

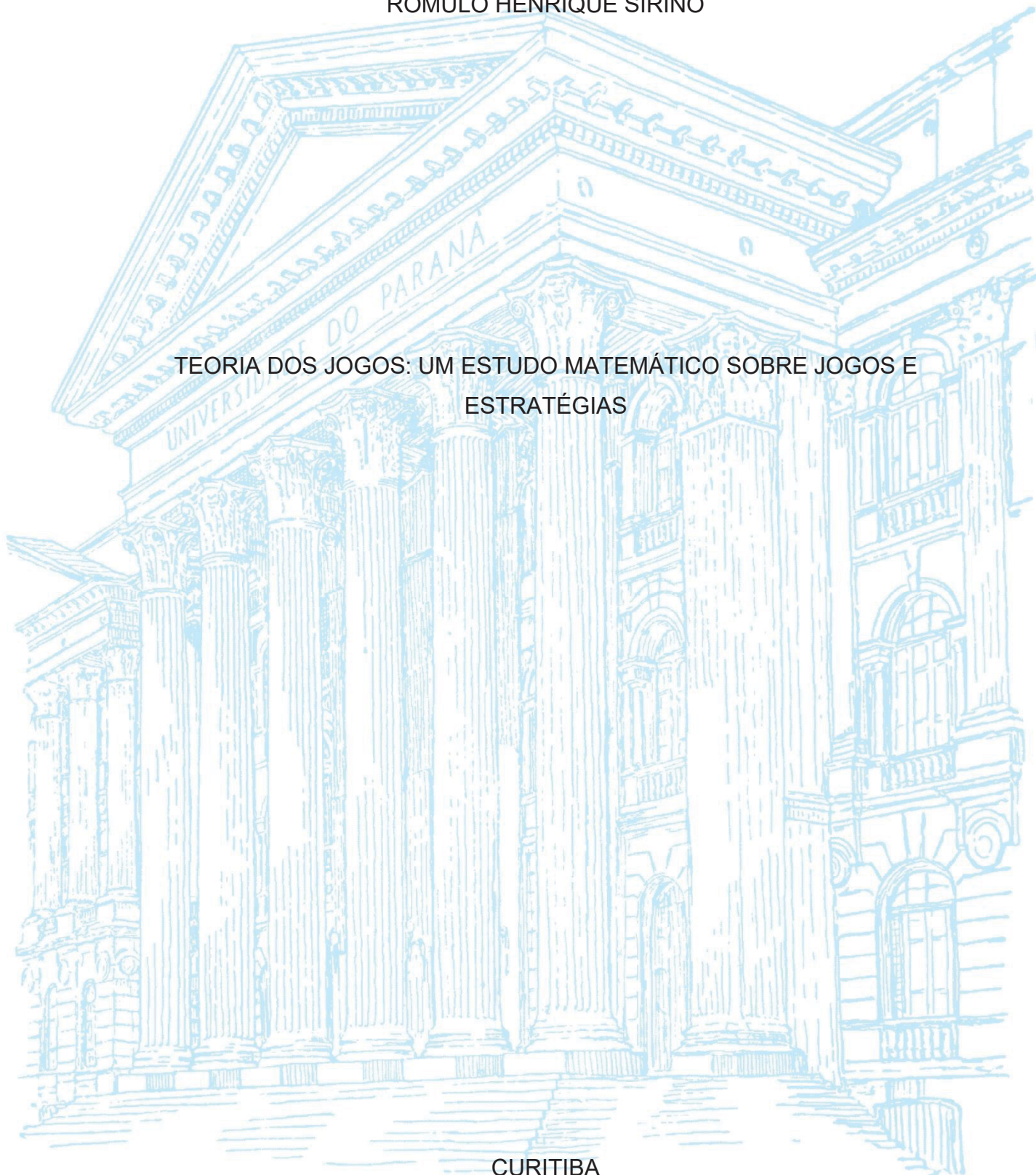
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

RÔMULO HENRIQUE SIRINO

TEORIA DOS JOGOS: UM ESTUDO MATEMÁTICO SOBRE JOGOS E
ESTRATÉGIAS

CURITIBA

2023



RÔMULO HENRIQUE SIRINO

TEORIA DOS JOGOS: UM ESTUDO MATEMÁTICO SOBRE JOGOS E
ESTRATÉGIAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Pettres.

CURITIBA

2023

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Sirino, Rômulo Henrique
Teoria dos jogos: um estudo matemático sobre jogos e estratégias /
Rômulo Henrique Sirino. – Curitiba, 2023.
1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de
Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede
Nacional.

Orientador: Roberto Pettres

1. Matemática. 2. Teoria dos Jogos. 3. Dilema do Prisioneiro. I.
Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em
Matemática em Rede Nacional. III. Pettres, Roberto. IV . Título.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - 31075010001P2

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **RÔMULO HENRIQUE SIRINO** intitulada: **TEORIA DOS JOGOS: UM ESTUDO MATEMÁTICO SOBRE JOGOS E ESTRATÉGIAS**, sob orientação do Prof. Dr. ROBERTO PETTRES, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 11 de Dezembro de 2023.



ROBERTO PETTRES

Presidente da Banca Examinadora



RAUL PRADO RAYA

Avaliador Externo (DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - UFPR)



ADRIANA LUIZA DO PRADO

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Dedico este trabalho em especial aos meus pais, sempre torcendo pelo meu sucesso, à minha esposa Danielle, minha companheira e maior apoio nos momentos difíceis e à minha filha Valentina, nossa princesa e maior tesouro.

AGRADECIMENTOS

É com extrema gratidão que expresso meus agradecimentos a todas as pessoas que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste Mestrado. Este trabalho representa não apenas um marco acadêmico, mas uma jornada marcada pela dedicação, superação e, acima de tudo, pelo apoio fundamental que recebi.

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pela força e orientação que me foram concedidas ao longo desta trajetória. Sua presença constante foi a luz que iluminou meu caminho, sustentando-me nos momentos desafiadores e guiando-me para a conclusão deste trabalho.

Aos meus abençoados pais, expresso minha eterna gratidão. Sua dedicação, amor e apoio incondicional foram os pilares que sustentaram cada passo desta jornada. Suas palavras de encorajamento foram o alento nos momentos de dúvida, e sua presença constante foi a inspiração para alcançar este objetivo.

À minha encantadora esposa, agradeço por ser minha fonte constante de inspiração e apoio. Seu amor e compreensão foram fundamentais para que eu pudesse me dedicar plenamente a este projeto. Sua presença tornou cada desafio mais leve, e sua paciência foi a base que sustentou minha busca pelo conhecimento.

Aos meus queridos irmãos, agradeço pela irmandade que transcende laços sanguíneos. Sua presença e incentivo foram combustíveis essenciais para minha jornada acadêmica, e cada conquista é compartilhada com alegria e cumplicidade.

Aos amigos Diego, Samy e Wilen, minha gratidão especial. Suas contribuições, conselhos e camaradagem foram imprescindíveis. Juntos, enfrentamos desafios, celebramos conquistas e construímos uma rede de apoio que enriqueceu esta experiência.

Aos professores do Mestrado, em especial aos Professores Luiz Antônio de Santana, Carlos Henrique Santos, Alexandre Trovon e principalmente ao estimado Roberto Pettres, meu orientador, agradeço pela sabedoria compartilhada, pela

orientação precisa e pelo estímulo constante à excelência acadêmica. Seu comprometimento com o desenvolvimento dos alunos foi crucial para minha formação.

Dedico este trabalho à minha amada filha Valentina. Seu sorriso iluminou meus dias mais difíceis, e sua presença trouxe um propósito renovado a cada passo. Que este trabalho seja um testemunho do meu amor por você e um exemplo de perseverança para as suas próprias jornadas.

A todos que fazem parte da minha trajetória, meu sincero agradecimento. Este trabalho é fruto do esforço coletivo e do apoio generoso que recebi. Que esta conquista seja compartilhada por todos nós, marcando o fim de uma etapa e o início de novos desafios e realizações.

Grato,
Rômulo Henrique Sirino

"Talvez seja bom ter uma mente bela, mas um dom ainda maior é descobrir um coração belo". (John Forbes Nash Jr., 1928 - 2015)

RESUMO

Essa dissertação explora de forma introdutória alguns temas relacionados à Teoria dos Jogos, apresentando detalhes sobre o Dilema do Prisioneiro, o Duopólio de Cournot e o equilíbrio de Nash. A Teoria dos Jogos, um tópico interdisciplinar, revela-se fundamental na compreensão das interações estratégicas entre agentes racionais. O Dilema do Prisioneiro, paradigmático na teoria, é analisado sob diversas perspectivas, destacando suas implicações éticas e estratégicas. O Duopólio de Cournot é investigado examinando-se as dinâmicas de competição e colaboração entre empresas em um ambiente simulado de oligopólio. O equilíbrio de Nash, conceito central na teoria, é abordado como a solução fundamental para jogos estratégicos, revelando as condições, incentivos e tomada de decisão de cada jogador. Este estudo proporciona uma compreensão inicial das aplicações e desafios desses conceitos na análise de decisões estratégicas em um contexto matemático. Ao explorar a interconexão entre esses temas, a dissertação busca contribuir para o aprimoramento da compreensão teórica e prática da Teoria dos Jogos, e suas implicações em ambientes arbitrários.

Palavras-chave: Matemática, Teoria dos Jogos, Lógica, Dilema do Prisioneiro, Duopólio de Cournot, Equilíbrio de Nash.

ABSTRACT

This dissertation explores introductory some themes related to Game Theory, presenting details about the Prisoner's Dilemma, the Cournot Duopoly and the Nash equilibrium. Game Theory, an interdisciplinary topic, proves to be fundamental in understanding strategic interactions between rational agents. The Prisoner's Dilemma, paradigmatic in theory, is analyzed from different perspectives, highlighting its ethical and strategic implications. The Cournot Duopoly is investigated by examining the dynamics of competition and collaboration between companies in a simulated oligopoly environment. Nash equilibrium, a central concept in the theory, is approached as the fundamental solution for strategic games, revealing the conditions, incentives and decision-making of each player. This study provides an initial understanding of the applications and challenges of these concepts in analyzing strategic decisions in a mathematical context. By exploring the interconnection between these themes, the dissertation seeks to contribute to improving the theoretical and practical understanding of Game Theory, and its implications in arbitrary environments.

Keywords: Mathematics, Game Theory, Logic, Prisoner Dilemma, Cournot Duopoly, Nash Equilibrium.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - John Von Neumann.....	16
Figura 2 - Oskar Morgenstern.....	17
Figura 3 - John Forbes Nash Júnior	20
Figura 4 - Infinitos Máximos.....	32
Figura 5 - Côncava com um único máximo	33
Figura 6 - Reta tangente à curva no ponto a	34
Figura 7 - Dilema do Prisioneiro	39
Figura 8 - O Duopólio de Cournot.....	53
Figura 9 - Máximo ínfimo e Mínimo supremo	64

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	11
1 INTRODUÇÃO	11
1.1 GENERALIDADES	11
1.2 OBJETIVO GERAL	11
1.3 JUSTIFICATIVA	12
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	13
CAPÍTULO 2	15
2 REVISÃO DE LITERATURA	15
2.1 TEORIA DOS JOGOS: FATOS HISTÓRICOS E COLABORADORES	15
CAPÍTULO 3	22
3 EQUILÍBRIO DE NASH	22
3.1 JOHN FORBES NASH JR.	22
CAPÍTULO 4	28
4 TEOREMA DE NASH	28
4.1 FUNDAMENTOS SOBRE O TEOREMA DE NASH	28
CAPÍTULO 5	37
5 O DILEMA DO PRISIONEIRO	37
5.1 FUNDAMENTOS SOBRE O DILEMA DO PRISIONEIRO	37
CAPÍTULO 6	48
6 DUOPÓLIO DE COURNOT	48
6.1 FUNDAMENTOS SOBRE O DUOPÓLIO DE COURNOT	48
CAPÍTULO 7	54
7 JOGOS DE SOMA ZERO	54
7.1 FUNDAMENTOS SOBRE O JOGO DE SOMA ZERO	54
CAPÍTULO 8	59
8 TEOREMA MINIMAX DE VON NEWMAN	59
8.1 FUNDAMENTOS SOBRE O TEOREMA MINIMAX DE VON NEWMAN	59
9 CONSIDERAÇÕES FINAIS	66
10 REFERÊNCIAS	67
11 ANEXO 1 – TEOREMA MINIMAX	71

CAPÍTULO 1

1 INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

A Teoria dos Jogos é uma área que, ao longo das décadas, tem se mostrado relevante em uma variedade de áreas que vão além dos jogos (SOUZA, 2003). Na Política, por exemplo, essa teoria auxilia na análise de negociações diplomáticas, disputas territoriais e tomadas de decisões governamentais. Como ferramenta de decisão, pode ser utilizada para tratar de problemas que necessitam estratégias e que podem acarretar em conflitos (MAILLART, 2016), cujas decisões podem incorrer em implicações e até alcançar os meandros das negociações globais e das interações humanas (BIERMAN e FERNANDEZ, 2010), bem como, de outras áreas das ciências em geral.

A Teoria dos Jogos não trata apenas de um conjunto abstrato de fórmulas matemáticas, mas de um conjunto de recursos que permitem, compreender as particularidades relacionadas à jogos e discussões estratégicas, onde os jogadores buscam alcançar seus objetivos enquanto enfrentam a incerteza sobre as escolhas de seus oponentes.

Determinados autores, como Raposo (2009) e Vitale e Silva (2017), afirmam que a Teoria dos Jogos não se aplica apenas ao meio acadêmico, mais sim, pode servir como uma ferramenta essencial para compreender as complexidades do mundo em que vivemos e, assim, equipar as pessoas com as habilidades necessárias para tomar decisões informadas e estratégicas em suas próprias vidas.

Desta forma, apresenta-se nesse trabalho um estudo teórico sobre a Teoria dos Jogos, fazendo uso e sendo analisados alguns problemas e conceitos presentes no Dilema do Prisioneiro, Jogos de soma zero, Duopólios de Cournot e equilíbrio de Nash. Além disso, serão explorados teoremas notáveis, como o Teorema Minimax de Von Neumann, e o Teorema de Nash, que lançam luz sobre estratégias ótimas e a natureza das decisões estratégicas (MOREIRA, 2017).

1.2 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral deste trabalho é produzir um estudo, amplo e acessível, sobre a Teoria dos Jogos, a partir de situações problema, jogos e algoritmos matemáticos, e sua conexão com diferentes áreas do conhecimento em contextos do mundo atual.

1.2.1 Objetivos específicos

(i) Apresentar os conceitos fundamentais da Teoria dos Jogos, incluindo estratégias, jogadores, regras e tipos de jogos;

(ii) Ilustrar com casos práticos e exemplos concretos que demonstrem a aplicação da Teoria dos Jogos em diversas áreas, como Economia, Política, Biologia e Psicologia;

(iii) Analisar em detalhes tópicos específicos, como o Dilema do Prisioneiro, Jogos de soma zero, Duopólios de Cournot, Equilíbrio de Nash, Teorema Minimax de Von Neumann e Teorema de Nash, do ponto de vista matemático;

(iv) Destacar a importância da Teoria dos Jogos como uma ferramenta útil para a tomada de decisões estratégicas em situações do cotidiano, como em negociações comerciais, na política e na resolução de conflitos e

(v) Discutir sobre as limitações da Teoria dos Jogos.

1.3 JUSTIFICATIVA

A globalização do mundo moderno, aproximou e conectou ainda mais as pessoas, tornou visível grupos étnicos, ampliou mercados emergentes e suas vias comerciais, nacionais e internacionais, fez aumentar a comunicação na sociedade, e com isso, deu espaço para o contraditório, para a ampla oferta e concorrência, revelando a necessidade de planejar estratégias para equilibrar a existência destes agentes. Esse equilíbrio não é encontrado em situações onde busca-se por vantagens ou por vencedores, porém, pode ser reconhecido em diversas situações cotidianas em que se busca o melhor de forma individual e também para o grupo, e é aqui que a Teoria dos Jogos se mostra útil, justificando o presente estudo e servindo como motivação no anseio de apresentar e promover um entendimento sobre a própria Teoria, objetivando que estudantes e professores de Matemática possam ser atraídos pelo tema, o qual, por ora, acredita-se ser pouco explorado por esse público .

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Essa pesquisa inicia-se com uma apresentação preliminar sobre a Teoria dos Jogos, onde são estabelecidos os pilares essenciais que permitirão compreender os conceitos subsequentes. São apresentados breves detalhes históricos que levaram ao desenvolvimento posterior de um campo de estudo inteiramente novo para a época. Apresentado o contexto histórico que viabilizou a Teoria dos Jogos, propõe-se um estudo sobre o Equilíbrio de Nash, um recurso matemático que constitui a base fundamental para a compreensão das interações estratégicas e a tomada de decisões.

Em seguida, no Capítulo 2 será abordado o Teorema de Nash, uma contribuição revolucionária que introduziu o conceito de equilíbrio, levando em consideração a racionalidade limitada dos jogadores. Cada um desses tópicos desempenha um papel crucial na compreensão da Teoria dos Jogos e em sua aplicação em diversas áreas, desde a Economia até a Ciência Política. Esta seção servirá como alicerce para concluir nossa exploração da Teoria dos Jogos e seus conceitos essenciais, oferecendo noções importantes para compreender as complexas interações estratégicas que moldam o mundo contemporâneo.

No Capítulo 3, aprofunda-se na compreensão do Equilíbrio de Nash, ao explorar as estratégias que permitem aos jogadores alcançar resultados ótimos em jogos estratégicos. Esta análise proporciona uma transição natural para o Capítulo 4, onde o texto aborda o Teorema de Nash e enriquece o trabalho por meio de uma compreensão matemática das interações estratégicas.

No Capítulo 5, o ensaio teórico busca levar os leitores a uma análise introdutória do Dilema do Prisioneiro, um cenário clássico que ilustra as complexidades inerentes às decisões estratégicas, enfatizando a relevância da cooperação.

O percurso incluirá no Capítulo 6 uma investigação minuciosa do Duopólio de Cournot, um exemplo que lança luz sobre as interações estratégicas entre empresas em um mercado altamente competitivo. Posteriormente, voltando-se para o conceito do Equilíbrio de Nash, um pilar fundamental na Teoria dos Jogos, que revela como os jogadores podem alcançar resultados ótimos em jogos estratégicos.

Em sequência, no Capítulo 7 estuda-se o conceito de Jogos de Soma Zero, onde os ganhos de um jogador são contrabalanceados pelas perdas do outro,

proporcionando uma compreensão mais profunda das estratégias e equilíbrios nesse contexto.

Na última etapa, dada no Capítulo 8, é estudado o Teorema Minimax de Von Neumann, que orientará os leitores na compreensão das estratégias ótimas em jogos com informações incompletas.

Por fim, são apresentadas as considerações finais sobre o estudo que abordou desde o contexto histórico até os teoremas fundamentais, e então as referências utilizadas e um breve exemplo de aplicação conceitual.

CAPÍTULO 2

2 REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo é apresentada a revisão de literatura sobre a Teoria dos Jogos.

2.1 TEORIA DOS JOGOS: FATOS HISTÓRICOS E COLABORADORES

A Teoria dos Jogos, de modo informal, tem uma origem histórica muito antiga, que remonta a vários milênios. Uma das primeiras formas conhecidas de se compreender a Teoria dos Jogos foi o jogo conhecido como Go, que se originou na China por volta de 2500 a.C. Esse jogo envolve dois jogadores que tentam conquistar territórios em um tabuleiro, usando peças brancas e pretas. O jogo é essencialmente sobre estratégia e tomada de decisões. O próprio jogo de Xadrez, que surgiu possivelmente na Índia por volta do século VI, demonstra até os dias de hoje aos jogadores a importância da estratégia e da tática, como um dos mais desafiadores testes de pensamento lógico, possibilidades e tomada de decisão.

A história da Teoria dos Jogos remonta às civilizações antigas, onde as pessoas comumente se entretinham em jogos de azar e estratégia. No entanto, foi apenas no século XVIII que as primeiras tentativas de analisar matematicamente esses jogos de azar foram ensaiadas. A seguir, são apresentados alguns autores que contribuíram com a formalização da Teoria dos Jogos.

2.1.1 JAMES WALDEGRAVE

A Teoria dos Jogos tem uma origem que remonta ao século XVIII, conforme destacado por Mendonça (2017). Nessa época, James Waldegrave, um aristocrata e matemático britânico, mergulhou em um intrigante jogo de cartas chamado *Le Her*. Sua correspondência com o matemático suíço Nicolas Bernoulli resultou em análises das estratégias possíveis para esse jogo, fornecendo compreensões cruciais que viriam a ser a base da Teoria dos Jogos moderna (BICCA; MOTA, 2018).

No jogo *Le Her*, dois jogadores enfrentavam a decisão de cooperar ou se trair, e as recompensas ou penalidades dependiam dessas escolhas mútuas, criando uma dinâmica de interação estratégica que essencialmente capturava o que mais tarde foi

formulado como o "Dilema do Prisioneiro" (LEIVAS, 2018). Waldegrave, ao analisar essa situação aparentemente simples, reconheceu a complexidade subjacente e foi um dos pioneiros a explorar a lógica por trás das escolhas estratégicas dos jogadores.

Embora a análise inicial de Waldegrave não tenha levado à formalização imediata da Teoria dos Jogos, ela lançou as bases para a compreensão futura das interações estratégicas em uma variedade de contextos.

2.1.2 JOHN VON NEUMANN E OSKAR MORGENSTERN

Embora as sementes da Teoria dos Jogos tenham sido plantadas no século XVIII, seu florescimento só ocorreu no século XX, com o trabalho notável de John Von Neumann e Oskar Morgenstern. Von Neumann, um matemático de origem húngara, e Morgenstern, um economista austríaco, colaboraram para criar a fundação matemática e econômica do campo (COSTA, 1975).

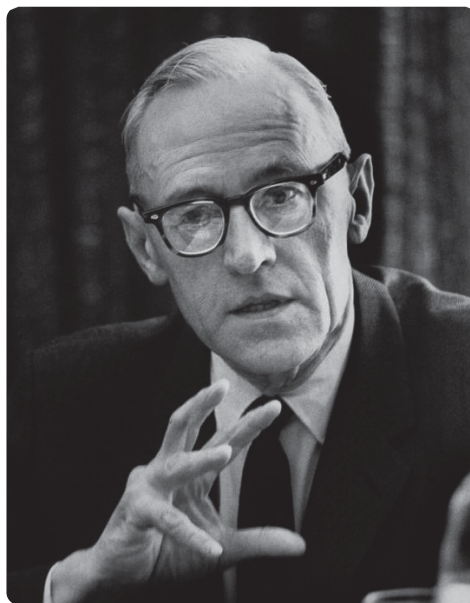


Figura 1 - John Von Neumann

Em 1944, Von Neumann e Morgenstern publicaram em uma conferência a obra "Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico". Neste livro, os autores desenvolveram uma estrutura matemática rigorosa para analisar jogos estratégicos e suas implicações econômicas. Essa obra lançou as bases para a compreensão matemática das interações estratégicas, introduzindo conceitos fundamentais como a matriz de *payoffs*, estratégias puras e mistas, e o equilíbrio de Von Neumann.

O termo *payoff*, muito presente nesse trabalho, tem por significado literal. pagamento ou recompensa, e pode ser definido como um número que reflete a desejabilidade de um resultado possível para um jogador, ou seja, expressa suas preferências ou utilidade de um resultado.



Figura 2 - Oskar Morgenstern

O livro de Von Neumann e Morgenstern não apenas abriu novos horizontes na economia, mas também forneceu uma linguagem comum para descrever e analisar uma variedade de situações de tomada de decisões estratégicas. O autor estabeleceu a Teoria dos Jogos como uma disciplina respeitável e relevante em campos que vão além da economia (WATSON, 2013).

2.1.3 DESENVOLVIMENTOS POSTERIORES

Apesar das contribuições substanciais de Von Neumann e Morgenstern, a Teoria dos Jogos continuou a evoluir e se expandir. Outros matemáticos e economistas contribuíram significativamente para o desenvolvimento do assunto, revelando diferentes interações estratégicas, cujo autores são apresentados a seguir.

2.1.3.1 Antoine Augustin Cournot

De acordo com as pesquisas de Fiani (2009), no século XIX, o matemático francês Antoine Augustin Cournot publicou sua obra "*Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*" em 1838. Nesse trabalho, ele estabeleceu os fundamentos teóricos da Teoria dos Jogos e introduziu o modelo de duopólio, conhecido como "*Duopólio de Cournot*". Os conceitos pioneiros apresentados por Cournot são amplamente reconhecidos como precursores do desenvolvimento subsequente da Teoria dos Jogos.

O "*Duopólio de Cournot*", um modelo que examina a competição entre duas empresas, ilustrou de maneira notável a aplicação da Teoria dos Jogos em contextos econômicos complexos, deixando um impacto duradouro no campo (PEÑALOZA; RABELLO, 2012).

2.1.3.2 Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo

Conforme apontado por Santos (2012), o matemático alemão Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo, em 1913, apresentou uma demonstração significativa ao afirmar que o jogo de xadrez sempre possui uma solução, renunciando a técnica de resolução posteriormente reconhecida como a técnica da indução reversa. Essa inovação de Zermelo estabeleceu um marco crucial para a análise de jogos com soluções determinadas, um conceito de importância fundamental no âmbito da Teoria dos Jogos. Essas contribuições foram essenciais para o avanço e aprofundamento da compreensão desse campo de estudo.

2.1.3.3 Félix Edouard Justin Emile Borel

Félix Edouard Justin Emile Borel, outro eminente matemático francês, deixou uma marcante contribuição ao campo da Teoria dos Jogos (FIANI, 2006). Borel foi um pioneiro ao introduzir o conceito moderno de estratégia em suas análises, um passo revolucionário que abriu novos horizontes para uma compreensão mais profunda das escolhas racionais e estratégicas em jogos complexos (SANTOS, 2012).

Esses avanços subsequentes ampliaram consideravelmente o escopo da Teoria dos Jogos, possibilitando a análise de uma vasta gama de modelos de interação e, assim, impulsionando seu crescimento enquanto campo interdisciplinar de vital importância. O legado de Borel continua a reverberar na Teoria dos Jogos,

enriquecendo continuamente nosso entendimento das dinâmicas estratégicas subjacentes a diferentes situações de jogo.

2.1.3.4 Teoria do Jogos no século XX

O Século XX marcou uma grande evolução teórica na Teoria dos Jogos. Em 1928, o matemático John von Neumann publicou um artigo demonstrando que todo jogo finito de soma zero (onde o ganho de um jogador implica na perda do outro), envolvendo duas pessoas, possui solução através de estratégias mistas. Essas estratégias serão abordadas com mais detalhes posteriormente.

Em 1944, John von Neumann, considerado um dos coinventores do computador moderno, juntamente com o economista Oskar Morgenstein, publicou o livro "*Theory of Games and Economic Behavior*". Essa obra é considerada a pedra angular que estabeleceu a Teoria dos Jogos como campo de estudo. A teoria proposta nesse livro funciona como uma ferramenta essencial para entender o processo de tomada de decisões em diversas áreas, incluindo a administração, lançando uma nova perspectiva sobre antigos problemas e dinâmicas que até então eram desconhecidas (NEUMANN & MORGENSTERN, 1972).

Segundo Perez (2012), no que concerne à aplicação da Teoria dos Jogos, o autor Perez oferece diagnósticos adicionais e esclarecedores.

Fornecer um guia normativo para o comportamento racional de um grupo cujos membros almejam alcançar diferentes objetivos. Assim, ao oferecer uma formalização abstrata para o tratamento dos conflitos do homem contemporâneo, representa um novo paradigma que os atores sociais podem adotar em situações conflituosas que se apresentem (PEREZ, 2012, p.46).

John Forbes Nash Júnior, outro eminente matemático, contribuiu de forma fundamental para a Teoria dos Jogos ao desenvolver o conceito de Equilíbrio de Nash. Esse equilíbrio mostra que nem todos os jogos são de soma zero, ou seja, nem sempre o ganho de um jogador implica na perda do outro. Nash demonstrou que há situações em que todas as estratégias adotadas por todos os jogadores são as melhores respostas possíveis, tornando desnecessário qualquer ajuste nas estratégias.

Em 1950, Nash publicou quatro artigos de grande relevância para a Teoria dos Jogos e para a Teoria de Barganha. Esses jogos serão explorados posteriormente.

Nos artigos "*Equilibrium Points in n-Person Games*" e "*Non-cooperative Games*", Nash demonstrou a existência de um equilíbrio de estratégias mistas para jogos não cooperativos, denominado Equilíbrio de Nash. Ele também sugeriu uma abordagem de estudo para jogos cooperativos, reduzindo-os à forma não cooperativa. Nos artigos "*The Bargain Problem*" e "*Two-Person Cooperative Games*", Nash criou a Teoria da Barganha e demonstrou a existência da solução de Nash para esse tipo de negociação (NASH JR, 1950).

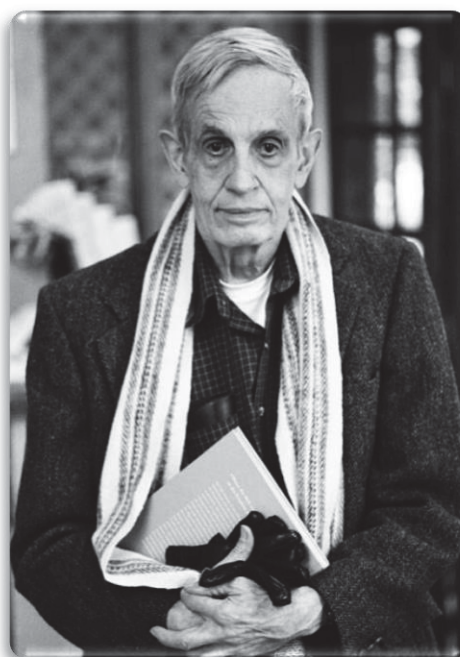


Figura 3 - John Forbes Nash Júnior

O impacto significativo da Teoria dos Jogos na compreensão do comportamento estratégico foi reconhecido em 1994, quando John Nash (Universidade de Princeton), John Harsanyi (Universidade de Berkeley, Califórnia) e Reinhard Selten (Universidade de Bonn, Alemanha) foram laureados com o Prêmio Nobel de Economia. O reconhecimento veio pela análise pioneira sobre equilíbrio na Teoria dos Jogos não cooperativos, fornecendo uma base matemática para estratégias que explicam quando as decisões cooperativas em situações competitivas são mais vantajosas.

Em 2005, Thomas Schelling e Robert Aumann, ao trabalharem com a Teoria dos Jogos, também foram agraciados com o Prêmio Nobel de Economia. Schelling destacou-se pelo uso da Teoria dos Jogos para explicar tomadas de decisões em conflitos internacionais, inclusive em situações de guerra nuclear. Aumann, por sua

vez, teorizou que a cooperação é menos provável em jogos com vários participantes, interações infrequentes, prazos curtos ou ações pouco observáveis dos outros participantes.

CAPÍTULO 3

3 EQUILÍBRIO DE NASH

Neste capítulo, são apresentados os fundamentos essenciais do Equilíbrio de Nash, um conceito central na Teoria dos Jogos. Exploraremos as dinâmicas estratégicas que fundamentam este tema.

3.1 JOHN FORBES NASH JR

3.1.1 Equilíbrio de Nash

O equilíbrio de Nash é um conceito crucial na Teoria dos Jogos, introduzido por John Nash, que define uma situação em que nenhum jogador tem incentivos para mudar sua estratégia, dado o que o outro jogador está fazendo. Em outras palavras, é um estado em que, dadas as estratégias escolhidas pelos outros jogadores, nenhum jogador tem motivos para desviar da sua estratégia atual (NASH JR., 1950).

O equilíbrio de Nash representa um desafio para alcançar a cooperação mútua, pois, embora a cooperação seja mutuamente benéfica a longo prazo, os incentivos imediatos muitas vezes levam os jogadores a escolher a traição. Isso destaca a tensão entre o interesse individual de curto prazo e o benefício coletivo de longo prazo, demonstrando a complexidade das interações estratégicas (DIXIT, 1996).

Ao explorar e entender essas estratégias e o equilíbrio de Nash no contexto do Dilema do Prisioneiro, pode-se obter uma visão mais profunda da dinâmica da cooperação, competição e tomada de decisões em situações estratégicas complexas, contribuindo para o enriquecimento da Teoria dos Jogos e sua aplicação em diversas áreas.

O Equilíbrio de Nash pode ser considerado um conjunto de estratégias para n jogadores, onde nenhum deles tem incentivo para modificar sua estratégia individual, considerando as estratégias dos demais jogadores. Ou seja, no Equilíbrio de Nash, as estratégias adotadas por cada jogador são, no mínimo, tão eficazes quanto qualquer outra estratégia disponível em resposta às estratégias escolhidas pelos outros jogadores (MYERSON, 1999).

De acordo com Myerson (1999), o Equilíbrio de Nash alterou a concepção da economia. Ele transcendeu a visão tradicional de uma ciência especializada focada na produção e alocação de bens, evoluindo para uma abordagem contemporânea que se concentra na análise dos incentivos em todas as instituições sociais. O autor continua afirmando:

Antes de Nash, a metodologia analítica predominante para a economia era a teoria dos preços. A perspectiva de análise da Teoria dos Jogos não cooperativos, introduzida por Nash, removeu essa restrição metodológica na análise prática da economia. Portanto, a formulação da Teoria dos Jogos não cooperativos por Nash representa um marco significativo na longa evolução da economia e das ciências sociais, conforme apontado por Myerson (1999, p. 1080).

Além da contribuição de John Nash, destacam-se outras abordagens relevantes para o entendimento e aplicação do Equilíbrio de Nash. Schelling (1981) e Aumann (1974) forneceram contribuições significativas na compreensão dos equilíbrios em estratégias mistas e equilíbrios bayesianos, respectivamente.

Schelling (1981) aprofundou a análise dos equilíbrios nas estratégias mistas, onde os jogadores tomam decisões baseadas em probabilidades, tornando o conceito de equilíbrio mais flexível e aplicável a uma variedade maior de situações. Por sua vez, Aumann (1974) estendeu o conceito de Equilíbrio de Nash para considerar a informação assimétrica entre os jogadores, levando à formulação de equilíbrios bayesianos.

Myerson (1999) destaca que o Equilíbrio de Nash revolucionou a visão tradicional da economia. Antes de sua formulação, a metodologia predominante era a teoria dos preços, mas a Teoria dos Jogos não cooperativos, introduzida por Nash, ampliou as possibilidades analíticas na economia. Isso resultou em uma nova abordagem que se concentra na análise dos incentivos em todas as instituições sociais. O Equilíbrio de Nash tornou-se um marco na evolução da economia e das ciências sociais, transcendendo a análise apenas da produção e alocação de bens.

Em muitos jogos não cooperativos, a única solução viável é o Equilíbrio de Nash. Ele representa a solução mais provável, pois a Teoria dos Jogos, em sua essência, não pode sugerir um conjunto de estratégias como solução para um jogo que não esteja alinhado com o Equilíbrio de Nash. É uma conclusão natural para jogos

não cooperativos e é a resposta que os agentes racionais tendem a buscar (MYERSON, 1999).

Contudo, é importante diferenciar a justificção para a escolha de uma estratégia no Equilíbrio de Nash de outras justificções, como a *maximin*. Em um jogo de soma zero de von Neumann, um jogador racional tem uma razão justificável para optar pela estratégia *maximin*, garantindo um *payoff* certo. No entanto, essa lógica não se aplica à justificção típica do Equilíbrio de Nash, que se concentra na otimização das escolhas estratégicas dadas as ações dos outros jogadores (MYERSON, 1999).

3.1.2 Assunções básicas para o Equilíbrio de Nash

As premissas do Equilíbrio de Nash são essenciais para compreender a lógica por trás desse equilíbrio e sua aplicabilidade em uma variedade de contextos, destacando-se:

1. Jogadores Racionais:

A primeira premissa é que todos os jogadores envolvidos em um jogo são considerados racionais (MYERSON, 1999). Nesse contexto, ser racional significa que cada jogador possui objetivos bem definidos e age de maneira lógica e consistente para alcançar esses objetivos. Eles avaliam as informações disponíveis e escolhem as estratégias que melhor servem aos seus interesses.

2. Estratégias e Escolhas:

Cada jogador tem à sua disposição um conjunto de estratégias possíveis (SCHELLING, 1981). Essas estratégias representam as diferentes ações que um jogador pode executar durante o jogo. Cada estratégia leva a resultados distintos, dependendo das escolhas feitas pelos outros jogadores. Portanto, a seleção de uma estratégia é uma decisão crucial para os jogadores, pois determina o desfecho do jogo.

3. Utilidades e Preferências:

Os jogadores têm preferências claras em relação aos resultados do jogo, expressas em termos de utilidades (MYERSON, 1999). Cada jogador busca maximizar sua própria utilidade, que pode ser positiva (indicando ganhos) ou negativa (indicando perdas). As preferências e as utilidades de cada jogador são consideradas

fundamentais na tomada de decisões estratégicas e na determinação das estratégias a serem adotadas em um jogo.

Essas assunções básicas fornecem o alicerce para a análise do Equilíbrio de Nash e são essenciais para entender como os jogadores tomam decisões estratégicas em diversos contextos. O Equilíbrio de Nash é uma ferramenta poderosa que se aplica a uma ampla gama de situações, desde negociações empresariais até estratégias políticas, proporcionando esclarecimentos sobre o comportamento estratégico dos jogadores em ambientes competitivos ou cooperativos.

3.1.3 Estratégias em Equilíbrio de Nash

O Equilíbrio de Nash, estabelece uma condição de estado essencial em jogos estratégicos, revelando-se como um ponto crucial de análise. Este estado ocorre quando nenhum jogador possui incentivo para modificar sua estratégia, desde que esteja ciente das estratégias adotadas pelos demais jogadores (MYERSON, 1999). Em suma, representa uma situação de estabilidade estratégica na qual, diante das estratégias dos outros participantes, nenhum jogador individualmente consegue melhorar sua situação ao mudar de estratégia. É uma condição de estabilidade estratégica onde os jogadores, depois de determinarem suas estratégias, não possuem motivo para desviar dessa escolha, considerando as escolhas dos outros jogadores.

John Nash, conforme afirmado por Nash Jr. (1950), foi o pioneiro no desenvolvimento e formulação dessa condição de equilíbrio, atribuindo-lhe seu nome. Em suas pesquisas, Nash demonstrou que, nos jogos estratégicos, é viável identificar um conjunto de estratégias, uma para cada jogador, no qual nenhum deles tem incentivo unilateral para mudar sua estratégia, sendo esse o chamado Equilíbrio de Nash.

Essa forma de equilíbrio revela-se uma ferramenta analítica crucial em diversos domínios, desde a economia até a biologia e as ciências sociais (MYERSON, 1999). O Equilíbrio de Nash proporciona uma compreensão crucial de como os jogadores podem interagir de maneira estratégica, antecipando as ações dos outros e tomando decisões que maximizem seus próprios interesses dentro desse contexto de interdependência estratégica. Sua relevância se estende a várias áreas, permeando diferentes aspectos da vida e do conhecimento.

Na economia, o Equilíbrio de Nash é de extrema importância, pois permite modelar comportamentos e estratégias dos agentes em mercados, leilões, oligopólios e outros cenários econômicos. Seus princípios são essenciais para entender como os jogadores podem agir em situações de competição e cooperação, oferecendo proficiência para a análise de transações comerciais e tomadas de decisões empresariais. Esta abordagem tem sido aplicada em vários setores, incluindo finanças, negócios internacionais e análise de políticas econômicas.

Além disso, o Equilíbrio de Nash encontra aplicações significativas em ciências sociais, como sociologia e psicologia, ajudando a compreender as interações humanas, coalizões e conflitos. Na sociologia, por exemplo, é útil para analisar como as pessoas interagem em grupos, enquanto na psicologia pode ser aplicado para entender comportamentos individuais em contextos sociais complexos.

A sua importância se estende também ao campo da biologia, especialmente na teoria da evolução e no estudo dos comportamentos animais. Estratégias de sobrevivência e reprodução podem ser entendidas em termos de equilíbrios de Nash, onde os organismos buscam maximizar sua adaptação ao ambiente e suas chances de reprodução.

Na ciência política, o Equilíbrio de Nash é crucial para analisar estratégias em conflitos e negociações, fornecendo uma estrutura valiosa para entender tomadas de decisões em situações de confronto ou cooperação entre diferentes atores políticos.

O Equilíbrio de Nash é uma ferramenta poderosa e flexível que transcende a Teoria dos Jogos, permeando várias disciplinas e áreas de estudo. Seu impacto e relevância só aumentam à medida que continuamos a explorar e entender as complexas interações e estratégias que definem nosso mundo. Conhecer e aplicar o conceito de Equilíbrio de Nash pode ser útil para uma compreensão mais completa das interações humanas, sociais e econômicas. Este conceito é, portanto, um pilar essencial na análise e modelagem do comportamento estratégico em uma ampla gama de contextos.

3.1.4 Aplicações e importância

Em economia, ao examinar o comportamento dos jogadores em situações de competição, o Equilíbrio de Nash produz uma melhor percepção sobre a dinâmica de mercado e as estratégias empresariais que podem ser adotadas para maximizar o

ganho, desempenhando um papel crucial na modelagem da competição entre empresas e na determinação das estratégias de formação de preços em mercados altamente dinâmicos (VITALE & SILVA, 2017).

Conforme argumentado por Myerson (1999), na esfera política, o Equilíbrio de Nash é uma ferramenta fundamental para examinar estratégias eleitorais e negociar acordos diplomáticos de maneira eficaz. A compreensão desse equilíbrio é crucial para prever as ações dos diversos atores envolvidos, permitindo a formulação de estratégias eficazes e tomadas de decisão informadas em contextos políticos complexos, nos quais as interações estratégicas podem determinar o rumo dos acontecimentos.

Além disso, o Equilíbrio de Nash é de grande importância na biologia, onde auxilia a explicar a evolução de comportamentos cooperativos em diversas espécies (MOREIRA, 2017). A análise baseada neste conceito é valiosa para entender como as interações estratégicas ocorrem na natureza e como a cooperação pode surgir em cenários competitivos, contribuindo para a sobrevivência e a adaptação das espécies ao longo do tempo.

Nas ciências sociais e empresariais, o Equilíbrio de Nash desempenha um papel crucial ao proporcionar uma elucidação sobre como agentes racionais tomam decisões em cenários complexos (FIANI, 2006). Permite antecipar e reagir de maneira eficaz às ações dos outros, buscando alcançar resultados ótimos em situações competitivas ou cooperativas, promovendo uma visão mais clara das dinâmicas sociais e empresariais. Em síntese, o Equilíbrio de Nash é uma ferramenta poderosa e versátil que influencia nossa compreensão das interações estratégicas e molda decisões em uma ampla gama de contextos, desempenhando um papel fundamental na análise e na tomada de decisões estratégicas em diversos âmbitos. Sua aplicabilidade e relevância continuam a ser objeto de estudo e pesquisa, enriquecendo nossa compreensão dos complexos padrões de comportamento humano e das estratégias adotadas em interações estratégicas.

CAPÍTULO 4

4 TEOREMA DE NASH

Neste capítulo, são apresentados os princípios fundamentais do Teorema de Nash. Serão exploradas algumas implicações matemáticas deste teorema, examinando como ele moldou a análise de tomadas de decisão em cenários estratégicos.

4.1 FUNDAMENTOS SOBRE O TEOREMA DE NASH

A Teoria dos Jogos, uma disciplina que envolve a análise do comportamento humano por meio de modelagem matemática, é amplamente utilizada em campos como Economia e Administração, com potenciais aplicações também em outras disciplinas das ciências sociais, como Ciência Política e Direito. Ela oferece conceitos essenciais para compreender as interações estratégicas entre os agentes envolvidos em uma determinada situação.

Para garantir uma interpretação precisa e evitar mal-entendidos na aplicação da Teoria dos Jogos à resolução de conflitos, é fundamental esclarecer a terminologia específica adotada nesta teoria. O termo "jogo" refere-se ao conjunto completo de regras que descrevem a situação a ser modelada, enquanto "movimentos" ou "ações" representam as opções que um jogador pode escolher em um determinado momento. Por último, as "estratégias" são planos de ação que consideram os diversos momentos e circunstâncias do jogo.

Para configurar uma situação estratégica como um jogo, é essencial identificar e relacionar certos elementos conhecidos como os elementos do jogo. Estes incluem os "jogadores" (os agentes envolvidos na interação estratégica), os "movimentos" (ou "ações") possíveis para cada jogador, levando em conta as informações disponíveis para cada um, e as "recompensas" associadas a cada movimento, considerando as possíveis ações dos outros jogadores (VON NEUMANN; MORGENSTERN, 1953).

Como destacado por Myerson (1991, p. 370), a correspondência entre abordagens identificada por Nash implica que:

As ações cooperativas surgem de um processo de negociação entre os jogadores que estão cooperando. Durante essa negociação, espera-se que cada jogador adote uma estratégia que esteja alinhada com sua busca por maximização de utilidades, de maneira similar a outras situações de jogo. Em outras palavras, em qualquer contexto real, ao examinarmos cuidadosamente como as pessoas podem colaborar para chegar a um acordo sobre uma estratégia cooperativa conjunta, podemos, em princípio, modelar isso como um jogo extensivo (ou estratégico ou bayesiano). Posteriormente prevendo o resultado analisando o conjunto de equilíbrios desse jogo.

É primordial compreender que, na Teoria dos Jogos, o conceito-chave é o de "equilíbrio". Um dos equilíbrios mais notáveis é o "Equilíbrio de Nash", concebido pelo matemático e economista John Nash. O Equilíbrio de Nash ocorre quando cada jogador, conhecendo as estratégias dos outros, escolhe a melhor resposta possível, resultando em um estado em que nenhum jogador tem incentivo para mudar sua estratégia unilateralmente (NASH JR., 1950). Este equilíbrio é determinante em várias situações da vida real, como competição de empresas, políticas de segurança, negociações salariais, entre outros, e tem implicações profundas na tomada de decisões estratégicas.

Ao compreender os elementos fundamentais, as estratégias e os equilíbrios associados, os tomadores de decisão podem tomar decisões mais informadas, antecipando as ações dos outros jogadores e maximizando seus próprios ganhos dentro de um contexto competitivo ou cooperativo.

Neste âmbito introdutório em Teoria dos Jogos, em que esse trabalho propõe-se a investigar, os jogos apresentados possuem estratégias discretas, como no Dilema do Prisioneiro, em que tem-se as opções confessar ou negar. Também é apresentado, em determinado ponto desse texto, que estratégias também podem representar preços, decisões de produção ou qualquer outra situação em que os resultados individuais dependam das decisões de outros agentes.

Em uma definição mais formal para o que matematicamente significa um Jogo, será definido como um conjunto finito de jogadores denotado por $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$. Cada jogador $g_i \in G$ detém um intervalo compacto de estratégias $I_i = [a_i, b_i]$. O conjunto de todos os intervalos forma, portanto, o produto cartesiano:

$$I = \prod_{i=1}^n I_i = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n,$$

que é denominado como espaço de estratégia contínua do jogo.

Define-se, ademais, que para cada jogador $g_i \in G$ existe uma função de *payoffs*:

$$\begin{aligned} U_i: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow U_i(x) \end{aligned}$$

que conduz ao *payoff* $U_i(x)$, imagem de um vetor $x \in I$ para o jogador g_i associado a um perfil de estratégia, em que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Considere a seguinte suposição, um jogo com dois participantes, 1 e 2, que escolhem estratégias no intervalo $[0,1]$. Assim, tem-se $I_1 = [0,1]$ e $I_2 = [0,1]$ e o domínio $I_1 \times I_2$ será um quadrado compacto de lado 1. O *payoff* de cada jogador é dado pelas funções:

$$U_1: I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad U_2: I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Assume-se previamente também a definição de um Equilíbrio de Nash como um conceito fundamental para avaliar esse estudo.

Definição: Um equilíbrio de Nash é dado por um conjunto de estratégias (\bar{x}, \bar{y}) que atende às condições:

$$\begin{aligned} U_1(x, \bar{y}) &\leq U_1(\bar{x}, \bar{y}), \\ U_2(\bar{x}, y) &\leq U_2(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

para estratégias arbitrárias x, y de dois jogadores.

De acordo com a definição de um jogo, os *payoffs* de cada jogador não dependem exclusivamente da escolha que ele próprio faz, mas também das escolhas feitas pelo outro jogador.

A partir destas funções de *payoffs*, define-se as funções:

$$\phi_1: I_2 \rightarrow I_1 \quad \text{e} \quad \phi_2: I_1 \rightarrow I_2$$

tais que, dada a decisão de um dos jogadores, ϕ_i leva o outro a tomar uma decisão que maximize seu *payoff*.

Por exemplo: ϕ_1 leva x_2^* no único \bar{x}_1 que maximize o *payoff* do jogador 1, ou seja, o ponto $(\phi_1(x_2^*), x_2^*)$ será tal que:

$$U_1(\bar{x}_1, x_2^*) \geq U_1(x_1, x_2^*) \quad \forall x_1 \in I_1$$

e, equivalentemente, o ponto $(x_1^*, \phi_2(x_1^*))$ será tal que:

$$U_2(x_1^*, \bar{x}_2) \geq U_2(x_1^*, x_2) \quad \forall x_2 \in I_2$$

Nota-se que x_i é melhor que qualquer outra estratégia à disposição do jogador i dado que o outro jogador escolheu a estratégia x_j^* . Ao considerar o produto $\phi_1 \times \phi_2$ obtém-se a aplicação:

$$\phi : I_1 \times I_2 \rightarrow I_1 \times I_2$$

que leva o par (x_1^*, x_2^*) no par $(\phi_1(x_2^*), \phi_2(x_1^*))$ em que os pontos fixos desta aplicação serão equilíbrios de Nash no jogo.

Logo a demonstração da existência de um equilíbrio de Nash se resume a obter um ponto fixo da aplicação $\phi_1 \times \phi_2$. De fato, o *teorema de Nash* traz a seguinte afirmação:

Teorema de Nash: Todo jogo finito, isto é, com finitos jogadores e um conjunto compacto e convexo de estratégias, tem uma solução em estratégias mistas.

Para essa demonstração, é pertinente uma hipótese adicional relacionada a concavidade na própria estratégia, que facilitará enormemente a compreensão dos passos da demonstração, mas compromete em muito pouco a força do resultado final, que é a prova da existência do equilíbrio de Nash.

Algumas condições devem ser atendidas para que toda ϕ_i seja realmente uma função bem definidas. Para garantir a boa definição de ϕ_i , as funções de *payoffs* U_1 e

U_2 devem ser contínuas, pois é garantido pelo teorema de Weierstrass que existem pontos que maximizam $U_1(\cdot, x_2^*)$ e $U_2(x_1^*, \cdot)$, já que I_1 e I_2 são compactos.

No entanto, por si só a continuidade das funções de *payoffs* não é o bastante para afirmar que cada ϕ_i é função bem definida, pois podem existir vários pontos que maximizem ϕ_i nos dados intervalos.

É necessária, portanto, uma condição que garanta a unicidade do ponto que maximiza o *payoff*. Essa condição é a *concavidade* das funções de *payoffs* em cada estratégia. Como já mencionado, a demonstração de Nash não tem essa condição como pré-requisito, pois qualquer jogo finito em estratégias mistas tem solução. No entanto, para os objetivos aqui pretendidos, ela é válida.

Em termos formais de um jogo, como foi definido anteriormente, isso quer dizer que, uma vez fixadas as escolhas de todos os outros jogadores “ $-i$ ”, a função $U_i(x_i, \bar{x}_{-i}): I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ que relaciona unicamente as escolhas do jogador i com seu *payoff* deve ser côncava em I_1 . Observe dois casos extremos:

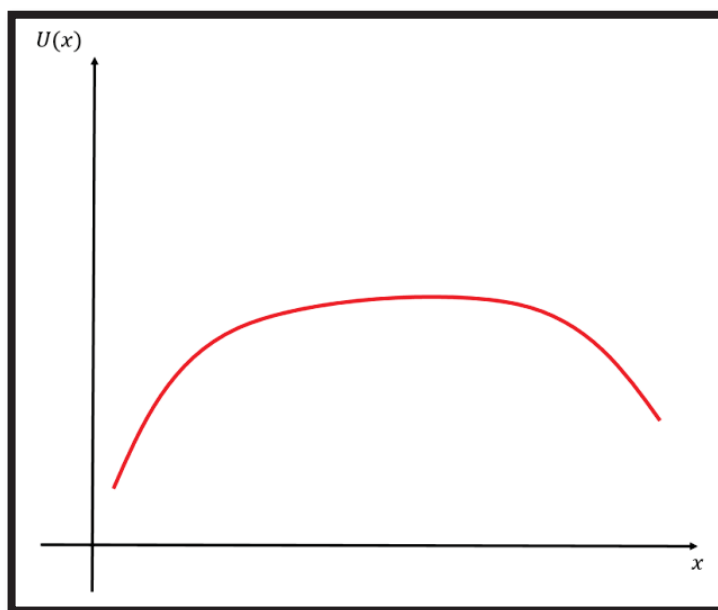


Figura 4 - Infinitos Máximos

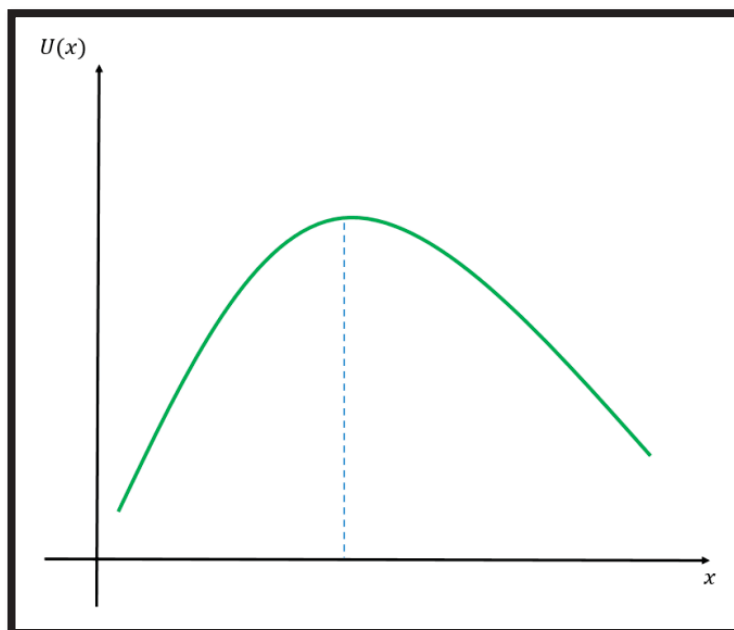


Figura 5 - Côncava com um único máximo

É possível provar que a concavidade implica na unicidade do ponto máximo, demonstrando que se existissem dois máximos, por exemplo, em dado intervalo, a função não poderia ser côncava nesse mesmo intervalo.

Ao tomar os valores x e $y \in I$ tal que $x \neq y$, ambos serão pontos de máximo de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em I , portanto, $f(x) = f(y) \geq f(z) \forall z \in I$. Dado $0 < t < 1$, da definição de *concavidade estrita* afirma-se que

$$f(t.x + (1 - t).y) > t.f(x) + (1 - t).f(y)$$

Mas é notório por hipótese que $f(x) = f(y)$ e x e y são máximos, um absurdo, já que esta última equação nos informa que uma média ponderada qualquer de x e y possui imagem de valor maior que $f(x) = f(y)$. Tal fato mostra que f só pode ter um máximo em I se f for côncava.

Para garantir a concavidade, basta para os objetivos pretendidos supor que a segunda derivada de U_i é negativa no intervalo $[0, 1]$, uma vez fixada a escolha do outro jogador. Essa hipótese será então fundamentada no Teorema do Valor Médio para provar que $f''(x) < 0$ implica em uma concavidade.

Suponha-se

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f''(x) < 0 \forall x \in [a, b].$$

Sabe-se que f é côncava se

$$f(x) \leq f(a) + f'(a) \cdot (x - a),$$

ou seja, f é côncava se está localizada abaixo da reta que tangencia f no ponto a , fato ilustrado a seguir, no gráfico de uma função f qualquer:

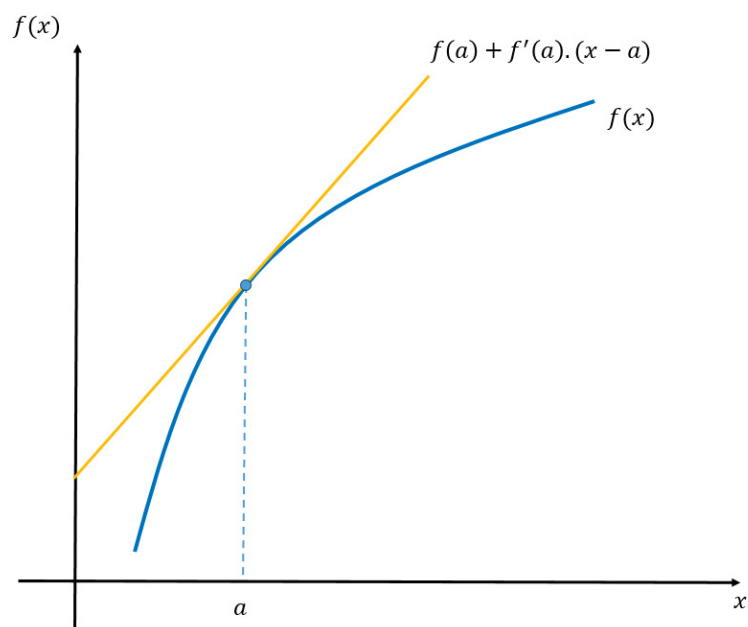


Figura 6 - Reta tangente à curva no ponto a .

O Teorema do Valor Médio garante que:

$$\exists z \in (a, b) \text{ tal que } f'(z) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Considere f em $[a, x]$. Pelo teorema do valor médio

$$\exists z \in (a, x) \text{ tal que } f'(z) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ao manipular a equação obtém-se $f(x) = f(a) + f'(z).(x - a)$.

Como, por hipótese, $f'' < 0$ e $z > a$, pode-se afirmar que $f'(z) < f'(a)$.

Assim é atingido o resultado de que:

$$f(x) = f(a) + f'(z).(x - a) < f(a) + f'(a).(x - a).$$

Portanto, f é côncava.

Estabelecidas as condições para a existência de ϕ_1 e ϕ_2 , é essencial apresentar a continuidade dessas funções. Para tanto, demonstra-se que, com as hipóteses sobre as quais as funções ϕ_i são definidas, elas serão sempre contínuas. Dada a condição de que $x \in I_1$ e $y \in I_2$, no caso de ϕ_1 , tem-se:

$$\phi_1(y^*) = \bar{x} \in I_1 / U_1(\bar{x}, y^*) \geq U_1(x, y^*) \quad \forall x \in I_1$$

Condição suficiente para afirmar que $\phi_1: I_2 \rightarrow I_1$ é contínua.

Ao supor que a afirmação é falsa, ou seja, $\phi_1: I_2 \rightarrow I_1$ não é contínua e, portanto, existe uma sequência $y_n \in I_2$ tal que:

$$y_n \rightarrow y \text{ mas } \phi_1(y_n) \not\rightarrow \phi_1(y).$$

Ao tomar uma subsequência y_k de y_n tem-se que $\phi_1(y_k) \rightarrow \mathbb{x}$, em que \mathbb{x} não leva aos máximos. Conclui-se que $U_1(\phi_1(y), y) \geq U_1(\mathbb{x}, y)$ e também que $U_1(\phi_1(y), y_n) \rightarrow U_1(\phi_1(y), y)$, já que $U_1: I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Logo, é possível verificar que para n suficientemente grande:

$$U_1(\phi_1(y), y_n) \rightarrow U_1(\phi_1(y), y) \text{ e} \\ U_1(\phi_1(y_k), y_k) \rightarrow U_1(\mathbb{x}, y), \text{ com } U_1(\phi_1(y), y) \geq U_1(\mathbb{x}, y),$$

o que é um absurdo já que ϕ_1 foi construída como uma função que leva aos máximos.

Analogamente, o mesmo se pode afirmar a respeito de ϕ_2 . Portanto, pode-se afirmar que as funções ϕ_i são contínuas. Uma vez que a existência e a continuidade de ϕ_1 e ϕ_2 estejam garantidas, é indispensável um argumento para garantir a existência de um ponto fixo de $\phi_1 \times \phi_2$, ou seja, de um equilíbrio de Nash. Para tanto, será disposto o seguinte teorema:

Teorema do Ponto Fixo de Brouwer: Seja B um conjunto compacto e convexo. Se $f: B \rightarrow B$ é uma aplicação contínua. Então existe $x \in B$ tal que $f(x) = x$.

Como no contexto de jogos o domínio $I_1 \times I_2$ é compacto e convexo e a aplicação $\phi: I_1 \times I_2 \rightarrow I_1 \times I_2$ é contínua, pois é o produto de duas funções contínuas ϕ_1 e ϕ_2 , é admissível, pelo teorema do ponto fixo de Brouwer, afirmar que existe um ponto $\vec{x} \in I_1 \times I_2$ tal que $\phi(\vec{x}) = \vec{x}$. Prova-se, então que existe um equilíbrio de Nash.

Ao percorrer o trajeto para a demonstração matemática do Teorema de Nash, depara-se com as sutilezas da Teoria dos Jogos, para assim compreender a complexidade das interações estratégicas. Nash agracio-nos com uma visão particularizada sobre a existência de equilíbrios em jogos estratégicos, e este estudo proporcionou progressos em área relacionadas.

Este estudo reforça a relevância do Teorema de Nash como um pilar fundamental na compreensão das dinâmicas estratégicas. Ao compreender as implicações matemáticas, abrem-se portas para estratégias mais refinadas e compreende-se melhor a natureza das escolhas racionais em cenários competitivos.

Destaca-se a importância contínua de Nash em moldar a compreensão do comportamento estratégico. Em última análise, buscam-se não apenas equilíbrios em resoluções matemáticas, mas também uma harmonia estratégica que conduza a interações mais eficientes e colaborativas.

CAPÍTULO 5

5 O DILEMA DO PRISIONEIRO

Neste capítulo, são apresentados os dilemas éticos e estratégicos subjacentes ao Dilema do Prisioneiro. Serão examinadas as dinâmicas desse cenário, destacando as consequências de determinadas interações estratégicas.

5.1 FUNDAMENTOS SOBRE O DILEMA DO PRISIONEIRO

O Dilema do Prisioneiro, um exemplo paradigmático dentro da Teoria dos Jogos, oferece uma visão perspicaz das situações de tomada de decisões estratégicas, destacando o conflito inerente entre o interesse individual e o resultado coletivo. Este modelo é fundamental para compreender o conceito de Equilíbrio de Nash e suas diversas aplicações em contextos variados. Dentre essas aplicações, destaca-se a sua utilidade na análise de estratégias em oligopólios e negociações contratuais no âmbito econômico (VON NEUMANN & MORGENSTERN, 2007).

O Dilema do Prisioneiro, com sua riqueza conceitual e aplicabilidade variada, serve como um veículo fundamental para explorar os complexos padrões de comportamento humano em interações estratégicas. A análise aprofundada desse cenário clássico continua a fornecer elementos valiosos sobre a dinâmica da cooperação, competição e tomada de decisões em diversos contextos sociais, econômicos e políticos (FIANI, 2006).

Inicialmente, é bastante conveniente implementar a exposição de um exemplo prático, todavia, convém aqui uma breve definição: É chamado *equilíbrio de Nash* a situação na qual, dadas as decisões tomadas por outros competidores, nenhum jogador pode aprimorar sua situação mudando suas próprias decisões. Em outras palavras, não há incentivos suficientes para tais mudanças.

O Dilema dos Prisioneiros oferece uma interessante ilustração desse conceito. Acompanha-se a seguinte situação: dois suspeitos P_1 e P_2 , são acusados de um mesmo crime. Presos em celas separadas e sem possibilidade de se

comunicarem, uma proposta lhes é feita: cada um deles pode escolher entre confessar ou negar o crime.

Se ambos negarem a acusação, deverão ficar presos por um ano. Se os dois confessarem, serão presos por quatro anos. Mas, se um deles confessar e o outro negar, aquele que confessou será libertado sem nenhuma pena enquanto o suspeito que negou será submetido à uma pena de 10 anos de prisão. Tem-se assim os seguintes resultados:

		Prisioneiro P_2	
		Confessar	Negar
Prisioneiro P_1	Confessar	(-4, -4)	(0, -10)
	Negar	(-10, 0)	(-1, -1)

Tabela 1 - Matriz de *payoffs* para o Dilema dos Prisioneiros

Pode-se verificar na matriz de *payoffs* acima que, dada a hipótese de ausência de um acordo prévio entre os prisioneiros, tenha o outro prisioneiro confessado ou negado, é sempre a melhor decisão confessar. Assim, o ponto (Confessar, Confessar) representa um exemplo de equilíbrio de Nash, supramencionado, que será explorado com maiores detalhes no decorrer desse trabalho. Isso fica mais evidente ao se analisar a situação do ponto de vista de cada jogador. Eles deverão raciocinar da seguinte maneira:

“O outro prisioneiro pode, assim como eu confessar ou negar o crime. Se ele resolver confessar, o melhor que posso fazer é confessar também, já que ficarei preso por quatro anos, ao invés de dez anos. Se ele negar, ainda devo confessar, pois assim estarei livre em vez de ser condenado a um ano de prisão. Como não há garantia de cooperação por parte do outro acusado, nos dois casos, o melhor é confessar, portanto, eu confessarei”.

Como ambos os prisioneiros, analisando e tomando sua decisão racionalmente, pensarão dessa maneira, ficarão presos por quatro anos. Se ambos cooperarem se deslocando para o ponto (Negar, Negar) terão três anos a menos de pena.

Para compreender substancialmente por que isso não ocorre, é necessário considerar o fato de que o ponto (Negar, Negar) não obedece à racionalidade. Estando

nesse ponto, os dois terão um incentivo enorme a confessar o crime: sua liberdade. A desconfiança e não garantias com relação às decisões do outro acusado os leva a confessar o crime. (BORTOLOSSI, 2006)

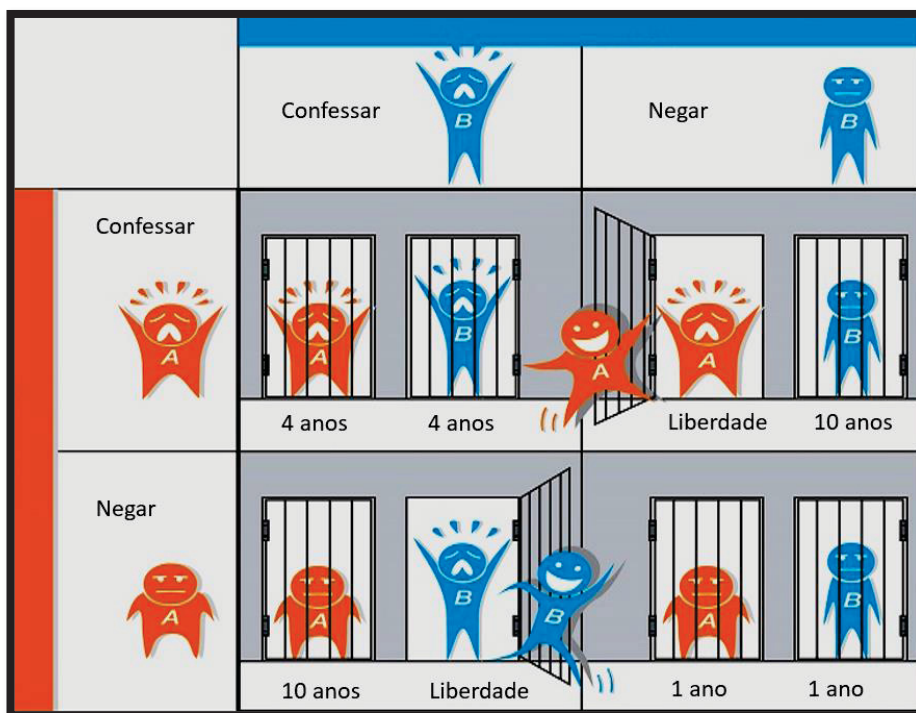


Figura 7 - Dilema do Prisioneiro

De modo geral, o Dilema do Prisioneiro é representado por uma matriz de *payoffs*, ou recompensas, e apresenta as possíveis escolhas e os *payoffs* associadas a essas escolhas para dois jogadores P_1 e P_2 . Cada jogador tem duas opções: cooperar (C) ou trair (T). Os *payoffs* são normalmente dadas em termos de anos de prisão evitados ou ganhos monetários, onde os valores são atribuídos da seguinte forma:

- Se ambos cooperam (C, C), recebem uma recompensa R (*reward*).
- Se um trai e o outro coopera (T, C), o traidor recebe a recompensa S (*sucker's payoff*), enquanto o que cooperou recebe a recompensa T (*temptation*).
- Se ambos traem (T, T), recebem uma recompensa P (*punishment*).
- Se ambos optam por não trair nem cooperar (D, D), recebem a recompensa de segurança ou perda mínima, que é representada por O (*outcome*).

A ordem dos *payoffs* obedece à seguinte relação: $T > R > P > S > 0$. Essa estrutura cria um dilema, pois individualmente, cada jogador recebe uma recompensa maior se trair, mas se ambos traírem, o resultado para ambos é pior do que se ambos cooperassem. Essa dinâmica ilustra os desafios e conflitos entre o interesse próprio e a cooperação na tomada de decisões estratégicas (COSTA, 1975).

O Dilema do Prisioneiro é um conceito central na Teoria dos Jogos, explorando a tensão entre a maximização do ganho individual e a cooperação mútua (COSTA, 1975). Trata-se de um cenário no qual dois jogadores podem optar por cooperar ou trair, cada um buscando maximizar seu próprio benefício. A estrutura clássica do Dilema do Prisioneiro é representada por uma matriz de *payoffs*, onde os *payoffs* são atribuídos de acordo com as escolhas feitas por ambos os jogadores. Tendo como base Cournot (1838), as possíveis combinações de escolhas levam a diferentes resultados, determinados pelos benefícios associados a cada escolha. A análise desse dilema oferece uma visão perspicaz sobre a natureza das interações humanas e as complexidades da cooperação e da competição. Sua aplicabilidade transcende o contexto do jogo original, estendendo-se a uma ampla gama de situações da vida real, incluindo economia, biologia, ciência política e ética.

O estudo do Dilema do Prisioneiro continua a ser uma área fundamental de pesquisa, enriquecendo nossa compreensão do comportamento humano e das estratégias adotadas em interações sociais e decisões estratégicas (MYERSON, 1991). O dilema do prisioneiro é uma situação paradigmática em Teoria dos Jogos que revela os desafios entre o benefício próprio e a cooperação. É uma representação de interações sociais em que a busca individual pelo maior ganho muitas vezes leva a um resultado subótimo para ambas as partes.

A estrutura clássica desse dilema envolve dois jogadores que podem escolher cooperar ou trair. As *payoffs* associadas a essas escolhas seguem uma hierarquia, onde a traição individual leva a um ganho imediato, mas a cooperação mútua oferece um benefício maior a longo prazo. Essa dicotomia entre ganho pessoal e bem-estar coletivo ilustra aspectos cruciais do comportamento humano em cenários interativos (MYERSON, 1991).

Segundo Raposo (2009), o dilema do prisioneiro vai além do contexto original e encontra aplicabilidade em diversas áreas, como economia, biologia, política e ética, tornando-se um conceito-chave para entender as interações estratégicas e as decisões que enfrentamos em nossas vidas diárias.

O Dilema do Prisioneiro é uma estrutura fundamental na Teoria dos Jogos, representando a tensão entre os interesses individuais e a cooperação mútua. Nesse cenário, dois jogadores enfrentam a escolha de cooperar ou trair, cada um buscando maximizar seu próprio benefício. A matriz de *payoffs* do Dilema do Prisioneiro atribui recompensas a essas escolhas, criando uma situação em que a traição individual pode levar a um ganho imediato, mas resulta em um resultado subótimo para ambos se ambos traírem (SOUZA, 2012). Essa dinâmica explora os conflitos entre o ganho pessoal e a cooperação, destacando a importância da confiança e da comunicação na busca de soluções mutuamente benéficas.

De acordo com o autor Vitale (2017), o Dilema do Prisioneiro vai além de um jogo abstrato, sendo uma metáfora para muitas situações da vida real, como negociações, políticas de cooperação e dilemas éticos. O estudo contínuo desse dilema é crucial para entender os padrões de comportamento humano e as estratégias adotadas em interações estratégicas.

A estrutura clássica do Dilema do Prisioneiro, conforme analisada por Souza (2016), é um cenário intrigante que coloca os indivíduos diante de decisões estratégicas em um contexto interativo. Essa estrutura abstrata é amplamente utilizada para aprofundar nossa compreensão de situações em que as pessoas se deparam com o dilema de escolher entre a busca por seus próprios interesses individuais ou cooperar com outros para alcançar benefícios mútuos (SARTINI et al., 2004).

O Dilema do Prisioneiro, com sua riqueza conceitual e aplicabilidade multifacetada, serve como um veículo fundamental para explorar os complexos padrões de comportamento humano em interações estratégicas. A análise aprofundada desse cenário clássico continua a fornecer descobertas valiosas sobre a dinâmica da cooperação, competição e tomada de decisões em diversos contextos sociais, econômicos e políticos (FIANI, 2006).

5.1.1 JOGADORES ENVOLVIDOS

Segundo Costa (1975), o Dilema do Prisioneiro é uma estrutura crucial na Teoria dos Jogos, que envolve a interação estratégica entre dois jogadores. Cada jogador enfrenta a escolha entre cooperar (C) ou trair (T), sendo essa escolha feita simultaneamente e sem conhecimento prévio da decisão do outro jogador

(COURNOT, 1838). A simbologia clássica adota "C" para cooperar e "T" para trair. A simultaneidade das escolhas é um aspecto vital desse dilema, refletindo situações reais onde as decisões de um indivíduo são influenciadas pelas possíveis ações dos outros, sem antecipação sobre como eles agirão.

Conforme Raposo (2009), o termo "Dilema do Prisioneiro" origina-se da situação em que foi primeiramente concebido. Imaginemos dois suspeitos de um crime interrogados separadamente. Se ambos cooperam (ou seja, não traem um ao outro), recebem sentenças mais leves. Entretanto, se ambos traem (decidem não cooperar), recebem sentenças mais pesadas. A complexidade surge quando um trai (decide não cooperar) enquanto o outro coopera (decide cooperar): o traidor sai livre, enquanto o que cooperou recebe uma sentença consideravelmente mais longa, exemplificando o conflito entre interesses individuais e benefícios mútuos (MYERSON, 1991).

A dinâmica do Dilema do Prisioneiro ilustra a complexidade das interações sociais, onde a decisão de cooperar ou trair é influenciada por uma mistura de motivações próprias e considerações sobre o comportamento do outro jogador. Essa estrutura é fundamental para compreender as nuances da cooperação e competição em diversas situações da vida real, extrapolando o contexto criminal original, e sendo aplicável em economia, biologia, ciência política e muitos outros campos. A análise do Dilema do Prisioneiro oferece noções básicas sobre como as pessoas tomam decisões estratégicas em interações sociais (MYERSON, 1991).

5.1.2 Resultados Possíveis

O Dilema do Prisioneiro, uma estrutura central na Teoria dos Jogos, apresenta quatro resultados possíveis, cada um com implicações distintas, oferecendo uma visão reveladora dos complexos padrões de comportamento humano em situações estratégicas.

- **Cooperação Mútua (CC):** Neste resultado, ambos os jogadores escolhem cooperar. Ambos recebem sentenças relativamente leves, representando um cenário de benefício mútuo. Este resultado reflete a situação ideal, onde a cooperação prevalece, e ambos os jogadores colhem os *payoffs* dessa escolha. No entanto, a tentação de trair pode influenciar as escolhas dos jogadores e levá-los a outros resultados. A cooperação mútua ilustra como a

colaboração pode levar a um resultado mais favorável para todos, destacando a importância da confiança e da cooperação nas interações sociais (BICCA & MOTA, 2018).

- **Traição Mútua (DD):** Quando ambos os jogadores traem, resulta em sentenças mais longas para ambos. Isso reflete a situação em que o interesse próprio individual prevalece, levando a um resultado abaixo do ótimo para ambos. É um exemplo clássico de como a busca do auto interesse pode prejudicar o bem comum e resultar em penalidades para todos os envolvidos. A traição mútua ressalta as consequências negativas da falta de cooperação e destaca a necessidade de encontrar soluções que incentivem comportamentos cooperativos (DIXIT, 1996).
- **Tentação (CD):** Neste caso, um jogador trai enquanto o outro coopera. O traidor sai livre, recebendo a menor sentença possível, enquanto o que cooperou recebe uma sentença muito longa. Esse resultado destaca como a traição pode ser uma estratégia poderosa para obter vantagens pessoais, mesmo às custas dos outros, incentivando a desconfiança e a incerteza nas interações sociais. A tentação ilustra o dilema entre o auto interesse imediato e o benefício a longo prazo derivado da cooperação mútua (DIXIT, 1996).
- **Rendição (DC):** No cenário oposto, um jogador coopera enquanto o outro trai. O jogador que cooperou recebe a sentença mais longa, enquanto o traidor sai com uma sentença mais leve. Isso ilustra o risco associado à cooperação em um ambiente onde a traição é uma opção disponível. Mostra que a cooperação pode ser explorada por outros para obter vantagem pessoal, criando um dilema sobre a confiabilidade da cooperação. Esse resultado destaca a vulnerabilidade dos indivíduos quando adotam uma abordagem cooperativa em um contexto em que outros podem agir em busca de seus próprios interesses (NASH JR., 1950).

Esses resultados evidenciam a complexidade das interações sociais e as várias dinâmicas em jogo no Dilema do Prisioneiro. A análise desses resultados fornece alguma informação sobre como as pessoas tomam decisões estratégicas em situações de conflito entre interesses individuais e benefícios coletivos, contribuindo para uma compreensão mais aprofundada da natureza humana em contextos desafiadores.

Além de ilustrar o conceito de Equilíbrio de Nash, o Dilema do Prisioneiro possui amplas aplicações práticas em diversos domínios. Na economia, por exemplo, é uma ferramenta valiosa para modelar estratégias em oligopólios e nas negociações contratuais (VON NEUMANN & MORGENSTERN, 2007). Em contextos do mundo real, como negociações empresariais complexas ou acordos climáticos internacionais, o Dilema do Prisioneiro traz uma orientação sobre as complexidades das interações estratégicas e as decisões enfrentadas pelos jogadores (Fiani, 2014). Essa aplicabilidade prática ressalta a relevância duradoura desse modelo na compreensão e análise das interações humanas.

5.1.3 APLICAÇÕES DO DILEMA DO PRISIONEIRO

O Dilema do Prisioneiro, uma estrutura paradigmática da Teoria dos Jogos, tem uma aplicabilidade vasta e influente em diversas áreas, o que por sua vez, traz uma compreensão mais precisa sobre a interação humana e os desafios da tomada de decisão estratégica. Na economia, é amplamente usado para modelar a competição e cooperação entre empresas, como no "Dilema do Duopólio", onde a escolha entre competir agressivamente ou cooperar pode impactar os lucros e o mercado (FIANI, 2004). Além disso, na biologia e ecologia, esse dilema é aplicado para entender interações entre espécies e a competição por recursos escassos, oferecendo uma perspectiva valiosa sobre os padrões de comportamento e as dinâmicas dos ecossistemas.

De acordo com Smith & Price (1973), essas aplicações exemplificam a relevância do Dilema do Prisioneiro como um modelo que transcende fronteiras disciplinares, oferecendo uma abordagem unificada para compreender os desafios inerentes à cooperação e competição em diversas situações. A análise dessas aplicações não apenas enriquece nossa compreensão teórica, mas também tem implicações práticas, fornecendo orientação para estratégias que promovam a cooperação e otimizem os resultados em contextos complexos e dinâmicos.

5.1.3.1 Economia

O Dilema do Prisioneiro possui aplicações cruciais na economia, sendo um modelo fundamental para compreender as estratégias adotadas por empresas e agentes econômicos em situações de competição e cooperação. Um exemplo notável é o "Dilema do Duopólio", um cenário em que duas empresas competem em um mercado. Nesse contexto, as empresas têm a escolha de competir agressivamente, o que leva a uma situação desfavorável para ambas, ou cooperar, mantendo um nível aceitável de concorrência.

A aplicação do Dilema do Prisioneiro na economia não se limita apenas ao duopólio. Ele pode ser extrapolado para diversos cenários de concorrência, oligopólios e estratégias de precificação. Por exemplo, na formação de cartéis, as empresas enfrentam a decisão de cooperar para maximizar o lucro conjunto ou trair para obter vantagens individuais. Essa dinâmica ilustra como a busca pelo auto interesse pode levar a uma situação sub ótima para o grupo.

Outra aplicação relevante está na análise de estratégias de entrada no mercado. Empresas novas podem escolher entre uma estratégia agressiva (traição) para ganhar participação de mercado rapidamente ou uma estratégia mais moderada (cooperação) para evitar uma guerra de preços prejudicial para todas as partes envolvidas (FIANI, 2004). Essas aplicações na economia demonstram como o Dilema do Prisioneiro oferece uma estrutura valiosa para entender as complexidades da tomada de decisões estratégicas no mundo dos negócios, proporcionando ideias para a formulação de estratégias eficazes e políticas econômicas bem-sucedidas (BICCA & MOTA, 2018).

5.1.3.2 Negociações Empresariais

Em negociações empresariais, o Dilema do Prisioneiro também pode ser observado. As partes envolvidas podem escolher entre cooperar para alcançar um acordo mutuamente benéfico (por exemplo, um contrato justo) ou adotar uma postura competitiva, tentando obter uma vantagem sobre a outra parte. Essa dinâmica espelha o cerne do Dilema do Prisioneiro, onde a cooperação pode levar a um resultado ótimo para ambas as partes, enquanto a busca pelo interesse próprio individual pode resultar em abaixo do ótimo para o grupo. Se ambas as partes adotam uma postura cooperativa, podem estabelecer um relacionamento de confiança, alcançando acordos duradouros e benéficos para todos os envolvidos. No entanto, há o risco de

que uma parte possa "trair" a cooperação para obter vantagens imediatas, levando a um resultado desfavorável para a outra.

Assim como no Dilema do Prisioneiro, a chave para o sucesso nas negociações empresariais é a criação de incentivos que favoreçam a cooperação mútua e a construção de relacionamentos de longo prazo. Estratégias que promovam a transparência, a confiança e a busca por resultados mutuamente benéficos podem transformar o dilema em um acordo vantajoso para todas as partes envolvidas (LEWICKI, BARRY & SAUNDERS, 2014). Portanto, entender e aplicar os princípios do Dilema do Prisioneiro pode ser essencial para alcançar negociações eficazes e sustentáveis no ambiente empresarial.

5.1.3.3 Cooperação Internacional

Em contextos de cooperação internacional, como acordos climáticos, o Dilema do Prisioneiro se revela altamente relevante e pertinente. Nesse cenário, os países enfrentam a difícil decisão de cooperar para alcançar metas ambientais comuns ou buscar seus próprios interesses nacionais, muitas vezes em detrimento do bem-estar global. A cooperação é crucial para enfrentar desafios globais, como as mudanças climáticas, onde ações coordenadas são necessárias para alcançar resultados eficazes e sustentáveis.

No entanto, a cooperação internacional enfrenta obstáculos consideráveis. O dilema emerge quando há a tentação de um país não cumprir os acordos estabelecidos, buscando obter vantagens individuais. Isso pode minar os esforços globais, desencorajando outros países de aderirem a futuras iniciativas cooperativas (BARRETT, 2005). O risco de traição pode levar a um ciclo de desconfiança mútua, resultando em subinvestimento na cooperação e, conseqüentemente, em soluções insuficientes para problemas globais prementes.

Para superar esse dilema, é essencial estabelecer estruturas de incentivos que favoreçam a cooperação e desencorajem a traição. Mecanismos de monitoramento, transparência e fiscalização podem ajudar a garantir que os países cumpram os compromissos assumidos (BARRETT, 2005). Além disso, criar recompensas para aqueles que cooperam de maneira eficaz pode ser um meio eficaz de promover comportamentos alinhados com o bem comum.

Dessa forma, compreender e aplicar os princípios do Dilema do Prisioneiro nas negociações e acordos internacionais é crucial para enfrentar desafios globais. A busca por soluções que beneficiem toda a humanidade requer a superação da lógica do auto interesse imediato e a adoção de uma abordagem colaborativa e sustentável, mesmo diante das tentações de traição.

5.1.3.4 Ética

Do ponto de vista ético, o Dilema do Prisioneiro suscita questões profundas sobre a moralidade das escolhas individuais e as complexidades inerentes à busca de um equilíbrio entre os interesses próprios e o bem-estar coletivo. A análise ética desse dilema revela diferentes perspectivas sobre o que é considerado moralmente correto em situações de interação estratégica.

A cooperação é frequentemente vista como uma escolha ética superior, uma vez que busca promover o bem-estar de todos os envolvidos, levando em consideração não apenas os ganhos individuais, mas também os benefícios para a comunidade e a sociedade como um todo. Essa abordagem ética valoriza a solidariedade, a confiança e a colaboração como princípios fundamentais para construir um mundo mais justo e equitativo (FIANI, 2009).

Por outro lado, algumas perspectivas éticas podem considerar a traição como moralmente aceitável, especialmente se for percebida como uma maneira de proteger os interesses pessoais em um contexto competitivo. Essa visão pode se basear em uma ética utilitarista, onde a maximização do benefício individual é considerada primordial, e as ações são avaliadas com base nas consequências diretas para o próprio indivíduo (FIANI, 2009).

Essas considerações éticas do Dilema do Prisioneiro refletem como esse cenário abstrato tem relevância em diversas áreas da vida, destacando a tensão constante entre a busca do interesse próprio e a necessidade de cooperação para o bem comum. A compreensão aprofundada do Dilema do Prisioneiro é valiosa para tomar decisões informadas em situações estratégicas do mundo real, incorporando uma dimensão ética que leve em conta não apenas os ganhos individuais imediatos, mas também o impacto coletivo de nossas escolhas.

CAPÍTULO 6

6 DUOPÓLIO DE COURNOT

Neste capítulo, são apresentados os princípios do Duopólio de Cournot, um modelo preponderante na Teoria dos Jogos aplicada à Economia. Aqui, se fará compreender como as escolhas estratégicas das empresas influenciam não apenas suas próprias posições, mas também o equilíbrio geral do mercado.

6.1 FUNDAMENTOS SOBRE O DUOPÓLIO DE COURNOT

O duopólio de Cournot é um modelo clássico de oligopólio, uma estrutura de mercado em que um pequeno número de empresas domina a oferta de um bem ou serviço. O modelo foi desenvolvido por Antoine Augustin Cournot em 1838, e sua aplicação e relevância continuam sendo estudadas e debatidas até os dias atuais (COURNOT, 1838).

No duopólio de Cournot, há duas empresas competindo no mercado, cada uma escolhendo a quantidade de produção que maximiza seus próprios lucros, levando em consideração a produção da outra empresa. Ao contrário de outros modelos de oligopólio, como o duopólio de Bertrand, no duopólio de Cournot, as empresas escolhem quantidades em vez de preços (PERÉZ, 2012).

A competição é baseada na conjectura de Cournot, onde cada empresa assume que a produção do concorrente permanecerá constante. As empresas, portanto, determinam suas quantidades de produção levando em conta essa suposição. Esse processo leva a um equilíbrio de Nash no qual ambas as empresas estão produzindo uma quantidade que maximiza seus lucros, dada a produção da outra empresa (COURNOT, 1838).

Esse modelo é aplicável em diversas situações econômicas do mundo real, especialmente quando há duas empresas competindo em um mercado com produtos substitutos, como em indústrias automotivas, de tecnologia ou de alimentos (PERÉZ, 2012).

Além disso, o duopólio de Cournot pode ser estendido e adaptado para incluir variações que refletem condições mais complexas de mercado e competição. Por exemplo, é possível adicionar incertezas sobre a demanda ou os custos de produção, tornando o modelo mais realista e relevante para cenários econômicos contemporâneos (PERÉZ, 2012).

Portanto, o duopólio de Cournot é uma ferramenta valiosa na Teoria dos Jogos e na Economia Industrial para analisar estratégias de produção e comportamento de empresas em mercados oligopolistas, fornecendo contribuições importantes para a tomada de decisões estratégicas nessas condições de mercado (COURNOT, 1838).

A análise matemática para esse problema começa ao se compreender a estrutura básica dos problemas de jogos estratégicos para dois jogadores. Sabe-se que em Teoria dos Jogos dispõe de três elementos principais: Jogadores, Estratégias e *Payoffs* (pagamentos ou recompensas). Na sequência, define-se os jogadores por *I* e *II*. Um jogo em condições normais é organizado da seguinte maneira. O Jogador *I* escolhe uma certa estratégia x de um conjunto X , enquanto o jogador *II* escolhe simultaneamente alguma estratégia y de um conjunto Y . De fato, os conjuntos X e Y podem possuir qualquer estrutura (um conjunto de valores finitos, um subconjunto de R^n , um conjunto de funções limitadas, etc.). Como resultado, os jogadores *I* e *II* obtêm os *payoffs* $H_1(x, y)$ e $H_2(x, y)$, respectivamente.

Definição 1.1 Um jogo, em condições normais é definido como o seguinte objeto:

$$\Gamma = \langle I, II, X, Y, H_1, H_2 \rangle,$$

onde X, Y representam os conjuntos de estratégias dos jogadores *I* e *II*, enquanto H_1, H_2 indicam suas funções de *payoffs*, $H_i: X \times Y \rightarrow R, i = 1, 2$.

Cada jogador seleciona sua estratégia, independentemente da escolha do oponente e se esforça para maximizar seu próprio *payoff*. No entanto, essa recompensa para um jogador depende tanto de sua estratégia quanto do comportamento do oponente e é essa característica que define as especificidades da Teoria dos Jogos. Existem várias abordagens para construir uma soluções em Teoria dos Jogos. Algumas delas serão discutidos abaixo.

Primeiramente, considere a noção de um equilíbrio de Nash como um conceito central para essa análise.

Definição 1.2 Um equilíbrio de Nash em um jogo Γ é um conjunto de estratégias (\bar{x}, \bar{y}) que atende às condições:

$$H_1(x, \bar{y}) \leq H_1(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$H_2(\bar{x}, y) \leq H_2(\bar{x}, \bar{y})$$

para estratégias arbitrárias x, y dos jogadores.

As desigualdades empregues da Definição 1.2 sugerem que, à medida que os jogadores se desviam de um equilíbrio de Nash, seus *payoffs* diminuem. Portanto, os desvios do equilíbrio parecem não ser vantajosos para qualquer jogador. Curiosamente, podem não existir equilíbrios de Nash. Portanto, uma questão importante nos problemas de jogos desse tipo diz respeito à definir sua existência. Suponha que exista um equilíbrio de Nash, nesse caso, pode-se dizer que os *payoffs* $\bar{H}_1 = H_1(\bar{x}, \bar{y}), H_2 = H_2(\bar{x}, \bar{y})$ são ideais ou ótimos.

Tem-se o Duopólio de Cournot como um dos modelos de jogos pioneiros que ganharam ampla popularidade em pesquisas em áreas econômicas. O termo "duopólio" corresponde a um jogo com exatamente dois jogadores. Suponha-se, então duas empresas, *I* e *II*, fabricando algumas quantidades de um mesmo produto (q_1 e q_2 , respectivamente). Nesse modelo, as quantidades representam as estratégias dos jogadores. O preço de mercado do produto é igual a um preço inicial p após a dedução da quantidade total $Q = q_1 + q_2$. Seja c o custo unitário marginal de modo que, claramente $c < p$. Sendo assim, considere o custo marginal unitário c para ambas as empresas sendo o mesmo, de modo que é possível definir o preço unitário de demanda constituído por $(p - k \cdot Q)$ com $k > 0$ constante. Consequentemente, os *payoffs* dos jogadores assumem a forma:

$$H_1(q_1, q_2) = (p - k \cdot q_1 - k \cdot q_2)q_1 - cq_1 \quad (I)$$

$$H_2(q_1, q_2) = (p - k \cdot q_1 - k \cdot q_2)q_2 - cq_2$$

Na notação de um objeto, o jogo é definido por:

$$\Gamma = \langle I, II, q_1 = [0, \infty), q_2 = [0, \infty), H_1, H_2 \rangle$$

Examinar esse problema por meio do equilíbrio de Nash (Definição 1.2) exige a solução de dois problemas, a saber, $\max_{q_1} H_1(q_1, \bar{q}_2)$ e $\max_{q_2} H_2(\bar{q}_1, q_2)$. Além disso, é fundamental demonstrar que os máximos são atingidos em $q_1 = \bar{q}_1, q_2 = \bar{q}_2$.

As funções quadráticas $H_1(q_1, \bar{q}_2)$ e $H_2(\bar{q}_1, q_2)$ são maximizadas por:

$$q_1 = \frac{1}{2} (p - c - \bar{q}_2)$$

$$q_2 = \frac{1}{2} (p - c - \bar{q}_1)$$

Naturalmente, essas quantidades devem ser não negativas, ou seja:

$$q_i \leq p - c, \quad i = 1, 2 \quad (II)$$

Ao resolver o sistema derivado das equações em \bar{q}_1, \bar{q}_2 , encontra-se os resultados:

$$\bar{q}_1 = \bar{q}_2 = \left(\frac{p - c}{3} \right) \cdot \left(\frac{p - c}{3k} \right)$$

Isso satisfaz as condições de (II) e claramente define-se como um Equilíbrio de Nash. Sendo assim, os *payoffs* ideais se tornam:

$$\bar{H}_1 = \bar{H}_2 = \frac{(p - c)^2}{9k}.$$

É possível intentar um processo de melhoria contínua. Dada ainda a mesma situação, presume-se que o Jogador I tem conhecimento da estratégia q_2 do Jogador II. Então, sua melhor resposta está na estratégia q_1 , produzindo o *payoff* máximo $H_1(q_1, q_2)$. Lembrando que $H_1(q_1, q_2)$ é uma parábola côncava e que possui seu vértice no ponto:

$$q_1 = \frac{1}{2} (p - c - q_2)$$

Denota-se a melhor função resposta por $q_1 = R(q_2)$. Da mesma forma, se a estratégia q_1 do Jogador *I* se torna conhecida pelo Jogador *II*, sua melhor resposta é a estratégia q_2 correspondente ao *payoff* máximo $H_2(q_1, q_2)$. Em outras palavras,

$$q_2 = R(q_1) = \frac{1}{2}(p - c - q_1)$$

Pode-se então plotar um gráfico com as linhas das melhores respostas de $R(q_2)$ a $R(q_1)$ no plano (q_1, q_2) , como apresentado na Figura 8. Para qualquer estratégia inicial q_2^0 , é possível construir a seguinte sequência das melhores respostas:

$$q_2^{(0)} \rightarrow q_1^{(1)} = R(q_2^{(0)}) \rightarrow q_2^{(1)} = R(q_1^{(1)}) \rightarrow \dots \rightarrow q_1^{(n)} = R(q_2^{(n-1)}) \rightarrow q_2^{(n)} = R(q_1^{(n)}) \rightarrow \dots$$

Pode-se afirmar que a sequência (q_1^n, q_2^n) é a melhor sequência de respostas. Tal procedimento iterativo corresponde com o comportamento de vendedores em um mercado qualquer, pois cada um deles modifica sua estratégia, dependendo das ações dos concorrentes. De acordo com a Figura 4, a melhor sequência de respostas dos jogadores tende a um equilíbrio para qualquer estratégia inicial $q_2^{(0)}$. No entanto, é importante enfatizar que a melhor sequência de respostas não traz necessariamente um equilíbrio de Nash. (MAZALOV, 2014).

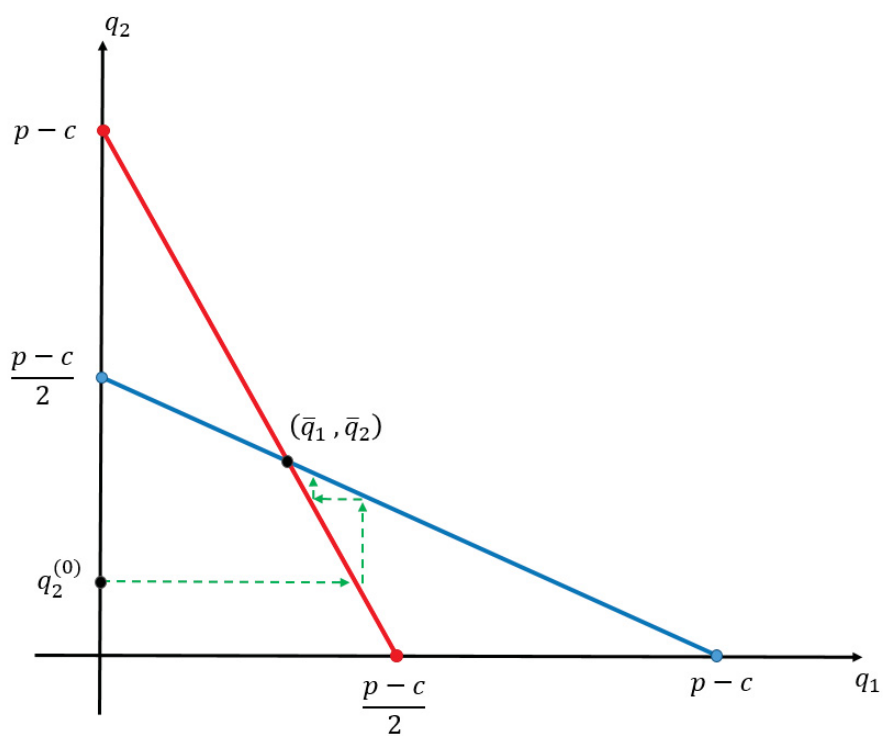


Figura 8 - O Duopólio de Cournot

CAPÍTULO 7

7 JOGOS DE SOMA ZERO

Neste capítulo, são apresentados os fundamentos do conceito de Soma Zero, ao buscar compreender como determinados cenários influenciam em decisões estratégicas e moldam as dinâmicas de ganho e perda que se anulam entre os jogadores.

7.1 FUNDAMENTOS SOBRE O JOGO DE SOMA ZERO

Os jogos de soma zero se destacam como um tópico notável na Teoria dos Jogos, apresentando características e propriedades verdadeiramente singulares. Nesta análise, nos aprofundaremos consideravelmente para uma exploração minuciosa e abrangente desses traços distintivos, com o objetivo de alcançar uma compreensão profunda e abrangente desse tipo especial de jogo.

7.1.1 Definição de Jogos de Soma Zero

Os jogos de soma zero, considerados de uma natureza muito específica dentro do estudo da Teoria dos Jogos, apresentam uma estrutura peculiar em que a soma total dos ganhos e perdas entre os jogadores envolvidos é sempre igual a zero (WATSON, 2013). Essa peculiaridade define-se pela a essência desses jogos, onde o ganho de um jogador implica automaticamente na perda equivalente do outro jogador, criando uma dinâmica de competição direta. Essa interdependência é o cerne da definição de soma zero, onde o benefício de um está diretamente ligado à desvantagem do outro, estabelecendo uma relação que se equilibra em zero no total.

Uma representação típica dos jogos de soma zero é feita por meio de uma matriz de *payoffs*, onde as estratégias de cada jogador são dispostas em linhas e colunas (OSBORNE & RUBINSTEIN, 1994). Os valores na matriz indicam os *payoffs* ou penalidades que os jogadores recebem com base em suas escolhas estratégicas. Nesse contexto, o Dilema do Prisioneiro é um exemplo clássico de jogo de soma zero, ilustrando vividamente as implicações éticas e estratégicas desse tipo de dinâmica.

Dentro dos jogos de soma zero, as estratégias dominantes desempenham um papel crucial. Elas permitem aos jogadores identificar a melhor abordagem possível, garantindo um resultado mais favorável, mesmo em um contexto de competição direta. A compreensão das estratégias dominantes é vital para os jogadores, pois isso lhes permite tomar decisões informadas, levando em consideração a lógica e a dinâmica do jogo.

Além disso, o conceito de equilíbrio de Nash é altamente relevante nos jogos de soma zero. Esse equilíbrio representa a situação em que nenhum jogador tem incentivo para mudar de estratégia, dado o que o outro jogador está fazendo. Esse ponto de equilíbrio estabelece uma estabilidade nas escolhas estratégicas, o que é fundamental para a análise dos jogos de soma zero (OSBORNE & RUBINSTEIN, 1994).

A aplicabilidade dos jogos de soma zero vai além do contexto teórico. Eles são extensamente utilizados na modelagem de situações da vida real, como negociações de mercado, estratégias empresariais, políticas e conflitos interacionais (OSBORNE & RUBINSTEIN, 1994). Compreender a dinâmica e a lógica subjacente a esses jogos é crucial para tomar decisões informadas em situações competitivas, contribuindo para uma análise mais profunda das interações estratégicas e seus desdobramentos.

7.1.2 Matriz de *Payoffs*

A matriz de *payoffs*, uma representação crucial nos jogos de soma zero, fornece uma estrutura organizada que permite visualizar os *payoffs* ou penalidades associadas a diferentes combinações de estratégias adotadas por dois jogadores em um determinado jogo (LEYTON-BROWN & SHOHAM, 2008). Essa representação é fundamental para a análise e compreensão das dinâmicas estratégicas e das escolhas racionais dos jogadores.

A matriz de *payoffs* é tipicamente uma tabela bidimensional, onde as linhas representam as estratégias disponíveis para um jogador (geralmente chamado de jogador A) e as colunas representam as estratégias disponíveis para o outro jogador (geralmente chamado de jogador B). Cada célula da matriz contém os *payoffs* ou recompensas que os jogadores recebem, dependendo das estratégias que escolherem.

No contexto dos jogos de soma zero, os valores na matriz são dispostos de maneira que a soma total dos *payoffs* seja sempre zero, refletindo a característica fundamental desses jogos, onde o ganho de um jogador corresponde à perda equivalente do outro (MYERSON, 1991). Em outras palavras, os *payoffs* e penalidades são distribuídas de forma a manter o equilíbrio de soma zero.

A utilidade da matriz de *payoffs* reside na sua capacidade de ilustrar as relações estratégicas entre os jogadores. Ao observar os valores nas células correspondentes a cada combinação de estratégias, os jogadores podem tomar decisões informadas sobre qual estratégia adotar, buscando maximizar seus próprios ganhos dentro das limitações impostas pela estratégia do outro jogador.

Um exemplo clássico que pode ser representado por uma matriz de *payoffs* é o Dilema do Prisioneiro, onde as estratégias são "cooperação" e "traição" para cada prisioneiro. Os *payoffs* (anos de prisão) são configuradas de forma que a soma total seja zero, evidenciando a natureza de soma zero do jogo (RASMUSEN, 2007).

A matriz de *payoffs* é uma ferramenta essencial para representar e analisar jogos de soma zero, fornecendo uma visualização clara das interações estratégicas e dos resultados associados a diferentes estratégias adotadas pelos jogadores (OSBORNE & RUBINSTEIN, 1994). Isso facilita a compreensão das implicações das escolhas estratégicas e ajuda os jogadores a tomar decisões ótimas em contextos competitivos.

A matriz de *payoffs* é uma representação para os jogos de soma zero, fornecendo uma estrutura organizada que permite visualizar os *payoffs* ou penalidades associadas a diferentes combinações de estratégias adotadas por dois jogadores (WATSON, 2008). Essa representação é fundamental para a análise e compreensão das dinâmicas estratégicas e das escolhas racionais dos jogadores (WATSON, 2008). A matriz de *payoffs* é tipicamente uma tabela bidimensional, onde as linhas representam as estratégias disponíveis para um jogador e as colunas representam as estratégias disponíveis para o outro jogador (WATSON, 2008).

Em jogos de soma zero, as estratégias dos jogadores podem ser bastante simplificadas (Binmore, 2007). Normalmente, os jogadores têm estratégias puras, o que significa que escolhem uma única opção sem probabilidades envolvidas (Binmore, 2007). As estratégias puras são fáceis de compreender e implementar, pois exigem que os jogadores escolham uma ação específica sem considerar a incerteza ou as probabilidades (Binmore, 2007). Em jogos de soma zero, as estratégias dos

jogadores são geralmente puras, o que simplifica a tomada de decisões e a análise estratégica (Rasmusen, 2007). Contrariamente, estratégias mistas envolvem a introdução de probabilidades, mas não são comuns nesse tipo de jogo, pois os jogadores tendem a preferir a certeza sobre as probabilidades (Rasmusen, 2007).

Esses jogos têm uma aplicabilidade significativa, indo além do contexto teórico (FIANI, 2009). São extensamente utilizados na modelagem de situações da vida real, como negociações de mercado, estratégias empresariais, política e conflitos interacionais (FIANI, 2009). Compreender a dinâmica e a lógica subjacente a esses jogos é crucial para tomar decisões informadas em situações competitivas (Moreira, 2017), contribuindo para uma análise mais profunda das interações estratégicas e seus desdobramentos (MOREIRA, 2017).

7.1.3 APLICAÇÕES DOS JOGOS DE SOMA ZERO

Conforme descrito por Von Neumann & Morgenstern (1953), os jogos de soma zero, uma categoria central na Teoria dos Jogos, desempenham um papel crucial em diversas áreas de aplicação, destacando-se em campos como economia, negociações, teoria política e até mesmo na análise de conflitos estratégicos, como guerras e disputas territoriais. Sua versatilidade os torna uma ferramenta valiosa para modelar uma variedade de situações do mundo real, nas quais os ganhos e as perdas estão intrinsecamente ligados e demandam uma análise aprofundada no contexto estratégico (VON NEUMANN & MORGENSTERN, 1953).

Segundo VonNeumann & Morgenstern (1953), em economia, os jogos de soma zero são frequentemente utilizados para representar competição entre empresas ou na análise de políticas comerciais. Por exemplo, eles podem ser usados para modelar a concorrência entre duas empresas em um mercado, onde os lucros de uma empresa são diretamente afetados pelas ações da concorrente. Essa representação proporciona uma compreensão mais aprofundada das estratégias ótimas a serem adotadas por cada empresa (VON NEUMANN & MORGENSTERN, 1953).

Em negociações comerciais ou diplomáticas, os jogos de soma zero podem ajudar a entender as dinâmicas entre as partes envolvidas (MYERSON, 1991). Os negociadores muitas vezes enfrentam o desafio de distribuir recursos limitados de forma equitativa, e os jogos de soma zero podem ajudar a modelar e analisar essas situações (MYERSON, 1991).

De acordo com Myerson (1991), na teoria política, os jogos de soma zero podem ser usados para examinar conflitos de interesse entre diferentes grupos ou nações. Eles podem ajudar a compreender como as decisões políticas afetam a distribuição de recursos e podem influenciar estratégias de negociação e cooperação (MYERSON, 1991).

Segundo Myerson (1991), em cenários de conflito, como estratégias militares ou disputas territoriais, os jogos de soma zero podem ser aplicados para analisar as escolhas e os interesses das partes envolvidas. Isso é particularmente relevante em contextos de guerra, onde os ganhos de um lado podem resultar diretamente nas perdas do outro (MYERSON, 1991).

Essas aplicações dos jogos de soma zero refletem sua importância na Teoria dos Jogos, uma vez que permitem a compreensão de situações competitivas e conflitantes, nas quais os jogadores buscam maximizar seus próprios interesses, enquanto os recursos disponíveis são limitados (MYERSON, 1991).

CAPÍTULO 8

8 TEOREMA MINIMAX DE VON NEWMAN

Neste capítulo, são apresentados os fundamentos do Teorema Minimax, uma premissa essencial na análise de estratégias em jogos e decisões competitivas, destacando a busca pela concordância que minimiza riscos potenciais.

8.1 FUNDAMENTOS SOBRE O TEOREMA MINIMAX DE VON NEWMAN

O Teorema Minimax, também conhecido como Princípio do Valor Mínimo Máximo ou Teorema Minimax de Von Neumann, é um dos pilares fundamentais da Teoria dos Jogos, uma disciplina que estuda interações estratégicas entre jogadores racionais. Este princípio foi meticulosamente formulado por John von Neumann, um proeminente matemático e economista, em colaboração com Oskar Morgenstern, e apresentado de maneira abrangente na obra seminal "Theory of Games and Economic Behavior" (Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico) (VON NEUMANN; MORGENSTERN, 1944). Essa obra revolucionária estabeleceu as bases teóricas para a Teoria dos Jogos, abrindo caminho para sua aplicação em diversos campos, como economia, ciências políticas, biologia, entre outros.

O Teorema Minimax é aplicável principalmente a jogos de soma zero, nos quais a soma total dos ganhos e perdas entre os jogadores é sempre igual a zero (BIERMAN; FERNANDEZ, 2010). Em um jogo de soma zero, o ganho de um jogador implica automaticamente na perda equivalente do outro jogador, criando uma dinâmica de competição direta. Nesse contexto, o princípio Minimax estabelece que cada jogador deve adotar a estratégia que minimize sua perda máxima possível, levando em consideração que o oponente está buscando maximizar essa perda máxima (COSTA, 1975). Em outras palavras, é uma estratégia defensiva que visa garantir que, independentemente da estratégia do oponente, o jogador não perderá mais do que o valor mínimo possível.

A utilização do Teorema Minimax na análise de estratégias em situações competitivas determina conceitos e ações para a tomada de decisões (FIANI, 2009]. Isso se traduz em aplicações práticas em uma série de cenários, incluindo estratégias

empresariais, planejamento de jogos e resolução de conflitos (FIANI, 2004). Por exemplo, na estratégia empresarial, as organizações podem aplicar o princípio Minimax para minimizar os possíveis prejuízos em um mercado altamente competitivo. Da mesma forma, governos podem utilizar essa abordagem para tomar decisões em negociações diplomáticas, visando minimizar possíveis danos para seu país.

O Teorema Minimax representa uma ferramenta fundamental na Teoria dos Jogos, desempenhando um papel essencial na compreensão e estruturação de interações estratégicas. Sua aplicabilidade vai além do âmbito teórico, sendo um conceito crucial em diversas áreas, desde economia até ciências sociais, influenciando decisões e estratégias em uma ampla gama de contextos (MYERSON, 1999). A compreensão deste teorema é essencial para a análise e o planejamento estratégico eficaz em uma variedade de situações competitivas ou de tomada de decisões.

Após uma verificação teórica do tema, se faz necessária uma abordagem matemática. Os capítulos anteriores destacaram os jogos onde os *payoffs* dos jogadores representam funções arbitrárias. No entanto, no caso de jogos de Soma Zero em particular, em circunstâncias normais, ocorre que $H_1(x, y) + H_2(x, y) = 0$ para todo (x, y) . Como já mencionado, em jogos de Soma Zero os jogadores têm objetivos opostos, ou seja, a recompensa de um jogador é igual ao fracasso do oponente. Basta especificar a função de *payoffs* de um dos jogadores para uma descrição completa desse tipo de jogo.

Definição 2.1 Um jogo de Soma Zero é um jogo em circunstâncias normais dado por $\Gamma = \langle I, II, X, Y, H \rangle$, onde X, Y indicam os conjuntos de estratégia dos jogadores I e II e $H(x, y)$ representa a função de *payoffs* do jogador I , daí tem-se $H: X \times Y \rightarrow R$.

Cada jogador escolhe sua estratégia, independentemente do oponente. O Jogador I empenha-se em maximizar o *payoff* $H(x, y)$, enquanto o Jogador II procura minimizar essa função. Os jogos de Soma Zero satisfazem todas as propriedades estabelecidas para jogos em circunstâncias normais. No entanto, os tipos de jogos vistos anteriormente dispõe de uma série de recursos específicos. Logo, se faz necessária a reformulação da noção de equilíbrio de Nash.

Definição 2.2 Um equilíbrio de Nash em um jogo Γ é um conjunto de estratégias (\bar{x}, \bar{y}) que atende às condições:

$$H(x, \bar{y}) \leq H(\bar{x}, \bar{y}) \leq H(\bar{x}, y) \quad (III)$$

para estratégias arbitrárias x, y dos dois jogadores.

As desigualdades (III) sugerem que, como o jogador I desvia de um equilíbrio de Nash, seu *payoff* diminui. Conforme o Jogador II desvia do equilíbrio, seu oponente ganha mais, desse modo, o Jogador II perde mais. Portanto, nenhum dos jogadores se beneficia ao desviar de um equilíbrio de Nash. Uma importante observação a se fazer, é de que em jogos de soma constante do tipo $H_1(x, y) + H_2(x, y) = k$ para estratégias arbitrárias (x, y) pode ser reduzido a jogos de Soma Zero. Notavelmente, encontra-se uma solução para um jogo de Soma Zero conforme é dada a função de *payoffs* $H_1(x, y)$.

Então, qualquer equilíbrio de Nash (\bar{x}, \bar{y}) neste tipo de jogo também pode atuar como um equilíbrio de Nash em um jogo de soma constante correspondente. De fato, de acordo com a definição (2.2), para qualquer x, y tem-se:

$$H(x, \bar{y}) \leq H(\bar{x}, \bar{y}) \leq H(\bar{x}, y)$$

Ao mesmo tempo, $H_1(x, y) = k - H_2(x, y)$, e a segunda desigualdade pode ser reescrita como:

$$k - H_2(\bar{x}, \bar{y}) \leq k - H_2(\bar{x}, y),$$

ou $H_2(\bar{x}, y) \leq H_2(\bar{x}, \bar{y}), \forall y$. Assim, (\bar{x}, \bar{y}) também é um equilíbrio de Nash nos jogos de Soma Zero.

Por analogia, para todos os tipos de jogos em circunstâncias normais, os jogos de Soma Zero não podem admitir nenhum equilíbrio de Nash. Um papel importante na análise de jogos de Soma Zero está relacionado aos conceitos de Minimax e Maximin que serão desenvolvidos a seguir.

Suponha que o Jogador I emprega algum tipo de estratégia x . Na pior das hipóteses, ele tem como retorno os *payoffs* (x, y) . Naturalmente, ele irá se empenhar para maximizar essa recompensa. Na pior das hipóteses, a recompensa garantida do jogador I compõe o $\sup_x \inf_y H(x, y)$. Da mesma forma, o Jogador II pode garantir a perda máxima de $\inf_y \sup_x H(x, y)$.

Definição 2.3 O Minimax $\bar{v} = \inf_y \sup_x H(x, y)$ é chamado de valor superior de um jogo Γ , e o Maximin $\underline{v} = \sup_x \inf_y H(x, y)$ é chamado de valor inferior deste mesmo jogo. O valor inferior de qualquer jogo não excede seu valor superior.

Lema 2.1: Define-se: $\underline{v} \leq \bar{v}$

A veracidade desse Lema pode ser provada de maneira bastante intuitiva. Para qualquer (x, y) , a desigualdade $H(x, y) \leq \sup_x H(x, y)$ é verdadeira. Ao acrescentar o ínfimo em ambos os lados, obtém-se que:

$$\inf_y H(x, y) \leq \inf_y \sup_x H(x, y).$$

Essa desigualdade envolve uma função em x no lado esquerdo; e a função é delimitada superiormente por $\inf_y \sup_x H(x, y)$.

Portanto,

$$\sup_x \inf_y H(x, y) \leq \inf_y \sup_x H(x, y)$$

Por conseguinte, é dado um critério simples para verificar a existência do equilíbrio de Nash nesses jogos.

Teorema 2.1 Um equilíbrio de Nash (\bar{x}, \bar{y}) em um jogo de Soma Zero existe se $\inf_y \sup_x H(x, y) = \min_y \sup_x H(x, y)$ e $\sup_x \inf_y H(x, y) = \max_x \inf_y H(x, y)$. Além disso,

$$\underline{v} = \bar{v} \tag{IV}$$

Para essa demonstração, suponha que (\bar{x}, \bar{y}) gera um equilíbrio de Nash. A definição (1.1) implica que $H(x, \bar{y}) \leq H(\bar{x}, \bar{y}), \forall x$. Então segue-se que $\sup_x H(x, \bar{y}) \leq H(\bar{x}, \bar{y})$, logo:

$$\bar{v} = \inf_y \sup_x H(x, y) \leq \sup_x H(x, \bar{y}) \leq H(\bar{x}, \bar{y}) \quad (V)$$

Analogamente, tem-se:

$$H(\bar{x}, \bar{y}) \leq \inf_y H(\bar{x}, y) \leq \sup_x \inf_y H(x, y) = \underline{v} \quad (VI)$$

No entanto, o Lema 2.1 afirma que $\underline{v} \leq \bar{v}$. Portanto, todas as desigualdades em (1.3) e (1.4) tornam-se estritamente iguais, isto é, os valores correspondentes aos operadores externos sup. e inf. são efetuados e $\underline{v} = \bar{v}$. E essa é condição necessária para a demonstração. É condição suficiente denotar por \bar{x} um ponto, onde $\max_x \inf_y H(x, y) = \inf_x H(\bar{x}, y)$. Analogamente, \bar{y} denota um ponto de modo que $\min_y \sup_x H(x, y) = \sup_x H(x, \bar{y})$.

Consequentemente,

$$H(\bar{x}, \bar{y}) \geq \inf_y H(\bar{x}, y) = \underline{v}$$

Por outro lado,

$$H(\bar{x}, \bar{y}) \leq \sup_x H(x, \bar{y}) = \bar{v}$$

Em combinação com a condição (1.2) $\underline{v} = \bar{v}$, esse fato leva a:

$$H(\bar{x}, \bar{y}) = \inf_y H(\bar{x}, y) = \sup_x H(x, \bar{y}) = \bar{v}$$

Essa última expressão mostra imediatamente que para todo (x, y) , tem-se:

$$H(x, \bar{y}) \leq \sup_x H(x, \bar{y}) = H(\bar{x}, \bar{y}) = \inf_y H(\bar{x}, y) \leq H(\bar{x}, y)$$

Ou seja, (\bar{x}, \bar{y}) leva a um equilíbrio de Nash.

O Teorema 2.1 implica que, no caso de vários equilíbrios, os *payoffs* ideais coincidem. Este valor $v = H(\bar{x}, \bar{y})$ que é de fato idêntico para todos os equilíbrios, é considerado como uma espécie de valor ideal para o jogo. Qualquer combinação de estratégias ideais também representa um equilíbrio de Nash.

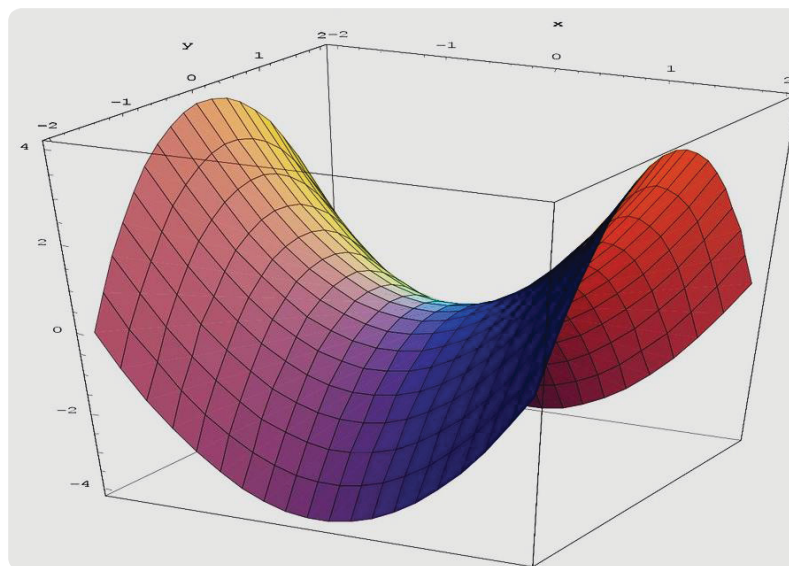


Figura 9 - Máximo ínfimo e Mínimo supremo

Teorema 2.2 Suponha que (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sejam equilíbrios de Nash em um jogo de Soma Zero. Então (x_1, y_2) e (x_2, y_1) também são equilíbrios de Nash.

Para provar essa afirmação, deve-se partir da definição de um equilíbrio de Nash para qualquer (x, y) , que afirma:

$$H(x, y_1) \leq H(x_1, y_1) \leq H(x, y) \quad (VII)$$

e

$$H(x, y_2) \leq H(x_2, y_2) \leq H(x_2, y) \quad (VIII)$$

Ao comutar $x = x_1$ e $y = y_2$ na desigualdade (1.5) e $x = x_2$ e $y = y_1$ na desigualdade (VIII), desenvolve-se uma cadeia de desigualdades com a mesma quantidade $H(x_2, y_1)$ nos lados esquerdo e direito. Portanto, todas as desigualdades em (VII) e (VIII) figuram-se estritamente iguais. E (x_1, y_2) se torna um equilíbrio de Nash para qualquer (x, y) :

$$H(x, y_2) \leq H(x_2, y_2) = H(x_1, y_2) = H(x_1, y_1) \leq H(x_1, y).$$

Obs: Um resultado semelhante pode ser aplicado à (x_2, y_1) .

Ao concluir nossa incursão pela demonstração matemática do conceito de Soma Zero e do Teorema Minimax, emerge a compreensão de que, na esfera estratégica, os jogadores estão atrelados a situações que demandam decisões estratégicas equilibradas. Este trabalho procurou apresentar as nuances desses princípios, revelando as estratégias ótimas em cenários de ganhos e perdas compartilhados.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao pesquisar sobre a Teoria dos Jogos, esta dissertação buscou apresentar algumas raízes históricas que deram origem a esse ramo da Matemática. Explorou-se o contexto histórico da Teoria dos Jogos, desde seu surgimento em situações estratégicas até sua formalização matemática, reconhecendo a evolução que estruturou suas bases teóricas. No cerne dessa investigação, o Equilíbrio de Nash emergiu como uma peça-chave, revelando a estabilidade nas interações estratégicas. Aprofundou-se na análise do Teorema de Nash, para se ampliar a compreensão das decisões estratégicas, indicando que em cada jogo finito existe pelo menos um ponto de equilíbrio.

A exploração do Dilema do Prisioneiro acrescentou materialidade à pesquisa, destacando as tensões entre a busca individual pelo melhor resultado e a cooperação para evitar perdas substanciais. Nesse jogo, percebe-se a dualidade entre os interesses próprios e o benefício coletivo. O Duopólio de Cournot, ao ser abordado, trouxe à tona a dinâmica competitiva em ambientes comerciais de oligopólio, evidenciando como a concorrência estratégica entre empresas pode regular o mercado. Por fim, a introdução do Teorema Minimax fechou este trabalho, proporcionando uma noção sobre a tomada de decisões estratégicas em situações conflituosas.

Essa jornada através da Teoria dos Jogos revela a interconexão intrínseca entre esses temas, refletindo não apenas sobre a riqueza matemática subjacente, mas também a aplicabilidade prática desses conceitos. A intenção de se aprofundar no estudo matemático da Teoria dos Jogos surgiu com o interesse em explorar temas pouco observados, motivado pelo entendimento de que há um campo de estudo notável na interseção entre Matemática e estratégia. Esta dissertação, ao lançar luz sobre essa temática, busca inspirar futuras investigações e contribuir para desenvolvimento de novas formas de estudar Matemática.

10 REFERÊNCIAS

AUMANN, R. J. (1974). **Subjectivity and correlation in randomized strategies**. Journal of Mathematical Economics, 1(1), 67-96.

BARRETT, Scott. **Environment and Statecraft: The Strategy of Environmental Treaty-Making**. Oxford: Oxford University Press, 2005.

BICCA, Júlia Fragomeni; MOTA, Calinca Alves. **A Aplicação da Teoria dos Jogos em Busca de um Mercado que Vise a Sustentabilidade**. Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como um dos pré-requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Física-IF, Programa de Pós-Graduação em Física - PPGFis, 2018. Disponível em: periodicos.univali.br/index.php/acts/article/view/12133/7023

Acesso em 12 set.2023

BIERMAN, H. Scott; FERNANDEZ, Luis. **Teoria dos Jogos**. 2ª edição. Editora Pearson Universidades, 2010.

BORTOLOSSI, H. J. , GARBUGIO , G., e SARTINI, B. A., **Uma Introdução à Teoria dos Jogos**, Notas de curso ministrado, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real, Volume 1**, Coleção Matemática Universitária/IMPA, 2004.

COSTA, J. J. S. **Tópicos de pesquisa operacional**. Rio de Janeiro: Editora Rio, 1975.

COURNOT, Antoine Augustin. **Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses**. 1838. Traduzido por N. T. Bacon. Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. Nova Iorque: McMillan, 1927.

DIXIT, Avinash K. **The Making of Economic Policy: A Transaction Cost Politics Perspective**. MIT Press, 1996.

FIANI, R. (2006). **Teoria dos Jogos, com Aplicações em Economia, Administração e Ciências Sociais**. Campus.

FIANI, R. **Teoria dos jogos**. 3ª ed. Rio de Janeiro: Editora Elsevier, 2009.

FIANI, Ronaldo. **Teoria dos Jogos: para cursos de administração e economia**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2004.

GONÇALVES, Andrey. **A Teoria dos Jogos na Política**. 2016. Disponível em: <https://olharatual.com.br/a-teoria-dos-jogos-na-politica/>. Acesso em: 06 outubro 2023.

LEIVAS, Fernanda Rodrigues. **Dinâmicas Estocásticas em Teoria de Jogos: Percolação, cooperação e seus limites**. Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como um dos pré-requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Física-IF, Programa de Pós-Graduação em Física - PPGFis, 2018. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/183168>. Acesso em 12 set.2023

LEWICKI, Roy. J.; BARRY, Bruce.; SAUNDERS, David. M. **Negociação: Princípios e Aplicações**. Porto Alegre: AMGH Editora, 2014.

MAILLART, Adriana Silva; OLIVEIRA, José Sebastião de; BEÇAK, Rubens. **Formas Consensuais de Solução de Conflitos**. Conselho Nacional de Pesquisa e Pós-Graduação em Direito, 2016.

MAZALOV, Vladimir Viktorovich. **Mathematical game theory and applications**. Wiley , 2014.

MENDONÇA, Mateus Medeiros Furquim. **Big Points: Uma Análise Baseada na Teoria dos Jogos**. Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia de Software da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia de Software, 2017.

MOREIRA, Thiago Augusto. **Uma Introdução à Teoria dos Jogos. Sorocaba**. 2017. Universidade Federal de São Carlos, Departamento de Física, Química e Matemática, Curso de Licenciatura em Matemática.

MYERSON, ROGER. B. **Game theory: analysis of conflict**. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1991.

MYERSON, ROGER B. **Nash Equilibrium and the History of Economic Theory**. American Economic Association, *Journal of Economic Literature*, v. 37, n. 3, p. 1067-1082, 1999.

NASH JR., John Forbes. **Non-Cooperative Games**. 1950. Tese de doutorado, Princeton University. Princeton University Press.

OSBORNE, M. J., & RUBINSTEIN, A. (1994). **A Course in Game Theory**. (1st ed., Twelf). The MIT Press.

PEÑALOZA, Rodrigo; RABELLO, Gabriel. **Vantagem Informacional em um Duopólio de Cournot com Valores Parcialmente Privados**. Revista Economia, 2012.

PERÉZ, Rafael Alberto. **Pensar la estrategia: outra perspectiva**. 1ª Ed. Buenos Aires: La Crujía, 2012.

RAPOSO, Ana Luísa Canelas Rasquinho. **Teoria dos Jogos: Um Instrumento para a Tomada de Decisão em Relações Públicas**. Dissertação (Mestrado em Gestão Estratégica das Relações Públicas) - Instituto Politécnico de Lisboa, Escola Superior de Comunicação Social, 2009. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10400.21/433>. Acesso em 21 set.2023

SANTOS, João Almeida. **Aplicação da Teoria dos Jogos na Gestão de Pessoas: Uma Análise da Variável Salário**. Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Administração da Universidade Metodista de São Paulo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Administração, 2012. Disponível em: <http://tede.metodista.br/jspui/handle/tede/31> Acesso em 15 ago. 2023

SARTINI, B. A *et al.* **Uma introdução a Teoria dos Jogos**. In: II Biental da SBM. Universidade Federal da Bahia: UFBA, 2004.

SCHELLING, T. (1981). **The Strategy of Conflict**. (2ª ed.). Harvard University Press.

SMITH, J. Maynard; PRICE, G. R. **The logic of animal conflict**. Nature, v. 246, n. 5427, p. 15–18, 1973.

SOUSA, Ádamo Alberto de. **A Teoria dos Jogos e as Ciências Sociais**. Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia e Ciências da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Marília, para a obtenção do título de Mestre em Ciências Sociais (Área de Concentração: Ciências Sociais). UNESP – Marília, 2003. Disponível em: <https://repositorio.uniceub.br/jspui/bitstream/235/11307/1/21307086.pdf> Acesso em 21 set.2023

SOUZA, Juliete Susann Ferreira de. **Teoria dos Jogos Aplicada à Inteligência Competitiva Organizacional no Âmbito da Ciência da Informação**. Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Informação, da Faculdade de Filosofia e Ciências, da Universidade Estadual Paulista, Câmpus de Marília, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Informação, 2016. Disponível em:

https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=3532528 Acesso em 14 set.2023.

VITALE, Carla Maria Franco Lameira; SILVA, Luciana Aboim Machado Gonçalves da. **Aplicação da Teoria dos Jogos na Mediação de Conflitos: O Equilíbrio de Nash como Estratégia de Maximização de Ganhos**. Revista FONAMEC, Rio de Janeiro, v. 1, n. 1, p. 94-110, 2017.

VON NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O. **Theory of games and economic behavior**. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1953.

VON NEUMANN, John von; MORGENSTERN, Oskar. **Theory of Games and Economic Behavior: 60th Anniversary Commemorative Edition**. Introdução de Harold William Kuhn. 60th Anniversary Commemorative Edition. Princeton Classic Editions. Princeton University Press, 2007.

WATSON, J. (2013). **Strategy: An Introduction to Game Theory (Third Edition)**. W. W. Norton & Company.

11 ANEXO 1 – TEOREMA MINIMAX

Abordou-se ao fim desse trabalho a demonstração de um teorema que discorre sobre o princípio Minimax, que estabelece que cada jogador deve adotar uma estratégia que minimize sua perda máxima possível, levando em conta que o adversário está buscando maximizar essa perda máxima. Em outras palavras, é uma estratégia defensiva que visa garantir que, independentemente da estratégia do oponente, o jogador não irá perder mais do que o valor mínimo possível.

Para apresentar de forma prática e ilustrativa uma breve aplicação do Teorema Minimax, pode-se usar o jogo de Jokenpô, conhecido popularmente como Pedra – Papel – Tesoura. A dinâmica desse jogo consiste em esticar as mãos e competir a partir da escolha simultânea entre um dos três objetos: pedra, papel ou tesoura, representados respectivamente pela mão fechada, mão aberta e mão com dois dedos esticados, onde:

- Pedra vence Tesoura
- Tesoura vence Papel
- Papel vence Pedra

Caso os dois jogadores escolham o mesmo objeto, há um empate e uma nova rodada é necessária. O jogo pode se repetir exaustivamente em várias rodadas e é utilizado comumente para tomada de decisão para início e interação de outras atividades.

A partir desse jogo simples, suponha-se que dois jogadores, Adriana e Raul, possam recriar uma versão mais elaborada do jogo de Jokenpô, onde cada combinação de escolhas dá ao ganhador uma quantidade de pontos diferentes:

- Quando Adriana ganha, ela recebe 2 pontos;
- Quando Raul ganha com “pedra”, ele recebe 3 pontos;
- Quando Raul ganha com “papel”, ele recebe 2 pontos;
- Quando Raul ganha com “tesoura”, ele recebe 1 pontos;
- Se houver empate, nenhum dos dois pontua.

É possível então, completar a matriz de *payoffs* de acordo com as pontuações de Adriana, onde as colunas representam as escolhas de Raul e as linhas representam as escolhas de Adriana:

		Raul		
		Pedra	Papel	Tesoura
Adriana	Pedra	0	-2	2
	Papel	2	0	-1
	Tesoura	-3	2	0

Tabela 2 - Matriz de *payoffs* para as escolhas de Adriana

A tabela mostra a pontuação que Adriana deve receber em cada combinação de resultados, cada valor negativo significa que Raul pontuou. Quando há empate, nenhum dos dois jogadores pontua, logo, tem-se zero na diagonal principal da tabela, lembrando que Adriana recebe dois pontos a cada vez que vence a rodada. Assim completa-se a tabela de *payoffs*.

Assumindo que Raul escolhe de forma aleatória, é possível determinar a escolha de Adriana para maximizar suas chances:

Baseando-se no fato da aleatoriedade da escolha de Raul, sabe-se que existe um terço de chance de que ele escolha cada uma das possibilidades entre pedra, papel ou tesoura. Desse modo, o valor esperado para Adriana em cada um dos casos pode ser calculado por meio de uma média aritmética simples:

Para o caso em que Adriana escolhe pedra tem-se:

$$\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot (-2) + \frac{1}{3} \cdot 2 = 0$$

Para o caso em que Adriana escolhe papel tem-se:

$$\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot (-1) = \frac{1}{3}$$

Para o caso em que Adriana escolhe tesoura tem-se:

$$\frac{1}{3} \cdot (-3) + \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 0 = -\frac{1}{3}$$

Pode-se concluir então que, de acordo com esses valores esperados, caso Adriana precise escolher, a opção que maximiza os seus ganhos será papel, segundo as regras pré-estabelecidas para o jogo.