

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

LORAYNE VERI

MÉTODO EXATO PARA UM PROBLEMA DE PRECIFICAÇÃO DINÂMICA NO
TRANSPORTE RODOVIÁRIO DE PASSAGEIROS

CURITIBA PR

2024

LORAYNE VERI

MÉTODO EXATO PARA UM PROBLEMA DE PRECIFICAÇÃO DINÂMICA NO
TRANSPORTE RODOVIÁRIO DE PASSAGEIROS

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Produção no Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Setor de Tecnologia, da Universidade Federal do Paraná.

Orientadora: Mariana Kleina.

Coorientador: Alexandre Checoli Choueiri.

CURITIBA PR

2024

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Veri, Lorayne

Método exato para um problema de precificação dinâmica no transporte rodoviário de passageiros / Lorayne Veri. – Curitiba, 2024.

1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção.

Orientador: Mariana Kleina

Coorientador: Alexandre Checoli Choueiri

1. Transporte rodoviário - Tarifas. 2. Programação não-linear. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção. III. Kleina, Mariana. IV Choueiri, Alexandre Checoli. V. Título.

Bibliotecário: Leticia Priscila Azevedo de Sousa CRB-9/2029

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação ENGENHARIA DE PRODUÇÃO da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **LORAYNE VERI** intitulada: **MÉTODO EXATO PARA UM PROBLEMA DE PRECIFICAÇÃO DINÂMICA NO TRANSPORTE RODOVIÁRIO DE PASSAGEIROS**, sob orientação da Profa. Dra. MARIANA KLEINA, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestra está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 28 de Março de 2024.

Assinatura Eletrônica
28/03/2024 15:28:25.0
MARIANA KLEINA
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
03/04/2024 16:07:02.0
CAROLINA DE MATTOS AFFONSO
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ)

Assinatura Eletrônica
28/03/2024 15:28:27.0
LEONARDO SILVA DE LIMA
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
28/03/2024 16:19:32.0
LUCAS GARCIA PEDROSO
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ -UFPR)

*Aos meus pais e irmãs. Jamais teria
conseguido sem vocês.*

AGRADECIMENTOS

Dedico meu tempo investido e cada página desta dissertação a Deus, por me dar forças diariamente para conquistar meus sonhos.

À minha família, em especial à minha mãe Valdete Morante Beserra, ao meu pai Roberto Veri e minhas irmãs Erika Veri e Andressa Veri, que sempre estiveram ao meu lado, tornando possível esse importante passo em minha vida.

Aos meus amigos, que se fizeram presentes em inúmeros momentos me incentivando e motivando sempre.

Aos colegas e amigos que fiz ao longo do mestrado, que fizeram estes dois anos mais leves.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, por todo o suporte ao longo da minha formação.

À Universidade Federal do Paraná por oferecer esta oportunidade, cedendo sua estrutura, condições e suporte para a realização desta pesquisa.

Por fim, à minha orientadora, professora Mariana Kleina e ao meu coorientador, professor Alexandre Checoli Choueiri, por toda a paciência, dedicação e empenho com que sempre me orientaram neste trabalho. Muito obrigada por terem me corrigido quando necessário, sem nunca me desmotivar.

RESUMO

Ter a capacidade de planejar cenários e vislumbrar o comportamento do preço em cada um deles é uma grande vantagem competitiva para as organizações, sendo a precificação dinâmica uma das técnicas utilizadas para o auxílio da tarefa. De uma maneira sucinta, a precificação dinâmica tem como principal objetivo determinar os preços de produtos ou serviços a partir da análise de informações captadas no mercado e entre seus concorrentes, ou seja, os preços de venda não são fixos, mas variam ao longo do tempo. Quando uma empresa de transporte rodoviário de passageiros busca realizar a precificação de suas passagens, diversas variáveis são envolvidas, assim o uso da precificação dinâmica se faz necessário. Neste estudo foram propostos dois modelos de otimização matemática para a resolução do problema em uma empresa de transporte rodoviário no Brasil. O primeiro modelo (modelo A) é uma proposta de substituição do cálculo de preços realizado pela companhia para um modelo de otimização exato, obedecendo ao processo utilizado pela empresa. O segundo modelo (modelo B) também obtém a solução ótima para o problema, além de ser uma proposta de novo processo para a precificação dinâmica das passagens da empresa em estudo. O modelo A foi resolvido para diferentes instâncias reais do problema e os resultados foram comparados com os da empresa (sem otimização matemática). Os testes mostraram que para 100 instâncias houve um aumento de 13% na receita da empresa com o modelo de otimização. A validação do modelo B foi realizada a partir da verificação da não violação das restrições em instâncias fictícias de dados para diferentes cenários.

Palavras-chave: Modelo de precificação dinâmica. Otimização. Programação não linear. Método Exato. Transporte rodoviário de passageiros.

ABSTRACT

Having the ability to plan scenarios and envision price behavior in each of them is a significant competitive advantage for organizations, with dynamic pricing being one of the techniques used to aid in this task. Put succinctly, dynamic pricing aims to determine product or service prices based on market and competitor information analysis; in other words, selling prices are not fixed but vary over time. When a passenger road transport company seeks to price its tickets, various variables come into play, making the use of dynamic pricing necessary. In this study, two mathematical optimization models were proposed to solve the problem in a road transport company in Brazil. The first model (Model A) proposes replacing the pricing calculation performed by the company with an exact optimization model, following the company's process. The second model (Model B) also achieves the optimal solution to the problem, in addition to proposing a new process for the dynamic pricing of the company's tickets under study. Model A was solved for different real instances of the problem, and the results were compared with those of the company (without mathematical optimization). The tests showed that for 100 instances, there was a 13% increase in the company's revenue with the optimization model. Model B validation was performed by verifying that the constraints were not violated in fictitious data instances for different scenarios.

Keywords: Dynamic Pricing Model. Optimization. Nonlinear programming. Exact Method. Passenger Road Transport.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Filtros da pesquisa.	13
2.2	Frequência de métodos utilizados para resolver problemas de precificação dinâmica em artigos de referência.	16
3.1	Etapas do trabalho.	21
4.1	Nomenclatura utilizada pela empresa do estudo de caso..	23
4.2	Processo de precificação adotado pela empresa do estudo de caso.	24
4.3	Processo proposto de precificação.	27
4.4	Ilustração da restrição 4.16..	30
5.1	Soma da quantidade de bilhetes vendidos pelo modelo A e realizada pela empresa, por linha de ônibus.	35
5.2	Venda modelo vs venda realizada.	35

LISTA DE TABELAS

2.1	Tipo de modelagem matemática e metaheurísticas utilizadas para resolver problemas de precificação dinâmica nos artigos de referência.	16
5.1	Dados coletados da empresa de transporte rodoviário de passageiros.	32
5.2	Resultados do modelo de precificação dinâmica para um trecho.	34
5.3	Resultados do modelo de precificação dinâmica para 100 trechos.	34
5.4	Premissas para a geração dos dados fictícios.	36
5.5	Parâmetros fictícios para uma linha de ônibus.	39
5.6	Resultados do modelo de precificação dinâmica para uma linha de ônibus fictícia.	41
5.7	Parâmetros fictícios para 27 linhas.	43
5.8	Resultados do modelo B de precificação dinâmica para 27 linhas fictícias.	44
5.9	Resultados do modelo B em cenários com 3 paradas (ou 3 trechos).	44
5.10	Resultados do modelo B em cenários com 5 paradas (ou 10 trechos).	45
5.11	Resultados do modelo B em cenários com 15 paradas (ou 105 trechos).	45
A.1	Média do R^2 dos modelos de regressão de vendas para 215 linhas.	51

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	OBJETIVOS	11
1.1.1	Objetivo Geral.	11
1.1.2	Objetivos Específicos	11
1.2	JUSTIFICATIVA	11
1.3	DELIMITAÇÕES	12
2	REVISÃO DA LITERATURA	13
2.1	PROTOCOLO DE PESQUISA	13
2.2	TRABALHOS CORRELATOS	14
2.3	REFERENCIAL TEÓRICO	17
2.3.1	Elasticidade-Preço da Demanda	17
2.3.2	Modelo de Precificação Dinâmica no Transporte Ferroviário de Passageiros	17
3	METODOLOGIA	20
3.1	CLASSIFICAÇÃO DA PESQUISA	20
3.2	ETAPAS METODOLÓGICAS	20
4	DESENVOLVIMENTO	23
4.1	MODELO A: MODELO DE OTIMIZAÇÃO PARA A PRECIFICAÇÃO DINÂMICA NO TRANSPORTE RODOVIÁRIO DE PASSAGEIROS	24
4.2	MODELO B: NOVO PROCESSO PARA A PRECIFICAÇÃO DINÂMICA NO TRANSPORTE RODOVIÁRIO DE PASSAGEIROS	26
4.2.1	Modelo de Regressão para Vendas	27
4.2.2	Modelo de Precificação Dinâmica no Transporte Rodoviário de Passageiros por trechos.	28
5	RESULTADOS	32
5.1	MODELO A	32
5.1.1	Coleta de dados	32
5.1.2	Resultados	33
5.2	MODELO B	35
5.2.1	Criação de instâncias	36
5.2.2	Resultados	38
6	CONCLUSÃO	47
	REFERÊNCIAS	48
	APÊNDICE A – MODELO DE REGRESSÃO PARA VENDAS	50
A.1	ALGORITMO	50
A.2	RESULTADOS	50

1 INTRODUÇÃO

A gestão de receitas refere-se à implementação de políticas de reservas e sistemas de informação, com o objetivo de otimizar as receitas por meio da coordenação eficiente entre a capacidade disponível e a procura, como descrito por Gallego e Ryzin Van (1997). De acordo com Kamandanipour et al. (2020), as principais ferramentas táticas para a gestão de receitas são as decisões de alocação de capacidade e de preços. Portanto, a gestão de receitas geralmente envolve duas decisões fundamentais: ajustes nos preços e na alocação de capacidade. Conforme mencionado por Kamandanipour et al. (2023), em certos serviços, como a venda de passagens aéreas e de trens de passageiros, uma receita considerável pode ser perdida se a capacidade não for vendida de maneira adequada e oportuna.

Um dos principais aspectos da gestão de receitas é a precificação, que desempenha um papel fundamental para uma empresa na definição de suas estratégias competitivas (Keyvanshokoo et al. (2013)). A precificação dinâmica é uma estratégia de precificação que envolve a atualização periódica dos preços, levando em conta tanto a demanda quanto a disponibilidade do produto (Kamandanipour et al. (2020)). Assim, os preços costumam ser ajustados com base na disposição dos clientes em pagar, nos custos operacionais e no comportamento dos concorrentes. Quando cada um destes parâmetros de mercado muda, o melhor preço pode ser adotado (Westermann (2006)).

Embora existam aplicações também na área de transporte rodoviário de passageiros, os modelos de otimização de receitas, por meio da precificação dinâmica, possuem seu principal uso no setor de transporte aéreo, eles também encontram aplicações em uma variedade de outros setores, incluindo hotéis, ferrovias, telecomunicações, aluguel de automóveis e equipamentos. Embora existam aplicações também na área de transporte rodoviário de passageiros, estas são menos comuns. Segundo a Confederação Nacional do Transporte (CNT (2023)), o número de passageiros do transporte rodoviário no Brasil teve um acréscimo de 18,5% entre 2020 e 2021 e um acréscimo de 8,7% entre 2021 e 2022. Além disso, a demanda de passageiros no rodoviário foi fortemente impactada pela pandemia da covid-19.

Nesse empreendimento, a capacidade dos serviços geralmente é restrita e eles podem expirar se não forem vendidos dentro de um período de compra específico, já que não podem ser armazenados. Além disso, nestes problemas muitas variáveis são consideradas, como a sazonalidade, o número de assentos vazios no ônibus, os preços dos concorrentes e muitos outros parâmetros. Assim, uma solução de precificação dinâmica pode impulsionar a receita de maneira significativa ao coordenar efetivamente as decisões de preços. Utilizando otimização não linear, este estudo desenvolve um modelo matemático e propõe um novo processo como ferramenta de apoio à tomada de decisão para o problema de gestão de preços para uma companhia de serviços rodoviários de passageiros.

Com sede em São Bernardo do Campo, São Paulo, a empresa de transporte rodoviário de passageiros estudada tem atuação em 13 unidades federativas, incluindo o Distrito Federal. O estudo envolve a adaptação da etapa de precificação dinâmica do processo já utilizado pela companhia que consiste em um algoritmo com regras definidas pela empresa para a definição do preço de um único trecho de uma linha de ônibus por vez. A proposta de modificação desta etapa é a inclusão de um modelo de otimização não linear, na mesma granularidade de informações do processo já existente, com o objetivo de obter a receita máxima para o trecho analisado. Além disso, nesta dissertação é realizada a comparação entre a receita gerada pelo processo adaptado e o já utilizado pela empresa por meio de casos reais. Posteriormente, é feita a proposta de um novo

processo, que realiza a precificação de todos os percursos de uma linha de ônibus, possibilitando o *trade-off* entre trechos. Além disso, a nova proposta contém um modelo de regressão para prever o número de venda dos bilhetes sob diferentes condições do mercado e na presença do preço dos concorrentes.

O restante desta dissertação está organizado da seguinte forma. A Seção 2 apresenta a literatura sobre trabalhos correlatos, elasticidade preço-demanda e um modelo base de precificação dinâmica no transporte ferroviário de passageiros. A Seção 3 resume a metodologia utilizada nesta pesquisa. A adaptação do processo de precificação dinâmica já utilizado pela empresa e o novo processo proposto são apresentados na Seção 4. Na Seção 5, os resultados da pesquisa são discutidos. Por fim, a Seção 6 apresenta a conclusão.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

Adaptar o processo de precificação dinâmica de uma empresa de transporte rodoviário de passageiros substituindo o cálculo utilizado por um modelo matemático e propor um novo processo com um modelo mais robusto para o problema, de forma a maximizar a receita da companhia.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Realizar o levantamento das formulações matemáticas aplicadas na resolução de problemas de precificação dinâmica;
- Desdobrar as regras de negócio da empresa estudada em modelos de otimização e adaptar as formulações já existentes para o problema de precificação dinâmica do transporte rodoviário de passageiros para o processo existente - chamado de modelo A;
- Propor um novo processo de precificação dinâmica com um modelo matemático que considera o preço da concorrência e o *trade-off* entre trechos - chamado de modelo B;
- Implementar os modelos propostos em *Python*, utilizando o *solver* de otimização GUROBI, e obter a solução exata para problemas reais (modelo A) e fictícios (modelo B);
- Comparar o desempenho da solução para a resolução dos problemas propostos de maneira exata para diferentes instâncias de dados.

1.2 JUSTIFICATIVA

Devido à sensibilidade ao preço das passagens rodoviárias, a precificação dinâmica pode apresentar um papel importante no estímulo à demanda. Assim, definir os preços em qualquer momento do horizonte de compra das passagens, sob variadas condições de mercado, é a principal proposta deste trabalho.

Um problema de precificação dinâmica pode ser resolvido utilizando métodos exatos de Otimização Matemática, os quais buscam responder à pergunta “o que é melhor?” quando a qualidade da resposta pode ser medida por um número. Ou seja, visa maximizar ou minimizar uma determinada função, sujeita à restrições, de maneira que, dado seu resultado, não existe outro resultado melhor (solução exata ou ótima). Para obter esta solução, utilizam-se algoritmos exatos

de otimização implementados em *solvers*, os quais conseguem avaliar os diferentes *trade-offs* e encontrar as soluções ótimas globais.

1.3 DELIMITAÇÕES

Este estudo visa a construção de dois modelos matemáticos e a obtenção das soluções exatas de um problema de precificação dinâmica do transporte rodoviário de passageiros. Para a análise, foram construídas diferentes instâncias de dados para simular linhas de uma empresa de transporte rodoviário e será assumido que as vendas realizadas sem a aplicação da precificação dinâmica já encobrem os custos envolvidos com os ônibus, como os impostos atribuídos, combustível, pedágio e manutenção do veículo.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Este capítulo apresenta o embasamento teórico necessário para o desenvolvimento da presente pesquisa. Primeiramente, é realizada uma revisão sistemática da literatura a fim de encontrar pesquisas com assuntos relacionados com o estudado. Após, uma breve descrição de tais pesquisas é realizada, com o intuito de descobrir formas de modelagens matemáticas e métodos de resolução utilizados em problemas de precificação dinâmica. Por fim, conceitos utilizados na presente pesquisa são brevemente descritos.

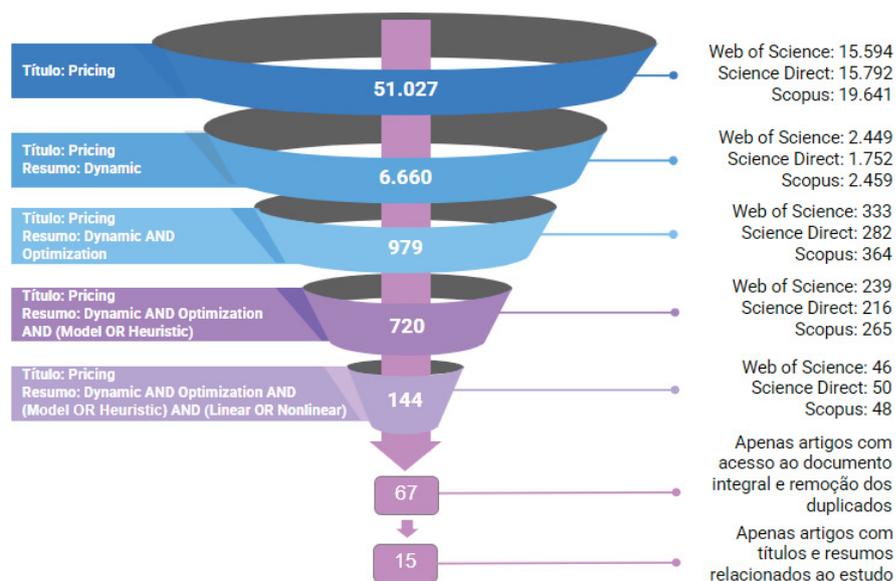
2.1 PROTOCOLO DE PESQUISA

A fim de buscar trabalhos correlatos com a proposta desta pesquisa, foi feita uma seleção de artigos nas bases de dados Web of Science, Science Direct e Scopus.

Optou-se por considerar apenas artigos de pesquisa escritos na língua inglesa publicados entre os anos 2013 e 2023.

A partir disto, foram definidas combinações no título e resumo dos termos de busca para que os resultados obtidos fossem convenientes ao objetivo do estudo. Inicialmente, foi feito o filtro com a palavra *Pricing* no título e, como se pode observar na Figura 2.1, obteve-se 51.027 artigos. Posteriormente, foram considerados apenas os artigos com a palavra *Dynamic* no resumo e, reduziu-se consideravelmente o número de artigos. Em seguida, além do filtro *Dynamic* no resumo, também foi considerada a ocorrência das palavras *Optimization*, *Model* ou *Heuristic* e *Linear* ou *Nonlinear*, gerando no final 144 artigos.

Figura 2.1: Filtros da pesquisa.



FONTE: A autora (2024).

Finalmente, foram considerados apenas os artigos que possibilitavam o acesso integral ao conteúdo e foram retirados os duplicados nas três bases, resultando na seleção de 67 artigos com temas relacionados ao da filtragem.

Após a execução da filtragem e a retirada dos artigos duplicados entre as bases definidas, foi efetuada a leitura dos títulos dos artigos e, aqueles com títulos não condizentes ao objetivo da pesquisa foram excluídos. Em seguida, foi realizada a leitura dos resumos dos artigos restantes e, da mesma forma, foram desconsiderados os artigos que não estavam relacionados ao objetivo do estudo. Assim, 15 artigos correlatos ao objetivo da pesquisa foram selecionados.

2.2 TRABALHOS CORRELATOS

A seguir, segue uma breve descrição dos 15 trabalhos correlatos selecionados.

Liu e Hualong (2015) propõem um modelo de otimização não linear estocástico para o problema de precificação dinâmica do transporte marítimo-ferroviário de contêineres, obtendo sua solução por meio do *software* de otimização LINGO.

Mayer e Steinhardt (2016) propõem um modelo de otimização linear inteiro misto para precificação de uma linha de produtos com restrição de capacidade quando o consumidor possui um orçamento limitado. Os autores descobriram que os modelos são bastante difíceis de resolver com pacotes de *software* de otimização como o CPLEX, que levou várias horas para problemas com apenas quatro produtos, enquanto problemas maiores não são solucionáveis devido a problemas de memória. Portanto, Mayer e Steinhardt (2016) desenvolveram um procedimento de solução *branch-and-bound* customizado para estabelecer os limites e que gerou uma solução em tempo viável. Eles também obtiveram uma solução via heurística, com melhor tempo, porém com uma pequena perda de receita.

Chekired et al. (2018) propõem um modelo de otimização linear para precificação dinâmica em tempo real do serviço de carga e descarga de veículos elétricos e o gerenciamento de energia predial, a fim de reduzir os picos de cargas. A abordagem de solução proposta utilizou uma arquitetura de computação em nuvem descentralizada baseada em tecnologia de rede definida por *software* (SDN) e virtualização de funções de rede.

Tian e Zhang (2019) sugeriram um modelo de precificação para determinar os preços de aquisição adequados dos determinados produtos desenvolvidos, o tempo e a quantidade de desmontagem apropriados. O problema foi formulado como um modelo inteiro misto não convexo e foi utilizada uma combinação do modelo de enxame de partículas e de programação dinâmica para encontrar uma solução, utilizando o *software* MATLAB.

Etebari (2019) propôs um modelo para a decisão de localização, preços e rotas de uma rede de distribuição a fim de maximizar o lucro. O modelo proposto foi um modelo inteiro misto, que posteriormente foi transformado em um problema restrito quadrático inteiro misto e resolvido via o *solver* de otimização CPLEX. Devido à incapacidade do algoritmo exato para resolver certas instâncias médias e todas as grandes, o autor introduziu a relaxação lagrangiana. Para resolver este novo problema um algoritmo heurístico híbrido foi proposto, o qual contém o enxame de partículas (*Particle Swarm Optimization - PSO*) e o PSO de autoaprendizagem (SLPSO). Para a implementação foi utilizado o MATLAB.

Kamandanipour et al. (2020) formularam um modelo estocástico de programação inteira não linear para o problema de precificação de passagens de transporte ferroviário para passageiros. Como este problema não pode ser resolvido em tempo polinomial, os autores propuseram uma solução via o método de recozimento simulado, implementado no MATLAB, que demonstrou potencial para aumentar o lucro total da venda das passagens.

Zhang e Kan (2020) aplicaram o problema de precificação dinâmica de viagens (DTP) para obter o preço das viagens considerando os desequilíbrios de distribuição dos carros nos sistemas de compartilhamento. Um modelo de programação não linear foi construído para o problema e resolvido por um algoritmo de otimização de PSO.

Couzon et al. (2020) desenvolveram duas heurísticas para solucionar o problema de dimensionamento dos lotes com decisão de preço, em que consiste em planejar a produção de diferentes produtos, durante vários períodos de tempo e com custos de preparação. O modelo proposto foi não linear e não convexo e, antes de desenvolverem a solução via heurísticas, os autores obtiveram a solução exata via o *software* LINGO, o qual não foi possível considerando instâncias maiores.

Wang et al. (2021) sugeriram um modelo de precificação dinâmica para o problema de gerenciamento de receita de aluguel de carros por temporada. Os autores utilizaram um modelo de otimização não linear para determinar os preços ótimos e dividem o problema em janelas de tempo para aumentar a performance do algoritmo. Para a solução do problema, foi utilizado o *software* de otimização Xpress.

Bandalouski et al. (2021) apresentaram um modelo de precificação dinâmica para empresas hoteleiras. O modelo tem como função objetivo uma função quadrática e restrições lineares, onde os autores sugerem a solução do problema via um *software* de otimização padrão, como MATLAB ou CPLEX.

Safari et al. (2022) obtiveram um modelo de precificação dinâmica para serviços web com diferentes classes de serviço e obtiveram sua solução exata mediante métodos de programação de restrição quadrática e programação não linear e sua solução aproximada via algoritmo genético e recozimento simulado. Para todas as soluções foi utilizado o *software* MATLAB.

Yin et al. (2022) sugeriram um modelo não linear de programação estocástica para a precificação e alocação de passagens ferroviárias dos trens, considerando as características dinâmicas de demanda dos passageiros durante o período de pré-venda. Para a solução, foi utilizado um algoritmo de PSO.

Meng et al. (2022) aplicaram a precificação dinâmica e a alocação de bilhetes para a venda de passagens ferroviárias. Os autores propuseram um modelo de programação não linear estocástica. Em seguida, uma combinação do algoritmo de PSO e um modelo de programação linear inteira mista foram projetados para resolver o modelo.

Baseados no princípio de jogos de Stackelberg, Jia et al. (2022) obtiveram um modelo de otimização de dois níveis multi-objetivo, com o objetivo de estabelecer o preço dos agentes de energia. Os autores converteram o problema em um modelo linear inteiro misto e o processo foi realizado no MATLAB, o qual chama o *solver* de otimização GUROBI.

Kamandanipour et al. (2023) obtiveram um modelo não linear para a precificação dinâmica dos bilhetes a serem comprados para o transporte ferroviário de passageiros, para o qual os autores obtiveram a solução via o *software* de otimização LINGO. O modelo tem como objetivo a maximização da receita e ele considera restrições como a elasticidade e a capacidade limitada do trem.

A Tabela 2.1 resume os tipos de modelagem matemática utilizados e as técnicas de resolução (dentre as metaheurísticas citadas e método exato) para os 15 artigos selecionados. Nota-se que a combinação de modelagem matemática e método de resolução pode ser bem variada, demonstrando a gama de opções na abordagem de um problema de precificação dinâmica.

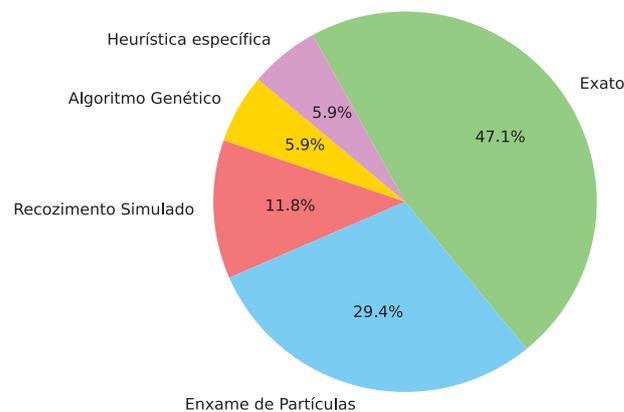
Tabela 2.1: Tipo de modelagem matemática e metaheurísticas utilizadas para resolver problemas de precificação dinâmica nos artigos de referência.

Autores e ano	Tipo do Modelo		Método de resolução				
	Linear	Não linear	Alg. genético	Recozimento simulado	Enxame de partículas	Exato	Heurística específica
Liu e Hualong (2015)		X				X	
Mayer e Steinhardt (2016)	X					X	X
Chekired et al. (2018)	X						
Tian e Zhang (2019)		X					
Etebari (2019)		X				X	
Kamandanipour et al. (2020)		X		X			
Zhang e Kan (2020)		X				X	
Couzon et al. (2020)		X					X
Wang et al. (2021)		X				X	
Bandalouski et al. (2021)		X				X	
Safari et al. (2022)		X	X	X			
Yin et al. (2022)						X	
Meng et al. (2022)		X				X	
Jia et al. (2022)	X						X
Kamandanipour et al. (2023)		X					X
Total	3	11	1	2	5	8	1

FONTE: A autora (2024).

Quanto à frequência da modelagem matemática utilizada, nota-se que dos artigos analisados foi proposto um modelo não linear em doze (80%) e um modelo linear em três (20%). Dos quinze artigos, sete utilizam metaheurísticas para resolver o problema e oito resolveram o problema com solução exata. A frequência dos métodos utilizados para obter uma solução para o problema está representada na Figura 2.2.

Figura 2.2: Frequência de métodos utilizados para resolver problemas de precificação dinâmica em artigos de referência.



FONTE: A autora (2024).

Esta revisão de literatura serviu para compreender que nos últimos anos os problemas de precificação dinâmica, independentemente da aplicação, têm a modelagem não linear como a mais frequente. Além disso, caso o problema não possa ser resolvido de maneira exata, a heurística de PSO é sugerida para resolução, devido ao seu maior aparecimento em trabalhos encontrados na literatura.

2.3 REFERENCIAL TEÓRICO

Para o desenvolvimento do trabalho, conceitos de elasticidade foram utilizados, por este motivo nesta seção é feita um breve revisão de tais conceitos. Além disso, será apresentado o modelo de otimização proposto por Kamandanipour et al. (2023), modelo encontrado na etapa de revisão sistemática da literatura (apresentada anteriormente) com maior relação ao problema estudado na presente pesquisa.

2.3.1 Elasticidade-Preço da Demanda

Mankiw (2019) define elasticidade como uma medida da resposta da quantidade demandada a variações em seus determinantes. Observa-se que, em geral, os consumidores tendem a adquirir uma quantidade maior de um bem quando seu preço está mais baixo, especialmente quando sua renda é mais elevada, os preços dos bens substitutos estão em alta ou os preços dos bens complementares estão mais acessíveis. Com isso, tem-se a elasticidade-preço da demanda, que mede o quanto a quantidade demandada reage a uma mudança no preço, ou seja, mede o quanto os consumidores estão dispostos a deixar de adquirir o bem à medida que seu preço aumenta. Ainda, segundo Mankiw (2019), a demanda por um bem é chamada de elástica se a quantidade demandada responde substancialmente a mudanças no preço, e inelástica se a quantidade demandada responde pouco a mudanças no preço.

Os economistas calculam a elasticidade-preço da demanda como a variação percentual da quantidade demandada dividida pela variação percentual do preço, de acordo com a equação 2.1.

$$\text{elasticidade-preço da demanda} = \frac{\text{variação percentual da quantidade demandada}}{\text{variação percentual do preço}} \quad (2.1)$$

Que pode ser reescrita conforme equação 2.2

$$e = \frac{\Delta\%q}{\Delta\%p} \quad (2.2)$$

onde e é a elasticidade, q é a quantidade demandada e p é o preço.

Como a quantidade demandada de um bem está negativamente relacionada com seu preço, a variação percentual de quantidade demandada sempre terá sinal inverso ao da variação percentual do preço. Assim, a elasticidade é representada por números negativos.

2.3.2 Modelo de Precificação Dinâmica no Transporte Ferroviário de Passageiros

Kamandanipour et al. (2023) apresentaram uma abordagem de precificação dinâmica para estabelecer os preços de bilhetes destinada a prestadores de serviços ferroviários de passageiros, com o objetivo de maximizar a receita da companhia. Em seu estudo, eles consideraram um horizonte de compra finito T , que representa os dias restantes para a viagem, e definem os preços dos bilhetes sob diferentes condições para influenciar o comportamento de reserva do cliente.

O trabalho de Kamandanipour et al. (2023) segue um processo de três etapas. Inicialmente, propõe-se um modelo de rede neural perceptron multicamadas (MLP) para prever a intensidade da demanda, levando em conta situações sazonais. Em seguida, são empregados modelos de regressão, como funções de elasticidade de preços, para quantificar os efeitos do preço, das condições sazonais e da concorrência nas vendas da empresa. Por fim, é apresentado um modelo de programação inteira não linear com o objetivo de maximizar a receita total ao longo do horizonte de compras. O modelo de otimização deve ser resolvido separadamente para cada viagem de um trem.

Na sequência será apresentada a modelagem matemática realizada pelos autores Kamandanipour et al. (2023) para precificação dinâmica no transporte rodoviário de passageiros. Os índices, parâmetros e variáveis utilizados no modelo são definidos a seguir.

Índices:

- t : é o índice dos dias restantes para a viagem, onde $t \in \{0, 1, 2, \dots, T\}$.

Parâmetros:

- CAP : é a capacidade total de assentos disponíveis;
- α_{tc_t, sc_T} , β_{tc_t, sc_T} and γ_{tc_t, sc_T} : são os coeficientes do modelo de regressão linear polinomial relativos a cada classe de sazonalidade sc_T em cada período de compras tc_t ;
- sc_T : é a situação de sazonalidade do dia de partida T apresentada por algumas classes;
- tc_t é o tempo restante desde a reserva até a saída de algumas classes;
- P^{min} e P^{max} : são os preços mínimos e máximos que podem ser atribuídos aos bilhetes;
- DP : é a diferença máxima de preço que os bilhetes podem assumir em dois dias consecutivos de compra;
- PC_t : é o preço médio definido pelos principais concorrentes (trens dos demais prestadores de serviços ferroviários) no dia de compra t para o dia de partida T .

Variáveis:

- p_t : é o preço do bilhete da viagem para cada dia de venda t ;
- d_t : é a demanda prevista no dia de compra t sob o preço proposto p_t e o preço médio dos concorrentes PC_t ;
- v_t : é a venda estimada de bilhetes para a viagem no dia de venda t .

Um problema não linear inteiro foi proposto para otimizar a receita da venda de bilhetes do transporte ferroviário para a viagem, em um horizonte finito de compra:

$$\text{maximizar } \sum_{t=0}^T v_t \cdot p_t \quad (2.3)$$

$$\text{sujeito a } d_t = \alpha_{tc_t, sc_T} \cdot p_t + \beta_{tc_t, sc_T} \cdot PC_t + \gamma_{tc_t, sc_T}, \quad \forall t \in [0, T - 1] \quad (2.4)$$

$$v_t = \min \left(d_t, CAP - \sum_{m=t+1}^{T-1} v_m \right), \quad \forall t \in [0, T-1] \quad (2.5)$$

$$P^{min} \leq p_t \leq P^{max}, \quad \forall t \in [0, T-1] \quad (2.6)$$

$$|p_t - p_{t+1}| \leq DP, \quad \forall t \in [0, T-2] \quad (2.7)$$

$$p_t, v_t, d_t \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad \forall t \in [0, T-1] \quad (2.8)$$

A função objetivo formulada na equação 2.3 é maximização da receita da viagem, a qual é o produto do preço proposto e da venda estimada. O conjunto de restrições 2.4 prevê a demanda no dia de compra t por uma função de regressão linear, que é arredondada para o número inteiro mais próximo. As restrições 2.5 calculam as vendas no dia de compra t para a demanda prevista e a capacidade restante. O conjunto de restrições 2.6 garante que o preço irá flutuar entre os limites estabelecidos. As restrições 2.7 preservam o modelo de mudanças extremas de preços, garantindo que dois dias consecutivos não tenham uma diferença de preço maior que DP (obtido via parâmetro). E as restrições 2.8 dizem que as variáveis de decisão devem ser números inteiros.

3 METODOLOGIA

Este capítulo tem o objetivo de apresentar as etapas que foram realizadas para o desenvolvimento e conclusão do estudo em questão.

3.1 CLASSIFICAÇÃO DA PESQUISA

Uma pesquisa pode receber diferentes classificações de acordo com os seguintes critérios: natureza da pesquisa, forma de abordagem, processo de raciocínio, tipo de investigação e instrumentos (Gil, 2002). A seguir, serão apresentados os procedimentos metodológicos da pesquisa.

A respeito da natureza da pesquisa, este estudo é uma aplicação prática, uma vez que busca propor um modelo de precificação dinâmica do transporte rodoviário de passageiros.

Como as variáveis utilizadas no estudo são quantificáveis, a forma de abordagem da pesquisa é quantitativa.

Quanto ao processo de raciocínio, classifica-se como dedutiva, já que se baseia na hipótese de testar a validade de informações já existentes.

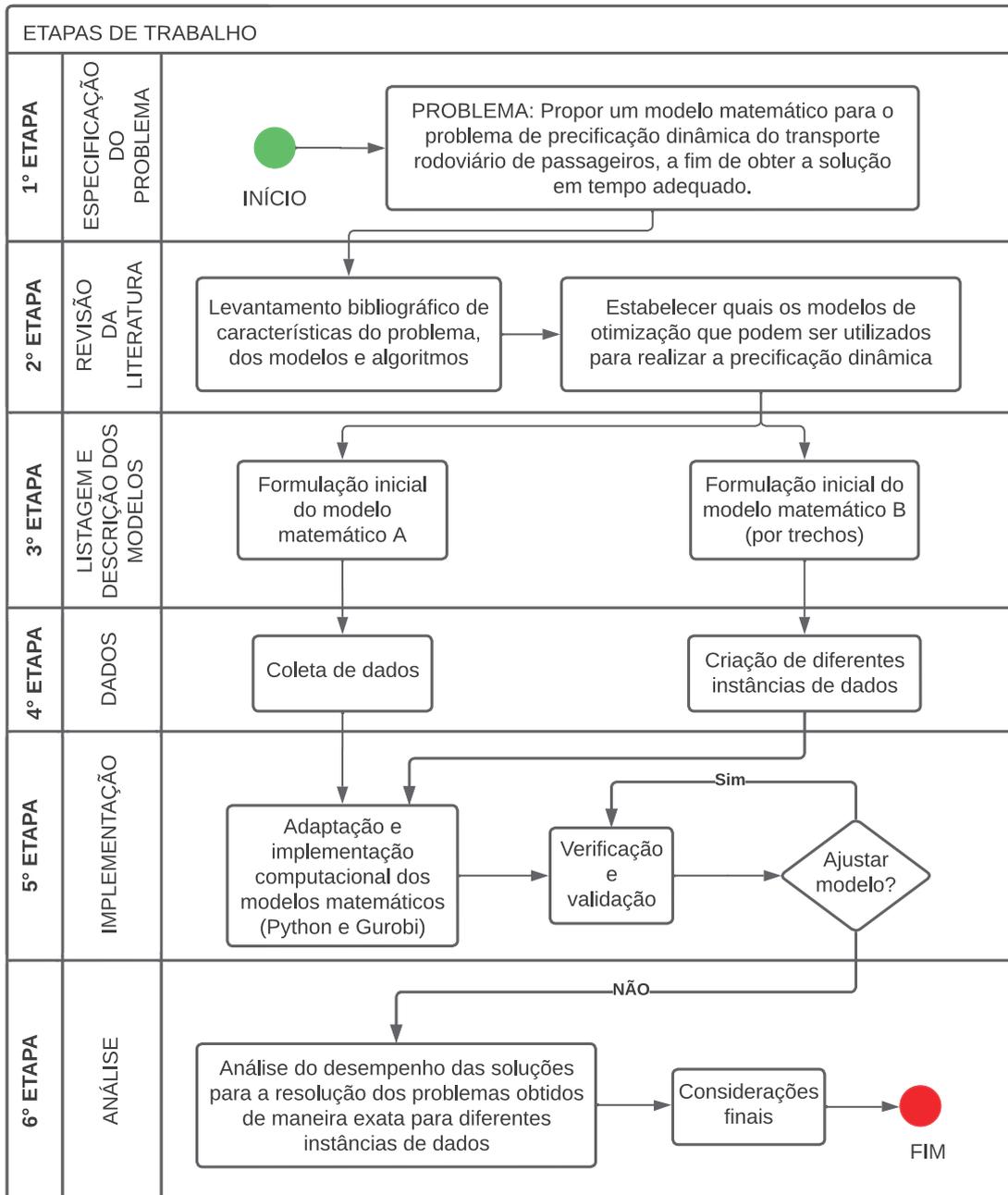
Quanto ao tipo de investigação, é possível classificar as pesquisas em três grandes grupos, sendo eles: exploratórias, descritivas e explicativas (Gil, 2002). As pesquisas exploratórias, nas quais esta pesquisa se enquadra, assumem, em geral, as formas de pesquisas bibliográficas e estudos de caso, além de proporcionar maior familiaridade com o problema a fim de torná-lo explícito ou a construir hipóteses (Silva e Menezes, 2005).

Por fim, este trabalho enquadra-se como um estudo de caso por investigar e descrever um problema dentro do seu contexto de realidade considerando inclusive variáveis responsáveis por tornar a situação tão complexa.

3.2 ETAPAS METODOLÓGICAS

Para o desenvolvimento do trabalho, a Figura 3.1 a seguir ilustra as etapas que foram realizadas.

Figura 3.1: Etapas do trabalho.



FONTE: A autora (2024).

Os itens a seguir detalham cada uma das etapas que foram seguidas para o cumprimento do objetivo da pesquisa.

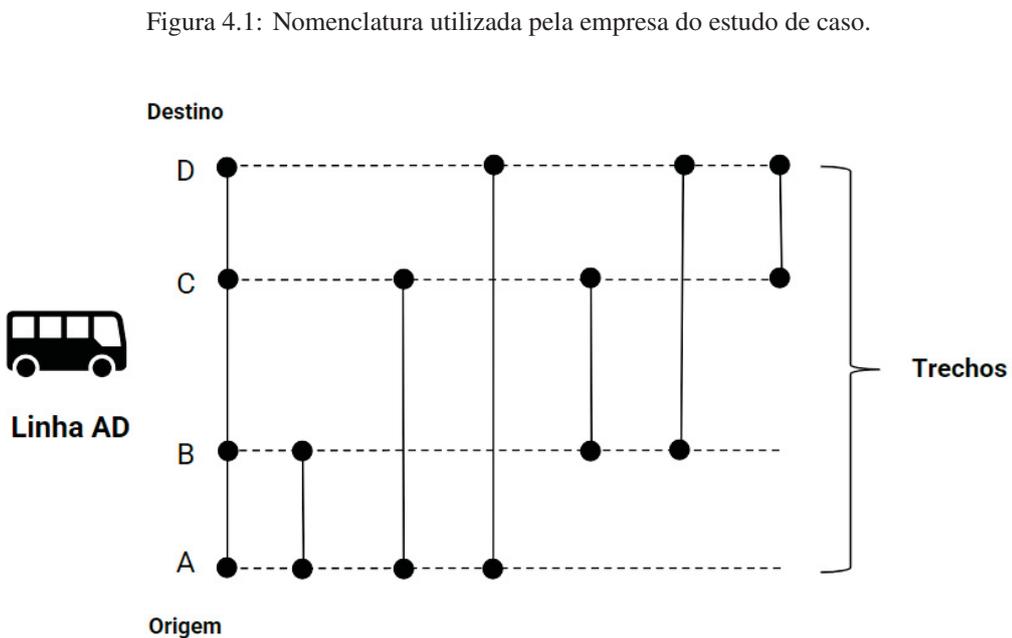
- **Especificação do Problema:** Os objetivos deste estudo foram propor um modelo matemático para o problema de precificação dinâmica do preço das passagens de uma empresa de transporte rodoviário de passageiros e realizar uma análise da solução exata do problema proposto para diferentes instâncias de dados.

- **Revisão da Literatura:** Foi realizado o levantamento bibliográfico para a verificação da viabilidade do problema proposto e levantamento dos modelos de otimização utilizados para solucionar um problema de precificação dinâmica.
- **Listagem e Descrição dos Métodos:** Dentre os modelos levantados na revisão de literatura, o modelo que mais se assemelhou ao problema deste estudo foi o proposto por Kamandanipour et al. (2023). Assim, foi realizada uma simplificação do modelo matemático proposto pelos autores e formulado um novo modelo (modelo A) para a aplicação e resolução do problema de precificação da empresa de transporte rodoviário estudada. Além disso, um novo modelo matemático foi proposto (modelo B) que realiza a precificação de todos os trajetos em uma rota de ônibus, permitindo a avaliação das trocas entre as diferentes partes do percurso.
- **Dados:** Foi obtida a autorização e realizada a coleta dos dados da empresa de transporte rodoviário em estudo. Além do histórico de vendas, preços praticados pela empresa e preços da concorrência, foram coletados os parâmetros utilizados pela empresa estudada para a utilização no modelo A. Além disso, com o intuito de abordar diferentes cenários de tamanho da linha de ônibus, variação de demanda, dias de venda dos bilhetes e a intercambialidade entre as paradas da linha de ônibus, foram geradas instâncias de dados com diferentes premissas adotadas e descritas na Seção 5.2.1, para serem usadas no modelo B.
- **Adaptação e implementação dos modelos matemáticos:** O modelo de precificação dinâmica para o transporte ferroviário, descrito na Seção 2.3.2, foi adaptado, modelo A, com novas restrições e parâmetros, como a utilização de um preço referência para a definição do preço de venda. Além disso, foi formulado um modelo B que considera todas as paradas da linha como decisão da otimização e não cada trecho de parada isolado. Os modelos foram resolvidos de forma exata pelo *solver* GUROBI.
- **Análise:** Análise do desempenho das soluções para a resolução do problema obtidos via método exato. O modelo A foi testado com os dados reais da empresa, obtidos via histórico de dados e, para a validação, foi feita a comparação dos resultados obtidos via modelos de otimização com os resultados da empresa. Para o modelo B, 100 instâncias de dados foram geradas e as restrições do modelo foram validadas para todas elas.

4 DESENVOLVIMENTO

Esta seção tem como objetivo apresentar o processo de precificação dinâmica praticado pela empresa de transporte rodoviário em estudo (Figura 4.2), além de um modelo de otimização matemática, que se encaixa no processo praticado pela companhia, para a obtenção da máxima receita da empresa na venda de passagens. Além disso, será proposto um novo processo para a precificação dinâmica dos bilhetes (Figura 4.3).

Primeiramente será definida a nomenclatura utilizada para descrever o problema proposto. A Figura 4.1 ilustra o exemplo de uma linha AD fictícia de ônibus.

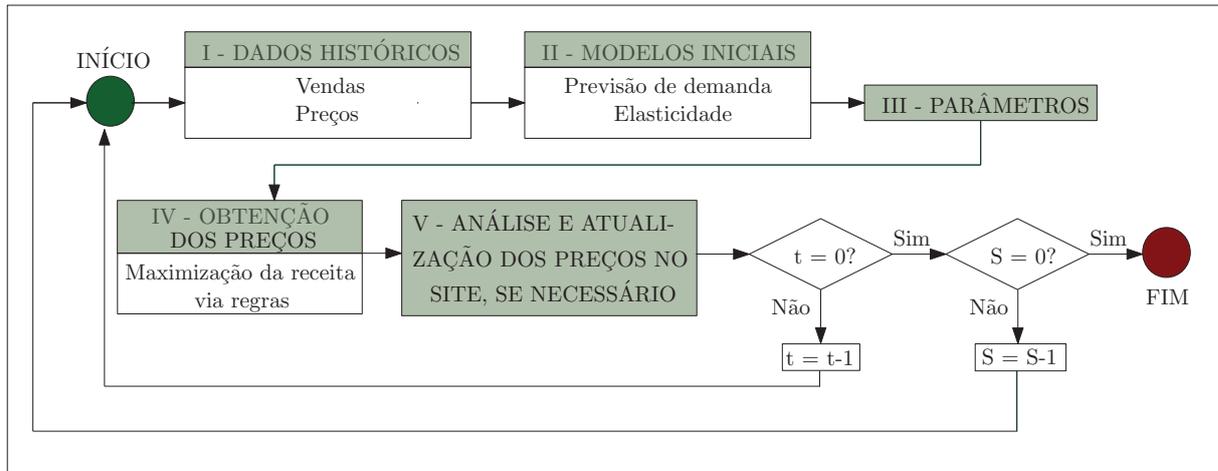


FONTE: A autora (2024).

Uma origem (A) e destino final (D) definem a *linha AD* de ônibus. Considere que a linha AD possua outros dois pontos de parada B e C, além de sua origem A e destino D. Definem-se como *trechos* os seguimentos AB, AC, AD, BC, BD e CD, percorridos pelo ônibus, nos quais podem embarcar ou desembarcar passageiros.

A Figura 4.2 apresenta o processo utilizado pela empresa de transporte rodoviário para a precificação de seus bilhetes.

Figura 4.2: Processo de precificação adotado pela empresa do estudo de caso.



FONTE: A autora (2024).

Fixado um ônibus com data e horário de partida programados e um trecho S (que pode ser qualquer segmento - AB, AC, AD, BC, BD ou CD - da Figura 4.1, por exemplo) de uma linha operada pela companhia de transporte e fixada a quantidade t de dias restantes para a partida do ônibus, deve-se obter os dados históricos de venda e preços até o dia presente (Etapa I), estes dados servirão de *input* para os próximos passos. Em seguida, modelos para a geração do parâmetro de elasticidade e da demanda são rodados para os t dias de venda restantes (Etapa II). Em seguida, são coletados os parâmetros (Etapa III) necessários para a definição dos preços. A Etapa IV é responsável pelo cálculo, de forma a maximizar a receita, dos preços a serem praticados pela companhia. Para a geração dos preços, nesta etapa, são fixados multiplicadores de desconto ou acréscimo do preço. Dentre os multiplicadores existentes, é selecionado o que maximiza a receita do trecho S em questão. A fim de não gerar um alto custo computacional na publicação dos preços, uma comparação entre a receita a ser gerada pelos preços já publicados pela companhia e a receita calculada com os novos preços obtidos na Etapa IV é feita e, se houver uma diferença significativa, é feita a atualização dos preços no site (Etapa V). O processo é realizado para todos os dias de venda t até o dia da partida do ônibus no trecho S e, posteriormente o processo se repete para o próximo trecho $S - 1$ da linha de ônibus fixada.

4.1 MODELO A: MODELO DE OTIMIZAÇÃO PARA A PRECIFICAÇÃO DINÂMICA NO TRANSPORTE RODOVIÁRIO DE PASSAGEIROS

Como sugestão de melhoria no processo já praticado pela empresa, foi proposto um modelo de otimização matemática (modelo A da Figura 3.1) para a obtenção dos preços a serem cobrados pelos bilhetes de forma a maximizar a receita. Este modelo substituirá a Etapa IV do processo já apresentado (Figura 4.2).

Com base no modelo de Kamandanipour et al. (2023), conforme apresentado na Subseção 2.3.2, pode-se fazer uma adaptação do modelo proposto pelos autores e formular um problema para precificação dos bilhetes da empresa estudada, cujo objetivo é a maximização da receita para um trecho S de linha de ônibus.

Seja T o número de dias restantes para a saída de um ônibus que irá percorrer um trecho de uma linha e também o horizonte de tempo para compra de passagens. Os índices, parâmetros e variáveis são definidos como segue.

Índices:

- t : é o índice para os dias restantes para o trecho, onde $t \in \{0, 1, 2, \dots, T\}$. Onde $t = 0$ representa o dia da partida do ônibus, $t = 1$ representa o dia que antecede a partida do ônibus e assim sucessivamente.

Parâmetros:

- CAP : é a capacidade total de assentos disponíveis para o trecho;
- d_t : é a demanda de bilhetes no dia de venda t ;
- PR : é o preço referência, obtido via histórico de dados, praticado pela companhia de ônibus no trecho;
- e_t : é a elasticidade-preço da demanda no dia de venda t ;
- P^{min} e P^{max} : são os preços mínimos e máximos que podem ser atribuídos aos bilhetes;
- DP : é a diferença máxima de preço que os bilhetes podem assumir em dois dias consecutivos de compra.

Variáveis:

- p_t : é o preço do bilhete, para cada dia de venda t ;
- v_t : é a venda estimada de bilhetes no dia de venda t .

Um modelo não linear foi proposto, chamado de modelo A, para otimizar a receita da venda de bilhetes do transporte ferroviário para um trecho, em um horizonte finito de compra:

$$\text{maximizar } \sum_{t=0}^T v_t \cdot p_t \quad (4.1)$$

$$\text{sujeito a } v_t \leq d_t, \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.2)$$

$$\sum_{t=0}^T v_t \leq CAP \quad (4.3)$$

$$v_t = d_t \cdot \left[1 + \left(\frac{p_t}{PR} - 1 \right) \cdot e_t \right], \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.4)$$

$$|p_t - p_{t+1}| \leq DP, \quad \forall t \in [0, T - 1] \quad (4.5)$$

$$P^{min} \leq p_t \leq P^{max}, \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.6)$$

$$p_t, v_t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.7)$$

A seguir serão explicadas a função objetivo e restrições envolvidas no problema.

A função objetivo formulada na equação 4.1 é maximização da receita por trecho, a qual é a soma do produto do preço proposto e da venda estimada de bilhetes, para todos os dias que antecedem a viagem.

As restrições 4.2 limitam a quantidade de bilhetes vendidos no dia t à quantidade de demanda d_t existente neste dia.

A restrição 4.3 limita a quantidade de vendas total à capacidade do ônibus.

O conjunto de restrições 4.4 fornece as vendas no dia de compra t para a demanda prevista a depender da elasticidade e do preço a ser praticado. Esta restrição é obtida via a definição de elasticidade (equação 2.2). Seja q_i a quantidade demanda inicial, q_f a quantidade demanda final, p_i e p_f o preço inicial e o preço final, respectivamente, em um intervalo de tempo, pode-se reescrever a equação 2.2 na forma da equação 4.8.

$$e = \frac{\frac{q_f - q_i}{q_i}}{\frac{p_f - p_i}{p_i}} \quad (4.8)$$

Com algumas manipulações matemáticas pode-se obter a equação 4.9 como apresentada a seguir.

$$q_f = q_i \cdot \left[1 + \left(\frac{p_f}{p_i} - 1 \right) \cdot e \right] \quad (4.9)$$

Seja q_f a quantidade de venda v , q_i a demanda prevista d , p_f o preço a ser cobrado pelos bilhetes p e o preço referência PR . Assim, a equação 4.9 pode ser reescrita na forma da equação 4.10.

$$v = d \cdot \left[1 + \left(\frac{p}{PR} - 1 \right) \cdot e \right] \quad (4.10)$$

A equação 4.10 é justamente a restrição apresentada. na equação 4.4 do modelo matemático.

As restrições 4.5 preservam o modelo de mudanças extremas de preços, garantido que dois preços sucessivos não tenham uma diferença maior que DP .

O conjunto de restrições 4.6 garante que o preço irá flutuar entre os limites estabelecidos.

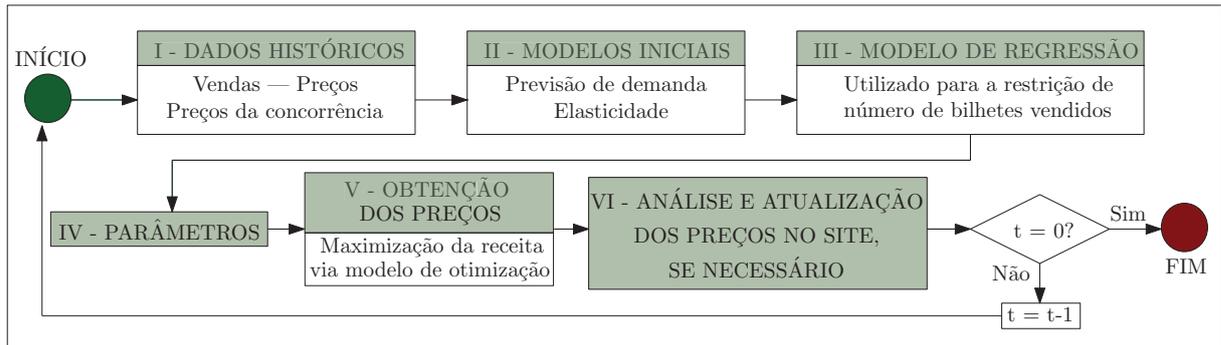
As restrições 4.7 estabelecem que as variáveis de decisão dos preços e vendas devem ser números reais positivos. É contraintuitivo utilizar variáveis reais para a quantidade de venda de bilhetes, porém a empresa de transporte rodoviário estudada utiliza números reais positivos para definir esse valor devido à baixa demanda em alguns trechos. Portanto, para a comparação dos resultados, a variável foi declarada da mesma forma.

O modelo A proposto pertence à classe dos problemas não lineares e, ao ser utilizado na Etapa IV, serão obtidos os preços ótimos, em todo o espaço solução, para o problema estudado.

4.2 MODELO B: NOVO PROCESSO PARA A PRECIFICAÇÃO DINÂMICA NO TRANSPORTE RODOVIÁRIO DE PASSAGEIROS

A Figura 4.3 apresenta o processo proposto neste trabalho para a precificação dos bilhetes de uma empresa de transporte rodoviário.

Figura 4.3: Processo proposto de precificação.



FONTE: A autora (2024).

Diferente do processo utilizado pela empresa estudada, que precifica as passagens rodoviárias para cada trecho de maneira individual, o fluxo proposto contempla todos os trechos de uma linha de ônibus. Assim, fixada uma linha de transporte operada pela companhia e a quantidade t de dias restantes para a partida do ônibus, além dos dados que já eram obtidos anteriormente, deve-se obter os preços praticados pela concorrência até o dia presente (Etapa I). A Etapa II, para a geração dos parâmetros de demanda e elasticidade, mantém-se como anteriormente. Como próximo passo (Etapa III), tem-se a primeira sugestão de melhoria no processo, um modelo de regressão para a geração de coeficientes relacionando à demanda, venda realizada, preço praticado pela companhia e preço dos concorrentes (Subseção 4.2.1). Este modelo servirá como *input* para a construção da restrição de número de bilhetes vendidos no modelo de otimização proposto. Na Etapa IV, são coletados os parâmetros que serão utilizados no modelo de otimização para a definição dos preços. A Etapa V é responsável pelo modelo de otimização para a obtenção dos preços a serem praticados e bilhetes a serem vendidos pela companhia, de forma a maximizar a sua receita. Diferente do modelo proposto na Seção 4.1, o novo modelo considera todos os trechos de uma linha de ônibus, além dos preços praticados pela concorrência. Como no processo anterior, a fim de não gerar um alto custo computacional na publicação dos preços no site de venda de passagens, uma comparação entre a receita a ser gerada pelos preços já publicados pela companhia e a receita calculada com os novos preços obtidos na Etapa V é feita e, se houver uma diferença significativa, é feita a atualização dos preços no site (Etapa VI). O processo é realizado para todos os dias de venda t até o dia da partida do ônibus.

4.2.1 Modelo de Regressão para Vendas

O número de bilhetes vendidos desempenha um papel vital em um modelo de precificação dinâmica. A relação entre os preços praticados pela concorrência e pela empresa estudada com as vendas realizadas possui um grande impacto na definição do número de bilhetes a serem vendidos. Um modelo de regressão polinomial é proposto usando os fatores citados anteriormente como premissas.

O objetivo básico da análise de regressão é modelar o valor esperado de uma variável dependente y em termos do valor de uma variável independente x . Em geral, pode-se modelar como

$$y = \alpha \cdot x^n + \dots + \beta \cdot x^2 + \gamma \cdot x + \delta. \quad (4.11)$$

Seja y a diferença entre os bilhetes vendidos em uma linha de ônibus, obtidos via histórico de dados, e a venda proposta na equação 4.10. E, seja x a diferença entre o preço

da concorrência (PC) e o preço (p) a ser praticado pela empresa em estudo. Assim, pode-se reescrever a equação 4.11 na forma da equação 4.12:

$$y_h - y_p = \alpha \cdot (PC - p)^n + \dots + \beta \cdot (PC - p)^2 + \gamma \cdot (PC - p) + \delta \quad (4.12)$$

Com o auxílio da biblioteca *sklearn* do *Python*, foram rodados os modelos de regressão de grau 1 (linear), grau 2 (quadrático) e grau 3 (cúbico) para diversas linhas de ônibus do histórico de dados da empresa em estudo. Para todos os modelos gerados, foi calculado o R^2 ajustado como teste de qualidade de ajuste e, aquele que mais se ajustou aos dados analisados foi o modelo de grau 3, para todas as linhas, conforme apresentado no Apêndice A. Assim, a equação 4.12 pode ser reescrita por 4.13.

$$F(p) = \alpha \cdot (PC - p)^3 + \beta \cdot (PC - p)^2 + \gamma \cdot (PC - p) + \delta \quad (4.13)$$

Onde $F(p) = y_h - y_p$. A equação 4.13 terá grande importância na modelagem do número de bilhetes a serem vendidos no modelo B (Seção 4.2.2).

Como explicado anteriormente, foi rodado o modelo de regressão cúbico para diversas linhas de ônibus. Porém, como o modelo de precificação dinâmica B foi rodado apenas para dados fictícios, os parâmetros α , β , γ e δ foram fixados de acordo com a linha de ônibus, do histórico de dados da empresa em estudo, mais completa e representativa. Assim, $\alpha = 6,8e - 03$, $\beta = 2,9e - 04$, $\gamma = 1,9e - 06$ e $\delta = 1,19$ são os parâmetros escolhidos para a equação 4.13.

4.2.2 Modelo de Precificação Dinâmica no Transporte Rodoviário de Passageiros por trechos

No novo modelo proposto (modelo B da Figura 3.1) são consideradas restrições *hard* e *soft*. Restrições *hard* são as que não podem ser violadas em qualquer hipótese, pois causariam a inviabilidade da solução. Já as restrições *soft* são restrições desejáveis, que devem ser preferencialmente atendidas; sua violação, no entanto, não inviabiliza a solução.

Seja T o número de dias restantes para a partida de uma linha de ônibus e também o horizonte temporal de compra dos bilhetes. Os conjuntos, índices, parâmetros e variáveis do modelo são definidos a seguir.

Conjuntos:

- $I = \{1, 2, \dots, n\}$, onde n representa o número de pontos de parada da linha de ônibus;
- $P = \{(i, j), \forall i \in \{1, \dots, n - 1\} \text{ e } \forall j \in \{i + 1, \dots, n\}\}$, onde i são as origens e j são os destinos da linha;
- $Z = \{0, 1, \dots, T\}$, onde T são os dias de venda dos bilhetes e também representa o número de dias para a partida do ônibus.

Índices:

- t : é o índice para os dias restantes para a partida do ônibus, onde $t \in Z$;
- i : é o índice para as origens dos trechos da linha, onde $i \in I$;
- j : é o índice para todos os destinos possíveis da linha, onde $j \in I$;

Parâmetros:

- CAP : é a capacidade total de assentos disponíveis no ônibus;
- d_{ijt} : é a demanda de bilhetes no dia de venda t para o trecho ij ;
- PR_{ij} : é o preço referência praticado pela companhia de ônibus no trecho ij ;
- e_{ijt} : é a elasticidade de preço, que mede a capacidade de resposta da quantidade demandada a uma mudança em seu preço para o trecho ij no dia de venda t ;
- P_{ij}^{min} e P_{ij}^{max} : são os preços mínimo e máximo que podem ser atribuídos aos bilhetes para o trecho ij ;
- DP : é a diferença máxima de preço que os bilhetes podem assumir em dois dias consecutivos de compra;
- PC_{ijt} : é o preço praticado pela concorrência no dia de compra t para o trecho ij ;
- C_{ijt} : indica a existência do preço da concorrência no dia de compra t para o trecho ij , $C_{ijt} = 1$ se o preço da concorrência existe e $C_{ijt} = 0$ caso contrário;
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta$: são os parâmetros da regressão polinomial;
- W_1, W_2, W_3 : são os pesos de penalizações das restrições *soft*.

Variáveis:

- p_{ijt} : é o preço do bilhete do trecho ij , para cada dia de venda t ;
- v_{ijt} : é a venda estimada de bilhetes para o trecho ij no dia de venda t ;
- ζ_{ijt} : variável de folga para a venda do trecho ij no dia de venda t ;
- η_{ijt} : variável de folga para a diferença de preço em dias consecutivos do trecho ij no dia de venda t ;
- μ_{ijt} : variável de folga para os limites mínimo e máximo de preço para o trecho ij no dia de venda t .

Um problema não linear misto, chamado de modelo B, foi proposto para otimizar a receita da venda de bilhetes do transporte rodoviário para todos os trechos de uma linha de ônibus, em um horizonte finito de compra:

$$\text{maximizar } \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \sum_{t \in Z} v_{ijt} \cdot p_{ijt} - W_1 \cdot \zeta_{ijt} - W_2 \cdot \eta_{ijt} - W_3 \cdot \mu_{ijt} \quad (4.14)$$

$$\text{sujeito a } v_{ijt} \leq d_{ijt}, \quad \forall t \in Z, i \in I, j \in I \quad (4.15)$$

$$\sum_{t \in Z} \sum_{(i,j) \in P: k \geq i, k < j} v_{ijt} \leq CAP, \quad \forall k = 1, \dots, n-1 \quad (4.16)$$

$$v_{ijt} = d_{ijt} \cdot \left[1 + \left(\frac{p_{ijt}}{PR_{ij}} - 1 \right) \cdot e_{ijt} \right] + F(p_{ijt}) \cdot C_{ijt} + \zeta_{ijt}, \quad \forall t \in Z, i \in I, j \in I \quad (4.17)$$

$$F(p_{ijt}) = \alpha \cdot (PC_{ijt} - p_{ijt})^3 + \beta \cdot (PC_{ijt} - p_{ijt})^2 + \gamma \cdot (PC_{ijt} - p_{ijt}) + \delta, \quad \forall t \in Z, i \in I, j \in I \quad (4.18)$$

$$|p_{ijt} - p_{ij(t+1)}| \leq DP + \eta_{ijt}, \quad \forall t \in [0, T - 1], i \in I, j \in I \quad (4.19)$$

$$P_{ij}^{min} - \mu_{ijt} \leq p_{ijt} \leq P_{ij}^{max} + \mu_{ijt}, \quad \forall t \in Z, i \in I, j \in I \quad (4.20)$$

$$p_{ijt}, \zeta_{ijt}, \eta_{ijt}, \mu_{ijt} \in \mathbb{R}^+, \quad \forall t \in Z, i \in I, j \in I \quad (4.21)$$

$$v_{ijt} \in \mathbb{Z}^+, \quad \forall t \in Z, i \in I, j \in I \quad (4.22)$$

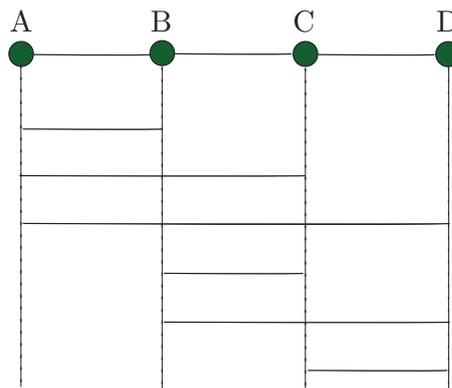
A seguir serão explicadas a função objetivo e restrições envolvidas no problema.

Como no modelo apresentado na Seção 4.1, a função objetivo formulada na equação 4.14 é maximização da receita por linha, a qual é a soma de todos os dias que antecedem a viagem, do produto do preço proposto e da venda estimada de bilhetes, para todos os trechos que compõem aquela viagem. Além disso, neste modelo, são adicionados à função objetivo três penalizações. A primeira para a quantidade de bilhetes vendidos, a segunda corresponde à diferença de preço em dias consecutivos e a última aos limites superiores e inferiores de preço.

O conjunto de restrições 4.15 limita a quantidade de bilhetes vendidos no dia t à quantidade de demanda existente neste dia para o trecho ij .

As restrições 4.16 limitam a quantidade de vendas à capacidade disponível do ônibus nas intersecções dos trechos. A Figura 4.4 ilustra estas restrições em um exemplo com quatro paradas.

Figura 4.4: Ilustração da restrição 4.16.



FONTE: A autora (2024).

Considere uma linha de ônibus com 4 pontos de parada A, B, C e D (que correspondem aos trechos AB, AC, AD, BC, BD e CD) e com apenas um dia de venda dos bilhetes, ou seja, $T = 0$. A restrição 4.16 consiste em limitar à capacidade do veículo, para cada trecho, a soma da quantidade de bilhetes vendidos dos trechos que possuem intersecção ao trecho analisado. Então, as restrições 4.23 à 4.25 seriam criadas para este exemplo ilustrativo.

$$v_{AB0} + v_{AC0} + v_{AD0} \leq CAP \quad (4.23)$$

$$v_{AC0} + v_{AD0} + v_{BC0} + v_{BD0} \leq CAP \quad (4.24)$$

$$v_{AD0} + v_{BD0} + v_{CD0} \leq CAP \quad (4.25)$$

As restrições 4.17 fornecem as vendas no dia de compra t para a demanda prevista a depender da elasticidade, do preço a ser praticado e do preço dos concorrentes. A primeira parte desta restrição é obtida da mesma maneira que a restrição 4.4 apresentada na Seção 4.1. Além da elasticidade, o preço dos concorrentes também define a venda, assim a restrição 4.17 pode ser obtida. Onde $F(p)$ foi definida na Seção 4.2.1, C_{ijt} é o parâmetro que indica a existência do preço da concorrência, criado para garantir que o modelo possa ser usado mesmo se o preço da concorrência não estiver disponível, e ζ_{ijt} é a variável de folga. A definição desta restrição como *soft* se fez necessária para não gerar inviabilidade no modelo. A variável de venda v_{ijt} é inteira e a variável de preço contínua, assim as chances de inviabilidade poderiam ser grandes se não houvesse a variável de folga ζ_{ijt} , tornando assim essa restrição *soft*.

O conjunto de restrições 4.18 estabelece uma função polinomial de grau 3, a depender do preço a ser definido e do preço praticado pela concorrência, que define o número de bilhetes que são impactados pelo preço da concorrência.

Como no modelo anterior, as restrições 4.19 preservam o modelo de mudanças extremas de preços, garantindo que dois preços sucessivos não tenham uma diferença maior que DP . Com a variável de folga η_{ijt} , flexibiliza-se essa restrição, tornando-a *soft*. Na estratégia de negócio da companhia de transporte rodoviário estudada, garantir que não haja uma mudança brusca de preço das passagens em dias consecutivos é uma restrição importante, porém não necessária.

O conjunto de restrições 4.20 também são *softs*, elas garantem que o preço irá flutuar entre os limites estabelecidos e a variável de folga μ_{ijt} . A flexibilidade nesta restrição permite a definição de preços superiores ou inferiores aos limites designados desde que a função objetivo seja maximizada.

Para os três conjuntos de restrições 4.17, 4.19 e 4.20, variáveis de folga foram introduzidas, tornando as restrições *softs*, como já mencionado. Quando uma variável de folga assume o valor zero (caso ideal), significa que a solução encontrada conseguiu satisfazer integralmente aquela restrição e a função objetivo não sofrerá penalização referente àquela restrição (nesse caso, a função objetivo não terá algo subtraído dela). Entretanto, se uma variável de folga assume um valor maior que zero, significa que a restrição não pôde ser completamente atendida, e o valor da variável de folga (que representa o quanto faltou/sobrou para a restrição ser respeitada e espera-se que esse valor seja pequeno) é subtraído da função objetivo multiplicado por uma constante W_i , o que acarreta em uma piora da função objetivo (que é de maximização). Sendo assim, a ideia da introdução de variáveis de folga é não acarretar inviabilidade ao problema, permitindo que restrições possam ser violadas, mas que essa violação seja a menor possível para que o valor da função objetivo não seja fortemente impactado.

As restrições 4.21 dizem que as variáveis de decisão dos preços e de folga devem ser números reais positivos.

As restrições 4.22 definem a variável de quantidade de bilhetes vendidos como um número inteiro positivo.

5 RESULTADOS

Nesta seção, primeiramente serão apresentados os dados coletados, disponibilizados pela empresa em estudo, e os resultados obtidos por meio da implementação do modelo A da Seção 4.1, bem como a comparação destes resultados com os preços e vendas praticados pela empresa no processo já existente. Em seguida, para a obtenção dos resultados do modelo B, apresentado na Seção 4.2.2, serão criadas instâncias para abordar diferentes cenários e realizada a análise das soluções obtidas. Em ambos os modelos a solução ótima foi obtida em um tempo irrisório, então o tempo computacional não será analisado.

5.1 MODELO A

Foi obtida a autorização e realizada a coleta dos dados da empresa de transporte rodoviário em estudo, conforme será apresentado na Seção 5.1.1. Além disso, foram definidos os parâmetros a serem considerados no modelo A para a resolução do problema proposto e realizada a comparação dos resultados obtidos com os preços e número de bilhetes vendidos pela companhia (Seção 5.1.2).

5.1.1 Coleta de dados

A seguir, a Tabela 5.1 apresenta um descritivo dos dados coletados.

Tabela 5.1: Dados coletados da empresa de transporte rodoviário de passageiros.

Nome do parâmetro	Significado	Tipo	Número de registros diferentes
Viagens	Número de saídas de ônibus por origem e destino	Número	6.744
Linha	Linha do ônibus	<i>String</i>	6
Origem	Cidade de origem do trecho	<i>String</i>	8
Destino	Cidade de destino do trecho	<i>String</i>	8
Data de partida	Dia de partida	<i>String</i> representando as datas entre 16/03/2023 e 12/08/2023	151
Quantidade de assentos	Capacidade do ônibus em cada trecho	Número inteiro entre 2 e 21	15
Preço referência (R\$)	Preço médio obtido a partir dos dados históricos a ser considerado no modelo. Este preço, sem a aplicação da precificação dinâmica, já encobre os custos envolvidos com os ônibus	Número real entre 113,41 e 379,86	338
Preço máximo (R\$)	Tarifa máxima que pode ser atribuída aos bilhetes	Número real entre 140,99 e 477,49	274
Preço mínimo (R\$)	Tarifa mínima que pode ser atribuída aos bilhetes	Número real entre 102,49 e 427,49	577

FONTE: A autora (2024).

O número de viagens descrito na Tabela 5.1 é uma combinação entre as linhas, origens, destinos e datas de partida dos ônibus. A quantidade de assentos não é a capacidade total do

ônibus, mas sim a quantidade de assentos reservada para cada trecho de uma linha. O preço referência é obtido via histórico de dados e têm-se que ele já encobre todos os custos envolvidos com os ônibus. Definidos pelos especialistas em precificação dinâmica da empresa em estudo, os preços mínimos e máximos limitam a tarifa a ser atribuída aos bilhetes.

5.1.2 Resultados

Para a validação do modelo A proposto foram analisados os resultados de 100 instâncias com trechos de diferentes ônibus da empresa de transporte rodoviário estudada, os quais são apresentados nesta seção. A implementação do modelo foi realizada em *Python*, com o auxílio da biblioteca *gurobipy* e as soluções foram obtidas via o *solver* de otimização GUROBI.

Primeiramente, para garantir o entendimento do modelo será apresentado o resultado para um trecho da empresa estudada. Os índices e parâmetros utilizados estão descritos a seguir.

- $T = 13$ são os dias restantes para a partida do ônibus;
- $t \in [0, 1, \dots, 13]$ é o índice dos dias restantes para a partida do ônibus;
- $CAP = 9$ é a quantidade de assentos disponíveis no ônibus para o trecho analisado;
- $PR = 245,84$ é o preço referência praticado pela companhia de ônibus no trecho;
- $e_0 = -2,42$ é a elasticidade-preço da demanda no dia de venda 0, ou seja, dia da partida do ônibus;
- $e_{t:t>0} = -3,03$ é a elasticidade-preço da demanda nos dia de venda, além do dia da partida do ônibus;
- $P^{min} = 200$ é o preço mínimo que pode ser atribuído aos bilhetes;
- $P^{max} = 300$ é o preço máximo que pode ser atribuído aos bilhetes;
- $DP = 10$ é a diferença máxima de preço que os bilhetes podem assumir em dois dias consecutivos de compra t .

A demanda d_t para o trecho, a solução obtida via *solver* de otimização e a solução adotada pela empresa são apresentados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Resultados do modelo de precificação dinâmica para um trecho.

t	d_t	Modelo A			Dados praticados pela empresa		
		p_t (R\$)	v_t	$receita_t$ (R\$)	p_t (R\$)	v_t	$receita_t$ (R\$)
0	6,35	281,68	4,11	1.156,37	282,87	2,25	636,04
1	1,54	271,56	1,05	284,79	274,55	0,99	272,41
2	1,46	271,57	1,00	270,76	268,31	1,06	283,24
3	1,01	271,53	0,66	187,10	262,59	0,80	210,11
4	0,76	271,58	0,52	140,20	259,99	0,62	162,28
5	0,58	271,51	0,39	107,13	256,87	0,50	128,11
6	0,43	271,58	0,29	79,91	254,27	0,39	98,19
7	0,18	271,63	0,12	32,89	251,15	0,17	41,66
8	0,19	271,59	0,13	34,91	248,03	0,18	45,43
9	0,18	271,61	0,13	34,17	245,43	0,19	45,48
10	0,58	271,51	0,40	107,85	242,31	0,61	146,92
11	0,54	271,58	0,17	46,98	239,71	0,58	138,62
12	0,24	271,58	0,00	0,00	236,59	0,27	64,00
13	0,01	271,30	0,01	2,53	233,99	0,02	3,65
Total	14,04		9	2.485,60		8,6	2.276,12

FONTE: A autora (2024).

Por meio dos resultados obtidos, pode-se notar que todas as restrições impostas na formulação do modelo foram satisfeitas. Por exemplo, a quantidade de bilhetes vendidos não excedeu a capacidade do ônibus e nem a demanda. Além disso, ao substituir o método de maximização da receita utilizado pela empresa pelo modelo de otimização proposto, obteve-se um aumento de R\$284,06 reais na receita da companhia para um único trecho.

Com o intuito de validar o modelo proposto, foram obtidas as soluções de 100 trechos operados pela empresa em estudo. Os parâmetros de entrada dos 100 trechos considerados foram obtidos via coleta de dados da companhia de transporte rodoviário estudada, e estão dentro dos limites apresentados na Tabela 5.1. A Tabela 5.3 contém a soma dos resultados obtidos.

Tabela 5.3: Resultados do modelo de precificação dinâmica para 100 trechos.

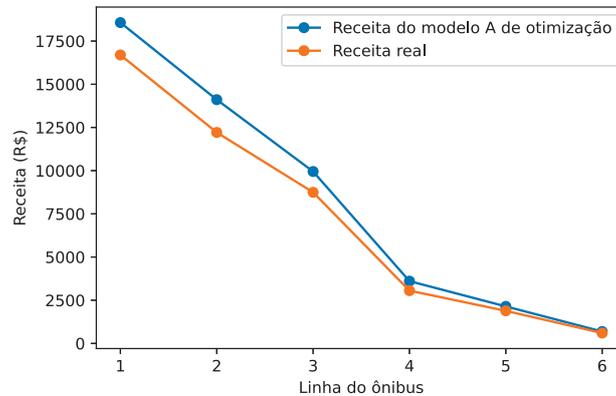
Modelo A		Dados praticados		Diferença	
$venda$	$receita$ (R\$)	$venda$	$receita$ (R\$)	$venda$	$receita$ (R\$)
210,80	49.064,93	184,46	43.195,65	26,34	5.869,28

FONTE: A autora (2024).

Ao estabelecer os preços via modelo de otimização, obteve-se um acréscimo em 13,6% na receita da empresa estudada, além da estimativa de quase 26 bilhetes vendidos além do realizado pela companhia.

A Figura 5.1 apresenta a receita, agrupada nas 6 linhas de ônibus analisadas e que contemplam as 100 viagens, obtida via modelo de otimização e a receita realizada pela companhia. Nota-se que, na maioria das linhas, a receita obtida via o modelo de otimização proposto é maior que a receita realizada.

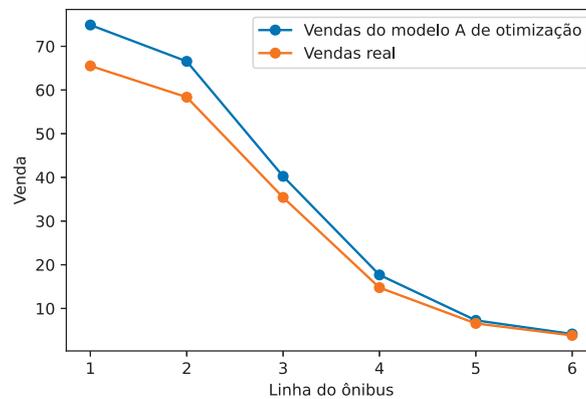
Figura 5.1: Soma da quantidade de bilhetes vendidos pelo modelo A e realizada pela empresa, por linha de ônibus.



FONTE: A autora (2024).

A Figura 5.2 compara as vendas realizadas pela empresa de transporte rodoviário e a venda prevista pelo modelo de otimização, se praticados os preços sugeridos. Assim como na receita, observa-se que as vendas sugeridas pelo modelo de otimização são maiores que as realizadas pela companhia.

Figura 5.2: Venda modelo vs venda realizada.



FONTE: A autora (2024).

5.2 MODELO B

Com o propósito de abordar diferentes cenários, foram criadas 27 instâncias (linhas) fictícias de dados, apresentadas na Seção 5.2.1, e foi obtida a solução ótima do modelo B, formulado na Seção 4.2.2, para todas as instâncias criadas, os resultados serão discutidos na Seção 5.2.2.

5.2.1 Criação de instâncias

Com o intuito de abordar diferentes cenários de tamanho da linha de ônibus, variação de demanda, dias de venda dos bilhetes e a intercambialidade entre as paradas da linha de ônibus, foram geradas instâncias de dados com as premissas descritas na Tabela 5.4 a seguir.

Tabela 5.4: Premissas para a geração dos dados fictícios.

Nome do parâmetro	Significado	Tipo	Registros considerados
ID	Identificador de uma linha de ônibus	<i>String</i>	27
Pontos de parada	Número de pontos de parada, que definem os trechos de origem e destino, considerados para as linhas de ônibus	Número inteiro	3, 5 e 15
Dias de venda dos bilhetes	Número de dias de venda dos bilhetes para cada linha	Número inteiro	15, 30 e 90
Capacidade	Capacidade do ônibus para as linhas	Número inteiro	40
Constante de demanda	Fator que é multiplicado à capacidade do ônibus para a definição da demanda	Número inteiro	0,5, 1 e 2
Preço referência	Preço a ser considerado no modelo que, sem a aplicação da precificação dinâmica, já encobre os custos envolvidos com os ônibus	Número real	Aleatório entre 60 e 140
Percentual do preço da concorrência	Percentual que é multiplicado ao preço referência para a definição do preço da concorrência	Número real	Aleatório entre -0,05 e 0,05
Elasticidade	Elasticidade para os dias de venda dos bilhetes para cada linha	Número real	Aleatório entre -3 e -1
Percentual do preço mínimo	Percentual que é multiplicado ao preço referência para a definição do preço mínimo	Número real	-0,2
Percentual do preço máximo	Percentual que é multiplicado ao preço referência para a definição do preço máximo	Número real	0,3
Diferença mínima de preço	Limite inferior para a geração aleatória da diferença de preço entre dois dias consecutivos de venda	Número real	5
Diferença máxima de preço	Limite superior para a geração aleatória da diferença de preço entre dois dias consecutivos de venda	Número real	25

FONTE: A autora (2024).

Cada um dos parâmetros da Tabela 5.4 é explicado a seguir.

- O ID é o identificar para cada linha de ônibus, então foram criadas 27 instâncias de linhas de ônibus;
- Os pontos de parada foram necessários para a criação dos trechos: 3 pontos geraram 3 trechos, 5 pontos resultaram em 10 trechos e 15 pontos corresponderam a 105 trechos;
- O parâmetro de dias de venda dos bilhetes corresponde ao horizonte de dias de venda das passagens. As instâncias aqui criadas variaram entre o horizonte de 15, 30 e 90 dias;

- Diferente do modelo A, em que a quantidade de assentos era definida para cada trecho, o modelo B analisa o *trade-off* entre os trechos, considerando assim a capacidade total do ônibus de 40 assentos, que se reflete no parâmetro de capacidade;
- A constante de demanda é um fator que é multiplicado à capacidade do ônibus para a definição da demanda. Ao atribuir esta constante como 0,5 obtém-se uma demanda com a metade do valor da capacidade do veículo (20), ao considerá-la como 1, a demanda é exatamente a capacidade do veículo (40) e, finalmente, ao atribuir o valor desta constante como 2, obtém-se uma demanda com o dobro da capacidade do veículo (80).
- O preço referência é um número aleatório entre 60 e 140;
- Para a definição do preço da concorrência, é considerado um valor aleatório entre -0,05 e 0,05 o qual será multiplicado ao preço referência. Com isso, o preço dos concorrentes pode variar entre valores menores ou maiores que o preço referência;
- Para cada linha de ônibus é gerado um valor aleatório para a elasticidade, que é o mesmo para todos os dias de compra dos bilhetes, com exceção do dia da partida de ônibus. Para este dia, a alteração do preço não possui um impacto tão grande na demanda quanto os demais dias de compra, assim para todas as linhas foi acrescentada uma constante no valor da elasticidade para o dia de partida do ônibus;
- Os percentuais de preço mínimo e máximo são utilizados para a definição dos limites inferiores e superiores do preço;
- Para a definição da diferença de preço entre dois dias consecutivos de venda é gerado um número aleatório entre 5 e 25.

Para a geração das instâncias de dados fictícias, a partir das premissas da Tabela 5.4, foi criado um código em *Python*, cujo seu pseudo-código é descrito no Algoritmo 1 a seguir.

Algoritmo 1 Geração de instâncias fictícias de dados.

```

1:  $P_{min} \leftarrow -0,2$  // atribuição dos parâmetros fixos
2:  $P_{max} \leftarrow 0,3$ 
3:  $DP_{min} \leftarrow 5$ 
4:  $DP_{max} \leftarrow 25$ 
5:  $CAP \leftarrow 40$ 
6: for all  $I \in [3, 5, 15]$  do
7:    $LI \leftarrow list(range(1, I + 1))$  // lista com os pontos de parada
8:   for all  $T \in [15, 30, 90]$  do
9:      $LT \leftarrow list(range(T + 1))$  // lista com os dias de compra dos bilhetes
10:    for all  $P \in [0.5, 1, 2]$  do
11:       $PR \leftarrow randint(60, 90)$  // geração de número aleatório para o preço referência
12:       $df\_base \leftarrow gera\_trechos(LI)$  // chamada de funções auxiliares
13:       $df\_base \leftarrow gera\_trecho\_dias(LT, df\_base)$ 
14:       $df\_base \leftarrow gera\_capacidade(CAP, df\_base)$ 
15:       $df\_base \leftarrow gera\_demanda(P, T, CAP, df\_base)$ 
16:       $df\_base \leftarrow gera\_preco\_ref(PR, LI, df\_base)$ 
17:       $df\_base \leftarrow gera\_concorrenca(df\_base)$ 
18:       $df\_base \leftarrow gera\_elaticidade(df\_base)$ 
19:       $df\_base \leftarrow gera\_preco\_min\_max(P_{min}, P_{max}, df\_base)$ 
20:       $df\_base \leftarrow gera\_dif\_preco(DP_{min}, DP_{max}, df\_base)$ 
21:       $df\_concat \leftarrow concat(df\_concat, df\_base)$  // concatenação dos dataframes
22:    end for
23:  end for
24: end for

```

5.2.2 Resultados

A validação e análise do modelo B formulado foram realizadas por meio das soluções obtidas a partir de 27 linhas de ônibus criadas com dados fictícios, cujas premissas foram descritas na Tabela 5.4.

A seguir, com o intuito de garantir o entendimento, será apresentado o resultado de uma linha, com 3 trechos e constante de demanda 0,5, cujos parâmetros foram obtidos a partir da instância de dados fictícios, gerada com as premissas da Tabela 5.4. Os parâmetros e índices apresentados a seguir são os mesmos para todos os trechos da linha de ônibus considerada.

- $T = 15$ são os dias restantes para a partida do ônibus;
- $t \in [0, 1, \dots, 15]$ é o índice dos dias restantes para a partida do ônibus;
- $CAP = 40$ é a quantidade de assentos disponíveis no ônibus para o trecho analisado;
- $C_{ijt} = 1$, indicando a existência do preço da concorrência para todos os dias de compra t para todos os trechos de todas as linhas;
- $DP = 5$ é a diferença máxima de preço que os bilhetes podem assumir em dois dias consecutivos de compra t ;
- $\alpha = 6,8e - 03$, $\beta = 2,9e - 04$, $\gamma = 1,9e - 06$, $\delta = 1,19$: são os parâmetros da regressão polinomial;

- $W_1 = 100000$, $W_2 = 100$, $W_3 = 100000$ são os pesos de penalizações das restrições *soft*.

Os índices e parâmetros que variam entre os trechos estão descritos na Tabela 5.5.

Tabela 5.5: Parâmetros fictícios para uma linha de ônibus.

Trecho	$PR_{ij}(R\$)$	$P_{ij}^{min}(R\$)$	$P_{ij}^{max}(R\$)$	t	d_{ijt}	e_{ijt}	$PC_{ijt}(R\$)$
AB	208,50	166,80	271,05	0	5	-0,89	204,16
				1	0	-1,16	203,76
				2	0	-1,53	203,19
				3	2	-2,66	209,01
				4	0	-1,12	218,52
				5	2	-1,82	206,16
				6	3	-1,87	202,36
				7	0	-1,71	210,01
				8	3	-2,17	199,48
				9	0	-2,86	205,21
				10	1	-2,28	213,23
				11	1	-1,68	215,75
				12	1	-2,02	204,25
				13	2	-2,65	198,63
				14	0	-1,22	218,79
15	0	-1,67	211,75				
BC	278,00	222,40	361,40	0	0	-0,48	288,86
				1	1	-1,12	276,79
				2	3	-1,87	279,10
				3	3	-2,34	284,88
				4	2	-2,00	268,05
				5	1	-2,82	272,58
				6	1	-2,26	273,76
				7	1	-2,27	273,36
				8	1	-2,38	287,35
				9	1	-1,89	271,29
				10	1	-1,10	275,79
				11	2	-2,36	286,77
				12	0	-2,67	286,47
				13	3	-2,15	274,22
				14	0	-2,37	270,64
15	0	-1,18	279,06				
AC	208,50	166,80	271,05	0	1	-1,65	217,98
				1	2	-2,15	204,85
				2	2	-2,03	216,77
				3	1	-1,99	202,92
				4	0	-1,61	215,64
				5	0	-2,66	211,83
				6	2	-2,19	216,39
				7	3	-1,89	208,11
				8	2	-2,99	211,99
				9	2	-1,07	215,44
				10	1	-2,26	207,4
				11	2	-2,47	217,73
				12	0	-1,76	215,71
				13	2	-2,45	206,03
				14	0	-2,57	207,17
15	0	-2,70	212,49				

FONTE: A autora (2024).

A solução obtida via *solver* de otimização está apresentada na Tabela 5.6.

Tabela 5.6: Resultados do modelo de precificação dinâmica para uma linha de ônibus fictícia.

Parâmetros			Resultado do modelo B					
Trecho	t	d_{ijt}	$p_{ijt}(R\$)$	v_{ijt}	$receita(R\$)$	η_{ijt}	ζ_{ijt}	μ_{ijt}
AB	0	5	204,16	5	1.020,78	4,60	1,29	0
	1	0	203,76	0	0	4,44	1,19	0
	2	0	203,19	0	0	10,82	1,19	0
	3	2	209,01	2	418,02	7,15	1,18	0
	4	0	211,16	0	0	0	3,92	0
	5	2	206,16	2	412,33	1,20	1,23	0
	6	3	202,36	3	607,08	7,12	1,36	0
	7	0	204,48	0	0	0	2,35	0
	8	3	199,48	3	598,45	10,73	1,48	0
	9	0	205,21	0	0	13,01	1,19	0
	10	1	213,23	1	213,23	0,41	1,14	0
	11	1	208,63	1	208,63	0	3,66	0
	12	1	203,63	1	203,63	0	1,24	0
	13	2	198,63	2	397,27	19,31	1,44	0
	14	0	212,94	0	0	0	2,56	0
15	0	207,94	0	0	0	1,57	0	
Total AB	20			20	4.079,00	79	28	0
BC	0	0	281,91	0	0	0,11	3,49	0
	1	1	276,79	1	276,79	7,31	1,2	0
	2	3	279,10	3	837,3	1,01	1,17	0
	3	3	275,11	3	825,33	2,07	7,63	0
	4	2	268,05	2	536,09	9,53	1,34	0
	5	1	272,58	1	272,58	6,18	1,25	0
	6	1	273,76	1	273,76	4,6	1,23	0
	7	1	273,36	1	273,36	9,14	1,23	0
	8	1	277,50	1	277,5	1,22	7,72	0
	9	1	271,29	1	271,29	9,51	1,24	0
	10	1	275,79	1	275,79	13,42	1,2	0
	11	2	284,22	2	568,44	0	1,2	0
	12	0	279,22	0	0	0	3,81	0
	13	3	274,22	3	822,65	1,42	1,28	0
	14	0	270,64	0	0	6,47	1,19	0
15	0	272,11	0	0	0	3,49	0	
Total BC	20			20	5.511,00	72	40	0
AC	0	1	211,03	1	211,03	1,18	3,47	0
	1	2	204,85	2	409,71	8,06	1,27	0
	2	2	207,92	2	415,83	0	5,95	0
	3	1	202,92	1	202,92	17,73	1,25	0
	4	0	215,64	0	0	1,18	1,19	0
	5	0	211,83	0	0	6,29	1,19	0
	6	2	213,11	2	426,23	0	1,34	0
	7	3	208,11	3	624,34	8,87	1,2	0
	8	2	211,99	2	423,98	5,42	1,09	0
	9	2	212,4	2	424,81	0	1,35	0
	10	1	207,4	1	207,4	13,62	1,21	0
	11	2	216,03	2	432,06	0	1,05	0
	12	0	211,03	0	0	0	1,9	0
	13	2	206,03	2	412,06	6,14	1,25	0
	14	0	207,17	0	0	3,37	1,19	0
15	0	205,54	0	0	0	3,49	0	
Total AC	20			20	4.190,00	72	29	0
Total Geral	60			60	13.780,00	223	97	0

FONTE: A autora (2024).

Pode-se notar, por meio dos resultados obtidos, que o número de bilhetes vendidos, v_{ijt} , foi exatamente o valor da demanda, d_{ijt} , para todos os dias de compra t em todos os trechos. Porém, como todas as variáveis de folga ζ_{ijt} assumiram valores diferentes de zero, têm-se que o conjunto de restrições 4.17 não pôde ser atendido sem a flexibilização. O mesmo pode-se observar a respeito das variáveis de folga η_{ijt} que assumiram valores diferentes de zero. Assim, da mesma forma, afirma-se que o conjunto de restrições 4.19 também não foi atendido, na sua totalidade, sem a flexibilização, ou seja, a diferença de preços em dias consecutivos não ficou abaixo de R\$5,00 em todos os dias. Finalmente, têm-se que a variável $\mu_{ijt} = 0$ para todos os trechos e em todos os dias de compra, assim pode-se concluir que os limites de preço mínimos e máximos foram respeitados (equação 4.20).

Como dito anteriormente, os resultados obtidos com o modelo B foram gerados a partir de instâncias fictícias de dados, assim, não é possível realizar uma comparação a respeito do aumento/diminuição da receita gerada pelo modelo. Porém, se for assumido que a empresa de ônibus venda exatamente o valor da demanda ao preço da tarifa referência (que cobre todos os custos do ônibus), tem-se que a receita é 0,86% maior que a receita obtida pelo modelo de otimização B. Apesar do modelo não aumentar a receita, é recomendável o uso do modelo de otimização, pois em casos onde a demanda não pode ser atendida em sua totalidade o modelo definirá de maneira ótima o preço e o número de bilhetes a serem vendidos em todos os trechos, respeitando a capacidade do ônibus em todo o percurso.

Com o intuito de analisar diferentes cenários para o modelo B proposto, foram obtidas as soluções das 27 linhas criadas a partir de dados fictícios. Os parâmetros a seguir foram definidos da mesma maneira para todos os trechos, de todas as linhas consideradas.

- $CAP = 40$: é a capacidade total de assentos disponíveis no ônibus para as 27 linhas consideradas;
- DP é a diferença máxima de preço que os bilhetes podem assumir em dois dias consecutivos de compra. Este parâmetro varia, para cada uma das 27 linhas, conforme a Tabela 5.4;
- $C_{ijt} = 1$: indicando a existência do preço da concorrência para todos os dias de compra t para todos os trechos de todas as linhas;
- $\alpha = 6,8e - 03$, $\beta = 2,9e - 04$, $\gamma = 1,9e - 06$, $\delta = 1,19$: são os parâmetros da regressão polinomial;
- $W_1 = 100000$, $W_2 = 100$, $W_3 = 100000$: são os pesos de penalizações das restrições *soft*.

A Tabela 5.7 a seguir apresenta um resumo dos demais parâmetros considerados para as 27 linhas analisadas.

Tabela 5.7: Parâmetros fictícios para 27 linhas.

Linha	Conts. demanda	Soma			Média					
		Paradas	Trechos	T	d_{ijt}	e_{ijt}	PR_{ij} (R\$)	P_{ij}^{min} (R\$)	P_{ij}^{max} (R\$)	PC_{ijt} (R\$)
1	0,5	15	105	15	1,25	-1,93	142	114	185	142
2	1	15	105	15	2,5	-1,94	182	146	237	182
3	2	15	105	15	5	-1,93	153	123	199	153
4	0,5	15	105	30	0,65	-1,96	184	147	239	184
5	1	15	105	30	1,29	-1,97	123	98	160	123
6	2	15	105	30	2,58	-1,96	131	105	171	131
7	0,5	15	105	90	0,22	-1,98	166	133	215	166
8	1	15	105	90	0,44	-1,98	122	97	158	122
9	2	15	105	90	0,88	-1,98	130	104	169	130
10	0,5	3	3	15	1,25	-1,98	232	185	301	233
11	1	3	3	15	2,5	-1,92	165	132	215	166
12	2	3	3	15	5	-2,11	207	165	269	207
13	0,5	3	3	30	0,65	-1,88	130	104	169	130
14	1	3	3	30	1,29	-1,96	133	107	173	133
15	2	3	3	30	2,58	-1,96	143	115	186	143
16	0,5	3	3	90	0,22	-2	192	153	249	191
17	1	3	3	90	0,44	-1,98	210	168	273	210
18	2	3	3	90	0,88	-2,05	222	177	288	222
19	0,5	5	10	15	1,25	-1,92	162	130	211	162
20	1	5	10	15	2,5	-1,94	95	76	123	94
21	2	5	10	15	5	-1,94	110	88	142	109
22	0,5	5	10	30	0,65	-1,99	141	113	183	141
23	1	5	10	30	1,29	-1,95	179	143	232	178
24	2	5	10	30	2,58	-1,98	135	108	176	135
25	0,5	5	10	90	0,22	-2,02	141	113	183	141
26	1	5	10	90	0,44	-2	107	85	138	107
27	2	5	10	90	0,88	-1,97	188	150	244	187

FONTE: A autora (2024).

Conforme a Tabela 5.7, na instância de dados criada foram consideradas 27 linhas de ônibus, com 15, 3 e 5 paradas que correspondem a 105, 3 e 10 trechos, respectivamente. Além disso, os dias de compra T dos bilhetes variaram entre 15, 30 e 90 dias. O lado direito da tabela apresenta a média entre todos os trechos dos demais parâmetros considerados para cada linha de ônibus.

Assim como o modelo A, a implementação do modelo B foi realizada em *Python* e as soluções obtidas via o *solver* de otimização GUROBI estão apresentadas, de forma resumida, na Tabela 5.8.

Tabela 5.8: Resultados do modelo B de precificação dinâmica para 27 linhas fictícias.

Linha	Conds. demanda	Soma					Média			
		Paradas	Trechos	T	receita (R\$)	μ_{ijt}	v_{ijt}	ζ_{ijt}	p_{ijt}	η_{ijt}
1	0.5	15	105	15	47.466	0	0,25	2,33	141,84	10,76
2	1	15	105	15	79.088	0	0,33	3,5	181,99	21,12
3	2	15	105	15	68.152	0	0,33	6,02	152,64	9,02
4	0.5	15	105	30	61.235	0	0,13	1,78	183,38	18,13
5	1	15	105	30	53.445	0	0,17	2,39	122,69	12,37
6	2	15	105	30	58.193	0	0,17	3,68	130,95	9,47
7	0.5	15	105	90	55.126	0	0,04	1,59	164,81	5,9
8	1	15	105	90	52.699	0	0,06	1,67	121,03	4,88
9	2	15	105	90	57.640	0	0,06	2,1	129,33	5,87
10	0.5	3	3	15	13.781	0	1,25	2,02	230,26	4,64
11	1	3	3	15	11.981	0	1,67	2,15	165,15	14,22
12	2	3	3	15	15.202	0	1,67	4,62	206,98	19,42
13	0.5	3	3	30	7.751	0	0,65	1,36	128,85	4,58
14	1	3	3	30	9.563	0	0,86	1,7	133,19	23,01
15	2	3	3	30	10.494	0	0,86	3,02	142,29	22,16
16	0.5	3	3	90	11.499	0	0,22	1,22	191,42	23,73
17	1	3	3	90	15.136	0	0,29	1,37	210,33	13,78
18	2	3	3	90	16.322	0	0,29	1,82	221,8	16,73
19	0.5	5	10	15	17.272	0	0,75	1,85	161,4	8,85
20	1	5	10	15	12.525	0	1	2,85	93,79	16,48
21	2	5	10	15	14.870	0	1	5,35	109,02	9,97
22	0.5	5	10	30	15.035	0	0,39	1,53	140,77	11,4
23	1	5	10	30	23.695	0	0,52	2,16	177,43	7,65
24	2	5	10	30	18.341	0	0,52	3,38	134,25	7,59
25	0.5	5	10	90	15.041	0	0,13	1,31	141,1	13,83
26	1	5	10	90	14.227	0	0,18	1,48	106,54	20,7
27	2	5	10	90	25.544	0	0,18	2,07	186,74	7,85

FONTE: A autora (2024).

Considerando os 27 cenários juntos, a única conclusão obtida foi que, como a média das variáveis de folga ζ_{ijt} e η_{ijt} é maior que zero, o modelo B precisou colocar valores diferentes de zero para a maioria das variáveis, embutidas nas restrições 4.17 e 4.19 respectivamente, em todos os cenários simulados. Sendo assim, decidiu-se analisar cenários específicos, a fim de encontrar aqueles menos críticos (menores valores de ζ_{ijt} e η_{ijt}) e mais críticos (maiores valores de ζ_{ijt} e η_{ijt}) para o modelo. Assim, as Tabelas 5.9, 5.10 e 5.11 apresentam um resumo dos resultados obtidos quando o número de paradas (ou número de trechos, que é equivalente) é analisado em separado.

Tabela 5.9: Resultados do modelo B em cenários com 3 paradas (ou 3 trechos).

T	15			30			90		
Const. demanda	0,5	1	2	0,5	1	2	0,5	1	2
Soma ζ_{ijt}	97,11	103,01	221,95	126,7	158,2	280,91	332,93	374,26	498
Soma η_{ijt}	222,64	682,55	932,36	425,57	2.140,27	2.061,12	6.477,64	3.763,03	4.567,17

FONTE: A autora (2024).

O número de paradas das linhas de ônibus e a quantidade de dias disponíveis para a venda de bilhetes definem o número de variáveis consideradas no modelo B, para cada uma das linhas. Assim, quanto maiores forem estes parâmetros, maior será o número de variáveis consideradas no modelo.

A partir da Tabela 5.9, pode-se observar que as variáveis de folga ζ_{ijt} , para 3 trechos, aumentam de valor à medida que o número de dias de venda dos bilhetes (ou número de variáveis) aumenta. Além disso, pode-se notar que o modelo obteve menor infactibilidade nos cenários que possuem menor demanda (constante de demanda igual a 0,5). No que diz respeito às variáveis de folga η_{ijt} , observa-se que no cenário de $T = 30$, a constante de demanda igual a 1 recebe os maiores valores de folga e quando considera-se a constante 0,5 (menor demanda), diminui 80%. Porém, ao analisar o cenário $T = 90$, obtém-se o cenário inverso, onde se tem menor demanda (constante 0,5) a variável de folga recebe o maior valor (41,9% a mais que o menor obtido para esta variável em $T = 90$). Assim, para o cenário de 3 trechos não foi possível encontrar uma relação entre a constante de demanda e a variável de folga η_{ijt} .

Tabela 5.10: Resultados do modelo B em cenários com 5 paradas (ou 10 trechos).

T	15			30			90		
	0,5	1	2	0,5	1	2	0,5	1	2
Soma ζ_{ijt}	296,65	456,6	856,53	473,18	670,32	1.047,21	1.189,03	1.350,07	1886,38
Soma η_{ijt}	1.415,49	2.636,71	1.595,38	3.533,71	2.371,67	2.353,13	12.581,09	18.837,66	7.140,74

FONTE: A autora (2024).

A Tabela 5.10 apresenta os resultados consolidados do modelo B para os cenários com 10 trechos. Primeiramente, ao comparar os valores das variáveis de folga ζ_{ijt} e η_{ijt} entre as Tabelas 5.9 e 5.10, pode-se notar que em todos os cenários de dias de venda e constante de demanda as variáveis assumiram menores valores quando considerados apenas 3 trechos. Ademais, o comportamento das variáveis de folga ζ_{ijt} para este cenário de 10 trechos é similar ao de 3 trechos: tem-se menores valores para demandas e dias de venda menores. Além do mais, a partir da Tabela 5.10 tem-se que em nenhuma das variações de T a constante de demanda igual a 2 (maior demanda) obteve os maiores valores para as variáveis de folga η_{ijt} (o que não acontece para as variáveis ζ_{ijt}).

Tabela 5.11: Resultados do modelo B em cenários com 15 paradas (ou 105 trechos).

T	15			30			90		
	0,5	1	2	0,5	1	2	0,5	1	2
Soma ζ_{ijt}	3.919,8	5.876,23	10.118,98	5.808,38	7.769,62	11.978,78	15.158,47	15.911,21	20.068,5
Soma η_{ijt}	18.079,42	35.474,6	15.152,58	59.028,07	40.280,31	30.809,58	56.382,38	46.616,84	56.087,11

FONTE: A autora (2024).

Por fim, a Tabela 5.11 exhibe os resultados consolidados do modelo B para os cenários com 105 trechos. Novamente, ao comparar as variáveis de folga ζ_{ijt} e η_{ijt} entre as Tabelas 5.9, 5.10 e 5.11 tem-se que em todos os cenários as variáveis assumiram os menores valores quando o número de trechos é menor. Assim, pode-se concluir que o modelo B obteve menores penalizações para números mais baixos de trechos (3 trechos). Além disso, como nos cenários de 3 e 10 trechos, o comportamento das variáveis de folga ζ_{ijt} para este cenário (105 trechos) assemelha-se aos demais: são encontrados menores valores para demandas e número de dias de venda menores. Novamente, conforme a análise feita a partir da Tabela 5.10, para este cenário de 105 trechos, nenhuma das variações de T , a constante de demanda igual a 2 resultou nos valores mais altos para as variáveis de folga η_{ijt} . Para $T = 15$ e $T = 30$ os valores obtidos quando tinha-se maior demanda foram os menores, consequentemente os melhores, e para $T = 90$ os

valores obtidos para η_{ijt} quando considerada a constante de demanda como 2 foi bem próximo ao maior valor obtido.

Com isso, pode-se concluir que quanto maior o número de variáveis (número de paradas e dias de venda) e da demanda, maiores serão os valores das variáveis ζ_{ijt} , que correspondem ao conjunto de restrições 4.17. Assim, tem-se que o cenário com 105 trechos e $T = 90$ foi o mais crítico para estas variáveis e o cenário que elas obtiveram menor valor, caso menos crítico, foi com 3 paradas, constante de demanda igual a 0,5 e um menor horizonte de dias de venda dos bilhetes ($T = 15$).

Para as variáveis η_{ijt} , o cenário com menor criticidade foi o com o menor número de paradas (3), de menor constante de demanda (0,5) e de menos dias de venda ($T = 15$). De forma contraintuitiva, o cenário mais crítico para a variável de folga η_{ijt} , que corresponde ao conjunto de restrições 4.19, foi o com 15 pontos de parada, $T = 30$ e constante de demanda igual a 0,5. Além disso, pode-se observar que para as linhas que possuem maior número de trechos, geralmente os cenários com maior demanda possuem menores valores de penalizações para as variáveis η_{ijt} , ou seja, a diferença máxima de preços em dois dias consecutivos consegue ser melhor respeitada em cenários de alta demanda em comparação com cenários de demanda menor.

6 CONCLUSÃO

A variação anual do número de passageiros no transporte rodoviário no Brasil está crescendo. Considerando a complexidade e impacto do setor, uma tarifa dinâmica adequada, pode melhorar significativamente a rentabilidade de um prestador de serviços rodoviários de passageiros. Portanto, definir os preços em qualquer momento do horizonte de compra sob condições variáveis de mercado foi o principal objetivo do problema apresentado.

Um estudo de caso foi aplicado e, para este, foi proposto um modelo de otimização não linear, que considera os mesmos parâmetros e granularidade do processo executado pela empresa em estudo. Foi feita a avaliação da receita gerada pelo modelo de otimização em comparação com as vendas e preços reais praticados pela companhia e, com o modelo proposto, obteve-se que a empresa teria um aumento de R\$5.869,28 em sua receita para os 100 trechos analisados. Portanto, se utilizado em todas as viagens da companhia, os resultados revelaram que o modelo de otimização proposto tem potencial de aumentar a receita da empresa.

Com o intuito de aperfeiçoar o processo de precificação dinâmica realizado pela empresa, um segundo modelo foi proposto nesta dissertação, possibilitando a intercambialidade entre os trechos, a máxima utilização da capacidade do ônibus e a consideração do preço dos concorrentes. O número de bilhetes vendidos possui um papel importante em um modelo de precificação dinâmica. Assim, para a construção da restrição que define o número de vendas nesta nova formulação, um modelo de regressão polinomial foi proposto, com o objetivo de obter a relação entre os preços praticados pela concorrência e pela empresa estudada com as vendas realizadas. Além disso, para a obtenção de uma solução viável neste segundo modelo, foi necessária a inclusão de variáveis de folga em algumas restrições, flexibilizando a solução, prática que é comum em modelos aplicados.

Para a validação do novo modelo proposto e com o objetivo de abordar diferentes cenários, foi criado um algoritmo para a geração de instâncias artificiais. Foram obtidas as soluções de 27 instâncias, criadas a partir do algoritmo proposto, para o modelo B. Pode-se observar que, para a maioria dos cenários, as variáveis de folga ζ_{ijt} e η_{ijt} obtiveram valores diferentes de zero, flexibilizando as restrições, penalizando a função objetivo e garantindo a viabilidade do problema. Como descrito nesta dissertação, os valores da elasticidade, preço referência, parâmetros da regressão polinomial e demanda são obtidos, idealmente, a partir do histórico de dados da empresa de transporte rodoviário em estudo. Então, uma hipótese que justifica o alto valor das penalizações das soluções obtidas para as instâncias fictícias de dados com o modelo B proposto é a não concordância entre estes parâmetros, que podem não representar fidedignamente a realidade da empresa. Apesar de não ser possível realizar a validação de acréscimo/redução em receita, pode-se garantir que o modelo proposto é de grande importância para a companhia estudada no que diz respeito à intercambialidade entre os trechos e a melhor utilização da capacidade disponível do ônibus.

Embora o modelo seja não linear, o solver utilizado conseguiu encontrar as soluções ótimas em um tempo irrisório. Nesta dissertação, o *solver* utilizado é pago, porém existem versões *open source* que podem obter uma boa performance.

Com base no problema proposto, diversas direções de pesquisa podem ser sugeridas. Obter a solução do modelo B, por trechos, para um estudo de caso com dados reais, considerar ônibus com diferentes classes de assentos e propor um novo modelo para a previsão de demanda podem representar melhorias e tornar o modelo mais realista.

REFERÊNCIAS

- Bandalouski, A. M., Egorova, N. G., Kovalyov, M. Y., Pesch, E. e Tarim, S. A. (2021). Dynamic pricing with demand disaggregation for hotel revenue management. *Journal of Heuristics*, 27(5):869–885.
- Chekired, D. A., Khoukhi, L. e Mouftah, H. T. (2018). Decentralized cloud-sdn architecture in smart grid: A dynamic pricing model. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 14(3):1220–1231.
- CNT (2023). Painel cnt do transporte - modal rodoviário. <https://www.cnt.org.br/painel-cnt-transporte-rodoviario>. Acess in 05/02/2024.
- Couzon, P., Ouazene, Y. e Yalaoui, F. (2020). Joint optimization of dynamic pricing and lot-sizing decisions with nonlinear demands: Theoretical and computational analysis. *Computers & Operations Research*, 115:104862.
- Etebari, F. (2019). A simultaneous facility location, vehicle routing and dynamic pricing in a distribution networks. *Applied Soft Computing*, 83.
- Gallego, G. e Ryzin Van, G. (1997). A multiproduct dynamic pricing problem and its applications to network yield management. *Operations Research*, 45(1):24–41.
- Gil, A. (2002). *Como elaborar projetos de pesquisa*. Editora Atlas.
- Jia, S., Peng, K., Zhang, X., Li, Y. e Xing, L. (2022). Dynamic pricing strategy and regional energy consumption optimization based on different stakeholders. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 141:108199.
- Kamandanipour, K., Nasiri, M., Konur, D. e Yakhchali, Y. H. (2020). Stochastic data-driven optimization for multi-class dynamic pricing and capacity allocation in the passenger railroad transportation. *Expert Systems with Applications*, 158:113568.
- Kamandanipour, K., Yakhchali, S. H. e Tavakkoli-Moghaddam, R. (2023). Learning-based dynamic ticket pricing for passenger railway service providers. *Engineering Optimization*, 55(4):703–717.
- Keyvanshokoo, E., M., F., M., S.-H. S. e R., T.-M. (2013). A dynamic pricing approach for returned products in integrated forward/reverse logistics network design. *Applied Mathematical Modelling*, 37(24):10182–10202.
- Liu, D. e Hualong, Y. (2015). Joint slot allocation and dynamic pricing of container sea-rail multimodal transportation. *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, 2(3):198–208.
- Mankiw, G. N. (2019). *Principles of Economics*. Cengage Learning, 200 Pier 4 Boulevard Boston, MA 02210 USA, 9 edition.
- Mayer, S. e Steinhardt, C. (2016). Optimal product line pricing in the presence of budget-constrained consumers. *European Journal of Operational Research*, 248(1):219–233.

- Meng, H., Yan, Z., Wang, Y. e Xu, Y. (2022). Optimizing joint decisions of dynamic pricing and ticket allocation for high-speed railway with operators' risk preference. *Journal of Advanced Transportation*, página 7383396.
- Safari, E., Roshanaei, V. e Rastpour, A. (2022). A robust optimization formulation for dynamic pricing of a web service with limited total shared capacity. *Optim Control Applications and Methods*, 43(4):1217–1240.
- Silva, E. e Menezes, E. (2005). *Metodologia da Pesquisa e Elaboração de Dissertação*. Editora UFSC.
- Tian, X. e Zhang, Z.-H. (2019). Capacitated disassembly scheduling and pricing of returned products with price-dependent yield. *Omega*, 84:160–174.
- Wang, Y., McGuire, K., Terbush, J., Towns, M. e Anderson, C. K. (2021). Choice-based dynamic pricing for vacation rentals. *INFORMS Journal on Applied Analytics*, 51(6):450–462.
- Westermann, D. (2006). (realtime) dynamic pricing in an integrated revenue management and pricing environment: An approach to handling undifferentiated fare structures in low-fare markets. *Journal of Revenue and Pricing Management*, 4(4):389–405.
- Yin, X., Liu, D., Rong, W. e Li, Z. (2022). Joint optimization of ticket pricing and allocation on high-speed railway based on dynamic passenger demand during pre-sale period: A case study of beijing–shanghai hsr. *Applied Sciences*, 12(19):10026.
- Zhang, R. e Kan, H. (2020). Dynamic trip pricing considering car rebalances for station-based carsharing services. Em *Chinese Control And Decision Conference (CCDC)*, página 217–1240, Hefei - China.

APÊNDICE A – MODELO DE REGRESSÃO PARA VENDAS

O objetivo dessa seção é apresentar, de forma mais detalhada, o algoritmo e os resultados do modelo de regressão para vendas para o modelo B.

A.1 ALGORITMO

Conforme a Seção 4.2.1, sejam y_h os bilhetes vendidos pela companhia de transporte rodoviário, obtidos via histórico de dados, e y_p o número de bilhetes a serem vendidos, correspondentes à variável v do modelo de otimização B. Além disso, considere o preço da concorrência PC e o preço p . Após o tratamento da base, como remoção de *outliers*, o Algoritmo 2 foi utilizado para calcular as regressões linear, quadrática e cúbica para as vendas das linhas de ônibus do histórico de dados considerado (215 linhas).

Algoritmo 2 Regressões linear, quadrática e cúbica para as vendas.

```

1:  $y \leftarrow y_h - y_p$  // declaração da variável dependente
2:  $X \leftarrow PC - p$  // declaração da variável independente
3:  $Z$  // número de linhas
4: for all  $i \in Z$  do
5:    $model\_L \leftarrow LinearRegression()$  // modelo linear
6:    $model\_L.fit(X, y)$ 
7:    $y_{pred} \leftarrow model.predict(X)$  // predição
8:    $r2 \leftarrow r2\_score(y, y_{pred})$ 
   // modelo quadrático
9:    $model\_P2 \leftarrow PolynomialFeatures(degree = 2)$ 
10:   $X_2 \leftarrow poly.fit\_transform(X)$ 
11:   $model\_P2.fit(X_2, y)$ 
12:   $lin2 \leftarrow LinearRegression()$ 
13:   $lin2.fit(X_2, y)$ 
14:   $y_{p2} \leftarrow lin.predict(model\_P2.fit\_transform(X))$ 
15:   $R2 \leftarrow r2\_score(y, y_{p2})$ 
   // modelo cúbico
16:   $model\_P3 \leftarrow PolynomialFeatures(degree = 3)$ 
17:   $X_3 \leftarrow poly.fit\_transform(X)$ 
18:   $model\_P3.fit(X_3, y)$ 
19:   $lin3 \leftarrow LinearRegression()$ 
20:   $lin3.fit(X_3, y)$ 
21:   $y_{p3} \leftarrow lin.predict(model\_P2.fit\_transform(X))$ 
22:   $R2 \leftarrow r2\_score(y, y_{p3})$ 
23: end for

```

O Algoritmo 2 foi rodado com o auxílio da biblioteca *sklearn* do *Python*.

A.2 RESULTADOS

Com o objetivo de escolher o melhor modelo de regressão de vendas (linear, quadrático ou cúbico) foi calculado o R^2 como teste de qualidade de ajuste. A Tabela A.1 resume os resultados encontrados para as 215 linhas consideradas.

Tabela A.1: Média do R^2 dos modelos de regressão de vendas para 215 linhas.

	Linear	Quadrático	Cúbico
R^2 (média)	0,09	0,13	0,18

FONTE: A autora (2024).

Conforme a Tabela A.1, o modelo que obteve a maior média do R^2 (quanto maior, melhor) foi o modelo de regressão cúbica. Além disso, ao analisar individualmente as 215 linhas, com exceção de uma, todas as demais obtiveram um R^2 maior no modelo de regressão cúbico. Portanto, este foi o modelo utilizado nesta dissertação.