural dos grupos finitos com topologia discreta. Aqui, especificamente, consideraremos o grupo $G = SU(N)$, no qual SU refere-se aos grupos especiais unitários compostos por matrizes $N \times N$ com determinante igual a um.

Para cada elemento da álgebra de Lie, introduziremos campos de *gauge* $A_\mu^a(x)$, em que $a = 1, \ldots, N^2 - 1$, de modo que os índices internos correspondem ao número de geradores do grupo. Desta forma, podemos compactar a notação e escrever os campos em sua forma matricial

$$A_\mu(x) = A^a_\mu(x) T^a. \tag{4.20}$$

Os campos $A^a_\mu(x)$ podem ser mencionados de várias maneiras, tais como: campos de *gauge*, vetores potenciais ou até mesmo bósons mediadores. Ressaltamos que os glúons são bósons, isto é, partículas com spin inteiro que desempenham o papel crucial na mediação da força forte. É importante destacar que nosso foco será exclusivamente no grupo $G = SU(3)$, que é fundamental para descrever a cromodinâmica quântica e, por consequência, nos glúons.

A partir do campo de *gauge*, podemos construir um tensor de segunda ordem conhecido como tensor de intensidade $G^a_{\mu\nu}$. Esse objeto desempenha um papel fundamental na caracterização dos glúons, as partículas mediadoras da interação entre os quarks. Uma maneira geométrica de conceber isso, é visualizar os campos de *gauge* como uma conexão em $SU(3)$, enquanto o tensor de intensidade descreve a curvatura dessa conexão. A expressão para o tensor de intensidade é dada por:

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu], \tag{4.21}$$

em que g é a constante de acoplamento de Yang-Mills. E, certamente,

$$G_{\mu\nu} = G^a_{\mu\nu} T^a. \tag{4.22}$$

A dinâmica de Yang-Mills é descrita por sua Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^{a\mu\nu}, \tag{4.23}$$

ou ainda, por sua ação

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \; G^a_{\mu\nu} G^{a\mu\nu}. \tag{4.24}$$

Uma importante constatação, é o fato de que a Lagrangiana de Yang-Mills apresenta um extenso grupo de simetrias atuando no potencial vetor, com a seguinte forma:

$$A_\mu \to \Omega(x) A_\mu \Omega^{-1}(x) - \frac{i}{g} \partial_\mu \Omega(x) \Omega^{-1}(x), \tag{4.25}$$

sendo $\Omega(x)$ um elemento pertencente ao grupo $SU(N)$ e uma função diferenciável. Denominaremos o conjunto de todas as transformações possíveis de $A_\mu(x)$ como grupo de *gauge*.

Esse tipo de transformação[1] induz à seguinte forma no tensor de intensidade

$$\begin{aligned} G'_{\mu\nu} =& \partial_\mu \left(\Omega A_\nu \Omega^{-1} - \frac{i}{g}\partial_\nu \Omega \Omega^{-1}\right) \\ &- \partial_\nu \left(\Omega A_\mu \Omega^{-1} - \frac{i}{g}\partial_\mu \Omega \Omega^{-1}\right) \\ &- ig\left[\Omega A_\mu \Omega^{-1} - \frac{i}{g}\partial_\mu \Omega \Omega^{-1}, \Omega A_\nu \Omega^{-1} - \frac{i}{g}\partial_\nu \Omega \Omega^{-1}\right]. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Operando as derivadas, com o cuidado de expressar a regra da cadeia, e utilizando o fato que $\partial_\mu(\Omega^{-1}\Omega) = 0$, bem como

$$\partial_\mu \Omega^{-1}\Omega = -\Omega^{-1}\partial_\mu \Omega, \tag{4.27}$$

e ainda

$$\partial_\mu \Omega^{-1} = -\Omega^{-1}\partial_\mu \Omega \Omega^{-1}, \tag{4.28}$$

obtemos:

$$G'_{\mu\nu} = \Omega G_{\mu\nu}\Omega^{-1}. \tag{4.29}$$

De acordo com a Eq.(4.8), temos

$$\Omega(x) = e^{ig\theta^a(x)T_R^a}, \tag{4.30}$$

de forma que podemos verificar a transformação infinitesimal de $A_\mu^a(x)$ utilizando a Eq. (4.20) e expandindo a Eq. (4.30) até primeira ordem em $\theta(x)$. Temos então que a Eq. (4.25) se torna

$$\begin{aligned} A_\mu^a T_R^a &\approx (1 + ig\theta^a T_R^a) A_\mu^a T_R^b (1 - ig\theta^c T^c) - \frac{i}{g}(-gT_R^a \partial_\mu \theta^a)(1 - ig\theta^b T^b) \\ &\approx A_\mu^b T_R^b - igA_\mu^b \theta^c T_R^b T_R^c + ig\theta^a A_\mu^b T_R^a T_R^b + T_R^a \partial_\mu \theta^a \\ &\approx A_\mu^a T_R^a + ig\theta^a A_\mu^b \left[T_R^a, T_R^b\right] + T_R^a \partial_\mu \theta^a. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Na primeira linha, tivemos o cuidado de tomar o complexo conjugado de Ω. Na segunda linha, realizamos o produto e descartamos termos de $O(\theta^2)$. Na terceira linha, reorganizamos a expressão de forma a utilizar o comutador dos geradores da álgebra e exploramos a liberdade de reescrita dos índices internos que estão contraídos. Ao retomarmos a Eq. (4.19), podemos suprimir os geradores de forma a demonstrar a independência com a representação R,

$$A_\mu^a \approx A_\mu^a + \partial_\mu \theta^a - gf^{abc}\theta^b A_\mu^c. \tag{4.32}$$

Embora trabalharemos somente com o setor bosônico de Yang-Mills, é importante definir um operador D_μ, denominado de derivada covariante,

$$D_\mu \varphi = (\partial_\mu - igA_\mu^a T_R^a)\varphi. \tag{4.33}$$

[1] Suprimiremos a dependência em x da função Ω, evitando poluições no equacionamento.

Este operador é comumente utilizado para introduzir o acoplamento entre bósons e férmions, de forma a preservar a invariância por *gauge*. Entretanto, no contexto deste trabalho, exploraremos outros usos da derivada covariante no Capítulo 6.

4.3 Cromodinâmica quântica

A teoria que descreve a interação forte é denominada de CDQ e sua descrição matemática é baseada na teoria de Yang-Mills, em particular no chamado grupo de cor $SU(3)$ [59]. Embora não tenhamos discutido o setor fermiônico, aqui devemos fazer uma breve introdução aos campos de matéria para melhor compreender alguns problemas em aberto em CDQ. Chamaremos os campos de matéria que compõem as partículas elementares de quarks, que diferem dos bósons pois possuem *spin* 1/2. Comumente, os campos fermiônicos são descritos na representação fundamental do grupo de *gauge*.

Existem seis tipos de quarks, classificados de acordo com os seus "sabores" e denominados de: u (*up*), d (*down*), c (*charm*), s (*strange*), t (*top*) e b (*bottom*). Coletivamente, rotulamos os diferentes tipos de quarks de acordo com os seus índice de sabor. Entretanto, ainda devemos preservar os índices do grupo de *gauge*, que aqui chamaremos de índices de cor. Portanto, um campo genérico de um quark, sempre possuirá dois índices $\psi^{a,A}$ com $a = 1, 2, 3$, representando os índices de cor (lembrando que aqui estamos utilizando a representação fundamental); $A = u, d, c, s, t, b$, sendo os índices de sabor.

Cada sabor de quark é descrito por uma Lagrangiana do tipo:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi, \tag{4.34}$$

em que suprimimos os índices do campo $\psi(x)$ e $\bar{\psi}(x)$ representa o complexo conjugado do campo complexo. Temos um novo operador dado por $\not{D} = \gamma^\mu D_\mu$, em que esta notação define a derivada covariante contraída com as matrizes de Dirac, isto é, uma generalização das matrizes de Pauli para 4 dimensões

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.35}$$

no qual $\sigma^\mu = (1, \sigma^i)$ e $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^i)$, com $i = 1, 2, 3$; representam as matrizes de Pauli.

O setor bosônico da CDQ segue a mesma construção matemática que explicitamos na Seção 4.2. Em outras palavras, para os bósons utilizamos a representação adjunta e, portanto, os campos de *gauge* $A^a_\mu(x)$ são denominados de glúons com $a = 1, \cdots, 8$, que contabiliza 8 tipos distintos.

Um dos grandes desafios apresentados em CDQ é lidar com o fato de que a "constante" de acoplamento da teoria, na realidade, depende da escala de energia em que estamos trabalhando, ou seja, $g = g(\mu)$, em que μ é uma escala de energia apropriada

[59]. Algumas teorias de *gauge* apresentam uma propriedade em que as interações entre partículas se tornam progressivamente mais fracas à medida que a energia aumenta e o comprimento correspondente diminui, conhecida como liberdade assintótica e representada na Figura 2, em que α_g tem uma dependência direta com $g(\mu)$. Isso implica que a teoria de Yang-Mills é mais simples de ser estudada em altas energias, isto é, centenas de MeVs, onde há uma descrição em termos de glúons não-massivos interagentes, cuja dinâmica é governada por equações de movimento clássicas. Além disso, as correções quânticas podem ser tratadas de forma perturbativa, facilitando sua análise.

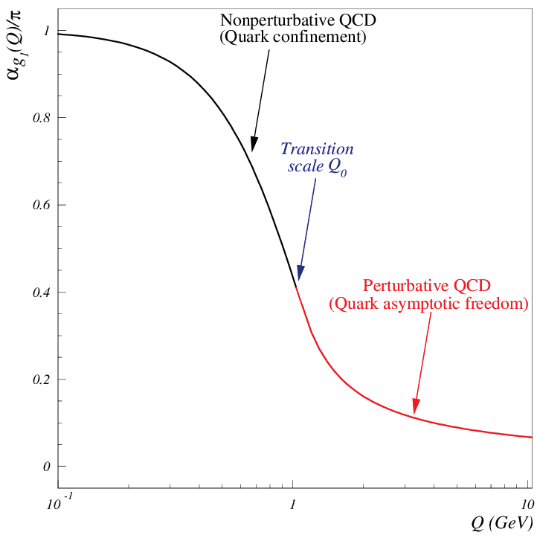

Figura 2 – Acoplamento unificado obtido a partir da correspondência analítica dos regimes não perturbativos e perturbativos da QCD. Retirado de [60].

Entretanto, em baixas energias, a teoria se torna não-perturbativa e, em particular, dizemos que os quarks estão confinados, visto que não conseguimos observá-los como partículas livres. É neste contexto que um dos grandes problemas da CDQ se revela. Não possuímos, até o momento, uma demonstração analítica do fenômeno de confinamento e, mesmo assim, o tratamos como algo fundamental à teoria [61].

A única forma que observamos os quarks são em estados singletos de cor. Denominamos de mésons os estados ligados de um quark com um anti-quarks e de bárions estados de três quarks, ou anti-quark. Coletivamente, chamamos os mésons e bárions de hádrons [59].

Para além da teoria de *gauge*, que exprime uma simetria de cor exata e local do grupo $SU(3)$, CDQ também possui uma simetria global relevante, denominada de simetria quiral. Uma vez que consideramos somente os quarks mais leves, ou seja, os quarks *up, down* e *strange*, com massas aproximadamente iguais em escala de energia, então podemos considerar uma simetria quiral aproximada[2] que diz respeito a uma rotação, independente

[2] O fato de consideramos uma simetria aproximada, gera uma gama de novos problemas que necessitam de uma discussão particular muito mais aprofundada do que temos a intenção de realizar neste trabalho. Portanto, iremos somente expor algumas das ideias relevantes para a continuação desta pesquisa.

de coordenada, no espaço de sabores [55].

Nesse contexto, surge um segundo grande problema em CDQ: como ocorre a geração de massa nos campos de Yang-Mills? Existem três propostas principais. A primeira sugere que a quebra espontânea de simetria do grupo de *gauge* $SU(3)$ ocorre através do acoplamento com um campo escalar, conhecido como axion [62, 63], de maneira análoga ao mecanismo de Higgs [9], pelo qual as partículas elementares adquirem massa. No entanto, esse procedimento, em várias instâncias, também está associado a modelos que descrevem a energia escura, tornando-o bastante especulativo. A segunda proposta explora como a dinâmica interna da teoria poderia influenciar a quebra de simetria, de forma dinâmica e não espontânea [64], como no caso do Higgs. Por outro lado, a terceira proposta argumenta que a simetria não é quebrada, mas que a transição do acoplamento fraco para o forte poderia ser responsável pelo surgimento das massas de alguma forma [65]; no entanto, essa ideia ainda não foi generalizada e trata apenas de casos específicos.

Em resumo, há muitas questões em aberto em CDQ, mas também há diversas propostas para o tratamento não-perturbativo da teoria em baixas energias. Neste trabalho, exploraremos uma destas propostas, mais especificamente, a que busca lidar com a dinâmica interna da teoria. O fato é que se consideramos a existência de uma quebra de simetria dinâmica, então, por consequência, isto implica em uma nova gama de fenômenos. Em particular, uma das primeiras constatações se torna o fato de que o vácuo da teoria não será único. É no contexto de transição entre esses vácuos que uma solução para a equação de movimento foi calculada, conhecida como solução de *instantons*. Discutiremos mais acerca disso no Capítulo 5.

4.4 Propagador livre dos glúons: primeira parte

Em alusão a como fizemos para a teoria escalar livre, determinaremos nesta seção o propagador dos glúons livres, mediante o formalismo funcional já construído no Capítulo 2.

Retomando a Lagrangiana de Yang-Mills, dada pela Eq. (4.23), podemos obter o propagador da teoria utilizando a derivada segunda do funcional gerador. Conforme vimos para o caso dos campos escalares, o processo acaba se resumindo em obter o inverso do operador que se encontra entre os campos na ação que descreve a teoria, ou seja

$$\mathcal{L} = \phi(x)\hat{O}\phi(x) \to G(x-y) = (\hat{O})^{-1}. \tag{4.36}$$

Desta forma, precisamos manipular a ação de forma a escrevê-la em termos dos campos de *gauge*, ao invés do tensor de intensidade. Como queremos obter somente o propagador para os glúons livres, os termos na ação de ordem maior do que quadrática nos campos devem ser desconsiderados. Portanto,

$$
\begin{aligned}
S[A] &= -\frac{1}{4}\int d^4x\, G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{4}\int d^4x\, (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) \\
&= -\frac{1}{4}\int d^4x\, (\partial_\mu A^a_\nu \partial^\mu A^{a\nu} - \partial_\mu A^a_\nu \partial^\nu A^{a\mu} - \partial_\nu A^a_\mu \partial^\mu A^{a\nu} + \partial_\nu A^a_\mu \partial^\nu A^{a\mu}) \\
&= -\frac{1}{2}\int d^4x\, (\partial_\mu A^a_\nu \partial^\mu A^{a\nu} - \partial_\mu A^a_\nu \partial^\nu A^{a\mu}) \qquad (4.37) \\
&= +\frac{1}{2}\int d^4x\, (A^{a\nu}\Box A^a_\nu - A^{a\mu}\partial^\nu \partial_\mu A^a_\nu) \\
&= +\frac{1}{2}\int d^4x\, (A^a_\mu \Box A^a_\nu \eta^{\mu\nu} - A^a_\mu \partial^\nu \partial^\mu A^a_\nu) \\
&= +\frac{1}{2}\int d^4x\, A^a_\mu (\Box \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A^a_\nu .
\end{aligned}
$$

Em que na segunda linha, abrimos os tensores de intensidade em termos dos campos de *gauge*. Na terceira linha, realizamos a distributiva entre os termos e na quarta linha, reorganizamos os índices de forma a somar os termos iguais e simplificar com o fator de 1/4. Na quinta linha, fizemos uso da integração por partes mas descartamos o termo de fronteira, visto que $A^a_\mu \to 0$ no infinito. Isto resulta na troca de ordem dos operadores com os campos, bem como, na mudança de um sinal global na integração. Na sexta linha, reorganizamos os índices novamente e introduzimos a métrica para deixar a forma dos campos iguais. E finalmente, na última linha, colocamos os operadores em evidência, no formato descrito na Eq. (4.36).

Dito isto, a determinação da função de Green para os glúons, segue, mais uma vez, da ideia de obter o inverso dos operadores que atuam nos campos. Logo,

$$
(\Box \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) G^{ab}_{\nu\rho}(x-y) = i\delta^{ab}\delta^\mu_\rho \delta(x-y). \qquad (4.38)
$$

Entretanto, a matriz formada pelos operadores é singular, o que, por consequência, não apresenta solução. Este problema mora na invariância por *gauge*. De modo geral, podemos afirmar que a integral funcional acaba sendo mal definida, pois ao integrar, estaremos somando sobre uma infinidade de configurações de campos fisicamente idênticas. E, portanto, é necessário determinar uma maneira que seja capaz de eliminar esta redundância em nossa descrição.

4.5 A condição de fixação de *gauge*

Vamos iniciar essa discussão com campos de *gauge* não-Abelianos. Desta forma, considere uma integral ordinária com a seguinte forma

$$
Z \propto \int dx\, dy\, e^{iS(x)}, \qquad (4.39)
$$

Como y não aparece em $S(x)$, sua integração é redundante e Z pode ser redefinido descartando a integral sobre a variável y

$$Z \equiv \int dx\, e^{iS(x)}. \tag{4.40}$$

A mesma resposta pode ser obtida com o uso de uma delta de Dirac, a qual reescreve Z como

$$Z = \int dx\, dy\, \delta(y)\, e^{iS(x)}. \tag{4.41}$$

Caso queiramos ser ainda mais genéricos, podemos reescrever o argumento na delta de modo a deslocá-lo por uma função arbitrária de x sem mudança no resultado:

$$Z = \int dx\, dy\, \delta(y - f(x))\, e^{iS(x)}. \tag{4.42}$$

Iremos colocar uma condição extra e afirmar que embora não tenhamos uma forma explícita para $f(x)$, queremos que $y = f(x)$ seja a única solução, com x fixo, de uma equação $F(x, y) = 0$. Desta maneira, podemos escrever

$$\delta(F(x, y)) = \frac{\delta(y - f(x))}{\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|}, \tag{4.43}$$

em que somente fizemos uso das propriedades padrão das deltas de Dirac. Ao assumirmos que $\partial F/\partial y$ é positivo, podemos desprezar o símbolo do módulo e reescrever Z como

$$Z = \int dx\, dy\, \frac{\partial F}{\partial y}\, \delta(F)\, e^{iS}. \tag{4.44}$$

Contudo, necessitamos deste resultado para infinitas integrações, visto que estamos trabalhando no contexto de integrais de caminho. Logo, iremos generalizar o resultado da Eq. (4.44) para uma integral sobre $d^n x\, d^n y$ e, então, precisaremos de n funções $F_i(x, y)$ para fixar todas as n componentes de y. Assim, teremos que

$$Z = \int d^n x\, d^n y\, \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right) \prod_i \delta(F_i)\, e^{iS}. \tag{4.45}$$

Isto posto, estamos aptos a retomar os campos de *gauge* não-Abelianos e verificar que o papel da variável de integração redundante y será assumido por todas as transformações de *gauge* $\theta^a(x)$; o papel da variável x será assumido pelos campos $A^a_\mu(x)$; de modo similar, F agora será uma função com o papel de fixação do *gauge*. Utilizaremos então a função de fixação de *gauge* como

$$F^a(x) \equiv \partial^\mu A^a_\mu(x) - \omega^a(x), \tag{4.46}$$

em que $\omega^a(x)$ é uma função arbitrária e fixa. E ainda, a variável x referente ao espaço-tempo e o índice a, assumem o papel do índice i na Eq. (4.45). E, portanto, a integral de caminho, ou funcional gerador, se torna

$$Z[J] \propto \int \mathcal{D}A\, \det\left(\frac{\delta F}{\delta \theta}\right) \prod_{x,a} \delta(F)\, e^{iS_{\mathrm{YM}}}, \tag{4.47}$$

sendo S_{YM} a ação de Yang-Mills acrescida de termos de fonte $J^a_\mu(x)$. Logo

$$S_{\text{YM}} = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^{a\mu\nu} + J^a_\mu A^{a\mu} \right). \tag{4.48}$$

Precisamos avaliar a derivada funcional $\delta F^a(x)/\delta\theta^b(y)$ e seu determinante funcional. Para isto, exploraremos que no caso de uma transformação de *gauge* infinitesimal, $F^a(x)$ pode ser reescrita como

$$F^a(x) \to F^a(x) - \partial^\mu D^{ab}_\mu \theta^b(x). \tag{4.49}$$

O entendimento disso surge mediante a inspeção da definição para a derivada covariante D_μ fornecida na Eq. (4.33). Visto que a derivada covariante é uma forma de descrever a variação dos campos de um lugar para outro, levando em consideração como os sistemas de coordenadas utilizados para descrever um fenômeno físico podem também variar ponto a ponto. Portanto a derivada da Eq. (4.49) se torna:

$$\frac{\delta F^a(x)}{\delta\theta^b(y)} = -\partial^\mu D^{ab}_\mu \delta(x-y). \tag{4.50}$$

Solucionamos parte do problema, mas ainda precisamos obter o determinante funcional presente na Eq. (4.47). Usaremos o fato de que um determinante funcional pode ser reescrito como uma integral de caminho, de forma similar ao resultado obtido na Eq. (2.22), porém aqui sobre variáveis complexas. Além disso utilizaremos nesta tarefa campos fermiônicos complexos $c^a(x)$, que também podem ser denominados de campos de Grassmann ou de fantasmas de Faddev-Popov [66]. Logo

$$\det \frac{\delta F^a(x)}{\delta\theta^b(y)} \propto \int \mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\, e^{iS_{\text{gh}}}, \tag{4.51}$$

em que estamos integrando tanto sobre os campos $c(x)$ quanto sua versão complexo conjugada $\bar{c}(x)$, enquanto S_{gh} é dada por

$$\begin{aligned} S_{\text{gh}} &= \int d^4x\; \bar{c}^a \partial^\mu D^{ab}_\mu c^b \\ &= \int d^4x\; \left(-\partial^\mu \bar{c}^a D^{ab}_\mu c^b \right) \\ &= \int d^4x\; \left(-\partial^\mu \bar{c}^a \partial_\mu c^a + ig\partial^\mu \bar{c}^a A^c_\mu (T^c)^{ab} c^b \right) \\ &= \int d^4x\; \left(-\partial^\mu \bar{c}^a \partial_\mu c^a + gf^{abc} A^c_\mu \partial^\mu \bar{c}^a c^b \right). \end{aligned} \tag{4.52}$$

Na primeira linha, apresentamos o termo invariante por *gauge* para os campos $c^a(x)$ enquanto na segunda linha, utilizamos a integração por partes para inverter a ordem dos termos e descartamos o termo de fronteira. Na terceira linha, expandimos o termo da derivada covariante e na última linha, retomamos as constantes de estrutura.

Um último detalhe que precisamos tratar é lidar com a função $\omega^a(x)$ que surge na Eq. (4.46). Sabemos que a função de fixação de *gauge* $F^a(x)$ contém a função arbitrária

$\omega^a(x)$, entretanto, o funcional gerador $Z[J]$ presente na Eq. (4.45) é independente de $\omega(x)$, ou seja, precisamos realizar um truque matemático para suprimir esta dependência. Portanto, é necessário multiplicar $Z[J]$ por um funcional de $\omega(x)$ e realizar a integral de caminho sobre os $\omega(x)$. O resultado será apenas um valor que pode ser absorvido por uma constante de normalização. Escolheremos esse funcional de $\omega(x)$ como

$$e^{-\frac{i}{2\xi}\int d^4x\, \omega^a\omega^a}. \tag{4.53}$$

Substituindo a Eq. (4.51) na Eq. (4.47), resolvemos nosso problema, uma vez que com a presença do funcional delta na Eq. (4.47), a integração sobre $\omega(x)$ se torna algo trivial. Como resultado final para o funcional gerador temos que

$$Z[J] \propto \int \mathcal{D}A\, \mathcal{D}\bar{c}\, \mathcal{D}c\; e^{i(S_{\text{YM}}+S_{\text{gh}}+S_{\text{gf}})}, \tag{4.54}$$

em que tanto S_{YM} quanto S_{gh} já foram introduzidos e S_{gf} representa a ação do termo de fixação de *gauge* que será dado por:

$$S_{\text{gf}} = \int d^4x \left(-\frac{1}{2\xi}\partial^\mu A^a_\mu \partial^\nu A^a_\nu\right). \tag{4.55}$$

Para os propósitos deste trabalho, os termos provenientes dos fantasmas de Faddeev-Popov não contribuirão para o cálculo do propagador vestido, pois são lineares nos campos $A^a_\mu(x)$ e, portanto, serão eliminados ao realizarmos a segunda derivada funcional.

4.6 Propagador livre dos glúons: segunda parte

Somaremos o termo de fixação de *gauge* obtido na Eq. (4.55) com a ação que consideramos na Eq. (4.37). Assim, temos

$$S[A] = \frac{1}{2}\int d^4x\, A^a_\mu \left[\Box\eta^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right] A^a_\nu, \tag{4.56}$$

em que só utilizamos a integração por partes para inverter a ordem das derivadas com o campo $A_\mu(x)$ no termo de fixação de *gauge*.

Desta forma, para obter o propagador é necessário determinar a inversa da seguinte expressão:

$$\left[\Box\eta^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right] G^{ab}_{\nu\rho}(x-y) = i\delta^{ab}\delta^\rho_\mu(x-y). \tag{4.57}$$

Entretanto, para evitar complicações com os operadores derivada faremos uso da transformada de Fourier e reescreveremos o propagador no espaço dos momentos. Logo

$$\left[\Box\eta^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu +\right] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} G^{ab}_{\nu\rho}(k) e^{-ikx} = i\delta^{ab}\delta^\mu_\rho \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx}, \tag{4.58}$$

atuando as derivadas nas exponenciais, obtemos

$$\left[k^2\eta^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^\mu k^\nu +\right] G^{ab}_{\nu\rho}(k) = i\delta^{ab}\delta^\mu_\rho. \tag{4.59}$$

Podemos utilizar um *ansatz* para a função $G(k)$, visto que no lado direito da igualdade não há dependências com tensores ou vetores. Desta forma, nosso *ansatz* deve ter a seguinte forma

$$G^{ab}_{\nu\rho}(k) = A^{ab}\eta_{\nu\rho} + B^{ab}k_\nu k_\rho, \tag{4.60}$$

sendo A^{ab} e B^{ab} fatores a serem determinados.

Substituindo a Eq. (4.60) na Eq. (4.59) e realizando a distributiva entre os termos, chegamos em

$$\begin{split} -A^{ab}k^2\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho} - B^{ab}k^2\eta^{\mu\nu}k_\nu k_\rho + A^{ab}\left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^\mu k^\nu \eta_{\nu\rho} \\ + B^{ab}\left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^\mu k^\nu k_\nu k_\rho = i\delta^{ab}\delta^\mu_\rho. \end{split} \tag{4.61}$$

Contudo, atuando as métricas nas funções, simplificamos a expressão para

$$-A^{ab}k^2\delta^\mu_\rho - B^{ab}k^2k^\mu k_\rho + A^{ab}\left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^\mu k_\rho + B^{ab}\left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^2 k^\mu k_\rho = i\delta^{ab}\delta^\mu_\rho. \tag{4.62}$$

Aqui é possível identificar a expressão para o parâmetro A^{ab} pois, o primeiro termo da Eq. (4.62) é independente das métricas e dos vetores. Assim, temos que

$$A^{ab} = -\frac{i\delta^{ab}}{k^2}. \tag{4.63}$$

Para obter a expressão para o parâmetro B^{ab}, é necessário substituir a Eq. (4.63) na Eq. (4.62). Desta forma, verificamos que

$$B^{ab}\left[-k^2k^\mu k_\rho + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^2 k^\mu k_\rho\right] = \frac{i\delta^{ab}}{k^2}\left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^\mu k_\rho. \tag{4.64}$$

Simplificando a Eq. (4.64) e isolando B^{ab}, chegamos na seguinte expressão:

$$B^{ab} = -\frac{i\xi\delta^{ab}}{k^4}\left(1 - \frac{1}{\xi}\right). \tag{4.65}$$

Portanto, substituindo as Eqs. (4.63) e (4.65) no *ansatz* dado pela Eq. (4.60), determinamos que o propagador para os glúons livres é:

$$G^{ab}_{\nu\rho}(k) = \frac{-i\delta^{ab}}{k^2}\left[\eta_{\nu\rho} - (1 - \xi)\frac{k_\nu k_\rho}{k^2}\right]. \tag{4.66}$$

É importante destacar que existem diversas possíveis escolhas para o valor de ξ. Contudo, na prática, duas escolhas são tratadas como as mais convenientes [56], sendo

$$\begin{matrix} \xi = 0 & (\textit{Gauge}\text{ de Landau}) \\ \xi = 1 & (\textit{Gauge}\text{ de Feynman}) \end{matrix} \quad , \tag{4.67}$$

neste trabalho trataremos ξ como uma constante livre.

Tendo apresentado alguns pontos centrais para a descrição da força forte por meio da CDQ, no Capítulo 5 discutiremos especificamente uma das propostas para a descrição da estrutura de vácuo da teoria, conhecida como solução de *instantons*.

5 Solução de *instantons* para o vácuo da CDQ

Vamos considerar uma teoria para um campo escalar interagente definida inicialmente no espaço de Minkowski e com densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - g^2\phi^4, \tag{5.1}$$

em que g representa uma constante de acoplamento.

Temos a intenção de explorar aproximações semiclássicas no contexto de TQC, mas para isso, precisamos discutir o seu significado. Para uma teoria clássica, g é um parâmetro irrelevante, isto se dá mediante a uma simples redefinição de campo:

$$\varphi(x) = g\phi(x), \tag{5.2}$$

de forma que, agora em termos de $\varphi(x)$, a densidade Lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g^2}\left(\frac{1}{2}\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \varphi^4\right). \tag{5.3}$$

Assim, o parâmetro g não aparece mais nas equações de campo.

Entretanto, em física quântica, g é um parâmetro relevante dada a sua relação com $\hbar$. Podemos verificar isso facilmente retomando a Eq. (2.44) e tornando explícita a dependência com $\hbar$ no expoente

$$\frac{\mathcal{L}}{\hbar} = \frac{1}{g^2\hbar}\left(\frac{1}{2}\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \varphi^4\right). \tag{5.4}$$

Portanto, quando estamos no contexto de aproximações semiclássicas, ou seja, aproximações com $\hbar \to 0$, se torna equivalente falar também em aproximações de acoplamento fraco, isto é, g pequeno em comparação com $\hbar$.

Todavia, se o modo padrão para se lidar com teorias com acoplamento fraco é usar métodos perturbativos, por que seria necessário explorar outros métodos? A resposta, conforme já discutimos no Capítulo 4, se apresenta mediante ao fato de que há uma gama de fenômenos físicos que necessitam de um tratamento não-perturbativo, principalmente em CDQ. Portanto, neste capítulo construiremos uma das teorias que busca descrever o estado de vácuo da CDQ, cenário em que o tratamento perturbativo não é viável.

5.1 *Instantons* em mecânica quântica

Podemos considerar um caso equivalentemente simples em mecânica quântica. Supondo uma partícula com massa unitária suscetível a um potencial unidimensional

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - V(x, g), \tag{5.5}$$

em que $V(x, g)$ possui uma dependência com a constante de acoplamento e, também, com uma função qualquer $f(x, g)$ com termos quadráticos em primeira ordem em sua expansão em série de Taylor

$$V(x, g) = \frac{1}{g^2} f(gx). \tag{5.6}$$

Neste contexto, queremos estudar o fenômeno de transmissão de uma partícula através de uma barreira de potencial, ou seja, o fenômeno de tunelamento quântico. Este processo já foi amplamente explorado no âmbito de mecânica quântica e uma das técnica desenvolvidas para a determinação da amplitude de transmissão advém do método WKB (*Wentzel-Kramers-Brillouin*) [41, 67–69].

A concepção fundamental por trás deste método antecede a mecânica quântica, uma vez que pode ser aplicado a qualquer tipo de onda. Ele se baseia na expansão da solução da equação da onda em relação à razão entre o comprimento de onda e a escala do ambiente no qual a onda se propaga, especialmente quando essa razão é pequena. No contexto formal da mecânica quântica, isso corresponde a considerar $\hbar \to 0$ e assim fazer com que a equação de Schrödinger se torne idêntica à uma das variantes da equação de Hamilton-Jacobi.

No entanto, o que nos propomos a fazer é apresentar um método alternativo para determinar a amplitude de transição entre os estados classicamente proibidos. Para tal, ainda no contexto de mecânica quântica, trataremos de uma partícula descrita conforme a Eq. (5.5). Isto é, uma partícula sem *spin*, de massa unitária e imersa em um potencial $V(x)$ unidimensional.

A ferramenta que utilizaremos será a integral funcional, visando justamente, ao fim de nossos cálculos, uma generalização imediata para o contexto de TQC. Entretanto, aqui faremos uso de sua versão Euclidiana. Para isto, devemos tomar alguns cuidados com notação.

A transição do espaço de Minkowski para o espaço Euclidiano ocorre através de uma continuação analítica da componente temporal, $x^4 = -ix^0$, conforme representado na Figura 3. Sendo, então, um ponto no espaço Euclidiano descrito por x^μ, com $\mu = 1, 2, 3, 4$; em que a assinatura da métrica se torna $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, -1, -1, -1)$.

Desta forma, reescrevemos a Eq. (2.25), de modo que o expoente na integral de caminho se torne um objeto real

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}x(t)\, e^{-S_E[x,\dot{x}]}. \tag{5.7}$$

Podemos determinar a equação de movimento pela minimização da ação, que aqui é somente a integral temporal da Lagrangiana descrita na Eq. (5.5)

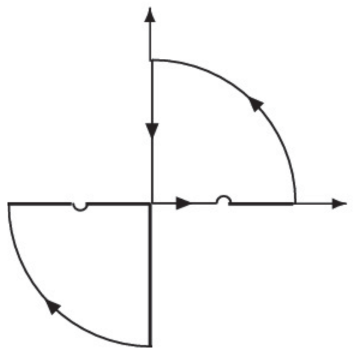

Figura 3 – Rotação de Wick. Continuação analítica da componente k^0 para o plano complexo. Retirado de [56].

$$S_E = \int dt \left[\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x)\right]. \tag{5.8}$$

A inversão de sinal ocorre devido ao fato de que o termo cinético também adquire um sinal negativo através da rotação de Wick [57]. Assim

$$S_E = -iS. \tag{5.9}$$

O processo de minimização se dá através da garantia de que a derivada funcional da ação seja nula. Logo,

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\delta S_E[x(t)]}{\delta x(t)}\right|_{x(t')=\bar{x}(t')} &= \int dt \left\{\frac{1}{2}\left[\frac{\delta}{\delta x(t')}\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)\right]\cdot 2 + \frac{\delta V[x(t)]}{\delta x(t')}\right\} \\
&= \int dt \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{\delta}{\delta x(t')}\left(\frac{dx}{dt}\right) + V'[x(t)]\delta(t-t')\right] \\
&= \int dt \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{d}{dt}\delta(t-t') + V'[x(t)]\delta(t-t')\right] \\
&= \left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} - \int \frac{d^2x}{dt^2}\,dt + \int dt\, V'[x(t)]\right\}\delta(t-t') \\
&= -\frac{d^2\bar{x}}{dt'^2} + V'(\bar{x}).
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Na primeira linha, fizemos uso da regra da cadeia para simplificar o termo de 1/2 na expressão. Na segunda linha, representamos a derivada do potencial com relação à x como V'. Na terceira linha, exploramos a propriedade de comutação da derivada com a derivada funcional. Na quarta linha, utilizamos a integral por partes, em que o primeiro termo deve ser nulo, visto que estamos tomando o limite no infinito. Portanto, podemos afirmar que:

$$\left.\frac{\delta S[x(t)]}{\delta x(t')}\right|_{x(t')=\bar{x}(t')} = -\ddot{\bar{x}}(t') + V'(\bar{x}(t')) = 0. \tag{5.11}$$

Assumindo que $\bar{x}(t)$ satisfaça a Eq. (5.11) e fazendo uma perturbação em torno de $\bar{x}(t)$, obtemos:

$$S[x(t)] = S[\bar{x}(t)] + \frac{1}{2}\int dt'dt'' \frac{\delta^2 S[x(t)]}{\delta x(t')\delta x(t'')}\bigg|_{x(t)=\bar{x}(t)} \delta x(t')\delta x(t'') + \cdots , \tag{5.12}$$

na qual já omitimos a derivada em primeira ordem, dada a condição que está sendo assumida na Eq. (5.11).

Contudo, ainda precisamos determinar a expressão para a derivada segunda da ação em relação à $\bar{x}(t)$. Para isso iremos partir do resultado explicitado na última linha da Eq. (5.10). Logo, chegamos em

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 S[x(t)]}{\delta x(t')\delta x(t'')}\bigg|_{x(t)=\bar{x}(t)} &= \frac{\delta}{\delta x(t'')}\left\{-\left(\frac{d}{dt'}\right)\left(\frac{d\bar{x}(t')}{dt'}\right) + V'[\bar{x}(t')]\right\} \\ &= -\frac{d}{dt'}\frac{d}{dt'}\delta(t'-t'') + V''[\bar{x}(t')]\delta(t'-t'') \\ &= \left\{-\frac{d^2}{dt'^2} + V''[\bar{x}(t')]\right\}\delta(t'-t''). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Na primeira linha, somente reescrevemos a expressão para a derivada de segunda ordem em relação ao tempo. Na segunda linha, exploramos a propriedade de comutação da derivada com a derivada funcional e também operamos a derivada funcional. E ainda, na última linha fatoramos as deltas de Dirac.

Retornando à expansão em Taylor na Eq. (5.12), temos então que:

$$S[x] = S[\bar{x}] + \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{+T/2} dt\, \delta x(t)\left[-\frac{d^2}{dt^2} + V''(\bar{x}(t))\right]\delta x(t) + \ldots . \tag{5.14}$$

Podemos reescrever as variações $\delta x(t)$ em termos de um conjunto completo de autofunções $x_n(t)$ dos operadores presentes na Eq. (5.14), isto é:

$$\left[-\frac{d^2}{dt^2} + V''(\bar{x}(t))\right] x_n(t) = \lambda_n x_n, \tag{5.15}$$

suplementados com as seguintes condições de contorno

$$x_n(-T/2) = x_n(+T/2) = 0. \tag{5.16}$$

Para o caso de funções avaliadas em variáveis contínuas distintas, a relação de completeza pode ser expressa por

$$\sum_n x_n(t)x_n(t') = \delta(t-t'), \tag{5.17}$$

enquanto a ortonormalidade das autofunções nos garante que

$$\int_{-T/2}^{+T/2} dt\, x_n(t)x_m(t) = \delta_{nm}. \tag{5.18}$$

Portanto, as variações podem ser expandidas como uma combinação linear das próprias autofunções do Hamiltoniano, que formam uma base, resultando em

$$\delta x(t) = \sum_n c_n x_n(t). \tag{5.19}$$

Assim, a expansão da ação descrita na Eq. (5.14) se torna:

$$S[x] = S[\bar{x}] + \frac{1}{2}\sum_n \lambda_n c_n^2 + O(c_n^3), \tag{5.20}$$

em que usamos somente a condição de ortonormalidade.

Desta forma, a integral de caminho apresentada na Eq. (5.7) representa um produto de integrais Gaussianas, que têm a solução apresentada na Eq. (2.22), isto é, agora depende dos autovalores λ_n. Isso pode ser verificado ao explicitarmos os elementos de matriz

$$\langle \bar{x}(+T/2)|\, e^{-T\hat{H}/\hbar}\, |\bar{x}(-T/2)\rangle = N \int \mathcal{D}x(t)\, e^{-\frac{1}{\hbar}\left[S[\bar{x}]+\frac{1}{2}\sum_n \lambda_n c_n^2 + O(c_n^3)\right]}. \tag{5.21}$$

O termo da ação redefinido em $\bar{x}(t)$ não depende da medida funcional e portanto pode ser retirado da integral, obtendo assim:

$$\langle \bar{x}(+T/2)|\, e^{-T\hat{H}/\hbar}\, |\bar{x}(-T/2)\rangle = e^{-\frac{S[\bar{x}]}{\hbar}} N \int \mathcal{D}x(t)\, e^{-\frac{1}{\hbar}\left[\frac{1}{2}\sum_n \lambda_n c_n^2 + O(c_n^3)\right]}. \tag{5.22}$$

Para os propósitos deste desenvolvimento, como definimos a dependência em relação aos autovalores e não mais ao espaço-tempo, podemos definir a medida funcional como:

$$\mathcal{D}x(t) \to \prod_n \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi\hbar}}, \tag{5.23}$$

evidenciando que temos uma integral Gaussiana nos diversos c_n. O papel da constante N é relevante no sentido de que qualquer diferença na normalização obtida no Capítulo 2 pode ser absorvida por esta constante ainda não definida. Os elementos de matriz se tornam então:

$$\langle \bar{x}(+T/2)|\, e^{-T\hat{H}/\hbar}\, |\bar{x}(-T/2)\rangle = e^{-\frac{S[\bar{x}]}{\hbar}} N \prod_n \int \frac{d\tilde{c}_n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left[\frac{1}{2}\lambda_n \tilde{c}_n^2 + O(\hbar)\right]}, \tag{5.24}$$

na qual, reescalamos $c_n = \tilde{c}_n\sqrt{\hbar}$ e, por consequência, alteramos a dependência dos termos de mais alta ordem somente para $\hbar$, de forma que os reescrevemos como $O(\hbar)$. A solução desta integral Gaussiana já foi amplamente discutida e nos valeremos apenas dos resultados:

$$\langle \bar{x}(T/2)|\, e^{-T\hat{H}/\hbar}\, |\bar{x}(-T/2)\rangle = N e^{-\frac{S[\bar{x}]}{\hbar}} \prod_n \lambda_n^{-1/2}[1 + O(\hbar)]. \tag{5.25}$$

Ao assumirmos que há somente uma autofunção máxima e positiva, podemos utilizar a solução da integral Gaussiana:

$$\langle \bar{x}(T/2)|\, e^{-T\hat{H}/\hbar}\, |\bar{x}(-T/2)\rangle = N e^{-\frac{S[\bar{x}]}{\hbar}} [\det(-\partial_t^2 + V''(\bar{x}))]^{-1/2}[1 + O(\hbar)]. \tag{5.26}$$

Aqui se torna explícita a contribuição não perturbativa para a amplitude de transição, advinda do limite de $\hbar \to 0$. O termo exponencial carrega um fator de $\hbar$ presente na ação clássica definida no seu extremo $\bar{x}(t)$. Entretanto, ainda devemos aprofundar a discussão e buscar exemplos não-triviais.

5.2 Poço simétrico duplo

Considere o operador paridade $\hat{\mathcal{P}}$, definido como $\hat{\mathcal{P}}^2 = \mathbb{1}$, que ao atuar em um auto-estado inverte seu sinal $\hat{\mathcal{P}}\,|x\rangle = |-x\rangle$ e que também comuta com o operador Hamiltoniano. Podemos explorar os seguintes elementos de matriz através do uso do operador identidade:

$$\begin{aligned}\langle x|\, e^{-\frac{t}{\hbar}\hat{H}}\,|y\rangle &= \langle x|\,\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{P}}e^{-\frac{t}{\hbar}\hat{H}}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{P}}\,|y\rangle \\ &= \langle -x|\,\hat{\mathcal{P}}e^{-\frac{t}{\hbar}\hat{H}}\hat{\mathcal{P}}\,|-y\rangle \\ &= \langle -x|\, e^{-\frac{t}{\hbar}\hat{H}}\,|-y\rangle\,.\end{aligned} \tag{5.27}$$

Com isto em mente, ao invés de posições arbitrárias, se considerarmos posições x e y, pontos simetricamente espaçados por uma distância a que representam os pontos de mínimo de um potencial de poço duplo (Figura 4), então temos que a forma do potencial é dada por

$$V(x) = (a^2 - x^2)^2, \tag{5.28}$$

em que a é uma parâmetro constante não nulo.

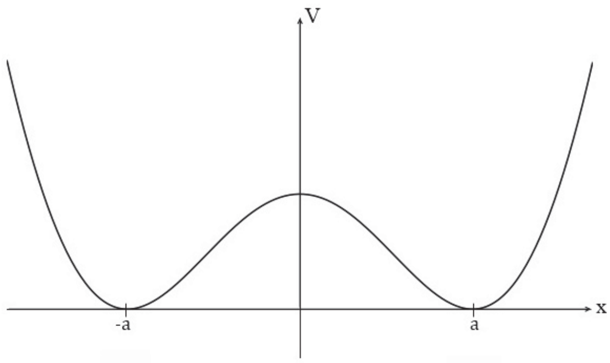

Figura 4 – Potencial de poço duplo.

Podemos reescrever a igualdade dos elementos de matriz que verificamos na Eq. (5.27) como

$$\langle \pm a|\, e^{-\frac{t}{\hbar}\hat{H}}\,|a\rangle = \langle \mp a|\, e^{-\frac{t}{\hbar}\hat{H}}\,|-a\rangle\,. \tag{5.29}$$

No entanto, conhecemos quais são as soluções triviais que satisfazem a Eq. (5.11), uma vez que os pontos estão descritos na Figura 4,

$$\bar{x}(t) = \pm a. \tag{5.30}$$

Contudo, uma segunda condição também advém da Eq. (5.11), que pode ser verificado ao multiplicar ambos os lados desta equação por $\dot{\bar{x}}$, de modo que obtemos

$$\ddot{\bar{x}}(t)\dot{\bar{x}}(t) = V'(\bar{x}(t))\dot{\bar{x}}. \tag{5.31}$$

Integrando no tempo ambos os lados da Eq. (5.31) e reescrevendo as derivadas, chegamos em

$$\int \left(\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}\frac{d\bar{x}}{dt}\right) dt = \int \left(\frac{dV}{d\bar{x}}\frac{d\bar{x}}{dt}\right) dt. \tag{5.32}$$

No lado esquerdo da Eq. (5.32), temos

$$\int \left(\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} \frac{d\bar{x}}{dt} \right) dt = \int \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{d\bar{x}}{dt} \right) \frac{d\bar{x}}{dt} \right] dt, \tag{5.33}$$

em que utilizando a regra da cadeia. Podemos reescrevê-la como

$$\frac{d}{dt}(\dot{\bar{x}}^2) = 2\frac{d}{dt} \left(\frac{d\bar{x}}{dt} \right) \frac{d\bar{x}}{dt}. \tag{5.34}$$

Portanto, a integral se resume em:

$$\int \left(\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} \frac{d\bar{x}}{dt} \right) dt = \frac{1}{2} \int \frac{d}{dt}(\dot{\bar{x}}^2) dt = \frac{1}{2}\dot{\bar{x}}^2. \tag{5.35}$$

Enquanto isso, no lado direito da Eq. (5.32), encontramos que

$$\frac{dV}{d\bar{x}} \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{dV}{dt}, \tag{5.36}$$

sendo a integração em relação ao tempo dada por

$$\int \left(\frac{dV}{d\bar{x}} \frac{d\bar{x}}{dt} \right) dt = V(\bar{x}(t)) + c^2, \tag{5.37}$$

no qual c^2 é uma constante com origem nas integrações impróprias. Desta forma, através dessas manipulações, a Eq. (5.31) pode ser reescrita como:

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sqrt{2V(\bar{x}(t)) + c^2}. \tag{5.38}$$

A partir da Eq. (5.38), podemos demonstrar que a constante c^2 está associada à velocidade inicial, visto que ao tomarmos $V(\bar{x}(0))$, obtemos

$$\dot{\bar{x}}(0) = \sqrt{2V(\bar{x}(0)) + c^2} = c. \tag{5.39}$$

Podemos integrar uma segunda vez a Eq. (5.38), da posição $-a$ no tempo inicial $-T/2$, até um $\bar{x}(t)$ em um tempo arbitrário t, de forma que

$$\int_{-a}^{\bar{x}(t)} \frac{d\bar{x}}{\sqrt{2V(\bar{x}) + c^2}} = \int_{-T/2}^{t} dt = t + \frac{T}{2}. \tag{5.40}$$

Ao escolhermos a posição final é $\bar{x}(t) = a$, então determinamos uma restrição para c^2, pois

$$\int_{-a}^{a} \frac{d\bar{x}}{\sqrt{2V(\bar{x}) + c^2}} = T. \tag{5.41}$$

Isto posto, as únicas contribuições para a ação virão da solução de interpolação explicitada na Eq. (5.40), uma vez que as soluções constantes $\bar{x}(t) = \pm a$ resultam em valores nulos. Logo, substituindo a solução que obtivemos na ação, temos que

$$\begin{aligned}
S_E[\bar{x}] &= \int_{-T/2}^{+T/2} dt\, \left(\frac{1}{2}\dot{\bar{x}}^2(t) + V(\bar{x}(t))\right) \\
&= \int_{-T/2}^{+T/2} dt\, \left(\frac{1}{2}\dot{\bar{x}}^2(t) + \frac{1}{2}\dot{\bar{x}}^2 - \frac{1}{2}c^2\right) \\
&= \int_{-T/2}^{+T/2} dt\, (\dot{\bar{x}}^2(t) - c^2) \\
&= \left(\int_{-T/2}^{+T/2} dt\, \dot{\bar{x}}(t)\dot{\bar{x}}(t)\right) - Tc^2 \\
&= \left(\int_{-T/2}^{+T/2} \sqrt{2V(\bar{x}(t)) + c^2}\frac{d\bar{x}}{dt}dt\right) - Tc^2 \\
&= \left(\int_{-a}^{+a} \sqrt{2V(\bar{x}) + c^2}\, d\bar{x}\right) - Tc^2.
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Na segunda linha, substituímos o potencial $V(x)$ pela expressão na Eq. (5.38) e, na terceira linha, reescalamos $c^2/2 \to c^2$, visto que c é somente uma constante arbitrária. Na quarta linha, integramos o segundo termo e separamos a derivada segunda, pois na quinta linha utilizamos a Eq. (5.38) como solução de $\dot{\bar{x}}(t)$. E, na última linha, fizemos uma substituição de variável, trocando a integração do tempo pela posição e ajustamos os limites para tal.

Entretanto, se verificarmos a Eq. (5.41), vemos que se considerarmos a interpolação de $-a$ a a, em um tempo T cada vez maior, então, consequentemente, o parâmetro c deverá ser cada vez menor. Assim, podemos desconsiderar o termo c^2, uma vez que tomamos $c \to 0$ e redefinimos $S_E[\bar{x}] \equiv S_0$, sendo:

$$S_0 = \int_{-a}^{+a} \sqrt{2V(\bar{x})}\, d\bar{x}. \tag{5.43}$$

Há um nome próprio para esta classe de soluções clássicas no espaço Euclidiano: solução de *instantons* [70].

Por fim, para $t \to 0$, $\bar{x} \to a$ e então a Eq. (5.38) pode ser aproximada por

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \omega(a - \bar{x}), \tag{5.44}$$

em que a determinação explícita de $\omega(x)$ é irrelevante para os propósitos desta discussão. Assim, a solução para $\bar{x}(t)$ deve ter a forma:

$$(a - \bar{x}) \propto e^{-\omega t}. \tag{5.45}$$

A Eq. (5.45) nos fornece uma interpretação mais direta em relação ao significado dos "*instantons*", tendo em vista que $\bar{x}$ está exponencialmente perto de $\pm a$ para $t > 1/\omega$, dizemos que estes são objetos bem localizados com "tamanho" $1/\omega$. Então, para $t \to \infty$ a solução é trivialmente igual à $\pm a$. Portanto, a solução não trivial existe somente por "instantes" em relação ao tempo T, o qual estamos considerando como $T \to \infty$.

5.3 *Instantons* em Yang-Mills

Após esta introdução ao conceito de *instantons* em mecânica quântica, podemos estender nossas discussões ao âmbito das teorias de campo com certa fluidez conceitual. Entretanto, conforme veremos, o tratamento matemático difere em diversos pontos. Estamos interessados em estudar configurações finitas da ação dos campos de *gauge* no espaço Euclidiano, visto que exploraremos aproximações semiclássicas. Porém, como verificar isto através da integral funcional?

Conforme discutimos no Capítulo 4, existem outros possíveis termos invariantes por *gauge* que podem ser adicionados à ação de Yang-Mills. Um destes termos é denominado de termo *theta*, dado por:

$$S_\theta[A] = \frac{\theta}{16\pi^2}\int d^4x\; tr\; \tilde{G}^{\mu\nu}G_{\mu\nu}, \tag{5.46}$$

com $\tilde{G}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}G_{\rho\sigma}$. Este termo pode ser reescrito como uma derivada total, de forma que

$$S_\theta[A] = \frac{\theta}{8\pi^2}\int d^4x\, \partial_\mu K^\mu, \tag{5.47}$$

sendo

$$K^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} tr\left(A_\nu\partial_\rho A_\sigma - \frac{2i}{3}A_\nu A_\rho A_\sigma\right). \tag{5.48}$$

É nesta descrição que conseguimos verificar que se as configurações de campo tiverem valores não evanescentes de S_θ, então algo não trivial acontece quando tomamos o limite do infinito.

Embora uma descrição matemática fortemente relacionada com a topologia dos campos de *gauge* seja possível para compreender este problema, aqui nos valeremos somente de uma breve apresentação dos pontos-chave necessários para se determinar a solução dos *instantons* no $SU(3)$.

De forma similar a como ocorreu no contexto de mecânica quântica, faremos a rotação de *Wick* e trabalharemos no espaço-tempo Euclidiano. E, ainda, sabemos que a Lagrangiana de Yang-Mills se transforma de acordo com a Eq. (4.25). Contudo, se tomarmos $x \to \infty$, as configurações de campos devem tender assintoticamente para uma configuração de "*gauge* puro", isto é:

$$A_\mu \to i\Omega\partial_\mu\Omega^{-1}. \tag{5.49}$$

Isso resulta em configurações finitas da ação de Yang-Mills, visto que, no espaço Euclidiano, elas envolvem um mapeamento do tipo:

$$\Omega(x) : \mathbf{S}^3_\infty \to G. \tag{5.50}$$

Estes mapas pertencem a uma classe conhecida e são caracterizados pelo grupo homotópico $\Pi_3(G) = \mathbf{Z}$. Isto é, pela classe de funções que podem ser deformadas continuamente uma na outra.

Com estas configurações finitas em mente, podemos reescrever a ação do termo *theta*, substituindo a Eq. (5.49) na Eq. (5.47), de forma a expor a dependência com um novo parâmetro ν

$$S_\theta = \theta\nu, \tag{5.51}$$

em que ν é denominado de *winding number*, ou como número de Pontryagin [70], e possui a seguinte expressão:

$$\nu(\Omega) = \frac{1}{24\pi^2}\int_{\mathbf{S}^3_\infty} d^3S\epsilon^{ijk}\ \mathrm{tr}\,(\Omega\partial_i\Omega^{-1})(\Omega\partial_j\Omega^{-1})(\Omega\partial_k\Omega^{-1}), \tag{5.52}$$

sendo este um número inteiro relacionado a quantidade de vezes que $\Omega(x)$ contorna a esfera $\mathbf{S}^3_\infty$, na qual as configurações estão inscritas.

A Eq. (5.52) nos fornece duas informações: cada configuração de campo de *gauge* da ação Euclidiana finita está associada a um número inteiro; e, é impossível deformar continuamente a configuração de um campo de *gauge* $\Omega(x)$ em outra com ν distinto mantendo, ao mesmo tempo, a ação finita.

Portanto, com a possibilidade de muitas configurações clássicas não equivalentes dos campos de *gauge*, esperamos a existência de muitas configurações de vácuo diferentes, assim como a possibilidade de tunelamento quântico entre elas. É neste ponto em que entrelaçamos nossos conhecimentos sobre os *instantons*, discutidos no âmbito de mecânica quântica, com as teorias de *gauge*.

Com a definição de ν, estamos aptos a determinar a equação que descreve os *instantons* no contexto de Yang-Mills. Dentre as configurações de campo, com ν não evanescente, algumas resolvem a equação de movimento

$$D_\mu G^{\mu\nu} = 0. \tag{5.53}$$

Há uma maneira interessante de se determinar estas soluções através do uso da seguinte identidade:

$$S[\theta] = \frac{1}{4g^2}\int d^4x\left[\pm G^a_{\mu\nu}\tilde{G}^a_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(G^a_{\mu\nu} \mp \tilde{G}^a_{\mu\nu})^2\right] \geq \frac{8\pi^2}{g^2}|\nu|, \tag{5.54}$$

em que já não nos importamos com a contração dos índices, tendo em vista que estamos no espaço-tempo Euclidiano.

A inequação na Eq. (5.54) surge quando verificamos que o primeiro termo é um invariante topológico, ou seja, mantém a sua forma mediante a seguinte mudança:

$$G^a_{\mu\nu} = \pm\tilde{G}^a_{\mu\nu}. \tag{5.55}$$

Porém, o último termo da Eq. (5.54) é sempre positivo. E, portanto, podemos provar que a ação é limitada com

$$-\int d^4x\,(G_{\mu\nu} \pm \tilde{G}_{\mu\nu})(G_{\mu\nu} \pm \tilde{G}_{\mu\nu}) \geq 0, \tag{5.56}$$

no qual o sinal negativo aparece pois estamos considerando que os campos de *gauge* e os tensores de intensidade são anti-Hermitianos. Ao expandir o binômio, obtemos

$$-\int d^4x \left(G_{\mu\nu}G_{\mu\nu} + \tilde{G}_{\mu\nu}\tilde{G}_{\mu\nu} \pm 2G_{\mu\nu}\tilde{G}_{\mu\nu}\right) \geq 0. \tag{5.57}$$

Como os dois primeiros termos são iguais, então temos que:

$$-\int d^4x\, G_{\mu\nu}G_{\mu\nu} \geq \left|\int d^4x\, G_{\mu\nu}\tilde{G}_{\mu\nu}\right|. \tag{5.58}$$

O termo do lado esquerdo da Eq. (5.58) é proporcional à ação de Yang-Mills no espaço Euclidiano, enquanto o termo do lado direito é proporcional à ação do termo *theta*. Assim, podemos observar que:

$$\begin{aligned} 2g^2 S &\geq \frac{16\pi^2}{\theta} S_\theta \\ S &\geq \frac{8\pi^2}{g^2\theta} S_\theta \\ S &\geq \frac{8\pi^2}{g^2}|\nu|, \end{aligned} \tag{5.59}$$

em que, na primeira linha, fizemos uso das Eqs. (4.24) e (5.46). E, na terceira linha substituímos S_θ pela dada expressão na Eq. (5.51).

Focaremos no grupo de *gauge* $G = SU(3)$ e utilizaremos somente o *winding number* $\nu = 1$, pois ela é considerada a configuração padrão. Portanto, temos que o *instanton* é justamente uma solução para a equação auto-dual, escrita na Eq. (5.55), sendo dada na notação de 't Hooft por:

$$A^a_\mu(x) = \frac{2\eta_{a\mu\nu}x_\nu}{x^2+\rho^2}, \tag{5.60}$$

em que o tensor de 't Hooft $\eta_{a\mu\nu}$, é definido como:

$$\eta_{a\mu\nu} = \begin{cases} \epsilon_{a\mu\nu} & \mu,\nu = 1,2,3 \\ \delta_{a\mu} & \nu = 4 \\ -\delta_{a\nu} & \mu = 4 \end{cases}, \tag{5.61}$$

na qual ρ é um parâmetro arbitrário relacionado ao “tamanho” do *instanton*. Isto pode ser verificado ao olharmos para o tensor de intensidade

$$F^a_{\mu\nu}(x) = \frac{4\rho^2\eta_{a\mu\nu}}{(x^2+\rho^2)^2}, \tag{5.62}$$

e compreendermos que ele está localizado em uma esfera de raio ρ, conforme a expressão em seu denominador.

Uma forma mais geral para as soluções de *instantons* é dada se deslocarmos a função da origem e reescrevermos a Eq. (5.60) como:

$$A^a_\mu(x) = \frac{2}{g}\frac{\eta_{a\mu\nu}(x-z)_\nu}{(x-z)^2+\rho^2}. \tag{5.63}$$

De modo similar ao processo que discutimos para deduzir a expressão de correção de laço na Eq. (2.87), em um artigo seminal que buscou determinar as contribuições dos *instantons* para as funções de correlação [71], utilizou-se a Eq. (5.63) como solução para os campos $A^a_\mu(x)$ no funcional gerador. Partindo da ideia de que o integrando deveria ser aproximadamente Gaussiano, tomou-se uma nova expansão perturbativa, na qual inclusive os graus de liberdade z_μ e ρ foram integrados. O resultado desta integração ficou conhecido na literatura como modelo de gás de instantons [22].

Embora essas discussões tenham surgido ainda no contexto do grupo $SU(2)$ e chamando os *instantons* de "pseudopartículas" [64, 72], um modelo mais atual é o *ensemble* do líquido de *instantons*. Neste modelo, não somente a posição e tamanho dos *instantons* são tratados como variáveis mas, também, a orientação de cor e a densidade no espaço-tempo [73].

Na estrutura destes modelos os cálculos são, em sua grande maioria, numéricos e baseados em CDQ na rede, isto é, a versão discretizada do espaço-tempo em que os campos de *gauge* são definidos. Contudo, ainda assim, um grande número de funções de correlação hadrônicas foram obtidas [23], avançando nosso entendimento acerca do vácuo da CDQ, mas ainda assim, o tratamento dos *instantons* não foi capaz de nos fornecer uma teoria coesa.

Neste contexto, nos propomos a estudar os efeitos que o formalismo da ação efetiva não-local acarreta na solução de *instantons*, bem como na expressão para o propagador vestido com esses fatores. Discutiremos isso em maiores detalhes no próximo capítulo.

6 Propagador vestido

Com a discussão desenvolvida nos capítulos anteriores, estamos agora preparados para determinar o propagador dos glúons, incorporando os efeitos da correção quântica não-local. Inicialmente, apresentaremos a nova expressão para a ação que descreve os glúons, seguindo um procedimento semelhante ao utilizado no Capítulo 4. Em particular, reescreveremos a ação em termos dos campos $A_\mu(x)$, ao invés dos tensores de intensidade $G_{\mu\nu}(x)$. Em seguida, determinaremos a expressão para o propagador modificado e, utilizando o formalismo de Kallen-Lehmann, introduzido no Capítulo 3, analisaremos a função de densidade espectral associada a esse propagador corrigido.

6.1 Ação efetiva para os glúons

A correção quântica de um laço para a ação efetiva dos glúons É expressada através da seguinte equação:

$$\Gamma[A] = \int d^4x \; G^a_{\mu\nu}(x) \left[-\frac{1}{4} + \alpha \log\left(\frac{\Box}{\mu^2}\right) \right] G^{a\mu\nu}(x), \tag{6.1}$$

em que combinamos a forma generalizada para a correção não-local fornecida na Eq. (2.88) com a ação de Yang-Mills que apresentamos na Eq. (4.24) e estabelecemos a igualdade mediante a introdução da constante α. A constante α está relacionada ao número de campos presentes em nossa teoria, mas, neste contexto, a consideraremos como um parâmetro livre. Além disso, α nos permite verificar que, ao tomar o limite $\alpha \to 0$, o propagador deve retornar à sua forma livre, sem correções.

Separaremos a ação em dois termos: $\Gamma_{cl}[A]$ e $\Gamma_{\text{laço}}[A]$. O termo clássico é dado por

$$\Gamma_{cl}[A] \equiv -\frac{1}{4} \int d^4x \; G^a_{\mu\nu}(x) G^{a\mu\nu}(x), \tag{6.2}$$

enquanto o termo com as correções quânticas de um laço é

$$\Gamma_{\text{laço}}[A] \equiv \alpha \int d^4x \; G^a_{\mu\nu}(x) \log\left(\frac{\Box}{\mu^2}\right) G^{a\mu\nu}(x). \tag{6.3}$$

Portanto, reescrevemos a ação efetiva como

$$\Gamma[A] = \Gamma_{cl}[A] + \Gamma_{\text{laço}}[A]. \tag{6.4}$$

O desafio se apresenta em trabalhar com o novo termo logarítmico e, desta forma, nesta seção no dedicaremos ao tratamento da ação $\Gamma_{\text{laço}}$, visto que a parte clássica já foi discutida no Capítulo 4.

Primeiramente, devemos tratar do termo d'Alambertiano covariante que aqui é definido a partir das derivadas covariantes

$$\Box = D_\mu D^\mu. \tag{6.5}$$

Para isto, nos recordamos que ao atuar uma função de operador em um autoestado, isso nos retorna os autovalores do operador aplicados na própria função. Assim, aplicando a derivada em um campo ψ^a genérico, temos que

$$\Box\psi^a = D_\mu(\partial^\mu\psi^a - gf^{abc}A^{c\mu}\psi^b). \tag{6.6}$$

Aplicando a derivada uma segunda vez obtemos

$$\begin{aligned}\Box\psi^a &= \partial_\mu\partial^\mu\psi^a - gf^{abc}(\partial_\mu A^{c\mu})\psi^b - gf^{abc}A^{c\mu}(\partial_\mu\psi^b)\\ &- gf^{amn}(\partial^\mu\psi^m)A^n_\mu + g^2 f^{amn}f^{mbc}A^{c\mu}\psi^b A^n_\mu.\end{aligned} \tag{6.7}$$

Abordaremos esse problema no espaço dos momentos, evitando complicações associadas aos operadores diferenciais. Para isso, utilizaremos a transformada de Fourier tanto para o campo genérico quanto para os campos de glúons. No entanto, observamos que, na Eq. (6.7), aparecem termos lineares, de segunda e até terceira ordem nos campos, ou seja, produtos das respectivas transformadas de Fourier. A convolução desses campos representa um grande desafio quando introduzida em sua forma genérica. Assim, neste trabalho, adotaremos uma hipótese simplificadora: assumiremos que os campos de fundo são ultra-locais, ou seja, possuem energia e momento bem definidos. Essa suposição nos permite integrar as deltas de Dirac, resultantes dessa escolha, utilizando o teorema da convolução. Como consequência, obtemos que

$$\begin{aligned}\Box\psi^a(x) =& \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\partial_\mu\partial^\mu e^{-ikx}\psi^a(k) - \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}gf^{abc}\partial_\mu A^{c\mu}(k)e^{-ikx}\psi^b(k)\\ &- \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}gf^{abc}A^{c\mu}(k)\partial_\mu e^{-ikx}\psi^b(k) - \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}gf^{amn}\partial^\mu e^{-ikx}\psi^m(k)A^n_\mu(k)\\ &+ \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}g^2 f^{amn}f^{mbc}A^{c\mu}(k)e^{-ikx}\psi^b(k)A^n_\mu(k).\end{aligned} \tag{6.8}$$

Operando as derivadas, verificamos que

$$\begin{aligned}\Box\psi^a(x) = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Big[&-k^2\psi^a(k) + igf^{abc}A^{c\mu}(k)k_\mu\psi^b(k) + igf^{abc}A^{c\mu}(k)k_\mu\psi^b(k)\\ &+ igf^{amn}k^\mu\psi^m(k)A^n_\mu(k) + g^2f^{amn}f^{mbc}A^{c\mu}(k)\psi^b(k)A^n_\mu(k)\Big]e^{-ikx}.\end{aligned} \tag{6.9}$$

É possível observar que o segundo, terceiro e quarto termos possuem a mesma estrutura e, também, podemos utilizar uma delta de Kronecker para mudar o índice de cor no primeiro termo, simplificando a expressão de forma que

$$\Box\psi^a(x) = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Big[-k^2\delta^a_b + 3igf^{abc}A^{c\mu}(k)k_\mu + g^2f^{amn}f^{mbc}A^{c\mu}(k)A^n_\mu(k)\Big]\psi^b(k)e^{-ikx}. \tag{6.10}$$

É necessário, também, reescrever os termos de $G^a_{\mu\nu}$ no espaço de momento, adotando novamente a hipótese de ultra-localidade. Contudo, aqui não podemos descartar os termos de mais alta ordem nos campos como fizemos na dedução do propagador livre. Assim, temos que

$$G^a_{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Big[\partial_\mu e^{-ikx}A^a_\nu(k) - \partial_\nu e^{-ikx}A^a_\mu(k) + gf^{ars}e^{-ikx}A^r_\mu(k)A^s_\nu(k)\Big]. \tag{6.11}$$

Operando as derivadas, e reorganizando os termos, chegamos em

$$G^a_{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Big[-ik_\mu A^a_\nu(k) + ik_\nu A^a_\mu(k) + gf^{ars}A^r_\mu(k)A^s_\nu(k)\Big]e^{-ikx}. \tag{6.12}$$

Portanto, reescrevendo $\Gamma_{\text{laço}}$, temos que

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{laço}}[A] =\alpha\int d^4x\,\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\Big[-ik'_\mu A^a_\nu(k') + ik'_\nu A^a_\mu(k') + gf^{ars}A^r_\mu(k')A^s_\nu(k')\Big]\times\\ \log\Big[\frac{1}{\mu^2}\Big(-k^2\delta^a_b + 3igf^{abc}A^{c\lambda}(k)k_\lambda + g^2f^{amn}f^{mbc}A^{c\lambda}(k)A^n_\lambda(k)\Big)\Big]\times\\ \Big[-ik^\mu A^{b\nu}(k) + ik^\nu A^{b\mu}(k) + gf^{bpq}A^{p\mu}(k)A^{q\nu}(k)\Big]e^{-ix(k+k')}.\end{aligned} \tag{6.13}$$

Entretanto, é possível utilizar a seguinte relação:

$$\int d^4x\; e^{-ix(k+k')} = (2\pi)^4\delta^4(k+k') \tag{6.14}$$

e substituí-la na Eq. (6.13) pela delta de Dirac e então integrá-la em x, obtendo assim

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{laço}}[A] =\alpha\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}[ik_\mu A^a_\nu(-k) - ik_\nu A^a_\mu(-k) + gf^{ars}A^r_\mu(-k)A^s_\nu(-k)]\times\\ \log\Big(\frac{1}{\mu^2}[-k^2\delta^a_b + 3igf^{abc}A^{c\lambda}(k)k_\lambda + g^2f^{amn}f^{mbc}A^{c\lambda}(k)A^n_\lambda(k)]\Big)\times\\ [-ik^\mu A^{b\nu}(k) + ik^\nu A^{b\mu}(k) + gf^{bpq}A^{p\mu}(k)A^{q\nu}(k)].\end{aligned} \tag{6.15}$$

É valido ressaltar que dada a integração da delta, substituímos $k' \to -k$. E, Para simplificar a notação, utilizaremos a seguinte definição

$$\mathcal{P}^{ab} \equiv \log\Big(\frac{1}{\mu^2}[-k^2\delta^a_b + 3igf^{abc}A^{c\lambda}(k)k_\lambda + g^2f^{amn}f^{mbc}A^{c\lambda}(k)A^n_\lambda(k)]\Big). \tag{6.16}$$

Desta forma, $\Gamma_{\text{laço}}$ pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{laço}}[A] =\alpha\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}[ik_\mu A^a_\nu(-k) - ik_\nu A^a_\mu(-k) + gf^{ars}A^r_\mu(-k)A^s_\nu(-k)]\times\mathcal{P}^{ab}\\ \times[-ik^\mu A^{b\nu}(k) + ik^\nu A^{b\mu}(k) + gf^{bpq}A^{p\mu}(k)A^{q\nu}(k)].\end{aligned} \tag{6.17}$$

Ao realizar as operações de multiplicação distributiva entre os termos, chegamos em:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{laço}}[A] = \alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \mathcal{P}^{ab} \times \\ &\Big[k^2 A^a_\nu(-k)A^{b\nu}(k) - k_\mu k^\nu A^a_\nu(-k)A^{b\mu}(k) + igf^{bpq}k_\mu A^a_\nu(-k)A^{p\mu}(k)A^{q\nu}(k) \\ &- k_\nu k^\mu A^a_\mu(-k)A^{b\nu}(k) + k^2 A^a_\mu(-k)A^{b\mu}(k) - igf^{bpq}k_\nu A^a_\mu(-k)A^{p\mu}(k)A^{q\nu}(k) \\ &- igf^{ars}k^\mu A^r_\mu(-k)A^s_\nu(-k)A^{b\nu}(k) + igf^{ars}k^\nu A^r_\mu(-k)A^s_\nu(-k)A^{b\mu}(k) \\ &+ g^2 f^{ars}f^{bpq}A^r_\mu(-k)A^s_\nu(-k)A^{p\mu}(k)A^{q\nu}(k)\Big].\end{aligned} \tag{6.18}$$

Contudo, podemos fazer diversas simplificações. O primeiro e quinto possuem a mesma estrutura e, diante a troca dos índices mudos $\mu \to \nu$, se tornam aptos a serem somados. Similarmente, o segundo e quarto termo sofrem do mesmo processo. Entretanto, o terceiro e sexto termo necessitam, além da troca dos índices de espaço-tempo, de uma substituição dos índices internos $p \to q$. E, de forma similar, o processo se repete para o sétimo e oitavo termo, porém com os índices $r \to s$,

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{laço}}[A] = \alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \mathcal{P}^{ab}\Big[&2k^2 A^a_\nu(-k)A^{b\nu}(k) - 2k_\mu k^\nu A^a_\nu(-k)A^{b\mu}(k) \\ &+ igf^{bpq}k_\mu A^a_\nu(-k)A^{p\mu}(k)A^{q\nu}(k) - igf^{bqp}k_\mu A^a_\nu(-k)A^{q\nu}(k)A^{p\mu}(k) \\ &- igf^{ars}k^\mu A^r_\mu(-k)A^s_\nu(-k)A^{b\nu}(k) + igf^{asr}k^\mu A^s_\nu(-k)A^r_\mu(-k)A^{b\nu}(k) \\ &+ g^2 f^{ars}f^{bpq}A^r_\mu(-k)A^s_\nu(-k)A^{p\mu}(k)A^{q\nu}(k)\Big].\end{aligned} \tag{6.19}$$

Verificamos então que o terceiro e o quarto termo, bem como o quinto e sexto termo, são idênticos, a não ser por suas constantes de estrutura. Desta forma, trocando a ordem dos índices de cor, tanto em f^{ars} quanto em f^{bpq}, e contabilizando a troca de sinais por consequência da sua característica antissimétrica, temos que:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{laço}}[A] = \alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \mathcal{P}^{ab}\Big[&2k^2 A^a_\nu(-k)A^{b\nu}(k) - 2k_\mu k^\nu A^a_\nu(-k)A^{b\mu}(k) \\ &+ 2igf^{bpq}k_\mu A^a_\nu(-k)A^{p\mu}(k)A^{q\nu}(k) - 2igf^{ars}k^\mu A^r_\mu(-k)A^s_\nu(-k)A^{b\nu}(k) \\ &+ g^2 f^{ars}f^{bpq}A^r_\mu(-k)A^s_\nu(-k)A^{p\mu}(k)A^{q\nu}(k)\Big].\end{aligned} \tag{6.20}$$

No entanto, fatorando e reorganizando os termos, chegamos em:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{laço}}[A] = 2\alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \mathcal{P}^{ab}\Big[&k^2 A^a_\nu(-k)A^{b\nu}(k) - k_\mu k^\nu A^a_\nu(-k)A^{b\mu}(k) \\ &+ igf^{bpq}k_\mu A^a_\nu(-k)A^{p\mu}(k)A^{q\nu}(k) - igf^{ars}k^\mu A^r_\mu(-k)A^s_\nu(-k)A^{b\nu}(k) \\ &+ \frac{1}{2}g^2 f^{ars}f^{bpq}A^r_\mu(-k)A^s_\nu(-k)A^{p\mu}(k)A^{q\nu}(k)\Big].\end{aligned} \tag{6.21}$$

Para o termo clássico da teoria, também iremos reescrever Γ_{cl} no espaço de momento. Portanto, é direto observar que:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{cl}}[A] = &- \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Big[k^2 A^a_\nu(-k)A^{a\nu}(k) - k_\mu k^\nu A^a_\nu(-k)A^{a\mu}(k)\\ &+ igf^{apq}k_\mu A^a_\nu(-k)A^{p\mu}(k)A^{q\nu}(k) - igf^{ars}k^\mu A^r_\mu(-k)A^s_\nu(-k)A^{a\nu}(k)\\ &+ \frac{1}{2}g^2 f^{ars}f^{apq}A^r_\mu(-k)A^s_\nu(-k)A^{p\mu}(k)A^{q\nu}(k)\Big],\end{aligned} \tag{6.22}$$

uma vez que a única diferença com o termo $\Gamma_{\text{laço}}$ é a inexistência do logaritmo funcional $\mathcal{P}^{ab}$. Considerando isto, as expressões são idênticas.

No entanto, ainda devemos considerar o termo de fixação *gauge* para obter o propagador. Desta forma, temos:

$$\Gamma_{\text{gf}}[A] = -\int d^4x \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{a\mu})^2. \tag{6.23}$$

Reescrevendo Γ_{gf} no espaço de momento, obtemos:

$$\Gamma_{\text{gf}}[A] = -\frac{1}{2\xi}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} k_\mu k^\nu A^{a\mu}(-k)A^a_\nu(k). \tag{6.24}$$

Portanto, nossa ação efetiva $\Gamma = \Gamma_{\text{laço}} + \Gamma_{\text{cl}} + \Gamma_{\text{gf}}$ se torna, por fim,

$$\begin{aligned}\Gamma[A] = &\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Bigg\{ -\frac{1}{2}\Big[k^2 A^a_\nu(-k)A^{a\nu}(k) - k_\mu k^\nu A^a_\nu(-k)A^{a\mu}(k)\\ &+ igf^{apq}k_\mu A^a_\nu(-k)A^{p\mu}(k)A^{q\nu}(k) - igf^{ars}k^\mu A^r_\mu(-k)A^s_\nu(-k)A^{a\nu}(k)\\ &+ \frac{1}{2}g^2 f^{ars}f^{apq}A^r_\mu(-k)A^s_\nu(-k)A^{p\mu}(k)A^{q\nu}(k)\Big]\\ &+ 2\alpha\mathcal{P}^{ab}\Big[k^2 A^a_\nu(-k)A^{b\nu}(k) - k_\mu k^\nu A^a_\nu(-k)A^{b\mu}(k)\\ &+ igf^{bpq}k_\mu A^a_\nu(-k)A^{p\mu}(k)A^{q\nu}(k) - igf^{ars}k^\mu A^r_\mu(-k)A^s_\nu(-k)A^{b\nu}(k)\\ &+ \frac{1}{2}g^2 f^{ars}f^{bpq}A^r_\mu(-k)A^s_\nu(-k)A^{p\mu}(k)A^{q\nu}(k)\Big] - \frac{1}{2\xi}k_\mu k^\nu A^{a\mu}(-k)A^a_\nu(k)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{6.25}$$

Para uma primeira aproximação, preservando todos os termos em $\mathcal{P}^{ab}$, podemos desconsiderar os termos além da ordem quadrática em $A(k)$. Portanto, $\Gamma[A]$ se torna

$$\begin{aligned}\Gamma[A] = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Bigg\{ &-\frac{1}{2}\Big[k^2 A^a_\nu(-k)A^{a\nu}(k) - k_\mu k^\nu A^a_\nu(-k)A^{a\mu}(k)\Big]\\ &+ 2\alpha\mathcal{P}^{ab}\Big[k^2 A^a_\nu(-k)A^{b\nu}(k) - k_\mu k^\nu A^a_\nu(-k)A^{b\mu}(k)\Big]\\ &- \frac{1}{2\xi}k_\mu k^\nu A^{a\mu}(-k)A^a_\nu(k)\Bigg\},\end{aligned} \tag{6.26}$$

e uma forma mais resumida de representar $\Gamma[A]$ é dada por

$$\begin{aligned}\Gamma[A] = -\frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Bigg\{ &\Big(\delta^a_b - 4\alpha\mathcal{P}^{ab}\Big)k^2 A^a_\mu(-k)A^{b\mu}(k) \\ &- \left(\delta^a_b - 4\alpha\mathcal{P}^{ab} - \frac{\delta^a_b}{\xi}\right)k_\mu k^\nu A^a_\nu(-k)A^{b\mu}(k)\Bigg\},\end{aligned} \tag{6.27}$$

em que apenas fatoramos os campos de *gauge* e introduzimos deltas de Kronecker para contabilizar a troca dos índices de cor. Para destacar os campos de *gauge* na Eq. (6.27) podemos fatorá-los novamente

$$\begin{aligned}\Gamma[A] = -\frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, A^a_\mu(-k)\Bigg[&\Big(\delta^a_b - 4\alpha\mathcal{P}^{ab}\Big)k^2\eta^{\mu\nu} \\ &- \left(\delta^a_b - 4\alpha\mathcal{P}^{ab} - \frac{\delta^a_b}{\xi}\right)k^\mu k^\nu)\Bigg]A^b_\nu(k).\end{aligned} \tag{6.28}$$

Podemos utilizar a rotação de Wick para reescrevermos a expressão de forma a obter o propagador no espaço Euclidiano. Portanto, observamos que:

$$\begin{cases} x_0 \to -ix_0 \therefore x^2 = -x^2_E, \\ k_0 \to ik_0 \therefore k^2 = -k^2_E, \\ \eta_{\mu\nu} \to -\delta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1,+1,+1,+1). \end{cases} \tag{6.29}$$

Desta forma, a ação descrita no espaço Euclidiano[1] se torna

$$\begin{aligned}\Gamma[A] = -\frac{1}{2}\int \frac{id^4k_E}{(2\pi)^4}\, A^a_\mu(-k_E)\Bigg[&+\Big(\delta^a_b - 4\alpha\mathcal{P}^{ab}_E\Big)k^2_E\delta^{\mu\nu} \\ &- \left(\delta^a_b - 4\alpha\mathcal{P}^{ab}_E - \frac{\delta^a_b}{\xi}\right)k^\mu_E k^\nu_E\Bigg]A^b_\nu(k_E),\end{aligned} \tag{6.30}$$

na qual o termo $\mathcal{P}^{ab}_E$ é dado por

$$\mathcal{P}^{ab}(k_E) = \log\left(\frac{1}{\mu^2}\Big[k^2_E\delta^a_b + 3igf^{abc}A^{c\lambda}(k_E)k^E_\lambda + g^2 f^{amn}f^{mbc}A^{c\lambda}(k_E)A^n_\lambda(k_E)\Big]\right). \tag{6.31}$$

Finalmente, estamos aptos para obter uma expressão para o propagador vestido.

6.2 Propagador vestido: caso com campo de fundo nulo

Repetiremos o mesmo procedimento que realizamos para o cálculo do propagador livre com a ação da teoria clássica. Contudo, partiremos de uma relação que deduzimos no

[1] Nas Eq. (6.30) e Eq.(6.31), o subíndice, ou superíndice, "E" está sendo usado para indicar que a grandeza foi redefinida para o espaço Euclidiano. Entretanto, visando não poluir as equações, daqui em diante deixamos o leitor ciente que suprimiremos esta notação, de modo que a métrica utilizada em todos os cálculos será a Euclidiana.

Capítulo 2 para a obtenção do propagador a partir da ação efetiva, a Eq. (2.79). Neste caso, definiremos uma nova função para representar o propagador, sendo ela dada por

$$\Delta(k) = \left(\frac{\delta^2\Gamma[A]}{\delta A(k')\delta A(k'')}\right)^{-1}. \tag{6.32}$$

Calculando a primeira derivada funcional da Eq. (6.30), observamos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\Gamma[A(k)]}{\delta A^d_\rho(k')} =& -\frac{1}{2}\int\frac{id^4k}{(2\pi)^4} \\
&\Bigg\{\delta^a_d\delta^\mu_\rho\delta(k'+k)\Bigg[+\Big(\delta^a_b-4\alpha\mathcal{P}^{ab}\Big)k^2\delta^{\mu\nu}-\Big(\delta^a_b-4\alpha\mathcal{P}^{ab}-\frac{\delta^a_b}{\xi}\Big)k^\mu k^\nu\Bigg]A^b_\nu(k) \\
&+A^a_\mu(-k)\Bigg[+\Big(\delta^a_b-4\alpha\mathcal{P}^{ab}\Big)k^2\delta^{\mu\nu}-\Big(\delta^a_b-4\alpha\mathcal{P}^{ab}-\frac{\delta^a_b}{\xi}\Big)k^\mu k^\nu\Bigg]\delta^b_d\delta^\nu_\rho\delta(k'-k) \\
&+A^a_\mu(-k)\Bigg[\Big(-4\alpha\frac{\delta\mathcal{P}^{ab}(k)}{\delta A^d_\rho(k')}\Big)k^2\delta^{\mu\nu}+\Big(4\alpha\frac{\delta\mathcal{P}^{ab}(k)}{\delta A^d_\rho(k')}\Big)k^\mu k^\nu\Bigg]A^b_\nu(k)\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{6.33}$$

Conforme indicado na expressão acima, caso fossemos considerar todos os termos da derivada funcional, seria necessário determinar a expressão referente à $\delta\mathcal{P}^{ab}/\delta A^d_\rho(k')$. Todavia, para os objetivos deste trabalho, julgamos suficiente somente os termos lineares em $\mathcal{P}^{ab}$, pois suas derivadas contribuiriam com correções de mais altas ordens, as quais estamos desprezando desde o princípio.

Assim, integrando as deltas de Dirac e aplicando as respectivas deltas de Kronecker na Eq. (6.33), obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\Gamma[A(k)]}{\delta A^d_\rho(k')} = \frac{-i}{2(2\pi)^4}&\Bigg\{\Bigg[\Big(\delta^d_b-4\alpha\mathcal{P}^{db}(-k')\Big)k'^2\delta^{\rho\nu}-\Big(\delta^d_b-4\alpha\mathcal{P}^{db}(-k')-\frac{\delta^d_b}{\xi}\Big)k'^\rho k'^\nu\Bigg]A^b_\nu(-k') \\
&+A^a_\mu(-k')\Bigg[\Big(\delta^a_d-4\alpha\mathcal{P}^{ad}(k')\Big)k'^2\delta^{\mu\rho}-\Big(\delta^a_d-4\alpha\mathcal{P}^{ad}(k')-\frac{\delta^a_d}{\xi}\Big)k'^\mu k'^\rho\Bigg]\Bigg\},
\end{aligned} \tag{6.34}$$

sendo que os termos logaritmos agora diferem-se por

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{db}(-k') &= \log\left[\frac{1}{\mu^2}\Big(k'^2\delta^d_b-3igf^{dbc}A^{c\lambda}(-k')k'_\lambda+g^2f^{dmn}f^{mbc}A^{c\lambda}(-k')A^n_\lambda(-k')\Big)\right] \\
\mathcal{P}^{ad}(k') &= \log\left[\frac{1}{\mu^2}\Big(k'^2\delta^a_d+3igf^{adc}A^{c\lambda}(k')k'_\lambda+g^2f^{amn}f^{mdc}A^{c\lambda}(k')A^n_\lambda(k')\Big)\right].
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Isto posto, ainda precisamos da segunda derivada de $\Gamma[A(k)]$, conforme a Eq. (6.30). Novamente, aqui também desconsideraremos os termos proporcionais à $\delta\mathcal{P}^{ab}/\delta A^e_\sigma(k'')$.

Portanto

$$\frac{\delta^2\Gamma[A(k)]}{\delta A^d_\rho(k')\delta A^e_\sigma(k'')} = \frac{-i}{2(2\pi)^4}\times$$
$$\Bigg\{\bigg[\Big(\delta^d_b - 4\alpha\mathcal{P}^{db}(-k')\Big)k'^2\delta^{\rho\nu} - \bigg(\delta^d_b - 4\alpha\mathcal{P}^{db}(-k') - \frac{\delta^d_b}{\xi}\bigg)k'^\rho k'^\nu\bigg]\delta^e_b\delta^\nu_\sigma\delta(k''+k') \tag{6.36}$$
$$+\,\delta^e_a\delta^\mu_\sigma\delta(k''+k')\bigg[\Big(\delta^a_d - 4\alpha\mathcal{P}^{ad}(k')\Big)k'^2\delta^{\mu\rho} - \bigg(\delta^a_d - 4\alpha\mathcal{P}^{ad}(k') - \frac{\delta^a_d}{\xi}\bigg)k'^\mu k'^\rho\bigg]\Bigg\}.$$

Aplicando as deltas de Kronecker, obtemos

$$\frac{\delta^2\Gamma[A(k)]}{\delta A^d_\rho(k')\delta A^e_\sigma(k'')} = \frac{-i}{2(2\pi)^4}\delta(k''+k')\times$$
$$\Bigg\{\bigg[\Big(\delta^d_e - 4\alpha\mathcal{P}^{de}(-k')\Big)k'^2\delta^{\rho\sigma} - \bigg(\delta^d_e - 4\alpha\mathcal{P}^{de}(-k') - \frac{\delta^d_e}{\xi}\bigg)k'^\rho k'^\sigma\bigg] \tag{6.37}$$
$$+\bigg[\Big(\delta^e_d - 4\alpha\mathcal{P}^{ed}(k')\Big)k'^2\delta^{\sigma\rho} - \bigg(\delta^e_d - 4\alpha\mathcal{P}^{ed}(k') - \frac{\delta^e_d}{\xi}\bigg)k'^\sigma k'^\rho\bigg]\Bigg\},$$

em que podemos agrupar ambos os termos definindo

$$\bar{\mathcal{P}}^{ed} \equiv \mathcal{P}^{de}(-k') + \mathcal{P}^{de}(k'). \tag{6.38}$$

Assim, determinamos a seguinte expressão para a segunda derivada da ação efetiva:

$$\frac{\delta^2\Gamma[A(k)]}{\delta A^d_\rho(k')\delta A^e_\sigma(k'')} = \frac{i}{(2\pi)^4}\bigg[\bigg(\delta^e_d - 2\alpha\bar{\mathcal{P}}^{ed} - \frac{\delta^d_e}{\xi}\bigg)k'^\rho k'^\sigma - \Big(\delta^e_d - 2\alpha\bar{\mathcal{P}}^{ed}\Big)k'^2\delta^{\rho\sigma}\bigg]\delta(k''+k'). \tag{6.39}$$

Finalmente, estamos aptos a determinar o propagador $\Delta^{ef}_{\sigma\gamma}(k')$ utilizando um *ansatz*, de forma que

$$\bigg[\bigg(\delta^e_d - 2\alpha\bar{\mathcal{P}}^{ed} - \frac{\delta^d_e}{\xi}\bigg)k'^\rho k'^\sigma - \Big(\delta^e_d - 2\alpha\bar{\mathcal{P}}^{ed}\Big)k'^2\delta^{\rho\sigma}\bigg]\,\Delta^{ef}_{\sigma\gamma}(k') = -i\delta^\rho_\gamma\delta^d_f, \tag{6.40}$$

se

$$\Delta^{ef}_{\sigma\gamma}(k') = A^{ef}k'_\sigma k'_\gamma + B^{ef}\delta_{\sigma\gamma}. \tag{6.41}$$

Aqui faremos uso de uma condição para obter uma primeira versão do propagador vestido e portanto imporemos um caso em que o campo de fundo $A^a_\mu(k)$ seja nulo. Desta forma, a Eq. (6.38) adquire a seguinte forma

$$\bar{\mathcal{P}}^{ed} = \delta^e_d \log\bigg(\frac{k'^4}{\mu^4}\bigg), \tag{6.42}$$

em que exteriorizamos a delta de Kronecker ao tratar o termo $\bar{\mathcal{P}}^{ed}$ como elemento de matriz. Logo, a Eq. (6.40) torna-se

$$\bigg[\bigg(1 - 2\alpha\log\bigg(\frac{k'^4}{\mu^4}\bigg) - \frac{1}{\xi}\bigg)k'^\rho k'^\sigma - \bigg(1 - 2\alpha\log\bigg(\frac{k'^4}{\mu^4}\bigg)\bigg)\,k'^2\delta^{\rho\sigma}\bigg]\,\Delta^{df}_{\sigma\gamma}(k') = -i\delta^\rho_\gamma\delta^d_f. \tag{6.43}$$

Realizando a multiplicação entre os termos, obtemos

$$\begin{aligned}
&A^{df}\left[\delta^e_d - 2\alpha\log\left(\frac{k'^4}{\mu^4}\right) - \frac{1}{\xi}\right]k'^2 k'^\rho k'_\gamma - A^{df}\left[1 - 2\alpha\log\left(\frac{k'^4}{\mu^4}\right)\right]k'^2 k'^\rho k'_\gamma \\
&+ B^{df}\left[1 - 2\alpha\log\left(\frac{k'^4}{\mu^4}\right) - \frac{1}{\xi}\right]k'^\rho k'_\gamma - B^{df}\left[1 - 2\alpha\log\left(\frac{k'^4}{\mu^4}\right)\right]k'^2 \delta^\rho_\gamma = -i\delta^\rho_\gamma \delta^d_f.
\end{aligned} \tag{6.44}$$

Na Eq. (6.44), identificamos que uma igualdade se estabelece mediante

$$B^{df} = \frac{i\delta^d_f}{\left[1 - 2\alpha\log\left(\frac{k'^4}{\mu^4}\right)\right]k'^2}, \tag{6.45}$$

que ao ser substituído na Eq. (6.44), resulta em

$$\begin{aligned}
&A^{df}\left[1 - 2\alpha\log\left(\frac{k'^4}{\mu^4}\right) - \frac{1}{\xi}\right]k'^2 k'^\rho k'_\gamma - A^{df}\left[1 - 2\alpha\log\left(\frac{k'^4}{\mu^4}\right)\right]k'^2 k'^\rho k'_\gamma \\
&+ \frac{i\delta^d_f}{\left[1 - 2\alpha\log\left(\frac{k'^4}{\mu^4}\right)\right]k'^2}\left[1 - 2\alpha\log\left(\frac{k'^4}{\mu^4}\right) - \frac{1}{\xi}\right]k'^\rho k'_\gamma = 0.
\end{aligned} \tag{6.46}$$

Simplificando os termos de $k'^\rho k'_\gamma$ e reescrevendo a expressão de forma a ser possível isolar A^{df}, obtemos que

$$A^{df} = \frac{i\delta^d_f}{\left[1 - 2\alpha\log\left(\frac{k'^4}{\mu^4}\right)\right]k'^4}\left[\xi - 2\alpha\xi\log\left(\frac{k'^4}{\mu^4}\right) - 1\right]. \tag{6.47}$$

Retornando ao propagador $\Delta^{df}_{\sigma\gamma}(k')$ na Eq. (6.41), podemos substituir as expressões obtidas para A^{df} e B^{df}

$$\Delta^{df}_{\sigma\gamma}(k') = \frac{i\delta^d_f}{k'^2\left[1 - 2\alpha\log\left(\frac{k'^4}{\mu^4}\right)\right]}\left\{\delta_{\sigma\gamma} - \frac{\left[1 - \xi + 2\alpha\xi\log\left(\frac{k'^4}{\mu^4}\right)\right]k'_\sigma k'_\gamma}{k'^2}\right\}. \tag{6.48}$$

É importante observar que ao tomarmos o limite em que $\alpha \to 0$, isto é, desconsiderando as correções de um laço, retornamos ao propagador livre da teoria, conforme a Eq. (4.66).

A Eq. (6.48) nos informa que, mesmo em um cenário em que o campo de fundo seja nulo, a simples forma quantizada da ação acarreta um desvio do polo por uma função dependente do momento.

Finalmente, estamos aptos a identificar a função de densidade espectral da teoria. Assim, retomando a Eq. (3.30), verificamos que

$$\mathrm{Im}[\Pi(-s)] = -2\alpha s\log\left(\frac{s^2}{\mu^4}\right) \quad \text{e} \quad \mathrm{Re}[\Pi(-s)] = 0. \tag{6.49}$$

Logo, a função de densidade espectral se torna

$$\pi\rho(s) = -\frac{2\alpha s\log\left(\frac{s^2}{\mu^4}\right)}{s^2 + 8\alpha^2 s^2\log\left(\frac{s^2}{\mu^4}\right)}, \tag{6.50}$$

em que $k^2 \to -s$. Embora uma discussão detalhada sobre as complexidades desse resultado não seja viável no momento, qualitativamente, esses achados são notáveis por oferecerem novas informações sobre a forma das densidades espectrais e, em particular, sobre a estrutura da contribuição do contínuo. Notavelmente, observa-se o surgimento de cortes de ramo, ou seja, regiões energéticas de maior interesse.

6.3 Propagador vestido: campo de fundo de *instantons*

Para o caso mais genérico, devemos traçar um caminho distinto para a obtenção do propagador. Assim, adotaremos uma simplificação com o *gauge* de Lorenz

$$\partial_\mu A^{a\mu} = 0. \tag{6.51}$$

Desta forma, retomando a Eq. (6.25), obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma[A] = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} &\left[-\frac{1}{2}k^2 A^a_\nu(-k)A^{b\nu}(k) - \frac{1}{4}g^2 f^{ars} f^{bpq} A^r_\mu(-k)A^s_\nu(-k)A^{p\mu}(k)A^{q\nu}(k)\right] \\ &\times \left[\delta^{ab} - 4\alpha \log\left(\frac{-k^2\delta^{ab} + g^2 f^{amn} f^{mbc} A^{c\lambda}(k)A^n_\lambda(k)}{\mu^2}\right)\right].\end{aligned} \tag{6.52}$$

Diferenciando a Eq. (6.52), verificamos que

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Gamma[A]}{\delta A^e_\rho(k')} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} &\Big[-\frac{1}{2}k^2\delta^{ae}\delta^\rho_\nu\delta(-k-k')A^{b\nu}(k) - \frac{1}{2}k^2 A^a_\nu(-k)\delta^{be}\delta^\rho_\nu\delta(k-k') \\ &- \frac{1}{4}g^2 f^{ars} f^{bpq}\delta^{re}\delta^\rho_\mu\delta(-k-k')A^s_\nu(-k)A^{p\mu}(k)A^{q\nu}(k) \\ &- \frac{1}{4}g^2 f^{ars} f^{bpq} A^r_\mu(-k)\delta^{se}\delta^\rho_\nu\delta(-k-k')A^{p\mu}(k)A^{q\nu}(k) \\ &- \frac{1}{4}g^2 f^{ars} f^{bpq} A^r_\mu(-k)A^s_\nu(-k)\delta^{pe}\delta^\mu_\rho\delta(k-k')A^{q\nu}(k) \\ &- \frac{1}{4}g^2 f^{ars} f^{bpq} A^r_\mu(-k)A^s_\nu(-k)A^{p\mu}(k)\delta^{qe}\delta^\nu_\rho\delta(k-k')\Big] \times \mathcal{Q}^{ab}(k) \\ + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} &\left[\frac{1}{2}k^2 A^a_\nu(-k)A^{b\nu}(k) + \frac{1}{4}g^2 f^{ars} f^{bpq} A^r_\mu(-k)A^s_\nu(-k)A^{p\mu}(k)A^{q\nu}(k)\right] \\ \times &\left\{4\alpha[\mathcal{R}^{ai}(k)]^{-1} g^2 f^{imn} f^{mbc}\Big[\delta^{ce}\delta^\lambda_\rho A^n_\lambda(k) + A^{c\lambda}(k)\delta^{ne}\delta^\lambda_\rho\Big]\delta(k-k')\right\},\end{aligned} \tag{6.53}$$

em que aqui definimos o operador $\mathcal{Q}^{ab}(k)$ sendo

$$\mathcal{Q}^{ab}(k) = \left[\delta^{ab} - 4\alpha \log\left(\frac{-k^2\delta^{ab} + g^2 f^{amn} f^{mbc} A^{c\lambda}(k)A^n_\lambda(k)}{\mu^2}\right)\right]. \tag{6.54}$$

E também definimos o inverso do operador como

$$[\mathcal{R}^{ai}(k)]^{-1} = \left[k^2\delta^{ab} + g^2 f^{amn} f^{mbc} A^{c\lambda}(k) A^n_\lambda(k)\right]^{-1}. \tag{6.55}$$

Integrando as deltas de Dirac e somando as deltas de Kronecker na Eq. (6.53), temos que

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Gamma[A]}{\delta A^e_\rho(k')} =& \frac{1}{(2\pi)^4}\Bigg\{ -\frac{1}{2}k'^2 A^{b\rho}(-k')\mathcal{Q}^{eb}(-k') - \frac{1}{2}k'^2 A^a_\nu(-k')\mathcal{Q}^{ae}(k') \\ &- \frac{1}{2}g^2 f^{aes} f^{bpq} A^s_\mu(k') A^{p\rho}(-k') A^{q\mu}(-k')\mathcal{Q}^{ab}(-k') \\ &- \frac{1}{2}g^2 f^{ars} f^{beq} A^s_\mu(-k') A^r_\rho(-k') A^{q\mu}(k')\mathcal{Q}^{ab}(k') \\ &+ 2\alpha k' A^a_\nu(-k') A^{b\nu}(k')[\mathcal{R}^{ai}(k')]^{-1} g^2 f^{imn} f^{mbe} A^n_\rho(k') \\ &+ 2\alpha k' A^a_\nu(-k') A^{b\nu}(k')[\mathcal{R}^{ai}(k')]^{-1} g^2 f^{ime} f^{mbc} A^{c\rho}(k') \\ &+ g^4\alpha f^{ars} f^{bpq} A^r_\mu(-k') A^s_\nu(-k') A^{p\mu}(k') A^{q\nu}(k')[\mathcal{R}^{ai}(k')]^{-1} f^{imn} f^{mbe} A^n_\rho(k') \\ &+ g^4\alpha f^{ars} f^{bpq} A^r_\mu(-k') A^s_\nu(-k') A^{p\mu}(k') A^{q\nu}(k')[\mathcal{R}^{ai}(k')]^{-1} f^{ime} f^{mbc} A^{c\rho}(k'). \Bigg\}\end{aligned} \tag{6.56}$$

Uma vez que estamos interessados, em um primeiro momento, somente nas contribuições de até terceira ordem em $A^a_\mu(k)$, desconsideraremos os termos de mais alta ordem na Eq. (6.56). Portanto, a primeira derivada funcional da ação efetiva se torna somente

$$\frac{\delta\Gamma[A]}{\delta A^e_\rho(k')} = -\frac{1}{2(2\pi)^4}k'^2\delta^{ae}A^{b\rho}(-k')\left[\mathcal{Q}^{ab}(-k') + \mathcal{Q}^{ba}(k')\right]. \tag{6.57}$$

A segunda derivada da ação efetiva segue de forma mais simples

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2\Gamma[A]}{\delta A^d_\sigma(-k)\delta A^e_\rho(k')} &= -\frac{1}{2(2\pi)^4}k'^2\delta^{ae}\delta^{bd}\delta^{\rho\sigma}\delta(-k'+k)\left[\mathcal{Q}^{ab}(-k') + \mathcal{Q}^{ba}(k')\right] \\ &= -\frac{1}{2(2\pi)^4}k'^2\delta^{\rho\sigma}\left[\mathcal{Q}^{ed}(-k') + \mathcal{Q}^{de}(k')\right]\delta(k-k').\end{aligned} \tag{6.58}$$

Como a dependência com os campos de *gauge* $A^a_\mu(k)$ se encontra somente no operador $\mathcal{Q}^{ab}(k)$ e podemos avaliá-lo no caso em que a solução de *instantons* é o campo de fundo. Assim, retomamos a Eq. (5.60) e a reescrevemos no espaço dos momentos

$$A^a_\mu(k) = \int d^4x\,\frac{2\eta^a_{\mu\nu}x^\nu}{x^2+\rho^2}\,e^{-ikx}. \tag{6.59}$$

Um novo desafio surge na obtenção da expressão explícita para a solução dos *instantons* no espaço de momentos, pois a integração sobre o espaço revela-se algo não trivial. Devemos lembrar que a natureza dos *instantons* está intrinsecamente ligada à inspeção de espaços topológicos não triviais, e, portanto, sua integração não pode ser tratada de maneira superficial. É provável que uma solução exata seja impraticável e que apenas um tratamento perturbativo forneça algum resultado aproximado. No entanto, para os propósitos deste trabalho, a apresentação da expressão formal será suficiente. Assim, temos que

$$A^a_\mu(k) \equiv \eta^a_{\mu\nu} A^\nu(k), \tag{6.60}$$

sendo $A^\nu(k)$ a transformada de Fourier dos *instantons* a ser determinada.

Substituindo a Eq. (6.60) em $\mathcal{Q}^{ab}(k)$ na Eq. (6.54), verificamos que

$$\mathcal{Q}^{ab}(k) = \left[\delta^{ab} - 4\alpha \log\left(\frac{-k^2\delta^{ab} + g^2 f^{amn} f^{mbc} \eta^{c\lambda\rho} \eta_{n\lambda\sigma} A_\rho(k) A^\sigma(k)}{\mu^2}\right)\right]. \tag{6.61}$$

Entretanto, podemos explorar as propriedades do tensor de ’t Hooft

$$\begin{aligned} \eta^{e\lambda\rho}\eta_{n\lambda\sigma} &= \delta^e_n \delta^\rho_\sigma + \epsilon_{enc}\, \eta_c{}^\rho{}_\sigma \\ \eta^a_{\mu\nu} &= -\eta^a_{\nu\mu}, \end{aligned} \tag{6.62}$$

para redefinir a soma presente na Eq. (6.58) da seguinte forma:

$$\mathcal{Q}^{ed}(k')\delta^{ed} \equiv \mathcal{Q}^{ed}(-k') + \mathcal{Q}^{de}(k'). \tag{6.63}$$

Assim, chegamos na expressão

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(k')\delta^{ed} = 2\delta^{ed}\Bigg\{1 - 2\alpha\Bigg[&\log\left(\frac{-k'^2 - g^2 A_\mu(-k')A^\mu(-k')}{\mu^2}\right) \\ &+ \log\left(\frac{-k'^2 - g^2 A_\mu(k')A^\mu(k')}{\mu^2}\right)\Bigg]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{6.64}$$

Finalmente, retornado à Eq. (6.58), podemos obter a forma do propagador vestido com *instantons*, sendo necessária determinar a inversa

$$D^{-1}_{ed\rho\sigma} = \left[-ik'^2\delta_{\rho\sigma}\mathcal{Q}(k')\delta^{ed}\right]^{-1}. \tag{6.65}$$

Contudo, como agora todos os termos representam apenas constantes ou funções a obtenção do propagador é imediata

$$D^{-1}_{ed\rho\sigma} = \left[-\frac{i}{k'^2\mathcal{Q}(k')}\delta^{ed}\right]. \tag{6.66}$$

Nesta expressão, verificamos que a inclusão do campo de fundo de *instantons* modifica o polo, conforme

$$k^2 \to k^2\mathcal{Q}(k'). \tag{6.67}$$

Sendo importante ressaltar que ainda é necessário calcular $\mathcal{Q}(k')$ através da transformada de Fourier da solução de *instantons* para a obtenção da expressão explícita do propagador.

A presença de $\mathcal{Q}(k')$ no polo do propagador levanta questões que exigem reflexão e pesquisas mais aprofundadas. Ao revisitar a Eq. (2.59), observamos que termos adicionais no propagador, além do momento, podem ser interpretados como massas. No entanto, glúons são considerados partículas não massivas. Portanto, serão necessárias discussões adicionais para determinar a interpretação correta dessa correção ao propagador.

Por fim, podemos exprimir a expressão para a função de densidade espectral retomando a Eq. (3.30). Assim, verificamos que

$$\pi\rho(s) = \frac{\mathrm{Im}\mathcal{Q}(-s)}{(-s + \mathrm{Re}\mathcal{Q}(-s))^2 + (\mathrm{Im}\mathcal{Q}(-s))^2}, \tag{6.68}$$

na qual a forma final ainda é dependente da transformada de Fourier da solução de *instantons*.

Assim, verificamos que ao incluirmos os termos de correção de um laço ao propagador dos glúons, podemos vesti-lo com os efeitos da solução de *instantons* como campo de fundo, resultando em um deslocamento no polo do propagador. Como consequência, esse desvio pode ser interpretado como um termo de massa efetiva. Embora as implicações desse termo ainda não estejam claras, este resultado se apresenta como um objeto de grande interesse no contexto do problema da massa em CDQ. Ressaltamos que um dos grandes desafios na descrição da força forte em baixas energias é determinar a origem do espaço de energia entre as partículas elementares e seus estados ligados. Nesse sentido, argumentamos que esse desvio pode surgir devido às múltiplas interações com o campo de fundo, o qual representa a dinâmica do vácuo da teoria, operando em escalas de $\hbar$.

7 Conclusões

Neste estudo, investigamos as contribuições decorrentes do formalismo da ação efetiva, incorporando correções quânticas não-locais ao propagador vestido dos glúons acoplados a um campo de fundo genérico. A forma não trivial do propagador corrigido introduz novos graus de liberdade na teoria, alterando significativamente seu espectro, uma vez que o novo propagador dos glúons passa a depender de dois parâmetros livres, α e μ.

Para obter o propagador corrigido, descartamos quaisquer interações de ordem superior à cúbica nos campos de *gauge*. Além disso, desconsideramos complicações decorrentes de novos termos derivativos do fator de forma, visto que o cálculo não perturbativo revelou-se inviável nesta abordagem. Contudo, em trabalhos futuros será relevante buscar formas que considerem termos de ordens superiores nos campos de *gauge*, tendo em vista que algumas interações mais complexas foram desconsideradas visando a obtenção desses resultados em primeira instância.

Demonstramos que, mesmo em um cenário no qual o campo de fundo é nulo, o processo de quantização ainda ocasiona mudanças significativas no polo do propagador. No caso em que temos a solução de *instantons* como campo de fundo, o mesmo efeito foi observado, uma vez que a função que desloca o polo do propagador também depende dos *instantons*. Este resultado pode ser interpretado como a inclusão de um termo de massa efetiva ao propagador dos glúons, o que ainda requer investigação.

Com a forma final do propagador obtida, os próximos passos se delineiam pela motivação inicial deste trabalho: a investigação do vácuo da CDQ. A conexão entre os dois objetos está estabelecida mediante a utilização da solução de *instantons* como campo de fundo para o propagador vestido. No entanto, como todos os cálculos foram realizados no espaço de momentos e a solução de *instantons* é fornecida apenas no espaço de posições, uma transformação se faz necessária. Todavia, esta transformação tem se mostrado complexa e pode exigir um tratamento perturbativo para que uma expressão aproximada seja obtida.

Referências

[1] PARTICLE DATA GROUP *et. al.* Review of Particle Physics. *PTEP*, 2022:083C01, 2022.

[2] LIN, H. W.; MEYER, H. B.; RICHARDS, D. *Lattice QCD for Nuclear Physics*. Springer, 2015.

[3] SCHAKEL, A. M. J. *Boulevard of broken symmetries: effective field theories of condensed matter*. World Scientific, 2008.

[4] CALZETTA, E. A.; HU, B. L. B. *Nonequilibrium quantum field theory*. Cambridge University Press, 2009.

[5] BOJOWALD, M. *Canonical gravity and applications: cosmology, black holes, and quantum gravity*. Cambridge University Press, 2010.

[6] KUNTZ, I. *Gravitational Theories Beyond General Relativity*. Springer, 2019.

[7] BRANCO, G. C.; LAVOURA, L.; SILVA, J. P. *CP violation*. Oxford University Press, 1999.

[8] NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. i. *Phys. Rev.*, 122:345–358, Apr 1961.

[9] HIGGS, P. Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons. *Physical Review Letters*, 13:508–509, 1964.

[10] WEINBERG, S. A model of leptons. *Physical review letters*, 19(21):1264, 1967.

[11] JAISWAL, A. *et. al.* Dynamics of qcd matter — current status. *International Journal of Modern Physics E*, 30(02):2130001, 2021.

[12] YANG, C. N.; MILLS R. L. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Physical Review*, 96:191–194, 1954.

[13] KOVCHEGOV, Y. V.; LEVIN, E. *Quantum chromodynamics at high energy*. Cambridge University Press, 2013.

[14] MUELLER, A. H. Perturbative qcd at high energies. *Physics Reports*, 73(4):237–368, 1981.

[15] COLLINS, J. *Foundations of perturbative QCD*. Cambridge University Press, 2011.

[16] SHIFMAN, M. A. *Vacuum structure and QCD sum rules*. Elsevier, 1992.

[17] SHURYAK, E. V. Correlation functions in the qcd vacuum. *Reviews of Modern Physics*, 65(1):1, 1993.

[18] SCHÄFER, T.; SHURYAK, E. V. Instantons in qcd. *Rev. Mod. Phys.*, 70:323–425, Apr 1998.

[19] SHURYAK, E. V. The role of instantons in quantum chromodynamics: (i). physical vacuum. *Nuclear Physics B*, 203(1):93–115, 1982.

[20] SHURYAK, E. V. Theory and phenomenology of the qcd vacuum. *Physics Reports*, 115(4):151–314, 1984.

[21] SHURYAK, E. V. *Qcd Vacuum, Hadrons And Superdense Matter, The*, volume 71. World Scientific, 2004.

[22] CALLAN, C. G.; DASHEN, R.; GROSS, D. J. Toward a theory of the strong interactions. *Physical Review D*, 17(10):2717, 1978.

[23] SHURYAK, E.; SCHÄFER, T. The qcd vacuum as an instanton liquid. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 47(Volume 47, 1997):359–394, 1997.

[24] BAEZ, J. C.; DOLAN, J. Higher-dimensional algebra and topological quantum field theory. *Journal of Mathematical Physics*, 36(11):6073–6105, 11 1995.

[25] COHEN, A. G.; KAPLAN, D. B.; NELSON, A. E. The more minimal supersymmetric standard model. *Physics Letters B*, 388(3):588–598, 1996.

[26] ELLWANGER, U.; HUGONIE, C.; TEIXEIRA, A. M. The next-to-minimal supersymmetric standard model. *Physics Reports*, 496(1-2):1–77, 2010.

[27] ELLIS, J. *et. al.* No-scale supersymmetric standard model. *Physics Letters B*, 134(6):429–435, 1984.

[28] SCHWARTZ, J. H. Superstring theory. *Physics Reports*, 89(3):223–322, 1982.

[29] LÜST, D.; THEISEN, S. *Lectures on string theory*, volume 346. Springer, 1989.

[30] GEORGI, H. Effective field theory. *Annual review of nuclear and particle science*, 43(1):209–252, 1993.

[31] BURGESS, C. P. An introduction to effective field theory. *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 57:329–362, 2007.

[32] WEINBERG, S. Effective field theory, past and future. *International Journal of Modern Physics A*, 31(06):1630007, 2016.

[33] BARVINSKY, A. O.; VILKOVISKY, G. A. The generalized schwinger-dewitt technique and the unique effective action in quantum gravity. *Physics Letters B*, 131(4-6):313–318, 1983.

[34] VILKOVISKY, G. A. The unique effective action in quantum field theory. *Nuclear Physics B*, 234(1):125–137, 1984.

[35] BARVINSKY, A. O.; VILKOVISKY, G. A. The generalized schwinger-dewitt technique in gauge theories and quantum gravity. *Physics Reports*, 119(1):1–74, 1985.

[36] BARVINSKY, A. O.; VILKOVISKY, G. A. Covariant perturbation theory (ii). second order in the curvature. general algorithms. *Nuclear Physics B*, 333(2):471–511, 1990.

[37] BARVINSKY, A. O.; VILKOVISKY, G. A. Covariant perturbation theory (iii). spectral representations of the third-order form factors. *Nuclear Physics B*, 333(2):512–524, 1990.

[38] BARVINSKY, A. O.; GUSEV, Y. V.; ZHYTNIKOV, V. V.; VILKOVISKY, G. A. Covariant perturbation theory (iv). third order in the curvature. *arXiv preprint arXiv:0911.1168*, 2009.

[39] BARVINSKY, A. O.; MUKHANOV, V. F. New nonlocal effective action. *Physical Review D*, 66(6):065007, 2002.

[40] SCHRÖDINGER, E. An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules. *Physical Review*, 28:1049–1070, 1926.

[41] SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

[42] BAKER, H. F. Further Applications of Matrix Notation to Integration Problems. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 34:347–360, 1901.

[43] CAMPBELL, J. E. On a Law of Combination of Operators bearing on the Theory of Continuous Transformation Groups. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 28:381–390, 1896.

[44] FEYNMAN, R. P. Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics. *Reviews of Modern Physics*, 20:367–387, 1948.

[45] HUANG, S. T.; CAMBANIS, S. Stochastic and multiple wiener integrals for gaussian processes. *The Annals of Probability*, pages 585–614, 1978.

[46] DIRAC, P. A. M. The lagrangian in quantum mechanics. In *Feynman's Thesis—A New Approach To Quantum Theory*, pages 111–119. World Scientific, 2005.

[47] DAS, A. *Field Theory: A Path Integral Approach*. World Scientific Publishing, 2019.

[48] GELIS, F. *Quantum field theory: from basics to modern topics*. Cambridge University Press, 2019.

[49] MAGGIORE, M. *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. Oxford University Press, 2005.

[50] JONA-LASINIO, G. Relativistic field theories with symmetry-breaking solutions. *Nuovo cimento*, 34:1790–1795, 1964.

[51] COLEMAN, S. *Aspects of symmetry: selected Erice lectures*. Cambridge University Press, 1988.

[52] WEINBERG, S. *The quantum theory of fields*, volume 2. Cambridge university press, 1995.

[53] SREDNICKI, M. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2006.

[54] SCHWINGER, J. On gauge invariance and vacuum polarization. *Physical Review*, 82(5):664, 1951.

[55] DEWITT, B. S. *Dynamical theory of groups and fields*. Gordon and Breach, 1965.

[56] PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An Introduction to Quantum Field Theory*. CRC Press, 2018.

[57] ZEE, A. *Quantum field theory in a nutshell*, volume 7. Princeton university press, 2010.

[58] STEIN, E. M.; WEISS, G. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, volume 1. Princeton university press, 1971.

[59] BAILIN, D.; LOVE, A. *Introduction to Gauge Field Theory Revised Edition*. Taylor & Francis, 1993.

[60] DEUR, A.; BRODSKY, S. J.; de TERAMOND, G. F. The qcd running coupling. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 90:1–74, 2016.

[61] GREENSITE, J. *An introduction to the confinement problem*, volume 821. Springer, 2011.

[62] PECCEI, R. D.; QUINN, H. R. Cp conservation in the presence of pseudoparticles. *Physical Review Letters*, 38(25):1440, 1977.

[63] PECCEI, R. D.; QUINN, H. R. Constraints imposed by cp conservation in the presence of pseudoparticles. *Physical Review D*, 16(6):1791, 1977.

[64] BELAVIN, A. A. *et. al.* Pseudoparticle solutions of the yang-mills equations. *Physics Letters B*, 59(1):85–87, 1975.

[65] CHAPLINE, G.; NAUENBER, M. Asymptotic freedom and the baryon-quark phase transition. *Physical Review D*, 16(2):450, 1977.

[66] FADDEEV, L. D.; POPOV, V. N. Feynman diagrams for the yang-mills field. *Physics Letters B*, 25(1):29–30, 1967.

[67] WENTZEL, G. Eine verallgemeinerung der quantenbedingungen für die zwecke der wellenmechanik. *Zeitschrift für Physik*, 38(6):518–529, 1926.

[68] KRAMERS, H. A. Wellenmechanik und halbzahlige quantisierung. *Zeitschrift für Physik*, 39(10):828–840, 1926.

[69] BRILLOUIN, L. La mécanique ondulatoire de schrödinger; une méthode générale de résolution par approximations successives. *CR Acad. Sci*, 183(11):24–26, 1926.

[70] PARANJAPE, M. *The theory and applications of instanton calculations*. Cambridge University Press, 2018.

[71] 't HOOFT, G. Computation of the quantum effects due to a four-dimensional pseudoparticle. *Physical Review D*, 14(12):3432–3450, 1976.

[72] POLYAKOV, A. M. Compact gauge fields and the infrared catastrophe. *Physics Letters B*, 59(1):82–84, 1975.

[73] SHURYAK, E. V. The role of instantons in quantum chromodynamics:(i). physical vacuum. *Nuclear Physics B*, 203(1):93–115, 1982.

APÊNDICE A – Integral Gaussiana

Para determinarmos o resultado de I na Eq. (2.18), inicialmente precisamos completar o quadrado no expoente

$$I = \int dk\; e^{-\frac{1}{2}a\left(k-\frac{J}{a}\right)^2+\frac{J^2}{2a}}, \tag{A.1}$$

e realizar um deslocamento, $k \to k + \frac{J}{a}$, na função

$$I = e^{\frac{J^2}{2a}} \int dk\; e^{-\frac{1}{2}ak^2}. \tag{A.2}$$

Aplicando a seguinte mudança de variável $ak^2 \to k^2$, chegamos em

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\frac{J^2}{2a}} \int dk\; e^{-\frac{1}{2}k^2}, \tag{A.3}$$

de modo que obtemos a expressão mais conhecida para a integral Gaussiana. Sua resolução é simplificada mediante à um artifício matemático que nos permite reescrevê-la em coordenadas polares

$$\begin{aligned}\left(\int dk\; e^{-\frac{1}{2}k^2}\right)^2 &= \int dx\, dy\; e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{1}{2}y^2} \\ &= 2\pi \int_0^\infty r\, dr\, e^{-\frac{1}{2}r^2} \\ &= 2\pi,\end{aligned} \tag{A.4}$$

sendo que na segunda linha fizemos uso do Jacobiano associado à mudança de coordenadas e do ângulo sólido $\Omega = 2\pi$.