UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
BIANCA APARECIDA DA COSTA SANTOS

POSSIBILIDADES TEÓRICO-METODOLÓGICAS APRESENTADAS POR TESES PARA O DESENVOLVIMENTO DE DISCIPLINAS MATEMÁTICAS DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Curitiba
2024

BIANCA APARECIDA DA COSTA SANTOS

POSSIBILIDADES TEÓRICO-METODOLÓGICAS APRESENTADAS POR TESES PARA O DESENVOLVIMENTO DE DISCIPLINAS MATEMÁTICAS DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática, Setor de Ciências Exatas, da Universidades Federal do Paraná, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e em Matemática.

Orientadora: Elisangela de Campos

CURITIBA

2024

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Santos, Bianca Aparecida da Costa
Possibilidades teórico-metodológicas apresentadas por teses para o desenvolvimento de disciplinas matemáticas do curso de licenciatura em matemática / Bianca Aparecida da Costa Santos. – Curitiba, 2024.
1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática.

Orientador: Elisangela de Campos

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Professores – Formação. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática. III. Campos, Elisangela de. IV . Título.

Bibliotecário: Leticia Priscila Azevedo de Sousa CRB-9/2029

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA - 40001016068P7

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **BIANCA APARECIDA DA COSTA SANTOS** intitulada: **POSSIBILIDADES TEÓRICO-METODOLÓGICAS APRESENTADAS POR TESES PARA O DESENVOLVIMENTO DE DISCIPLINAS MATEMÁTICAS DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**, sob orientação da Profa. Dra. ELISANGELA DE CAMPOS, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestra está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 29 de Fevereiro de 2024.

Assinatura Eletrônica
05/03/2024 14:59:19.0
ELISANGELA DE CAMPOS
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
05/03/2024 08:08:37.0
HENRIQUE RIZEK ELIAS
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLOÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
05/03/2024 14:13:26.0
ELENILTON VIEIRA GODOY
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

RESUMO

A presente pesquisa caracteriza-se como um estudo interpretativo de cinco teses desenvolvidas em programas de pós-graduação de instituições brasileiras no período de 2015 a 2021, as quais realizaram uma proposta de ensino em uma disciplina matemática (disciplinas de Cálculo, Análise, Álgebra e Geometria) do curso de Licenciatura em Matemática. O objetivo da investigação consistiu em compreender quais são as possibilidades teórico-metodológicas para o desenvolvimento das disciplinas matemáticas do curso de Licenciatura em Matemática de modo que os conhecimentos necessários para o ensino da Matemática na Educação Básica sejam contemplados. A seleção da fonte de dados da pesquisa ocorreu através de buscas no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), e o processo de análise dos dados ocorreu pela utilização da Análise Textual Discursiva (ATD). Como aporte teórico, utilizou-se resultados de produções científicas, nacionais e internacionais, que dão importantes contribuições sobre os conhecimentos do professor de Matemática da Educação Básica e a formação inicial desses professores. Com a análise dos dados identificou-se que desenvolver as disciplinas matemáticas do curso de Licenciatura em Matemática através de metodologias de ensino diferenciadas, como por exemplo, a Modelagem Matemática, ou a Modelagem Matemática juntamente com Análise de Erros, ou a Investigação Matemática, ou a Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas; ou ainda através da teoria do pensamento matemático denominado Três Mundos da Matemática de David Tall, pode trazer contribuições positivas para a formação matemática do futuro professor de Matemática da Educação Básica.

Palavras-chave: Formação Inicial de Professores; Licenciatura em Matemática; Disciplinas matemáticas.

ABSTRACT

The present research is characterized as an interpretative study of five theses developed in postgraduate programs at Brazilian institutions between 2015 and 2021, which made a teaching proposal in a mathematical discipline (Calculus, Analysis, Algebra and Geometry) of the Mathematics Degree course. The objective of the investigation was to understand what the theoretical-methodological possibilities are for the development of mathematical disciplines in the Mathematics Degree course so that the knowledge necessary for teaching Mathematics in Basic Education is covered. The selection of the research data source occurred through searches in the Catalog of Theses and Dissertations of the Coordination for the Improvement of Higher Education Personnel (CAPES), and the data analysis process occurred through the use of Discursive Textual Analysis (ATD). As a theoretical contribution, results from national and international scientific productions were used, which provide important contributions to the knowledge of Basic Education Mathematics teachers and the initial training of these teachers. With data analysis, it was identified that developing the mathematical disciplines of the Degree in Mathematics course through teaching methodologies, such as, for example, Mathematical Modeling, or Mathematical Modeling together with Error Analysis, or Mathematical Investigation, or Teaching-Learning-Evaluation of Mathematics through Problem Solving; or even through the theory of mathematical thinking called Three Worlds of Mathematics by David Tall, can bring positive contributions to the training of future Mathematics teachers in Basic Education.

Keywords: Initial Teacher Training; Degree in Mathematics; Mathematical subjects.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Com o propósito de descrever minha trajetória acadêmica e minhas motivações para a realização da pesquisa, este capítulo será escrito em primeira pessoa do singular. Inicio contando um pouco sobre minha formação escolar, onde sempre fui considerada uma boa aluna, que tinha boas notas em todas as disciplinas. A disciplina que mais me identificava era a Matemática, tinha facilidade em compreender a explicação do professor e resolver os exercícios. Mas eu sempre tive algumas dúvidas: Por que se resolve os exercícios da maneira como o professor faz? Por que a Matemática é da maneira como estudamos? Como surgiu a Matemática? Eu sempre fui, e ainda sou, uma pessoa tímida e nunca tive coragem de fazer esses questionamentos aos professores da escola. Mas durante as aulas do cursinho pré-vestibular, os docentes, com um propósito de deixar as aulas mais interessantes, falavam um pouco da história da Matemática e dos “porquês” matemáticos. Neste momento, eu me questionei: no curso de Matemática eu vou entender porque e como funcionam os conteúdos que eu estudei na escola?

Escolher um curso de faculdade, implicava também, escolher uma profissão, então surgiram outras perguntas: Eu quero fazer o curso de Matemática? Eu quero ser professora de Matemática? Depois de um tempo pensando e conversando com outras pessoas, a resposta foi sim. Então no ano de 2012 eu iniciei o curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná (UFPR). As primeiras disciplinas que eu cursei foram as de conteúdo matemática, ou seja, Geometria Analítica, Funções (em outras instituições podem ser chamadas de Pré-Cálculo), Cálculos I e II, Fundamentos de Geometria, Álgebra Linear e Teoria de Números (na UFPR os conteúdos de Álgebra Abstrata Moderna são separados em três disciplinas: Teoria de Números, Teoria de Anéis e Teoria de Grupos). Todas essas disciplinas eram desenvolvidas com rigor e formalismo matemático, ou seja, o professor apresentava na lousa a definição, teoremas e demonstrações e, nós alunos, resolvíamos listas de exercícios e éramos avaliados por meio de uma prova escrita. Mesmo tendo um bom desempenho matemático, tive muita dificuldade nessas disciplinas, reprovando uma ou duas vezes em algumas delas. Mesmo com tantas dificuldades eu acreditava que tinha um motivo para eu estar estudando essa Matemática mais avançada, afinal eu estava estudando para ser professora de Matemática, então eu tinha que saber matemática. Mesmo com dificuldade eu conseguia perceber que certos conteúdos que eu estava estudando de forma avançada eu já tinha estudado na escola ou no cursinho, como por exemplo, funções e cálculo de limites e derivadas, Máximo Divisor Comum (MDC) e Mínimo Múltiplo Comum (MMC) de números naturais. Ao cursar as disciplinas de Educação Matemática e estágio supervisionados, juntamente com a participação do PIBID (Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência), percebi que eu não iria ensinar Matemática na escola do mesmo modo que eu estava estudando na graduação, ou seja, com rigor e formalismo dos teoremas e demonstrações.

Finalizei o curso em 2017, porém com alguns questionamentos: Por que estudamos a Matemática avançada na graduação sendo que ensinamos uma Matemática diferente na escola? Saber Cálculo, Análise, Teoria de Anéis, entre outros, é realmente importante? Com o desejo de encontrar respostas aos meus questionamentos e compreender a importância dessas disciplinas na formação inicial do professor de Matemática, elaborei um projeto de pesquisa para ser apresentado no Exame de Seleção do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática (PPGECM) da UFPR. Este projeto tinha como objetivo compreender qual era o papel da Matemática acadêmica na formação inicial do professor de Matemática e foi desenvolvido com base nas pesquisas de Moreira e David (2005) e Fiorentini (2005). Com a aprovação no Exame de Seleção do PPGECM, retomei o estudo das pesquisas de Moreira e David (2005) e Fiorentini (2005) a partir de discussões com minha professora orientadora e colegas de estudo.

Moreira e David (2005) descrevem os conhecimentos matemáticos do professor de Matemática envolvidos em sua prática na Educação Básica e confrontam esses conhecimentos com os que são desenvolvidos no curso de Licenciatura de Matemática. Para os autores, existe uma diferença entre a Matemática compreendida e estudada na escola com a Matemática compreendida e estudada na graduação, como por exemplo, no caso das operações com os Números Naturais, na graduação são realizadas com objetos abstratos e expressadas apenas por suas propriedades (comutatividade, associatividade, elemento neutro, entre outras), enquanto que na prática escolar é utilizada como instrumento de apoio no processo de construção do conceito abstrato de número (Moreira e David, 2005).

Em um livro publicado, Moreira (2018)[1] define o conceito de Matemática Acadêmica e Matemática Escolar. Segundo o autor, Matemática Escolar refere-se ao "conjunto de saberes validados, associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em Matemática" (Moreira, 2018, p.20) que inclui:

> [...] tanto saberes produzidos e mobilizados pelos professores de Matemática em sua ação pedagógica na sala de aula da escola, quanto resultados de pesquisas que se referem à aprendizagem e ao ensino escolar de conceitos matemáticos, técnicas, processos, etc. (Moreira, 2018. p.20).

E Matemática Acadêmica é definida como o "corpo científico de conhecimentos dos matemáticos profissionais" (Moreira, 2018, p.20) e que, como resumiu Viola dos Santos e Lins (2016):

> [...] dá ênfase às estruturas abstratas, aos processos rigorosamente lógico-dedutivos, a extrema precisão da linguagem, a definições formais, a elaboração de um discurso axiomático com regras e padrões bem estáveis e aceitos pela comunidade de matemáticos. (Viola dos Santos e Lins, 2016, p.357).

Para Moreira e David (2005), a Matemática Acadêmica não é ideal para a formação do professor, pois "não somente é insuficiente para a sistematização da matemática escolar como é também muitas vezes inadequada" (Moreira e David, 2005, p.59).

Por outro lado, tem-se a pesquisa de Fiorentini (2005) a qual argumenta que o conhecimento matemático do professor é formado a partir de três diferentes perspectivas: a prática científica ou acadêmica; a prática escolar; e as práticas cotidianas não formais. Para o autor, todas essas perspectivas são importantes para a formação do professor, pois:

> [...] a matemática escolar se constitui com feição própria mediante um processo de interlocução com a matemática científica e com a matemática produzida/mobilizada nas diferentes práticas cotidianas". (Fiorentini, 2005, p.108)

[1] utilizou-se a 2º edição, por isso o ano de 2018

Com esse trecho eu entendi que a Matemática da escola pode se relacionar, de certo modo, com a Matemática estudada na graduação, algo que eu já acreditava durante os meus estudos como graduanda. Apesar de entender que a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar são compreendidas e estudadas em contextos diferentes, concordo com Viola dos Santos e Lins (2014) que afirmam que o ideal para a formação matemática do futuro professor seria "relacionar as discussões matemáticas das disciplinas de matemática acadêmica com discussões matemáticas das temáticas da matemática escolar" (Viola dos Santos e Lins, 2014, p.346).

Assim, optei em assumir a perspectiva Fiorentini (2005) e, deste modo, foi necessário mudar o objetivo da pesquisa, o que me levou à seguinte questão: qual é o papel das disciplinas matemáticas, ou seja, disciplinas de Cálculo, Análise, Álgebra Linear, Álgebra Abstrata Moderna, Geometria Analítica, Geometria Euclidiana e não-Euclidiana, na formação inicial do professor de Matemática? Tendo esse problema como questão de averiguação, busquei por pesquisas acadêmicas, ou seja, teses e dissertações, que buscaram investigar/compreender a importância/o papel/ as contribuições de uma determinada disciplina matemática do curso de Licenciatura em Matemática na formação do professor de Matemática. Nessa busca, encontrei quatro trabalhos, os quais foram lidos na íntegra e analisados de acordo com a Análise Textual Discursiva (Moraes, 2003). Os dados encontrados nessa análise mostraram que o papel das disciplinas matemática é a formação de conhecimentos matemáticos necessários para o ensino na Educação Básica e, para que isso ocorra, é necessário que o professor formador da disciplina desenvolva os conteúdos com metodologias de ensino que permitam ao licenciando identificar e compreender a relação dos conteúdos da Educação Básica com os conteúdos acadêmicos. Porém, esses resultados só complementavam o que eu já tinha entendido com as pesquisas de Fiorentini (2005) e Viola dos Santos e Lins (2014).

Segundo Viola dos Santos e Lins (2014), ao discutir e relacionar conteúdos das disciplinas matemáticas com os conteúdos da Educação Básica, "ao mesmo tempo em que os licenciandos aprenderiam novos conceitos, também poderiam reconstruir ideias, conceitos e procedimentos matemáticos da Educação Básica" (Viola dos Santos e Lins, 2014, p.346) e, assim:

> Ao se debruçarem sobre processos axiomáticos, abstratos da matemática acadêmica, poderiam (re)construir seus conhecimentos em relação aos conceitos menos rigorosos, com mais apelo a relações físicas e 'concretas',

> da matemática escolar. O olhar para a matemática, nessa perspectiva, seria abrangente, tomando a matemática acadêmica e escolar como um todo, como também explicitando suas relações e especificidades. (Viola dos Santos e Lins, 2014, p.346).

Os autores também argumentam que “essa ideia não dispensaria o estudo aprofundado de temáticas da matemática acadêmica e nem mesmo negligenciaria o aprofundamento de discussões rigorosas sobre os fundamentos da matemática escolar” (Viola dos Santos e Lins, 2014, p.346). Para os autores, aconteceria o contrário, ou seja, “aumentaria o escopo e a abrangência dessas discussões e as aproximaria muito mais da prática profissional do professor de matemática da Educação Básica” (Viola dos Santos e Lins, 2014, p.346).

Segundo Fiorentini (2005), o professor formador das disciplinas matemáticas tem o papel de “formar professores de Matemática capazes de promover aprendizagens significativas a seus alunos” (Fiorentini, 2005, p.111) e, para que essa formação ocorra é necessário deixar de lado um pouco a sistematização e formalização rigorosa da Matemática e permitir que o licenciando vivencie “um ambiente rico em produção e negociação de significados, aproximando-se, assim, do movimento de elaboração/construção do saber matemático” (Fiorentini, 2005, p.112). De acordo com o autor, uma das possibilidades para o professor formador é “promover atividades exploratórias e problematizadoras das dimensões conceituais, procedimentais, epistemológicas e históricas dos saberes matemáticos de disciplinas como Álgebra, Geometria, Cálculo, Análise, etc” (Fiorentini, 2005, p.111-112).

Entendido que para a formação matemática do professor é importante tanto a matemática avançada como a matemática básica, surge o seguinte questionamento: essa formação é suficiente para prática docente na Educação Básica? O que realmente o professor de Matemática da Educação Básica precisa saber? Na busca por respostas a esses questionamentos, encontrei as pesquisas de Shulman (1986, 2014), Ball *et al* (2008) e Carrillo *et al* (2014, 2018), os quais serão descritos detalhadamente no capítulo 2, mas irei apresentar aqui a pesquisa de Carrillo *et al* (2014, 2018) resumidamente.

Baseado na pesquisa de Shulman (1986) e Ball *et al* (2008), Carrillo *et al* (2014, 2018) desenvolveram pesquisas sobre o conhecimento especializado do professor de Matemática, o que resultou no modelo denominado Conhecimento

Especializado do Professor de Matemática. Esse modelo teórico compreende o conhecimento do professor de duas maneiras: o Conhecimento Matemático e o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo. O Conhecimento Matemático engloba conhecimento do conteúdo matemático propriamente dito; os sistemas de interligação que vinculam a disciplina; e como se procede em matemática (Carrillo *et al*, 2018). O Conhecimento Pedagógico do Conteúdo engloba o conhecimento do conteúdo matemático do ponto de vista de um conteúdo a ser ensinado, do ponto de vista de um conteúdo a ser aprendido e de uma visão geral dos padrões de aprendizagem que podem/devem ser alcançados (Carrillo *et al*, 2014). Apesar da pesquisa ter sido desenvolvida na Espanha, existem muitas análises brasileiras, como por exemplo a pesquisa de Montes, Moriel Junior e Wielewski (2013), que comprovam que esse modelo teórico sobre os conhecimentos do professor se encaixa na realidade do professor de Matemática no Brasil.

Após compreender que o professor de Matemática tem conhecimentos específicos para exercer sua profissão, busquei por pesquisas acadêmicas já realizadas sobre a formação matemática no início da formação, e uma das pesquisas que encontrei foi o trabalho de Almeida (2019), que teve como objetivo evidenciar articulações entre os resultados de teses e dissertações e aspectos conceituais do campo de formação de professores de Matemática. A autora realizou um estudo interpretativo de 26 teses e dissertações que investigaram as disciplinas matemáticas do curso de Licenciatura em Matemática, cujos os resultados encontrados foram articulados com aspectos conceituais da formação de professores tais como, estrutura dos cursos, políticas públicas relacionadas à formação inicial de professores, limites e possibilidades das disciplinas de conteúdo matemático e outros aspectos que emergiram dos dados. Segundo a autora, os trabalhos analisados "reafirmam uma realidade que vem sendo constantemente denunciada pela literatura no campo da formação de professores" (Almeida, 2019, p.124): as lacunas presentes nos cursos de Licenciatura em Matemática. Dentre essas lacunas, está o fato de que as disciplinas matemáticas não estão bem definidas nos documentos do curso e não oferecem aos licenciandos uma base de conhecimentos necessária para a prática docente na Educação Básica.

Então, sabendo que o professor de Matemática da Educação Básica tem conhecimentos específicos para exercer a sua prática e que esses conhecimentos envolve conhecimentos matemáticos do ponto de vista avançado e escolar, e conhecimentos pedagógicos relacionados ao ensino e aprendizagem da Matemática, por que então, esses conhecimentos não são desenvolvidos no curso de Licenciatura em Matemática, como apontado pela pesquisa de Almeida (2019)? Será que professores e estudantes das disciplinas matemáticas sabem que esses conhecimentos podem ser desenvolvidos nessas disciplinas? Se esses conhecimentos fossem o foco das disciplinas matemáticas, os licenciandos entenderiam o porque estudam matemática avançada na formação inicial?

Assim, a partir desses questionamentos e conversas com minha orientadora reformulamos a questão de pesquisa e, consequentemente, o seu objetivo. Então, a partir da questão de pesquisa: **Quais são as possibilidades teórico-metodológicas para o desenvolvimento de disciplinas matemáticas do curso de Licenciatura em Matemática com foco na formação matemática do futuro professor de Matemática da Educação Básica?** Tem-se como objetivo compreender quais são as possibilidades teórico-metodológicas para o desenvolvimento das disciplinas matemáticas do curso de Licenciatura em Matemática de modo que os conhecimentos matemáticos necessários para o ensino da Matemática na Educação Básica sejam contemplados.

O presente estudo foi estruturado em seis capítulos, sendo eles: introdução, referencial teórico, procedimentos metodológicos, análise dos trabalhos selecionados, considerações finais e referências. No primeiro capítulo, INTRODUÇÃO, foi apresentado a trajetória acadêmica da pesquisadora e suas motivações para a realização da pesquisa, a questão de pesquisa, o objetivo e o procedimento metodológico optado. No segundo capítulo, REFERENCIAL TEÓRICO, apresenta-se os resultados de produções científicas, nacionais e internacionais, que serão o aporte teórico para as análises das pesquisas que serão analisadas em buscas de respostas para a questão de pesquisa. Entre os estudos, estão os trabalhos de Fiorentini (2005), Lins (2005), Viola dos Santos e Lins (2014), Belo e Gonçalves (2012); Moriel Junior, Wielewski e Montes (2013); Shulman (1986 e 2014), Ball *et al* (2008) e Carrillo *et al* (2014 e 2018). No terceiro capítulo, PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS, apresenta-se a metodologia adotada para a seleção da fonte de dados da pesquisa, a qual ocorreu através de buscas no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), e o processo de análise dos dados que ocorreu pela utilização da Análise Textual Discursiva (ATD). No quarto capítulo, ANÁLISE DOS

TRABALHOS SELECIONADOS, apresenta-se todo o processo de análise das pesquisas selecionadas, assim como os resultados encontrados e suas relações com o referencial teórico. E por fim, no quinto capítulo, CONSIDERAÇÕES FINAIS, será retomado a questão de pesquisa e, a partir dos dados encontrados no capítulo quatro, será apresentado respostas para tal pergunta e conclusões finais da pesquisa.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo irei apresentar resultados de produções científicas, nacionais e internacionais, que dão importantes contribuições sobre os conhecimentos do professor de Matemática da Educação Básica e a formação inicial desses professores. Também será apresentado os dizeres oficiais do documento Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Licenciatura (Brasil, 2001), assim como as contribuições da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM, 2002) para a estruturação das Licenciaturas em Matemática no país. Entre os estudos nacionais estão Fiorentini (2005), Lins (2005), Viola dos Santos e Lins (2014), Belo e Gonçalves (2012); e entre os estudos internacionais estão Shulman (1986 e 2014), Ball *et al* (2008) e Carrillo *et al* (2014 e 2018).

2.1 Conhecimentos do professor de Matemática

Ao buscar na literatura por pesquisas sobre os conhecimentos que o professor de Matemática precisa ter para exercer sua ação docente na Educação Básica, encontrei os trabalhos de Shulman (1986 e 2014), Ball *et al* (2008) e Carrillo *et al* (2014 e 2018). Apesar desses autores não serem brasileiros, as teorias deles se encaixam perfeitamente na realidade brasileira, tanto que, autores nacionais como Dario Fiorentini, Romulo Lins e Plínio Moreira, os quais são importantes nomes na área da formação de professores de Matemática, citam Shulman, Ball e Carrillo em suas pesquisas.

Lee Shulman, autor considerado referência mundial sobre conhecimentos docentes, acredita que os professores possuem saberes específicos da profissão, assim como qualquer outro profissional de outra área (médico, advogado, engenheiro, entre outros). De acordo com o autor, os professores (de um modo geral, sem especificar uma determinada área) precisam ter conhecimento dos conteúdos a serem ensinados dentro da sua área de especialização, por exemplo, professor de Matemática deve saber os conteúdos de Matemática e o professor de Geografia deve saber os conteúdos de Geografia; e, mais importante ainda, o professor deve ter o conhecimento pedagógico desses conteúdos, ou seja, conhecer "as formas de representar e formular o assunto que o tornam compreensível para os outros" (Shulman, 1986, p.9, tradução da autora). Esses conhecimentos, juntamente com o conhecimento do currículo, formam o que Shulman (1986) denominou de Base de Conhecimentos. Algum tempo depois, essa teorização foi atualizada com outros conhecimentos: conhecimento do conteúdo; conhecimento pedagógico geral, “com especial referência aos princípios e estratégias mais abrangentes de gerenciamento e organização de sala de aula, que parecem transcender a matéria” (Shulman, 2014, p.206); conhecimento do currículo, "particularmente dos materiais e programas que servem como ferramentas do ofício para os professores" (Shulman, 2014, p.206); conhecimento pedagógico do conteúdo, “esse amálgama especial de conteúdo e pedagogia que é o terreno exclusivo dos professores, seu meio especial de compreensão profissional” (Shulman, 2014, p.206); conhecimento dos alunos e suas características; conhecimento de contextos educacionais, “desde o funcionamento do grupo ou sala de aula, passando pela gestão e financiamento dos sistemas educacionais, até as características das comunidades e suas culturas” (Shulman, 2014, p.206); e conhecimento dos fins, propósitos e valores da educação. Dentre esses conhecimentos, vale ressaltar o Conhecimento do Conteúdo e o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo.

O Conhecimento do Conteúdo se refere “à quantidade e às organizações do conhecimento em si na formação do professor” (Shulman, 1986, p. 9, tradução da autora). Além de compreender os conteúdos a serem ensinados, os professores:

> [...] também devem ser capazes de explicar por que uma determinada proposição é considerada justificada, por que vale a pena conhecê-la e como ela se relaciona com outras proposições, tanto dentro da disciplina quanto fora, tanto na teoria quanto na prática. (Shulman, 1986, p.9, tradução da autora).

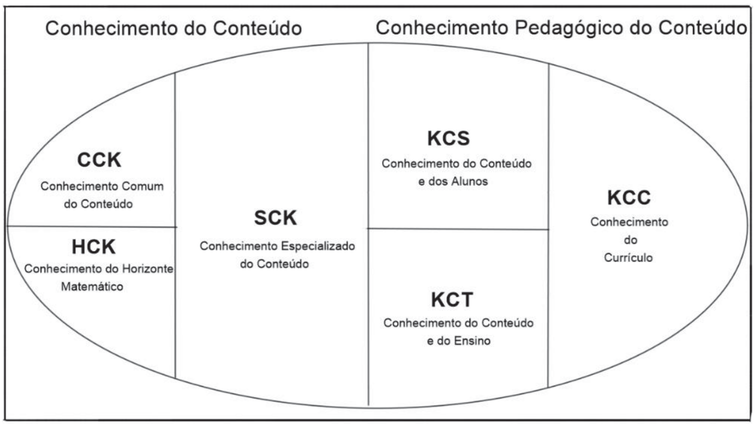
O Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, considerado pelo autor o mais importante, envolve conhecimentos específicos da disciplina para o ensino da mesma. Nesta categoria são considerados conhecimentos sobre as formas mais úteis de representação de um determinado assunto, as analogias, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações deste assunto. Ou seja, são considerados conhecimentos sobre “as formas de representar e formular o assunto que o tornam compreensível para os outros” (Shulman, 1986, p.9, tradução da autora). Como não existe uma única formas de representação, “o professor deve ter à mão um verdadeiro arsenal de formas alternativas de representação, algumas das quais derivam da pesquisa, enquanto outras se originam na sabedoria da prática" (Shulman, 1986, p.9, tradução da autora).

Essa teorização dos conhecimentos docentes proposta por Shulman, como dito anteriormente, se refere aos conhecimentos da profissão do professor de um modo geral, sem especificar uma determinada área. Porém, outros pesquisadores buscam compreender as especificidades dos conhecimentos de professores de diferentes áreas. No caso da Matemática, destacam-se os trabalhos desenvolvidos por Ball *et al* (2008, 2009) e Carrillo *et al* (2014, 2018).

2.1.1 Modelo MKT

Para especificar a base de conhecimento do professor apresentada por Shulman (1986) para o professor que ensina Matemática, Ball *et al* (2008) desenvolveram pesquisas baseadas na observação da prática do professor de Matemática dos Estados Unidos da América, onde buscou-se "identificar os conhecimentos matemáticos que são demandados pelo trabalho docente" (Ball *et al*, 2008, p.399, tradução da autora), ou seja, o "conhecimento matemático necessário para realizar as tarefas recorrentes de ensinar Matemática aos alunos" (Ball *et al*, 2008, p.399, tradução da autora). Essas pesquisas deram origem ao modelo denominado Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT[2]), o qual é apresentado na FIGURA 1.

FIGURA 1: Conhecimento Matemático para o Ensino - MKT



Fonte: Ball *et al*, 2008, p.403, tradução da autora

[2] do original em Inglês: Mathematical Knowledge for Teaching

O Conhecimento do Conteúdo refere-se ao conhecimento específico da área, ou seja, o conhecimento matemático é subdividido em: Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK); Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK); Conhecimento do Horizonte Matemático (HCK).

O CCK[3] (Conhecimento Comum do Conteúdo), refere-se ao conhecimento matemático que os professores precisam ter para serem capazes de realizar as atividades que estão atribuindo para os alunos (Ball *et al*, 2008), ou seja, os professores precisam saber quando os alunos têm respostas erradas, reconhecer quando o livro fornece uma definição imprecisa, ser capaz de usar termos e notações corretamente, e não cometer erros de cálculo ou travar ao resolver um problema no quadro (Ball *et al*, 2008). Vale ressaltar que a palavra *comum* refere-se ao fato de que esses conhecimentos não são exclusivos do ensino (Ball *et al*, 2008), ou seja, outras pessoas, além dos professores, que tenham conhecimentos matemáticos também conseguem, por exemplo, saber quando os alunos têm respostas erradas, reconhecer quando o livro fornece uma definição imprecisa, usar termos e notações corretamente e não cometer erros de cálculo.

O SCK[4] (Conhecimento Especializado do Conteúdo) refere-se ao conhecimento matemático que é específico da profissão professor, ou seja, o conhecimento que é utilizado exclusivamente para ensinar Matemática (Ball *et al*, 2008), como por exemplo, saber fornecer respostas matemáticas sólidas para abordagens não padronizadas, conhecer todos os tipos de soluções dos alunos e instigar se o pensamento é matematicamente correto para o problema e se a abordagem funcionaria em geral, ter fundamentos dos procedimentos, conhecer os significados dos termos e saber explicar os conceitos (Ball *et al*, 2008).

O HCK[5] (Conhecimento do Horizonte Matemático) refere-se ao conhecimento que permite "o professor ter uma consciência da grande paisagem matemática na qual a experiência e o ensino atuais se situam" (Ball e Bass, 2009, s/n, tradução da autora). Esse conhecimento:

> [...] envolve aqueles aspectos da matemática que, embora talvez não contidos no currículo, são úteis para o aprendizado atual dos alunos, que iluminam e conferem um sentido compreensível do significado mais amplo

---

[3] Common Content Knowledge
[4] Specialized Content Knowledge
[5] Horizon Content Knowledge

> do que pode ser apenas parcialmente revelado na matemática do momento. (Ball, Bass 2009, s/n, tradução da autora)

Podemos citar, como exemplo, saber como a Matemática ensinada num determinado momento está relacionada com o que os alunos irão aprender nos anos posteriores, saber como se deu historicamente a construção dos conceitos matemáticos, saber como desenvolver provas e demonstrações matemáticas de maneira formal e informal (Ball e Bass, 2009).

O Conhecimento Pedagógico do Conteúdo refere-se ao conhecimento necessário para realizar o ensino e é subdividido em: Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KCS); Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT); Conhecimento do Currículo (KCC).

O KCS[6] (Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos) refere-se ao conhecimento sobre como os alunos aprendem Matemática (Ball *et al*, 2008), como por exemplo, saber escolher exemplos que os alunos irão achar interessante e motivador; prever o que os alunos irão fazer durante a realização de uma atividade, e se eles vão achar fácil ou difícil; ouvir e interpretar os pensamentos emergentes e incompletos dos alunos (Ball *et al*, 2008).

O KCT[7] (Conhecimento do Conteúdo e do Ensino) refere-se ao conhecimento que requer uma interação entre a compreensão matemática específica e a compreensão de questões pedagógicas que afetam a aprendizagem dos alunos, ou seja, é o conhecimento que combina saber Matemática e saber ensinar Matemática (Ball *et al*, 2008). Podemos citar, como exemplo, saber sequenciar um conteúdo específico para o ensino, decidindo qual exemplo começar e quais exemplos que irão levar os alunos mais a fundo no conteúdo; avaliar as vantagens e desvantagens instrucionais das representações usadas para ensinar uma ideia específica; decidir quando pedir mais esclarecimento ou uma nova pergunta; saber quando usar uma observação de um aluno para fazer um ponto matemático; saber representar uma nova tarefa para promover a aprendizagem dos alunos (Ball *et al*, 2008).

O KCC[8] (Conhecimento do Currículo) refere-se ao conhecimento da maneira como a Matemática está organizada no currículo escolar (Ball *et al*, 2008). Assim, é o conhecimento dos documentos oficiais de ensino, como por exemplo, os

---

[6] Knowledge of Content and Students
[7] Knowledge of Content and Teaching
[8] Knowledge of Content and Curriculum

Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN).

Para exemplificar o modelo MKT, Ball *et al* (2008) apresentam a seguinte situação: ao realizar uma operação de subtração, um aluno apresentou o resultado descrito abaixo:

$$\begin{array}{r} 307 \\ -\,168 \\ \hline 261 \end{array}$$

Fonte: Ball *et al* (2008)

Reconhecer que a resposta está incorreta é um **Conhecimento Comum do Conteúdo**. Avaliar a natureza do erro é um **Conhecimento Especializado do conteúdo** ou **Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos**. Decidir o que é melhor para remediar o erro é um **Conhecimento do Conteúdo e Ensino** (Ball *et al*, 2008).

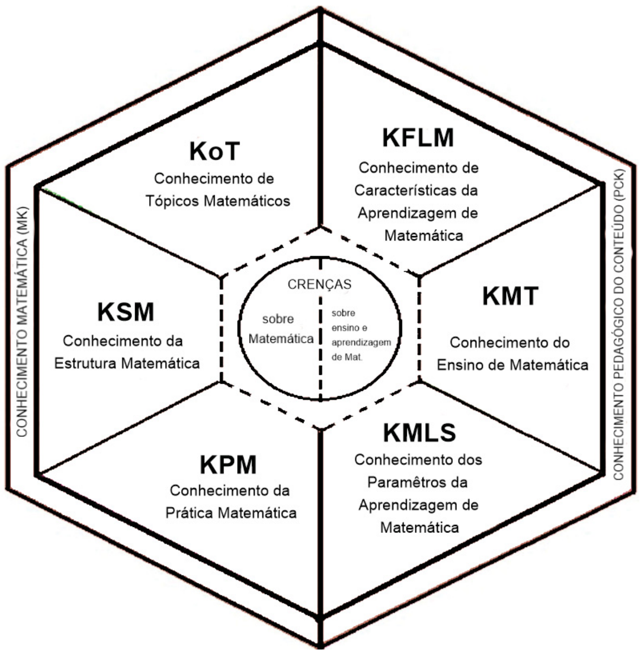
2.1.2 Modelo MTSK

Para compreender quais são os saberes do professor de Matemática, Carrillo *et al* (2014, 2018) desenvolveram pesquisas sobre o conhecimento especializado de professores especialistas (e com muitos anos de experiência) da Espanha, com o objetivo de apresentar propostas de formação inicial e continuada compatível com as necessidades do professor de Matemática. Para o desenvolvimento da pesquisa, os autores buscaram inspiração no modelo MKT de *Ball et al* (2008). Durante o estudo desse modelo, eles perceberam que o modelo considera apenas os conhecimentos que o professor coloca em prática em sala de aula, ou seja, no momento em que está de fato ensinando os alunos, e ignora os demais conhecimentos que o professor precisa para exercer a sua função, como por exemplo, o planejamento das aulas, trocas com outros professores, reflexões sobre sua prática, entre outros; parece que o modelo MKT descreve os conhecimentos do professor como conhecimentos isolados. Porém, para Carrillo e seus colaboradores, os conhecimentos do professor em relação ao ensino de Matemática “afeta tanto o SMK quanto o PCK em conjunto e, como tal, não pode ser considerado um subdomínio de nenhum deles” (Carrillo *et al*, 2018, p.4, tradução da autora). Outra crítica que Carrillo *et al* (2014, 2018) tinham sobre o modelo MKT refere-se à comparação dos conhecimentos do professor com outros profissionais que utilizam a Matemática, que estariam inclusos no subdomínio CCK (Conhecimento Comum do Conteúdo). Para Carrillo *et al* (2014, 21018) o conhecimento do professor de Matemática é único e diferente de outros profissionais que também utilizam a Matemática.

Portanto, como o propósito de construir um modelo dos conhecimentos do professor que considere todos os conhecimentos necessários e utilizados pelos professores, e sem fazer referência a outras profissões, Carrillo *et al* (2014, 2018) reconfiguram o modelo MKT, resultando assim, no modelo denominado Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK[9]), o qual apresenta "uma reconfiguração do Conhecimento Matemático, uma reinterpretação do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo e uma nova forma de conceituar a noção de especialização" (Carrillo *et al*, 2018, p.5, tradução da autora).

O modelo MTSK foi representado por seus autores de acordo com a FIGURA 2, e considera o Conhecimento Matemático (MK) e o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK).

FIGURA 2: Conhecimento Especializado do Professor de Matemática - MTSK



Fonte: Carrillo *et al*, 2018 - tradução da autora

---
[9] Mathematics Teacher's Specialized Knowledge

O Conhecimento Matemático (MK)[10] é “o conhecimento possuído por um professor de Matemática em termos de uma disciplina científica num contexto educativo” (Carrillo *et al*, 2018, p.5, tradução da autora). Entende-se, a partir desse grifo e de uma nota de rodapé deixada pelos autores, que está sendo considerando o conhecimento acadêmico (a Matemática trabalhada/ensinada/desenvolvida no Ensino Superior) na medida que se relaciona com o conhecimento escolar (a Matemática trabalhada/ensinada/desenvolvida na Educação Básica). O MK foi dividido em três subdomínios: o conteúdo matemático propriamente dito (Conhecimento dos Tópicos); os sistemas de interligação que vinculam a disciplina (Conhecimento da Estrutura da Matemática); e como se procede em Matemática (Conhecimento de Práticas em Matemática).

O KoT[11] (Conhecimento de Tópicos Matemáticos) “envolve conhecer os conteúdos matemáticos e seus significados de forma fundamentada” (Carrillo *et al*, 2014, s/n, tradução da autora) e “integra o conteúdo que queremos que o aluno aprenda e permite a consideração de conhecimentos com um nível de profundidade maior do que o esperado para os alunos” (Carrillo *et al*, 2014, s/n, tradução da autora). A palavra *fundamentada* refere-se ao conhecimento dos procedimentos, definições, representações e fundamentos dos tópicos matemáticos, assim como seus fenômenos e suas aplicações na Matemática e outras áreas de conhecimento. Os tópicos são componentes das principais áreas da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) estabelecidos de acordo com o currículo oficial de cada país (no Brasil, são estabelecidos de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)).

O KSM[12] (Conhecimentos da Estrutura da Matemática) considera “o conhecimento do professor sobre as conexões entre os tópicos matemáticos” (Carrillo *et al*, 2018, p. 8, tradução da autora). De acordo com Montes, Moriel Junior e Wielewski (2013), estão inclusos nesse subdomínio a “compreensão de conhecimentos matemáticos como sendo elementos integrantes de um sistema de conexões, ao invés de item isolados” (Moriel Junior, Wielewski e Montes, 2013, p.4).

> Isso possibilita desenvolver certos conceitos avançados a partir de uma perspectiva elementar e certos conceitos elementares por meio de

[10] Mathematical Knowledge
[11] Knowledge of Topics
[12] Knowledge of the Structure of Mathematics

> ferramentas matemáticas avançadas. Implica ver o conteúdo em perspectiva, a Matemática básica a partir de um ponto de vista avançado e a Matemática avançada do ponto de vista básico. (Moriel Junior, Wielewski e Montes, 2013, p.4).

O KPM[13] (Conhecimentos de Práticas em Matemática) “destaca a importância de o professor não só saber os resultados matemáticos estabelecidos, mas também as formas de proceder para alcançá-los e as características do trabalho matemático” (Carrillo *et al*, 2014, s/n, tradução da autora). Neste subdomínio são considerados conhecimentos sobre os modos de demonstração/validação de um determinado conteúdo; conhecimentos do papel dos símbolos e linguagens da Matemática; conhecimentos dos processos de produção em Matemática, ou seja, a construção do conteúdo; e conhecimentos das condições necessárias e suficientes para gerar definições em um determinado conteúdo (Carrillo *et al*, 2018, p. 9-10, tradução da autora).

O Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK)[14] é dividido em três subdomínios e reconhece a “importância do professor conhecer o conteúdo matemático do ponto de vista de um conteúdo a ser ensinado (KMT), do ponto de vista de um conteúdo a ser aprendido (KFLM) e de uma visão geral dos padrões de aprendizagem que podem/devem ser alcançados (KMLS)” (Carrillo *et al*, 2014, s/n, tradução da autora). Neste domínio não são inclusos “conhecimentos pedagógicos em contextos de atividades matemáticas, mas apenas aqueles em que o conteúdo matemático condiciona o ensino e a aprendizagem da matemática" (Carrillo *et al*, 2014, s/n, tradução da autora) e é aqui que os resultados das pesquisas em Educação Matemática “se tornam mais relevantes como possíveis fontes de conhecimentos para o professor” (Carrillo *et al*, 2014, s/n, tradução da autora).

O KFLM[15] (Conhecimento de Características da Aprendizagem de Matemática) considera “o conhecimento das características de aprendizagem em Matemática tendo como foco o conteúdo matemático como objeto de aprendizagem e não o aluno” (Carrillo *et al*, 2018, p. 11, tradução da autora), que podem ser classificados em: conhecimento sobre teorias de aprendizagem matemática; conhecimento sobre as potencialidades e dificuldades dos alunos com o conteúdo matemático; conhecimento sobre formas de interação dos alunos com o conteúdo

---

[13] Knowledge of Practices in Mathematics
[14] Pedagogical Content Knowledge
[15] Knowledge of Features of Learning Mathematics

matemático; e conhecimento sobre os aspectos emocionais da aprendizagem da Matemática (Carrillo *et al*, 2018, p. 11-12, tradução da autora).

O KMT[16] (Conhecimento do Ensino de Matemática) também tem como foco o conteúdo matemático e diz respeito ao conhecimento teórico (pessoal ou formal) específico para o ensino de Matemática, ao conhecimento de recursos materiais concretos e virtuais para o ensino de Matemática, e estratégias, técnicas, tarefas e exemplos para ensinar Matemática (Carrillo *et al*, 2018, p. 12, tradução da autora).

No KMLS[17] (Conhecimento dos Parâmetros de Aprendizagem de Matemática) é considerado o conhecimento sobre o que deve-se ser alcançado pelo aluno em um determinado nível, tendo em mente o que já foi aprendido em anos anteriores e o que será aprendido nos anos posteriores; e podem ser classificados em: conhecimentos sobre expectativas de aprendizagem; conhecimento sobre desenvolvimento conceitual e procedimental esperado por parte dos alunos; e conhecimento de sequências de temas anteriores e posteriores (Carrillo *et al*, 2018, p. 13, tradução da autora).

O modelo MTSK também considera “que as concepções que o professor tem sobre a Matemática, seu ensino e aprendizagem, permeiam os saberes que possui em cada um dos subdomínios” (Carrillo *et al*, 2014, s/n, tradução da autora). Dessa forma as crenças que o professor tem sobre a Matemática e sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática irão influenciar na sua prática em sala de aula.

Apesar dos seis subdomínios serem representados separadamente, não se deve visualizar o conhecimento do professor de forma dividida. De acordo com os autores do modelo MTSK, “o conhecimento do professor possui todos os subdomínios de forma integral” e este modelo “permite uma visão holística desse conhecimento, podendo, no mesmo episódio, encontrar vários subdomínios do conhecimento do professor” (Carrillo *et al*, 2014, s/n, tradução da autora).

Para exemplificar o modelo MTSK (Carrillo *et al*, 2014 e 2018) tem-se a pesquisa de Montes, Moriel Junior e Wielewski (2013), onde os autores identificaram e analisaram, por meio do modelo MTSK, os tipos de conhecimento mobilizados por uma professora de Matemática e por um licenciando em Matemática durante uma formação sobre os porquês matemáticos a respeito da divisão de frações. Os resultados obtidos pelos autores são apresentados no QUADRO 1.

---

[16] Knowledge of Mathematics Teaching
[17] Knowledge of Mathematics Learning Standards

QUADRO 1: Conhecimentos sobre divisão de frações segundo o modelo MTSK

- Conhecer os conceitos envolvidos na resposta do porquê matemático sobre divisão de frações (como o inverso multiplicativo, interpretação, equivalência e multiplicação de frações) faz parte do KoT;
- Conhecer conexões entre conceitos da educação básica (números racionais e inverso multiplicativo) e da matemática do ensino superior (corpo) está incluído no KSM;
- Conhecer dúvidas dos alunos sobre o conteúdo que podem se tornar dificuldades de aprendizagem, como é o caso da fórmula da área de um retângulo (base vezes altura), na qual se usa a letra 'H' para a altura ao invés de "A". Conhecimentos desse tipo fazem parte do subdomínio *conhecimento das características da aprendizagem matemática* - KFLM
- Conhecer os diversos métodos ou tipos de abordagem de resposta ao porquê matemático (caminho aritmético, algébrico, geométrico, concreto, indução por meio de uma sequência de exemplos, dentre outros), pertence ao subdomínio KMT;
- Saber escolher quais dos métodos anteriores é mais adequado para ensinar a resposta ao aluno, respeitando sua idade e os conhecimentos necessários prescritos pelo currículo, pertence ao KMLS;
- Conhecer orientações envolvidas no desenvolvimento de uma demonstração matemática, relacionadas a aspectos lógicos, pertence ao KPM.

Fonte: Moriel Junior, Wielewski e Montes (2013)

Com esse exemplo, é possível perceber que quando um professor desenvolve uma determinada atividade, ele mobiliza conhecimentos que são contemplados em todos os subdomínios do modelo MTSK.

2.2 Formação do Professor

As Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Licenciatura em Matemática publicado no ano de 2001, apresentam o perfil dos futuros profissionais formados pelo curso, assim como as competências e habilidades e os conteúdos curriculares que devem ser contemplados em todos os cursos de Licenciatura em Matemática no país.

Em relação ao perfil dos futuros professores de Matemática da Educação Básica, o curso de Licenciatura em Matemática deve garantir que os licenciandos tenham:

> [...] visão de seu papel social de educador e capacidade de se inserir em diversas realidades com sensibilidade para interpretar as ações dos educandos; visão da contribuição que a aprendizagem da Matemática pode oferecer à formação dos indivíduos para o exercício de sua cidadania; visão

> de que o conhecimento matemático pode e deve ser acessível a todos, e consciência de seu papel na superação dos preconceitos, traduzidos pela angústia, inércia ou rejeição, que muitas vezes ainda estão presentes no ensino-aprendizagem da disciplina. (Brasil, 2001, p.3).

Em relação às competências e habilidades, os cursos devem garantir que o futuro professor possa:

> a) elaborar propostas de ensino-aprendizagem de Matemática para a educação básica; b) analisar, selecionar e produzir materiais didáticos; c) analisar criticamente propostas curriculares de Matemática para a educação básica; d) desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos; e) perceber a prática docente de Matemática como um processo dinâmico, carregado de incertezas e conflitos, um espaço de criação e reflexão, onde novos conhecimentos são gerados e modificados continuamente; f) contribuir para a realização de projetos coletivos dentro da escola básica. (Brasil, 2001, p.4).

Em relação aos conteúdos curriculares que podem ser distribuídos ao longo do curso de acordo com a proposta de cada Instituição de Ensino, deve incluir, além dos conteúdos de "Cálculo Diferencial e Integral; Álgebra Linear; Fundamentos de Análise; Fundamentos de Álgebra; Fundamentos de Geometria; Geometria Analítica" (Brasil, 2001, p.6), também:

> a) conteúdos matemáticos presentes na educação básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise; b) conteúdos de áreas afins à Matemática, que são fontes originadoras de problemas e campos de aplicação de suas teorias; c) conteúdos da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática. (Brasil, 2001, p.6).

Por meio deste documento, entende-se que o curso de Licenciatura em Matemática deve formar matematicamente e pedagogicamente o licenciando e futuro professor de Matemática da Educação Básica, tanto com conteúdos de Matemática de nível básico quanto com conteúdos de Matemática de nível avançado. Segundo Fiorentini (2005), essa formação acontece em todas as disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática, ou seja, as disciplinas matemáticas formam pedagogicamente o professor, assim como as disciplinas didático-pedagógicas o formam matematicamente.

Nas disciplinas matemáticas, de Cálculo, Análise, Álgebra e Geometria, além de ensinar conceitos e procedimentos matemáticos, ensina-se também "um modo de concebê-la e de tratá-la e avaliar sua aprendizagem" (Fiorentini, 2005, p.111).

Nas disciplinas didático-pedagógicas, além de ensinar os processos de ensino e aprendizagem da Matemática no contexto escolar, também contribui “para alterar a visão e a concepção de Matemática [...] e re-significar conceitos e procedimentos matemáticos adquiridos durante o processo de escolarização” (Fiorentini, 2005, p.112). E isso acontece quando o foco dessas disciplinas deixa de ser o conhecimento pronto e passa a ser o “saber em movimento em seu processo de significação e elaboração, tendo a linguagem simbólica como mediadora desse processo de significação” (Fiorentini, 2005, p.112).

Para Lins (2005), as disciplinas matemáticas têm papel importante na formação do professor de Matemática se não for entendida apenas como uma disciplina de conteúdo. Segundo o autor, essas disciplinas “servem para prover os verdadeiros fundamentos daquilo que o professor vai ensinar – por exemplo o que são, de fato, números reais ou complexos, ou o que seja, de fato, uma função” (Lins, 2005, p.120).

De acordo com Viola dos Santos e Lins (2014), as disciplinas matemáticas devem realizar discussões da matemática avançada, da matemática escolar e, principalmente, discussões que relacionam ambas as matemáticas. Ao citar as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Licenciatura, os autores mostram que há um indicativo explícito no documento oficial de que as disciplinas matemáticas “devem, primeiramente, compor a grade curricular do professor de matemática e que ao longo do curso é importante incluir conteúdos matemáticos da Educação Básica” (Viola dos Santos e Lins, 2014, p.347).

Segundo o documento *Subsídios para a Discussão de Propostas para cursos de Licenciatura em Matemática: uma contribuição da Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, publicado pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) em 2002, os conhecimentos matemáticos trabalhados nas disciplinas matemáticas devem:

> [...] ser selecionados e abordados de forma a possibilitar ao professor em formação, conhecimento amplo, consistente e articulado da Matemática, colocando em destaque aspectos de sua construção histórica, suas aplicações em outras áreas, os principais métodos utilizados por matemáticos ao longo dos tempos, os desafios atuais dessa área de conhecimento e as pesquisas matemáticas em desenvolvimento. (SBEM, 2002, p.14-15).

Em relação aos conteúdos da Educação Básica, o documento argumenta que esses conteúdos “precisam ser trabalhados em seus aspectos epistemológicos e históricos e tratados de modo articulado com os demais conteúdos matemáticos e educacionais que integrarão a formação” (SBEM, 2002, p.15).

Outro ponto importante apresentado pelo documento é o perfil do professor de Matemática da Educação Básica, que é:

> Conceber a Matemática como um corpo de conhecimento rigoroso, formal e dedutivo, mas também como atividade humana. Construir modelos matemáticos para representar os problemas e suas soluções. Criar e desenvolver tarefas e desafios que estimulem os estudantes a coletar, organizar e analisar informações, resolver problemas e construir argumentações lógicas. Estimular a interação entre três componentes básicos da Matemática: o formal, o algorítmico e o intuitivo. Estimular seus alunos para o uso, natural e rotineiro, da tecnologia nos processos de ensinar, aprender e fazer Matemática. Estimular seus alunos para que busquem alcançar uma ampla e diversificada compreensão do conhecimento matemático e para vincular a Matemática com outras áreas do conhecimento humano. Propiciar situações ou estratégias para que seus alunos tenham oportunidade de comunicar idéias Matemáticas. Relacionar a Matemática com a realidade, a fim de ajudar seus alunos na tarefa de compreender como essa ciência permeia nossa vida e como os seus diferentes ramos estão interconectados. Utilizar diferentes representações semióticas para uma mesma noção Matemática, usando e transitando por representações simbólicas, gráficas, numéricas, entre outras. (SBEM, 2002, p.15).

De acordo com Viola dos Santos e Lins (2014), esse documento expressa que o professor precisa ter uma formação sólida em Matemática, porém essa formação deve ser relacionada com o trabalho profissional do professor na Educação Básica. O que colabora com os argumentos de Fiorentini (2005) de que a formação teórica-formal da Matemática, ou formação sólida da Matemática, não é suficiente para o professor. Para o autor, o adjetivo sólido não é adequado para qualificar a formação matemática do professor, pois esse termo lembra algo que é pronto e acabado.

> [...] essa adjetivação é própria de uma concepção de Matemática que privilegia o rigor, a precisão e sua consistência lógica.Com isso, livre de contradições, dúvidas, incerte-zas, como é a Matemática real, tanto aquela que acontece em sala de aula quando os jovens estabelecem interlocução com ela, quanto aquela em processo de criação/produção pelos matemáticos. (Fiorentini, 2005, p.109).

Segundo Fiorentini (2005), o professor da Educação Básica precisa saber como a Matemática foi construída ao longo da história e, além disso, saber avaliar potencialidades educativas do saber matemático.

> [...] para ser professor de Matemática não basta ter um domínio conceitual e procedimental da Matemática produzida historicamente. Sobretudo, necessita conhecer seus fundamentos epistemológicos, sua evolução histórica, a relação da Matemática com a realidade, seus usos sociais e as diferentes linguagens com as quais se pode representar ou expressar um conceito matemático. (Fiorentini, 2005, p.110).

A formação desse professor não deve ser a partir de uma abordagem técnico-formal da Matemática, mas sim, a partir de uma abordagem que englobe seus múltiplos aspectos ou dimensões, ou seja, “o conhecimento das diferentes concepções tanto da Matemática Científica quanto da escolar, reconhecendo o paradigma ao qual se filiam”. (Fiorentini, 2005, p.110). Para Fiorentini (2005), interessa à formação do professor “uma abordagem compreensiva - no sentido de poder abarcar seus múltiplos aspectos ou dimensões - que busca explorar a compreensão lógica, epistemológica, semiótica e histórica da matéria que ensina” (Fiorentini, 2005, p.110).

Em relação à importância das disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática, Fiorentini (2005) cita algumas pesquisas que mostram que as disciplinas matemáticas influenciam a prática do futuro professor mais do que as disciplinas didático-pedagógicas, pois, as disciplinas matemáticas “reforçam procedimentos internalizados durante o processo anterior de escolarização” (Fiorentini, 2005, p.111), enquanto que as disciplinas didático-pedagógicas “limitam-se a promover críticas de práticas vigentes sem que os futuros professores tenham oportunidade de experienciá-las e problematizá-las em contextos de prática” (Fiorentini, 2005, p.111).

Lins (2005), concorda com Fiorentini (2005), sobre o fato das disciplinas matemáticas influenciarem na prática do futuro professor. Para o autor, nessas disciplinas, os licenciandos têm “um certo modelo de aula, um modelo de como ensinar Matemática” (Lins, 2005, p.118). Independentemente se as aulas são expositivas ou não, o licenciando “tem a sua frente um profissional que é, naquela situação, um professor, que é o que ele está se preparando para ser” (Lins, 2005, p.118).

Segundo Viola dos Santos e Lins (2014), a maioria dos professores das disciplinas matemáticas não estabelece relações dos conceitos e ideias discutidas na disciplina com os da educação básica, pois acreditam que esse papel é dos professores das disciplinas de Fundamentos da Matemática ou de Educação Matemática. Eles acreditam que o foco da disciplina é apenas definições, demonstrações e discussões sofisticadas da matemática.

Segundo Belo e Gonçalves (2012), os professores formadores enxergam um único papel na sua atuação, pois é assim que se identificam profissionalmente. Segundo os autores, existe um grande contexto social na identificação social do professor formador: pesquisa *versus* docência. A maioria dos professores se consideram pesquisadores, pois sua formação ocorreu em programas de mestrado e doutorado de Matemática pura e aplicada, onde o foco é apenas a pesquisa em Matemática pura e aplicada. A docência acontece como consequência da carreira de pesquisa e, na maioria das vezes, sem experiências na Educação Básica mesmo que muitos tenham cursado a Licenciatura.

Belo e Gonçalves (2012), assim como Fiorentini (2005), apontam a existência de um "currículo oculto" na atuação do professor formador. Segundo Fiorentini (2005), esses professores ensinam aos licenciandos e futuros professores da Educação Básica, não apenas uma Matemática, mas também "um jeito de ser pessoa e professor, isto é, um modo de conceber e estabelecer relação com o mundo e com a Matemática e seu ensino" (Fiorentini, 2005, p.110-111).

É importante que o professor formador perceba que também tem o papel "de formar professores de Matemática capazes de promover aprendizagens significativas a seus alunos" (Fiorentini, 2005, p.111). Para que isso ocorra, Belo e Gonçalves (2012) sugerem que a formação na pós-graduação contemple também a formação docente e que as Instituições de Ensino ofereçam ações formativas aos professores em serviço, onde possam "discutir a respeito das especificidades dos cursos de Licenciatura em Matemática" (Belo e Gonçalves, 2012, p.313).

Fiorentini (2005), exemplifica algumas situações que podem ser utilizadas pelos professores formadores no desenvolvimento de suas aulas além das tradicionais aulas expositivas, como por exemplo, promover atividades exploratórias e problematizadoras das dimensões conceituais, procedimentais, epistemológicas e históricas dos saberes matemáticos; promover investigações matemáticas em sala de aula; desenvolver projetos de modelagem matemática, baseados na metodologia de projetos; promover seminários de estudos temáticos ou de estudo da evolução histórica dos conceitos que estão sendo estudados (Fiorentini, 2005, p.111-112).

Algumas pessoas podem pensar que, aulas deste tipo nas disciplinas matemáticas, “pode haver uma perda em relação à sistematização e formalização rigorosa dos conceitos matemáticos a serem ensinados e aprendidos” (Fiorentini, 2005, p.112), mas, o que realmente pode acontecer é proporcionar ao licenciando “um ambiente rico em produção e negociação de significados, aproximando-se, assim, do movimento de elaboração/construção do saber matemático” (Fiorentini, 2005, p.112).

Segundo Viola dos Santos e Lins (2014), uma das formas de relacionar as disciplinas matemáticas com os conteúdos da Matemática escolar seria planejar essas disciplinas a partir de temas da Educação Básica e utilizar os livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio como fio condutor das disciplinas. Ao fazerem isso, os professores formadores:

> [...] poderiam realizar discussões nas quais relações entre a matemática acadêmica e a matemática escolar estivessem presentes, como também discussões que envolvessem propostas didáticas, metodologias, recursos didáticos, presentes nos livros, fazendo disso grande parte da formação de professores de matemática. (Viola dos Santos e Lins, 2014, p.352).

Com essa estratégia também seria possível trabalhar:

> [...] uma discussão histórica dos conteúdos matemáticos e das perspectivas históricas de ensino da matemática, envolvendo estudos dos desenvolvimentos histórico-epistemológico de alguns conteúdos, as diferenças de notações, significações e maneiras de se apresentá-lo; as metodologias de ensino de cada época, os recursos didáticos que eram utilizados, as atitudes dos professores em relação ao ensino de matemática, os fins e propósitos da escola em geral e da aula de matemática. (Viola dos Santos e Lins, 2014, p.352).

Em relação à estruturação da formação matemática a partir de temas geradores (temas da Educação Básica), os autores apresentam o exemplo do tema função como tema gerador. Neste tema

> [...] seriam discutidas temáticas sobre funções no Cálculo Diferencial Integral, nas Estruturas Algébricas, em como é abordado no Ensino Médio, em relação às principais dificuldades dos alunos ao estudá-la, aos erros que eles cometem, às estratégias didáticas que podem ser utilizadas para o trabalho do professor em sala de aula, a quais recursos tecnológicos podem

> ser utilizados para trabalhar esse tema, ou seja, nos diversos aspectos que o circunscrevem. (Viola dos Santos e Lins, 2014, p.354).

Ao planejar as disciplinas, não só as matemáticas, mas também as didáticos-pedagógicas, a partir de conteúdos da Educação Básica relacionados ao desenvolvimento do pensamento aritmético, algébrico, geométrico, proporcional, probabilístico, funcional e trigonométrico, o curso de Licenciatura em Matemática não teria disciplinas isoladas, nas quais as disciplinas matemáticas tentam fazer relação com a matemática escolar ou disciplinas didático-pedagógicas que tentam fazer relações com a matemática acadêmica. O que iria existir seriam:

> [...] disciplinas nas quais discussões matemáticas, pedagógicas, da utilização de softwares, do uso de materiais manipulativos, das pesquisas em Educação Matemática, seriam mobilizadas. Disciplinas que oferecessem oportunidades para uma formação que levasse em consideração as demandas da prática profissional do professor, ao lado de uma formação da matemática acadêmica. (Viola dos Santos e Lins, 2014, p.354).

A partir das ideias de todos os autores apresentados neste capítulo, percebe-se que o papel das disciplinas matemáticas é a formação de conhecimentos matemáticos necessários para o ensino na Educação Básica e que é necessário que o professor formador da disciplina desenvolva os conteúdos de modo que permitam ao licenciando identificar, compreender e discutir a relação dos conteúdos da Educação Básica com os conteúdos acadêmicos.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo serão apresentados os procedimentos metodológicos adotados para a constituição e análise do conjunto das teses que fazem parte do material de análise desta pesquisa. Como será realizado uma pesquisa a partir de trabalhos já realizados, entende-se que esta pesquisa é qualitativa do tipo bibliográfica, com base nos entendimentos de Gil (2008), que afirmou:

> A pesquisa bibliográfica é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todos os estudos seja exigido algum tipo de trabalho desta natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas. Parte dos estudos exploratórios podem ser definidos como pesquisa bibliográfica, assim como certo número de pesquisas desenvolvidas a partir da técnica de análise de conteúdo. (Gil, 2008, p.50).

A seguir será apresentado o processo de constituição do conjunto de dados da pesquisa assim como o procedimento Análise Textual Discursiva (ATD) que será utilizado para analisar os dados encontrados.

3.1 Coleta de dados

Para a localização das fontes de dados buscou-se, no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), por pesquisas realizadas no período de 2015 a 2021 e que tivessem realizado alguma proposta de ensino em alguma disciplina matemática do curso de Licenciatura em Matemática.

Utilizando os termos “licenciatura em matemática AND disciplinas matemáticas” no campo de busca e filtrando pelo período estabelecido, foram listados 440 trabalhos. Dentre esses trabalhos listados foram considerados aqueles que, no título, apresentavam o nome da disciplina (Álgebra, Cálculo, Análise, Geometria), ou o nome de um conteúdo, ou o nome de uma metodologia utilizada no desenvolvimento da disciplina, ou os termos disciplina matemática, disciplina de conteúdo matemático, disciplinas específicas.

Foram desconsiderados aqueles trabalhos referentes à: disciplinas que tenham o objetivo de revisar conteúdos da Educação Básica; disciplinas sobre educação de modo geral e didática; disciplinas sobre educação matemática;

disciplinas de prática e estágio obrigatórios; disciplinas de estatística; trabalhos que investigaram formação continuada, educação inclusiva, educação no campo, educação jovens e adultos, educação indígena, educação ambiental, interdisciplinaridades, cursos de pedagogia, física e química, curso de licenciatura em matemática EAD, uso de tecnologias no curso de licenciatura em matemática, história do curso de licenciatura em matemática, currículo do curso de licenciatura em matemática, permanência e evasão de alunos do curso de licenciatura em matemática, questões sobre gênero no curso de licenciatura em matemática, matemática do ponto de vista pedagógico, identidade profissional do docente, formação do professor formador do curso de licenciatura em matemática; e trabalhos que não estavam disponibilizados no site.

Portanto, foram selecionados nessa etapa, 21 trabalhos, sendo 10 teses e 11 dissertações. O próximo passo foi a leitura do resumo de cada trabalho, para compreender exatamente a estrutura de cada um, ou seja, compreender qual é o objetivo, os referenciais teóricos e metodológicos, qual foi a metodologia adotada e quais foram os resultados. Com essa leitura percebeu-se que as teses apresentaram resultados mais consistentes por se tratarem de pesquisas mais extensas, mais elaboradas e apresentarem discussões mais profundas, por isso, decidiu-se analisar apenas teses.

Dentre as 10 teses disponíveis, percebeu-se que apenas 5 apresentaram-se como metodologia de pesquisa a realização de um projeto de ensino, ou seja, que foi desenvolvido atividades com turmas das disciplinas matemáticas de um determinado curso de Licenciatura em Matemática, e apresentaram como resultados as contribuições dessa metodologia no desenvolvimento dessas disciplinas para a formação do futuro professor de Matemática da Educação Básica. Dentre estas 5 teses, temos duas da área de Cálculo, uma da área de Análise, uma da área de Álgebra e uma da área de Geometrias não-euclidiana.

Assim, as 5 teses selecionadas para análise são apresentadas nos quadros abaixo, acompanhadas com as informações principais do trabalho, objetivo e questão de pesquisa.

QUADRO 3: Informações sobre BUENO (2021)

Autor (a)	Rafael Winícius da Silva Bueno
Título	A construção do conceito de Integral: uma viagem pelos Três Mundos da

	Matemática
Orientador (a)	Professor Dr. Lori Viali
Tipo	Tese
Ano	2021
Programa	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática
Instituição	Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
Objetivo	Investigar a construção histórica do conceito de integral e como se dá o ensino desse conteúdo, à luz da teoria dos Três Mundos da Matemática, na formação inicial de professores de Matemática, e, então, buscar compreender como os futuros docentes percebem a introdução desse conceito, a partir de uma prática fundamentada no arcabouço teórico estudado.
Questão de Pesquisa	Que características dos Três Mundos da Matemática estão sendo trabalhadas na construção do conceito de integral, na formação inicial de professores de Matemática, no estado do Rio Grande do Sul, e como futuros docentes percebem a introdução desse conceito, a partir de uma prática alternativa, fundamentada no arcabouço teórico estudado?

Fonte: a autora (2024)

QUADRO 4: Informações sobre FERREIRA (2017)

Autor (a)	Nilton Cezar Ferreira
Título	Uma proposta de ensino de Álgebra Abstrata Moderna, com a utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, e suas contribuições para a Formação Inicial de Professores de Matemática
Orientador (a)	Lourdes de la Rosa Onuchic
Tipo	2017
Ano	Tese
Programa	Pós-Graduação em Educação Matemática
Instituição	Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Objetivo	Compreender quais as contribuições que uma disciplina, intitulada nos livros didáticos por Álgebra Abstrata ou Álgebra Moderna, cujos conteúdos têm por base as teorias de Grupo, Anel e Corpo, podem dar a um professor da Educação Básica.
Questão de Pesquisa	Quais as contribuições de um curso de Álgebra Abstrata Moderna (AAM) para a formação de professores da Educação Básica, ministrado para alunos do quinto período de Licenciatura em Matemática do IFG? Como, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, podemos levar o aluno da Licenciatura em Matemática do IFG a construir conhecimentos de Álgebra Abstrata Moderna?

Fonte: a autora (2024)

QUADRO 5: Informações sobre FLORES (2020)

Autor (a)	Marcia Viaro Flores
Título	Construção dos Números Racionais na Licenciatura: um estudo desenvolvido à luz dos Três Mundos da Matemática
Orientador (a)	Profª. Drª. Vanilde Bisognin / Profª. Drª. Silvia Maria de Aguiar Isaia
Tipo	Tese
Ano	2020
Programa	Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Instituição	Universidade Franciscana
Objetivo	Investigar como os princípios da teoria dos Três Mundos da Matemática, preconizada por David Tall, podem sustentar uma proposta de formação de futuros licenciados em Matemática sobre conceitos relacionados com os números racionais e perceber quais resultados a proposta produz sobre as aprendizagens desses conceitos.
Questão de Pesquisa	Como os princípios da teoria dos Três Mundos da Matemática, preconizada por David Tall, podem sustentar uma proposta de formação de futuros licenciados em Matemática sobre conceitos relacionados com os números racionais e quais resultados a proposta produz sobre as aprendizagens desses conceitos?

Fonte: a autora (2024)

QUADRO 6: Informações sobre FONSECA (2020)

Autor (a)	Jussara Aparecida da Fonseca
Título	Investigação de aspectos da compreensão relacional e da instrumental em Geometria Esférica
Orientador (a)	Prof. Dr. José Carlos Pinto Leivas
Tipo	Tese
Ano	2020
Programa	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Instituição	Universidade Franciscana
Objetivo	Analisar como alunos de um curso de licenciatura em matemática, de um Instituto Federal de Educação, compreendem relações métricas em triângulos esféricos, a partir de relações na geometria euclidiana.
Questão de Pesquisa	Como alunos de um curso de licenciatura em matemática, de um Instituto Federal de Educação, compreendem relações métricas em triângulos esféricos, a partir de relações na geometria euclidiana?

Fonte: a autora (2024)

QUADRO 7: Informações sobre VIDOTTI (2019)

Autor (a)	Daniela Barbieri Vidotti
Título	Potencialidades da Modelagem Matemática e da Análise de Erros para o ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral em Várias Variáveis
Orientador (a)	Profª. Drª. Lilian Akemi Kato
Tipo	Tese
Ano	2019
Programa	Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática
Instituição	Universidade Estadual de Maringá
Objetivo	Investigar o potencial da Modelagem Matemática para explorar os erros dos estudantes a fim de problematizá-los.
Questão de Pesquisa	Que dificuldades de aprendizagem são apresentadas por estudantes de CDI II e que potenciais a Modelagem Matemática oferece para explorar os erros que os estudantes cometem a fim de problematizá-los?

Fonte: a autora (2024)

Tendo as teses selecionadas para análise, o próximo passo da pesquisa é a leitura de cada tese e analisar os dados obtidos. A análise será realizada através do método Análise Textual Discursiva (Moraes e Galiazzi, 2006), o qual será apresentado a seguir.

3.2 Análise Textual Discursiva

A Análise Textual Discursiva (ATD) é, segundo Moraes e Galiazzi (2006), "uma abordagem de análise de dados que transita entre duas formas consagradas de análise na pesquisa qualitativa que são a análise de conteúdo e a análise de discurso" (Moraes e Galiazzi, 2006, p.118).

Para a realização desse processo de análise é necessário, primeiramente, a seleção do *corpus* da análise, que é constituído por produções textuais e representam "uma amostra capaz de produzir resultados válidos e representativos em relação aos fenômenos investigados" (Moraes, 2003, p.194). A partir do *corpus* da análise o processo é realizado em três etapas, sendo elas: desmontagem dos textos; estabelecimento de relações; captando o novo emergente (Moraes, 2003).

A primeira etapa, a desconstrução dos textos e sua unitarização, consiste em separar os textos do *corpus* da análise em unidades de análise, ou seja, transformar cada texto em frases onde destacam-se os principais elementos do texto. Com essa desconstrução dos textos:

> [...] pretende-se conseguir perceber os sentidos dos textos em diferentes limites de seus pormenores, ainda que compreendendo que um limite final e absoluto nunca é atingido. É o próprio pesquisador que decide em que medida fragmentará seus textos, podendo daí resultar unidades de análise de maior ou menor amplitude. (Moraes, 2003, p.195).

A segunda etapa consiste no processo de categorização das unidades de análise. De acordo com Moraes (2003), essas categorias podem ser construídas através do método dedutivo, método indutivo ou do método misto dos dois anteriores. No método dedutivo as categorias são construídas “antes mesmo de examinar o *corpus* de textos” (Moraes, 2003, p.197) e “são deduzidas das teorias que servem de fundamento para a pesquisa” (Moraes, 2003, p.197), constituindo assim, as categorias *a priori*. No método indutivo as categorias são construídas “com base nas informações contidas no *corpus*” (Moraes, 2003, p.197) e, “por um processo de comparação e contrastação constantes entre as unidades de análise, o pesquisador vai organizando conjuntos de elementos semelhantes, geralmente com base em seu conhecimento tácito” (Moraes, 2003, p.197), constituindo assim, as categorias emergentes. No método misto, o pesquisador tendo as “categorias definidas *a priori* com base em teorias escolhidas previamente” (Moraes, 2003), realiza “transformações gradativas no conjunto inicial de categorias, a partir do exame das informações do corpus de análise” (Moraes, 2003).

A terceira etapa consiste na construção de um metatexto, o qual “constitui um conjunto de argumentos descritivos-interpretativos capaz de expressar a compreensão atingida pelo pesquisador em relação ao fenômeno pesquisado, sempre a partir do *corpus* de análise” (Moraes, 2003, p.201-202).

Segundo Moraes (2003), descrever é “apresentar as categorias e subcategorias, fundamentando e validando essas descrições a partir de interlocuções empíricas ou ancoragem dos argumentos em informações retiradas dos textos” (Moraes, 2003, p.204) e interpretar é “construir e expressar uma compreensão mais profunda, indo além da expressão de construções obtidas dos textos” (Moraes, 2003, p.204), ou seja, essa interpretação “nada mais é que um exercício de teorização” (Moraes, 2003, p.204) e um dos modos que pode ser realizada é através da contrastação com teorias existentes.

Assim, a Análise Textual Discursiva é descrita como:

> [...] um ciclo de operações que se inicia com a *unitarização* dos materiais dos *corpus*. Daí o processo move-se para a *categorização* das unidades de análise definidas no estágio inicial. A partir da impregnação atingida por esse processo, argumenta-se que emergem novas compreensões, aprendizagens criativas que se constituem por auto-organização, em nível inconsciente. A explicitação de luzes sobre o fenômeno, em forma de metatextos, constitui o terceiro momento do ciclo de análise proposto. (Moraes, 2003, p.209-210).

A seguir, no próximo capítulo, será apresentado o processo de análise dos textos adquiridos a partir da leitura dos trabalhos selecionados.

4 ANÁLISE DOS TRABALHOS SELECIONADOS

Neste capítulo será apresentado o processo de análise dos dados da pesquisa, no qual, para obter respostas a questão de pesquisa: **Quais são as possibilidades teórico-metodológicas para o desenvolvimento de disciplinas matemáticas do curso de Licenciatura em Matemática com foco na formação matemática do futuro professor de Matemática da Educação Básica?** optou-se em analisar teses que investigaram a formação matemática nas disciplinas matemáticas do curso de Licenciatura em Matemática por meio de uma proposta de ensino, as quais já foram apresentadas no capítulo anterior.

Como dito anteriormente, optou-se pelo método da Análise Textual Discursiva como procedimento metodológico da pesquisa e, segundo Moraes (2003), toda análise textual é realizada a partir de um conjunto de documentos, o qual é denominado *corpus*. A definição e delimitação desse *corpus* pode ocorrer de duas maneiras:

> Quando os textos já existem previamente, seleciona-se uma amostra capaz de produzir resultados válidos e representativos em relação aos fenômenos investigados. Quando os documentos são produzidos no próprio processo da pesquisa, a amostra pode ser selecionada de diversas formas, destacando-se a amostra intencional, com definição do tamanho da amostra pelo critério de saturação. (Moraes, 2003, p.194).

Portanto, a análise textual desta pesquisa será realizada a partir de uma amostra de cada tese selecionada. Para a seleção dessa amostra realizou-se a leitura integral de cada tese, buscando compreender como a pesquisa foi realizada, como foram obtidos os dados, como os dados foram analisados e quais são os resultados. Ao longo da leitura foram destacados trechos considerados importantes, de acordo com o meu entendimento da pesquisa. No Anexo I são apresentados todos os trechos destacados de cada pesquisa, trechos estes que serão utilizados na análise textual, a qual será realizada em torno de três focos destacados por Moraes (2003): desmontagem dos textos (unitarização); estabelecimento de relações (categorização); captando o novo emergente (metatextos).

4.1 Unitarização

No processo de desmontagem dos textos surgem as unidades de análise, também denominadas unidades de significado ou de sentido. Tais unidades “são sempre definidas em função de um sentido pertinente aos propósitos da pesquisa” (Moraes, 2003, p.195) e podem ser obtidas em três momentos: fragmentação dos textos e codificação de cada unidade; reescrita de cada unidade de modo que assuma um significado o mais completo possível em si mesma; atribuição de um nome ou título para cada unidade assim produzida, o qual será chamado de elemento aglutinador. É importante que ao longo da análise, saiba a origem de cada unidade de significado e, para essa identificação, pode-se utilizar códigos.

No QUADRO 8, apresenta-se um exemplo do processo de unitarização, com a indicação das unidades de significado, seu título atribuído (elemento aglutinador) e sua origem. O processo completo de unitarização é apresentado no ANEXO II.

QUADRO 8: exemplo processo de unitarização

Origem	**Unidade de significado**	**Título / Elemento aglutinador**
Bueno (2021)	“[...] frisaram que uma postura docente que não prioriza as manipulações algébricas e as definições formais é capaz de trazer mais motivação aos educandos, servindo, inclusive, como uma inspiração para sua futura atuação profissional.” (p.179)	Motivação para estudar Inspiração para a sua futura atuação profissional
Ferreira (2017)	Em suma, os dados nos mostraram que, apesar do grande nível de abstração da AAM (Álgebra Abstrata Moderna), é possível, e mais fácil, ensinar seus conteúdos a partir de conexões entre conhecimentos dos próprios alunos, como os aprendidos na Educação Básica ou em outras disciplinas de matemática do Ensino Superior (p.232)	Ensinar conteúdos a partir de conexões entre conhecimentos dos próprios alunos
Flores (2020)	Caminhando no sentido de atender ao que nos propomos enquanto pesquisadores, procuramos explorar a formalização dos conceitos por meio da construção axiomática do conjunto dos números racionais, porém não simplesmente reproduzindo essa construção teórica, como já encontrado em materiais disponíveis, mas sim pensando em uma proposta que levasse em conta o desenvolvimento do pensamento matemático. Nesse intuito, encontramos, na Teoria dos Três Mundos da Matemática, essa base teórica. (p.158-159)	Três Mundos da Matemática Construção axiomática do conjunto dos números racionais Levar em conta o desenvolvimento do pensamento matemático
Fonseca (2020)	Ainda, acreditamos que o trabalho realizado vem a contribuir com pesquisas no âmbito da	Entender que os alunos compreendem de formas

	Educação Matemática, voltadas a discussão da aprendizagem matemática, posto que verificou a existência dos tipos de compreensão propostos por Skemp e propôs outros intermediários: quase relacional e quase instrumental. Além disso, pode vir a colaborar com a prática docente, visto haver o entendimento de que os alunos compreendem de formas diferentes, o professor pode repensar e aprimorar estratégias de ensino. (p.274)	diferentes
Vidotti (2019)	“Do ponto de vista da formação de professores, a proposta também contribuiu com a formação de competências referentes ao conhecimento pedagógico, uma vez que constituiu um espaço de experimentação, servindo para futuras reflexões quanto ao tipo de ensino que se deseja oferecer (VIDOTTI, KATO; 2017). Essas reflexões ficaram evidentes na fala do aluno Marcelo, quando questionado sobre o que aprendeu com as atividades desenvolvidas: “[...] além dos conteúdos de Cálculo, eu posso utilizar o que aprendi para dar uma aula, para projetar, criar uma aula mais iterativa com os alunos, onde eles tenham que criar um problema para eles resolverem”. (p.197)	Aprender aplicação de metodologias diferenciadas

Fonte: a autora (2024)

4.2 Categorização

Após o processo de unitarização e obtenção dos elementos aglutinadores, inicia-se a segunda etapa do processo de análise: a categorização das unidades construídas. A categorização é um processo de comparação constante entre os elementos aglutinadores, buscando o agrupamento de elementos semelhantes. Segundo Moraes (2003),

> A categorização, além de reunir elementos semelhantes, também implica nomear e definir as categorias, cada vez com maior precisão, na medida em que vão sendo construídas. Essa explicação das categorias se dá por meio do retorno cíclico aos mesmos elementos, no sentido da construção gradativa do significado de cada categoria. Nesse processo, as categorias vão sendo aperfeiçoadas e delimitadas cada vez com maior rigor e precisão. (Moraes, 2003, p.197).

Durante o desenvolvimento do processo de unitarização, percebeu-se que os elementos aglutinadores estavam referindo-se a três temas: referencial teórico e/ou metodológico utilizado no projeto de ensino, contribuições do projeto de ensino na formação dos licenciandos e conteúdos matemáticos desenvolvidos no projeto de ensino. Assim, estabeleceu-se um sistema de *color-code*, o qual é apresentado no QUADRO 9, para auxiliar no processo de categorização dos elementos aglutinadores.

QUADRO 9: Sistema *color-code* para categorização dos elemento aglutinadores

Tema	*Color-code*
referencial teórico e/ou metodológico utilizado no projeto de ensino	(azul)
contribuições do projeto de ensino na formação dos licenciandos	(rosa)
conteúdos matemáticos desenvolvidos	(verde)

Fonte: a autora (2024)

Utilizando o sistema de *color-code*, temos que o QUADRO 8, referente ao exemplo do processo de unitarização, pode ser reapresentado no QUADRO 10 abaixo. No Anexo II todos os elementos aglutinadores são apresentados com cores de acordo com o sistema de *color-code*.

QUADRO 10: exemplo processo de unitarização e sistema de *color-code*

Origem	Unidade de significado	Título / Elemento aglutinador
Bueno (2021)	“[...] frisaram que uma postura docente que não prioriza as manipulações algébricas e as definições formais é capaz de trazer mais motivação aos educandos, servindo, inclusive, como uma inspiração para sua futura atuação profissional.” (p.179)	Motivação para estudar Inspiração para a sua futura atuação profissional
Ferreira (2017)	Em suma, os dados nos mostraram que, apesar do grande nível de abstração da AAM (Álgebra Abstrata Moderna), é possível, e mais fácil, ensinar seus conteúdos a partir de conexões entre conhecimentos dos próprios alunos, como os aprendidos na Educação Básica ou em outras disciplinas de matemática do Ensino Superior (p.232)	Ensinar conteúdos a partir de conexões entre conhecimentos dos próprios alunos
Flores (2020)	Caminhando no sentido de atender ao que nos propomos enquanto pesquisadores, procuramos explorar a formalização dos conceitos por meio da construção axiomática do conjunto dos números racionais, porém não simplesmente reproduzindo essa construção teórica, como já encontrado em materiais disponíveis, mas sim pensando em uma proposta que levasse em	Três Mundos da Matemática Construção axiomática do conjunto dos números racionais Levar em conta o desenvolvimento do

	conta o desenvolvimento do pensamento matemático. Nesse intuito, encontramos, na Teoria dos Três Mundos da Matemática, essa base teórica. (p.158-159)	pensamento matemática
Fonseca (2020)	Ainda, acreditamos que o trabalho realizado vem a contribuir com pesquisas no âmbito da Educação Matemática, voltadas a discussão da aprendizagem matemática, posto que verificou a existência dos tipos de compreensão propostos por Skemp e propôs outros intermediários: quase relacional e quase instrumental. Além disso, pode vir a colaborar com a prática docente, visto haver o entendimento de que os alunos compreendem de formas diferentes, o professor pode repensar e aprimorar estratégias de ensino. (p.274)	Entender que os alunos compreendem de formar diferentes
Vidotti (2019)	“Do ponto de vista da formação de professores, a proposta também contribuiu com a formação de competências referentes ao conhecimento pedagógico, uma vez que constituiu um espaço de experimentação, servindo para futuras reflexões quanto ao tipo de ensino que se deseja oferecer (VIDOTTI, KATO; 2017). Essas reflexões ficaram evidentes na fala do aluno Marcelo, quando questionado sobre o que aprendeu com as atividades desenvolvidas: “[...] além dos conteúdos de Cálculo, eu posso utilizar o que aprendi para dar uma aula, para projetar, criar uma aula mais iterativa com os alunos, onde eles tenham que criar um problema para eles resolverem”. (p.197)	Aprender aplicação de metodologias diferenciadas

Fonte: a autora (2024)

4.2.1 Categoria 1: referencial teórico e/ou metodológico

A primeira categoria surgiu a partir da identificação dos referenciais teóricos e metodológicos utilizados pelas teses analisadas para o desenvolvimento do projeto de ensino proposto. Como referencial metodológico para aplicação das atividades propostas, foi identificado a metodologia da Modelação Matemática para o ensino das disciplinas de Cálculo nos trabalhos de Bueno (2021) e Vidotti (2019); a metodologia de Modelação juntamente com a metodologia de Análise de Erros para o ensino da disciplina de Fundamentos de Análise no trabalho de Flores (2020); a metodologia de Investigação Matemática para o ensino da disciplina de Geometria não euclidiana no trabalho de Fonseca (2020); e a metodologia da Resolução de Problemas para o ensino da disciplina de Álgebra no trabalho de Ferreira (2017). Para a análise dos dados encontrados na aplicação das atividades propostas, Bueno

(2021), Vidotti (2019) e Flores (2020) utilizaram como referencial teórico a teoria dos Três Mundos Matemática de David Tall o qual se refere ao desenvolvimento do pensamento matemático; Fonseca (2020) utilizou como referencial teórico as concepções de Richard Skemp sobre a aprendizagem matemática.

QUADRO 11: elementos aglutinadores da primeira categoria

Origem	Elemento Aglutinador
Ferreira (2017)	Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas
Flores (2020)	Três Mundos da Matemática
Fonseca (2020)	Tipos de compreensão de Richard Skemp
Fonseca (2020)	Investigações Matemáticas
Vidotti (2019)	Modelagem Matemática
Vidotti (2019)	Análise de Erros
Bueno (2021)	Três Mundo da Matemática
Bueno (2021)	Modelagem Matemática

Fonte: a autora (2024)

4.2.2 Categoria 2: contribuições na formação dos licenciandos

A segunda categoria surgiu a partir da análise dos resultados principais das teses analisadas, onde o objetivo era compreender quais foram as contribuições do projeto de ensino proposto para a formação dos licenciandos.

QUADRO 12: elementos aglutinadores da segunda categoria

Ferreira (2017)	Ensinar conteúdos a partir de conexões entre conhecimentos dos próprios alunos
Ferreira (2017)	Aluno como principal agente no processo ensino-aprendizagem-avaliação
Flores (2020)	Levar em conta o desenvolvimento do pensamento matemática
Flores (2020)	Existem diferentes maneiras de pensar matematicamente
Fonseca (2020)	Manipulação de materiais concretos favorece a aprendizagem
Fonseca (2020)	Possibilidades para inserir esses conhecimentos na Educação Básica
Fonseca (2020)	Entender que os alunos compreendem de formar diferentes

Vidotti (2019)	Aprender aplicação de metodologias diferenciadas
Vidotti (2019)	Erro como oportunidade de aprendizado
Bueno (2021)	Experiências mais palpáveis são mais significativas
Ferreira (2017)	Motivação para estudar
Ferreira (2017)	Relação de teoria e prática
Bueno (2021)	Motivação para estudar
Bueno (2021)	Inspiração para a sua futura atuação profissional

Fonte: a autora (2024)

4.2.3 Categoria 3: conteúdos matemáticos desenvolvidos

A terceira categoria também surgiu a partir da análise dos resultados principais das teses analisadas, onde o objetivo era compreender quais conhecimentos matemáticos necessários para o ensino da Matemática na Educação Básica foram desenvolvidos nos projetos de ensino proposto pelas teses. Os conhecimentos identificados na análise foram categorizados de acordo com o modelo MTSK (Carrillo *et al*, 2014 e 2018) descritos no capítulo 2.

QUADRO 13: elementos aglutinadores da terceira categoria

KoT	
Ferreira (2017)	Justificativas formais de propriedades e definições trabalhados na Educação Básica
Flores (2020)	Construção axiomática do conjunto dos números racionais
Flores (2020)	Mundo Corporificado: gráficos, diagramas, usos cotidianos
Flores (2020)	Mundo Simbólico: definições, justificativas, exemplos
Fonseca (2020)	Compreensão relacional (saber os porquês)
Fonseca (2020)	Conhecimentos geométricos
Fonseca (2020)	Tópicos de geometria esférica
Vidotti (2019)	Aplicação dos conceitos
KSM	
Ferreira (2017)	Aprender as semelhanças e diferenças entre os conteúdos
Flores (2020)	Relação da construção formal dos Números Racionais com a construção na Educação Básica

Flores (2020)	Significados dos números racionais no contexto da Educação Básica
Fonseca (2020)	Articulação de conhecimentos da geometria plana com os da geometria esférica
Vidotti (2019)	Relações entre teoria e prática
KPM	
Ferreira (2017)	Hipóteses de propriedades matemáticas
Ferreira (2017)	Ensinar os licenciandos a serem mais críticos em relação às demonstrações
Ferreira (2017)	Melhorar a escrita matemática
Flores (2020)	Mundo Formal: formalização dos conceitos, linguagem matemática correta, demonstrações

Fonte: a autora (2024)

4.3 Metatextos

A última parte da análise refere-se à construção dos metatextos que, segundo Moraes (2003), são construídos “num esforço em expressar intuições e novos entendimentos atingidos a partir da impregnação intensa com o *corpus* da análise” (Moraes, 2003, p.205). Estes textos, apesar de serem organizados a partir da unitarização e categorização, não se resumem apenas a uma montagem. Para Moraes (2003), os metatextos,

> [...] mais do que apresentar as categorias construídas na análise, devem constituir-se a partir de algo importante que o pesquisador tem a dizer sobre o fenômeno que investigou, um argumento aglutinador ou tese que foi construído a partir da impregnação com o fenômeno e que representa o elemento central da criação do pesquisador. Todo texto necessita ter algo importante a dizer e defender e deveria expressá-la com o máximo de clareza e rigor. (Moraes, 2003, p.207).

Assim, os metatextos que serão apresentados a seguir, expressam o contexto analisado baseado nas minhas percepções juntamente com os conhecimentos dos referenciais teóricos estudados.

4.3.1 Referencial teórico e/ou metodológico

A intenção deste texto é apresentar um resumo de como foi realizado a proposta de ensino de cada tese analisada, ou seja, apresentar como a teoria ou metodologia de ensino escolhida foi aplicada e como foi analisada posteriormente para obtenção dos resultados da pesquisa.

A teoria dos Três Mundos da Matemática de David Tall foi utilizada por Flores (2020) e Bueno (2021) como fundamentação teórica para a criação de suas propostas de ensino. Segundo os pesquisadores, essa teoria “possibilita analisar o desenvolvimento do pensamento matemático desde sua forma mais elementar até o pensamento matemático mais avançado” (Flores, 2020, p.30) e “se constitui em uma reconstrução contínua de conexões mentais que evolui no desenvolvimento de estruturas do conhecimento cada vez mais sofisticadas” (Bueno, 2021, p.16). Os três mundos apresentados por David Tall são: o Mundo Conceitual Corporificado, que é “construído a partir das percepções e ações que acontecem no mundo real e se desenvolvem até a criação de imagens mentais cada vez mais sofisticadas” (Bueno, 2021, p.86); o Mundo Operacional Simbólico, que é “composto por símbolos que representam as percepções e as ações presentes no Mundo Corporificado, baseando-se no uso e na manipulação desses símbolos” (Flores, 2020, p.31); e o Mundo Formal Axiomático, no qual “se constrói o conhecimento a partir de axiomas que geram teoremas, corolários, etc., cujas propriedades são deduzidas por demonstrações matemáticas formais” (Bueno, 2021, p.87).

Flores (2020) desenvolveu, em uma turma da disciplina denominada Fundamentos de Análise composta por oito estudantes do curso de Licenciatura em Matemática de um Instituto Federal do estado do Rio Grande do Sul ao longo de 14 encontros (totalizando 44 h/a), uma proposta de ensino composta por nove atividades sobre conceitos relacionados com os números racionais. Tais atividades foram desenvolvidas de forma que:

> [...] os estudantes pudessem, em um primeiro momento, evocar suas imagens conceituais para um dado conceito, explorando os significados pessoais construídos ao longo da trajetória escolar e acadêmica e só depois deveriam apresentar a definição formal, baseada em um sistema axiomático. (Flores, 2020, p.159).

Já Bueno (2021), que tinha o objetivo de apresentar o conceito de Integral para uma turma de Cálculo a partir de uma abordagem diferente daquelas propostas pelos livros didáticos, realizou em dois encontros, em uma turma formada por sete alunos do terceiro semestre de um curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição de ensino do Estado do Rio Grande do Sul, uma “atividade de Modelação, fundamentada na teoria dos Três Mundos da Matemática e em aspectos históricos da Construção do Cálculo.” (Bueno, 2021, p.113).

Com essa atividade, o pesquisador buscou desconstruir a visão que os alunos têm sobre a criação histórica dos conceitos de Integral, que, segundo um questionário aplicado antes da realização da atividade, “consideravam que os conceitos estudados nessa área foram desenvolvidos desvinculados da realidade” (Bueno, 2021, p.154). Assim, com a atividade de Modelação “procurou-se contribuir para que os acadêmicos pudessem desenvolver ideias utilizando, de acordo com Tall (2010), suas percepções sobre a realidade, operações matemáticas e o uso de linguagem adequada.” (Bueno, 2021, p.157). A Modelagem Matemática foi escolhida pelo pesquisador como referencial metodológico, pois o pesquisador entende que este método de ensino “pode auxiliar os acadêmicos na busca pela construção de significados relativos ao conceito de integral” (Bueno, 2021, p.150) e “pode dar aos acadêmicos a oportunidade de estudar Matemática por meio de situações-problemas concretas” (Bueno, 2021, p.151). Ao citar Rodney Bassanezi, um dos principais precursores da Modelagem Matemática no Brasil, o pesquisador define essa metodologia como:

> [...] um processo dinâmico utilizado para obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas em linguagem usual (Bassanezi, 2002 *apud* Bueno, 2021, p.151).

Vidotti (2019), outra pesquisadora que também utilizou a Modelagem Matemática como referencial metodológico de sua pesquisa, também cita Rodney Bassanezi ao explicar que essa metodologia, no contexto da Matemática Aplicada (área a qual Cálculo está inserido), é entendida “como um processo de tradução de um problema não matemático para uma linguagem matemática, sendo que esse processo envolve a construção de um modelo, que é a representação ideal, em termos matemáticos, de certos aspectos de uma situação” (Vidotti, 2019, p.94).

Vidotti (2019) tinha o objetivo de investigar o potencial da Modelagem Matemática para explorar os erros dos estudantes a fim de problematizá-los. A pesquisadora realizou, em uma turma de 11 alunos que cursavam a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II (CDI II) do terceiro ano de Licenciatura em

Matemática da Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) – Campus de Paranavaí, atividades de Modelagem Matemática onde “os alunos foram instigados a pensarem em problemas da realidade que pudessem ser modelados por uma função de várias variáveis e resolvidos aplicando conceitos do CDI II” (Vidotti, 2019, p.195). Tais atividades foram analisadas de acordo com a taxionomia do usos dos erros apresentada por Borasi (1996), onde o intuito da pesquisadora era “identificar as relações construídas entre a Modelagem Matemática e possíveis formas de explorar os erros cometidos pelos alunos nessas atividades” (Vidotti, 2019, p.103).

Já Fonseca (2020), utilizou a metodologia Investigação Matemática, proposta pelo educador matemático português João Pedro da Ponte, como referencial metodológico de sua pesquisa. Essa metodologia de ensino possibilita “o envolvimento dos estudantes com tarefas que permitam a eles vivenciar processos e características da atividade matemática” (Fonseca, 2020, p.84), ou seja, apresenta aos alunos “propostas de trabalho que envolvam conceitos matemáticos, para que tenham a oportunidade de experimentar, discutir, formular, conjecturar, generalizar, provar, comunicar suas ideias e tomar decisões” (Fonseca, 2020, p.81-82).

O objetivo da pesquisa de Fonseca (2020) era analisar como alunos de um curso de Licenciatura em Matemática compreendem relações métricas em triângulos esféricos a partir de relações na geometria euclidiana. Para o desenvolvimento da pesquisa, a pesquisadora realizou, ao longo de dez encontros, um projeto de ensino em uma turma extraclasse composta por doze alunos, matriculados em diferentes semestres do curso de licenciatura em matemática do Instituto Federal Farroupilha - Campus Alegrete (IFFar-Alegrete). A sequência de atividades realizadas nesse projeto “focaram em explorações no plano, na superfície esférica e em triângulos esféricos” (Fonseca, 2020, p.98) e “foi baseada nos princípios das investigações matemáticas em sala de aula [...] pautada em três etapas: introdução da tarefa, realização da investigação e discussão dos resultados e formalização/sistematização” (Fonseca, 2020, p.100). Para análise dos dados, a pesquisadora buscou em “Skemp (1989, 2016a, 2016b) elementos para analisar se a compreensão desenvolvida pelos participantes, quanto aos tópicos de geometria esférica trabalhados, é de ordem instrumental ou relacional” (Fonseca, 2020, p.29). A pesquisadora explica que as concepções de Richard Skemp sobre a aprendizagem matemática são categorizadas em “aprendizagem por memorização (ou habitual) e aprendizagem esquemática (ou inteligente), relacionadas, respectivamente, à compreensão instrumental e à compreensão relacional". (Fonseca, 2020, p.60) e que "a compreensão instrumental se refere à utilização de regras para resolução de atividades matemáticas, sem entendimento do porquê, e a compreensão relacional é saber resolver as situações propostas com fundamentação, é saber o porquê" (Fonseca, 2020, p.29).

E por fim, em Ferreira (2017) foi identificado o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas - MEAAMaRP, metodologia desenvolvida pelo Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas, da Universidade Estadual Paulista - Júlio de Mesquita Filho, sob a orientação da profª Drª Lourdes de la Rosa Onuchic. Ferreira (2017) explica que a MEAAMaRP surgiu a partir da necessidade de auxiliar professores que participavam de uma formação continuada a utilizarem a metodologia Resolução de Problemas em sala de aula.

A Resolução de Problemas, constituída pelo matemático e pesquisador George Polya, pode ser abordada de três formas: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar matemática para resolver problemas e ensinar através da resolução de problemas. E em cada abordagem existem algumas etapas a serem seguidas. Diante das dificuldades de professores da Educação Básica em aplicar essa metodologia em sala de aula, Onuchic e Allevato (2011) produziram um roteiro para a aplicação da metodologia, que consiste em: preparação do problema; leitura individual; leitura em conjunto; resolução do problema; observar e incentivar; registros das resoluções na lousa; plenária; busca do consenso; e formalização do conteúdo.

Ferreira (2017) tinha como objetivo geral de sua pesquisa "levar os alunos do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Goiás (IFG) a construir um conhecimento satisfatório de Álgebra Abstrata Moderna e, torná-los capazes de refletir sobre as potencialidades que esse conhecimento poderá ter em sua futura prática docente" (Ferreira, 2017, p.96). Assim, para a realização da pesquisa, o pesquisador desenvolveu, em dezesseis encontros durante a disciplina Álgebra II do curso de Licenciatura em Matemática do IFG, um projeto de ensino que fazia uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na inserção dos principais conceitos da AAM (Álgebra Abstrata Moderna). O pesquisador escolheu utilizar a MEAAMaRP, pois ele acredita que essa metodologia “é capaz de levar o aluno a ser construtor do seu próprio conhecimento” (Ferreira, 2017, p.129).

4.3.2 Contribuições na formação dos licenciandos

Como apresentado no metatexto anterior, as teses analisadas realizaram projetos de ensino no qual utilizou-se metodologias de ensino diferentes da tradicional (professor apresenta no quadro as definições, propriedades, teoremas e demonstrações, e os alunos copiam e depois resolvem listas de exercícios). Cada tese tinha um objetivo de pesquisa diferente e utilizou uma teoria ou metodologia de ensino diferente, mas apresentaram alguns resultados similares em relação aos pontos positivos da proposta de ensino para a formação dos licenciandos.

O primeiro ponto importante a ser destacado é o fato de que o uso de metodologias de ensino diferenciadas serviu como um agente motivador para estudar os conteúdos da disciplina, como pode ser observado nos trechos dos trabalhos de Ferreira (2017) e Bueno (2021):

> Os conteúdos de AAM se apresentam de forma bastante significativa nos conteúdos da Educação Básica. É importante que o professor dessa disciplina busque sempre enfatizar essa relação. Pois isso, além de promover uma melhor formação do professor, ao estabelecer uma relação entre teoria e prática, serve como um agente motivador, incentivando os alunos a se dedicarem mais ao estudo dessa disciplina. Acreditamos, também, que o mesmo poderá ser feito para outras disciplinas de matemática superior. (Ferreira, 2017, p.237).
> “[...] frisaram que uma postura docente que não prioriza as manipulações algébricas e as definições formais é capaz de trazer mais motivação aos educandos, servindo, inclusive, como uma inspiração para sua futura atuação profissional.” (Bueno, 2021, p.179).

No trecho citado acima da pesquisa de Bueno (2021) também é possível notar que para os licenciando envolvidos na pesquisa, o uso da metodologia também serviu como uma inspiração para a sua futura atuação profissional, o que também foi identificado pela pesquisa de Vidotti (2019):

> “Do ponto de vista da formação de professores, a proposta também contribuiu com a formação de competências referentes ao conhecimento pedagógico, uma vez que constituiu um espaço de experimentação, servindo para futuras reflexões quanto ao tipo de ensino que se deseja oferecer (VIDOTTI, KATO; 2017). Essas reflexões ficaram evidentes na fala do aluno Marcelo, quando questionado sobre o que aprendeu com as atividades desenvolvidas: “[...] além dos conteúdos de Cálculo, eu posso

> utilizar o que aprendi para dar uma aula, para projetar, criar uma aula mais iterativa com os alunos, onde eles tenham que criar um problema para eles resolverem". (Vidotti, 2019, p.197)

Em relação a esse ponto, o autor Fiorentini (2005) destaca que o professor formador das disciplinas matemáticas não ensina apenas Matemática, "ensina também um jeito de ser pessoa e professor, isto é, um modo de conceber e estabelecer relação com o mundo e com a Matemática e seu ensino" (Fiorentini, 2005, p.110-111). Assim, entende-se que a metodologia utilizada pelo professor formador das disciplinas matemáticas é muito importante para a formação do futuro professor, pois além de aprender um modo de conceber e tratar a Matemática, o licenciando também vai aprender um modo de como ensinar e avaliar a aprendizagem de seus alunos. E isso é outro ponto destacado pelas pesquisas analisadas.

A pesquisa de Ferreira (2017) mostrou que com o uso da metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, os licenciando aprenderam como ensinar conteúdos a partir de conexões entre os conhecimentos dos próprios alunos e como manter o aluno como principal agente no processo de ensino-aprendizagem-avaliação, como pode ser observado nos trechos a seguir:

> Em suma, os dados nos mostraram que, apesar do grande nível de abstração da AAM (Álgebra Abstrata Moderna), é possível, e mais fácil, ensinar seus conteúdos a partir de conexões entre conhecimentos dos próprios alunos, como os aprendidos na Educação Básica ou em outras disciplinas de matemática do Ensino Superior (Ferreira, 2017, p.232).
> [...] a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, além de ser um elemento motivador, coloca o aluno como principal agente no processo de ensino-aprendizagem-avaliação, levando-o a refletir, discutir e tirar suas próprias conclusões, sem esperar que o professor pense por ele e, consequentemente, produzindo aprendizagem. Além disso, foi detectado em alguns momentos, durante o uso dessa metodologia, que o fato de o aluno conseguir resolver um problema não garante sua aprendizagem. Isso serviu para mostrar que realmente nessa metodologia, a avaliação acontece de forma integrada ao ensino, promovendo a aprendizagem. (Ferreira, 2017, p.240).

Também é importante destacar um dos resultados da pesquisa de Vidotti (2019), na qual a pesquisadora aponta que por meio da Taxionomia do uso dos erros apresentado por Borasi, os licenciandos aprenderam a ver o erro como uma oportunidade de aprendizado:

> As diferentes variações dos usos dos erros, apontadas por Borasi (1996), surgiram nas atividades realizadas pelos sujeitos da nossa pesquisa, naturalmente, por meio da Modelagem Matemática. Em diversas situações, os próprios alunos perceberam os seus erros, e, assumindo uma postura de remediação/tarefa ou remediação/conteúdo, puderam corrigi-los. Os erros não foram vistos como fracasso, mas como oportunidades de aprendizagem. A professora|pesquisadora não pediu para que os alunos apagassem as suas resoluções incorretas e as refizessem, pelo contrário, precisavam entender em que e por que erraram para que pudessem resolver o problema. (Vidotti, 2019, p.196).

Já a pesquisa de Flores (2020) mostrou que aulas planejadas com base na teoria dos Três Mundos da Matemática, possibilita aos licenciandos o entendimento de que existem diferentes maneiras de pensar matemática e que é possível planejar aulas levando em conta o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos:

> [...] entendemos que o quadro teórico escolhido conseguiu sustentar uma proposta de formação de futuros licenciados em matemática no tocante aos conceitos relacionados aos Números Racionais, pois salienta que existem diferentes maneiras de se pensar matematicamente, chamando atenção para que o professor esteja atento ao modo como os alunos pensam e proporcione diferentes abordagens de um mesmo conceito, levando em consideração a jornada individual de cada estudante em sua evolução do pensamento matemático. (Flores, 2020, p.161).
> Caminhando no sentido de atender ao que nos propomos enquanto pesquisadores, procuramos explorar a formalização dos conceitos por meio da construção axiomática do conjunto dos números racionais, porém não simplesmente reproduzindo essa construção teórica, como já encontrado em materiais disponíveis, mas sim pensando em uma proposta que levasse em conta o desenvolvimento do pensamento matemático. Nesse intuito, encontramos, na Teoria dos Três Mundos da Matemática, essa base teórica. (Flores, 2020, p.158-159).

E por fim, outro ponto importante destacado pelas pesquisas de Fonseca (2020) e Bueno (2021) é o fato de que com o uso de metodologias diferenciadas nas disciplinas matemáticas, os licenciandos aprenderam que a manipulação de materiais concretos favorecem a aprendizagem e que experiências mais palpáveis são mais significativas:

> Sendo assim, os resultados apontam que a sequência de atividades, pautadas em tarefas exploratórias, contribuiu para a articulação dos conhecimentos prévios da geometria plana com novos da geometria esférica, e mostraram que a manipulação de materiais concretos favorece a compreensão de conceitos geométricos, assim como a utilização de um software de geometria dinâmica, no caso deste estudo, o GeoGebra. Ademais, pelos resultados, constatamos que a abordagem utilizada possibilitou o desenvolvimento da compreensão relacional dos participantes. (Fonseca, 2020, p.272-273).

> "[...] a abordagem proposta e aplicada junto aos futuros professores de Matemática foi bem aceita pela turma, que, conforme entendeu-se com o questionário inicial, estava habituada com realidades pedagógicas pautadas pelo paradigma: definição, teorema, exemplos e exercícios. Sendo assim, os alunos trouxeram sua percepção sobre a prática alternativa, construída nos mundos *Conceitual Corporificado* e *Operacional Simbólico*, destacando, nos metatextos elaborados por meio da ATD, que experiências palpáveis são mais significativas, trazendo, portanto, mais sentido para o que se estuda." (Bueno, 2021, p.179).

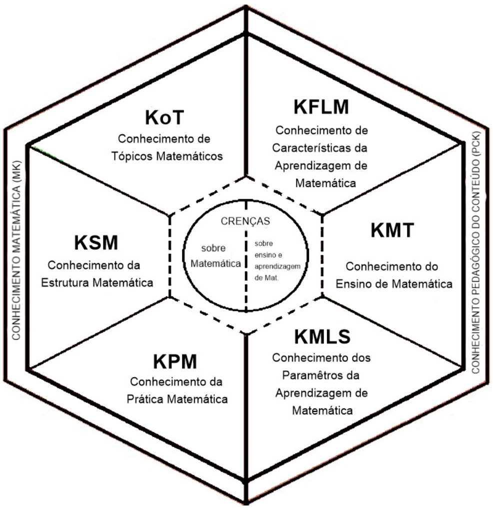
Assim, percebe-se que com o uso de metodologias diferenciadas nas disciplinas matemáticas, os licenciandos puderam aprender questões pedagógicas sobre o ensino da Matemática, conhecimentos que são importantes para o professor de matemática da educação básica como destacado por Shulman (1986) e Ball (2008).

4.3.3 Conteúdos matemáticos desenvolvidos

Neste metatexto serão apresentados o que se identificou nos resultados das teses analisadas em relação aos conhecimentos matemáticos desenvolvidos nos projetos de ensino propostos. Para essa apresentação, optou-se em categorizar os conhecimentos identificados de acordo com o modelo teórico MTSK (Carrillo *et al*, 2014 e 2018), pois acredita-se que os conhecimentos descritos por ele são conhecimentos utilizados por professores de Matemática da Educação Básica no Brasil e que são formados nos cursos de Licenciatura em Matemática.

Assim, o modelo MTSK, que já foi apresentado detalhadamente no capítulo II e relembrado aqui novamente pela figura abaixo, apresenta os conhecimentos necessários ao professor de matemática, sendo eles divididos de acordo com conhecimentos matemáticos e pedagógicos, os quais são representados pelos dois domínios principais. Neste metatexto, serão apresentados trechos das teses analisadas que foram identificados como conhecimentos referentes ao domínio Conhecimento Matemático (MK).

Figura 2: Conhecimento Especializado do Professor de Matemática - MTSK



Fonte: Carrillo, 2018 - tradução da autora

O subdomínio KoT, refere-se ao conhecimento dos procedimentos, das definições e das representações de um determinado conteúdo, assim como os fenômenos e suas aplicações na matemática e outras áreas de conhecimento. Com a análise dos resultados principais das teses, identificou-se que esses conhecimentos foram desenvolvidos nas atividades propostas pelos pesquisadores.

Na pesquisa de Flores (2020), que desenvolveu atividades da disciplina Fundamentos de Análise baseadas na teoria dos Três Mundo da Matemática, foram desenvolvidas as características do Mundo Corporificado “ao solicitar que os estudantes desenhassem gráficos e diagramas ou, ainda, quando procuramos conhecer os significados pessoais dos conceitos, pois esperávamos que as respostas trouxessem indícios de usos cotidianos e de corporificações” (Flores, 2020, p.159) e do Mundo Simbólico, o qual “apresenta nas definições, nas produções de justificativas pedidas ou no trabalho com exemplos solicitados” (Flores, 2020, p.159)

A pesquisa de Ferreira (2017) mostrou que o conhecimento de Álgebra Abstrata Moderna, ou seja, Teoria de Números, Anéis e Grupos, “pode ser usado como principal instrumento para se fazer justificativas formais de propriedades e, até mesmo, de definições trabalhadas na Educação Básica” (Ferreira, 2017, p.237), como por exemplo, “as definições e propriedades das operações dos números inteiros, a importância do zero e do um para as operações numéricas e a relação existente entre estruturas como matrizes e polinômios” (Ferreira, 2017, p.230).

Já a pesquisa de Fonseca (2020) mostrou que a sequência de atividades pautadas em tarefas exploratórias “contribuiu para a articulação dos conhecimentos prévios da geometria plana com novos da geometria esférica” (Fonseca, 2020, p.272) e “possibilitou o desenvolvimento da compreensão relacional [saber os porquês] dos participantes” (Fonseca, 2020, p.273). Para a pesquisadora, com a atividade realizada os licenciandos tiveram uma nova visão sobre as possibilidades do campo da Geometria e seus possíveis usos na educação básica:

> [...] pensamos que o trabalho realizado venha a contribuir com a ampliação dos conhecimentos geométricos dos sujeitos participantes, possibilitando-lhes nova visão sobre o desenvolvimento do campo geométrico almejando, enquanto possíveis desdobramentos, que possam, no futuro, em sua atuação docente, inserir estes conhecimentos na educação básica, respeitadas as características do público a que se destinar ou que possam aprofundar seus estudos em geometrias não-euclidianas, buscando elementos de áreas da matemática, como por exemplo, da geometria diferencial. (Fonseca, 2020, p.273).

As pesquisas de Ferreira (2017) e Vidotti (2019) também mostraram que, com as atividades realizadas, os licenciandos puderam perceber as aplicabilidades dos conteúdos estudados na disciplina de Álgebra e Cálculo, respectivamente, tanto na matemática e outras áreas de conhecimento como no ensino da matemática na educação básica, como pode ser observado nos trechos a seguir:

> [...] aplicações da Álgebra Abstrata Moderna em coisas importantes do mundo real, como ocultação de informações (criptografia) e transmissão de informações (teoria de códigos) (Ferreira, 2017, p.230).
>
> Para além desses objetivos, vale destacar outras contribuições oportunizadas aos estudantes por meio das atividades implementadas, como o estabelecimento de relações entre a Matemática e a realidade, proporcionando uma visão diferenciada dos conceitos de CDI II, em que é possível imaginar suas aplicações quando olham para determinados objetos. Nesse contexto, constituiu-se um espaço importante na formação desses estudantes por possibilitar reflexões acerca dos distanciamentos entre teoria e prática na Matemática. Esses apontamentos ficaram mais evidentes nas entrevistas, quando foram questionados sobre o que aprenderam com as atividades desenvolvidas, uma vez que vários deles responderam que aprenderam a aplicar os conceitos do CDI II em situações reais. (Vidotti, 2019, p.196-197).

Os conhecimentos descritos no subdomínio KSM, que refere-se aos conhecimentos das conexões entre diferentes conteúdos ou conexões entre níveis de dificuldades do mesmo conteúdo, também foram identificados nas teses analisadas.

A pesquisa de Fonseca (2020) mostrou que a atividade realizada "contribuiu para a articulação dos conhecimentos prévios da geometria plana com novos da geometria esférica" (Fonseca, 2020, p.272). Já as pesquisas de Ferreira (2017) e Flores (2020) mostraram que com as atividades propostas nas disciplinas de Álgebra e Fundamentos de Análise, respectivamente, foi possível relacionar os conteúdos da disciplina com conteúdos da educação básica, como pode ser observado nos trechos a seguir:

> Ao discutirmos as relações de equivalência, buscamos identificar, na Educação Básica, situações onde essas relações ocorriam. Discutimos as semelhanças e diferenças entre os Inteiros e os Polinômios; entre matrizes e inteiros; entre polinômios e matrizes, etc. (Ferreira, 2017, p.238).
>
> [...] ao longo da construção formal [dos números racionais], discutimos, com questões propostas na sequência de ensino, algumas das relações que podem ser tecidas e quando, a partir das manifestações dos próprios estudantes, foram feitas essas relações. Nas respostas para as primeiras tarefas já apareceram, naturalmente, algumas relações dos conceitos que estávamos trabalhando com os vistos na trajetória escolar dos estudantes, como, por exemplo, o conceito de frações equivalentes. Ao propormos questões que trabalharam com mais profundidade essa relação, percebemos que a maioria dos estudantes conseguiu fazer a ligação entre as tarefas respondidas e o conceito de fração equivalente conhecido desde o Ensino Fundamental. Como mais alguns exemplos das relações dos conceitos formais estudados com a Educação Básica, podemos citar a dúvida que os estudantes mencionaram sobre o porquê do uso do mínimo múltiplo comum na operação de adição. Tal dúvida foi esclarecida a partir do momento em que eles relacionaram o uso com o conceito de equivalência e, também, após a discussão gerada na retomada das propriedades das operações, principalmente focada no significado dos elementos neutro e simétrico. (Flores, 2020, p.161-162).

E por fim, o subdomínio KPM, que refere-se ao conhecimento dos procedimentos e características do trabalho matemático, ou seja, o desenvolvimento e aperfeiçoamento da escrita matemática, assim como os processos de demonstração, também foram identificados nos resultados obtidos pelas teses analisadas, como pode ser observado na pesquisa de Ferreira (2017):

> O ensino de AAM, nos cursos de Licenciatura, pode levar os alunos a serem mais criteriosos em relação às hipóteses de propriedades matemáticas e a se preocuparem com a composição da estrutura e dos elementos com que eles estiverem trabalhando. Durante discussões em sala de aula, os alunos a princípio acreditavam que estavam de posse de uma estrutura algébrica e, após uma analise criteriosa, descobriram que estavam enganados, levando-os a perceber que é preciso tomar cuidado em fazer afirmações baseadas apenas em uma primeira observação. (Ferreira, 2017, p.238).
>
> O ensino de AAM, nos cursos de Licenciatura, pode levar os alunos a serem mais críticos – não aceitar um resultado sem justificativa – e mais criteriosos – até o óbvio precisa ser justificado. Isso apareceu de forma bem

> contundente durante demonstrações de propriedades algébricas, como, por exemplo, o produto de um elemento, de um anel ou corpo, por zero, dá zero. (Ferreira, 2017, p.238).
> O ensino de AAM propicia um ambiente adequado para melhorar a escrita matemática do estudante. De fato, a aprendizagem de conceitos e, principalmente, procedimentos dessa disciplina exige muita escrita e interpretação lógica de textos e simbologias matemáticas. E, a inserção da MEAAMaRP nesse processo ajuda o professor a identificar erros de leitura e escrita dando, assim, condições dele fazer as devidas intervenções. (Ferreira, 2017, p.238).

A proposta de ensino realizada por Flores (2020) também possibilitou aos licenciandos desenvolver conhecimentos deste subdomínio, conhecimentos estes que a pesquisadora relacionou com o Mundo Formal dentro da teoria dos Três Mundos da Matemática. Segundo a pesquisadora, “as características formais permearam toda a proposta, pois, em todas as tarefas, exploramos a formalização dos conceitos trabalhados, salientando a linguagem matemática correta e a estrutura lógica de demonstração produzida a partir do sistema axiomático” (Flores, 2020, p.159)

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir do estudo do trabalho de pesquisadores da área de formação inicial do professor de Matemática e conhecimentos do docente, entendeu-se que as disciplinas matemáticas devem ser desenvolvidas de modo que o licenciando, e futuro professor de Matemática da Educação Básica, compreenda a Matemática do ponto de vista avançado, básico e pedagógico, e, para que isso ocorra é necessário o uso de metodologias diferenciadas do tradicional.

Assim, motivada pela questão de pesquisa **Quais são as possibilidades teórico-metodológicas para o desenvolvimento de disciplinas matemáticas do curso de Licenciatura em Matemática com foco na formação matemática do futuro professor de Matemática da Educação Básica?** objetivou-se compreender quais são as possibilidades teórico-metodológicas para o desenvolvimento das disciplinas matemáticas do curso de Licenciatura em Matemática de modo que os conhecimentos necessários para o ensino da Matemática na Educação Básica sejam contemplados.

Para a realização deste estudo, optou-se pela análise de pesquisas acadêmicas que tivessem realizado alguma proposta de ensino em aluma disciplina matemática do curso de Licenciatura em Matemática. Assim, buscou-se no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, por pesquisas que tivessem sido realizadas no período de 2015 a 2021, o que resultou em cinco teses: Bueno (2021), Flores (2020), Ferreira (2017), Fonseca (2020) e Vidotti (2019). Para análise dessas teses, optou-se pelo uso do método Análise Textual Discursiva (Moraes e Galiazzi, 2006).

Com os dados obtidos com a análise das teses selecionadas temos condições de responder a questão de pesquisa, onde conclui-se que é possível desenvolver as disciplinas matemáticas do curso de Licenciatura em Matemática através de metodologias de ensino, como por exemplo, a Modelagem Matemática, ou a Modelagem Matemática juntamente com Análise de Erros, ou a Investigação Matemática, ou a Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas; ou ainda através da teoria do pensamento matemático denominado Três Mundos da Matemática de David Tall.

Entende-se que desenvolver disciplinas matemáticas de formas diferentes do tradicional, como por exemplo as metodologias citadas acima, pode trazer contribuições positivas para a formação do futuro professor de Matemática da

Educação Básica, tais como: compreender que existem diferentes maneiras de pensar matematicamente; aprender que cada aluno compreende a Matemática de forma distinta; capacitar-se em como utilizar diferentes metodologias no ensino da Matemática; e aprender que experiências palpáveis favorecem a aprendizagem. Além disso, o uso de diferentes metodologias também servem como agente motivador para os estudantes se dedicarem aos estudos, o que pode contribuir para a diminuição da evasão da disciplina.

Conclui-se também que o uso de metodologias diferenciadas nas disciplinas matemáticas não atrapalha o ensino dos conteúdos matemáticos da disciplina, pois com essas metodologias, os conteúdos matemáticos podem ser desenvolvidos de modo que haja um equilíbrio entre formalização da Matemática estudada no curso de graduação e Matemática ensinada na escola e, com isso, os licenciandos podem compreender como os conhecimentos matemáticos avançados são importantes para o entendimento dos conteúdos da Educação básica.

Assim, acredita-se que esta pesquisa conseguiu atingir seu objetivo, mostrando as possibilidades para o desenvolvimento de disciplinas matemáticas do curso de Licenciatura em Matemática sem perder o foco da formação matemática do futuro professor da Educação Básica. Acredita-se também que esta pesquisa pode servir como guia para professores formadores de disciplinas matemáticas que busquem exemplos de como planejar suas aulas utilizando diferentes metodologias de ensino.

É importante destacar a falta de pesquisas que investiguem o uso de diferentes metodologias de ensino nas disciplinas matemáticas do curso de Licenciatura em Matemática. Considerando a importância de se desenvolver estudos para melhorar o desenvolvimento dessas disciplinas, como destacado por autores renomados na área da Educação Matemática (Dario Fiorentini, Plínio Moreira, Romulo Lins, entre outros), teve-se uma grande dificuldade de se encontrar pesquisas iguais as selecionadas por este estudo. Dentre o baixo número de trabalhos que pesquisaram sobre disciplinas matemáticas, a maioria foram realizadas de modo teórico, analisando documentos oficiais das instituições de ensino e/ou fazendo entrevistas com professores de cursos de Licenciatura em Matemática. Então, espera-se que, futuramente, haja mais pesquisas práticas sobre disciplinas matemáticas do curso de Licenciatura em Matemática, ou seja, pesquisas que testem o uso de diferentes metodologias nessas disciplinas.

Outro assunto que também deve ser mais investigado futuramente é a formação dos professores formadores das disciplinas matemáticas, pois se esse professor tem o papel de formar o futuro professor da Educação Básica não só matematicamente, mas também pedagogicamente, é necessário que este profissional tenha a formação adequada para tal.

Para finalizar, destaco[18] que, com o trabalho realizado, consegui respostas para os questionamentos que tinha antes de iniciar meus estudos no mestrado, entendendo que as disciplinas matemáticas podem ensinar os futuros professores de Matemática da Educação Básica os conhecimentos matemáticos necessários para desenvolver sua prática profissional com eficiência se forem desenvolvidas de modo que haja uma articulação entre os conteúdos matemáticos avançados com os conteúdos matemáticos da Educação Básica, seja através da metodologia tradicional de ensino ou através de metodologias de ensino diferenciadas.

[18] Escrito em primeira pessoa, pois representa as considerações pessoais da pesquisadora.

6 REFERÊNCIAS

BELO, E. S. V.; GONÇALVES, T. O. A identidade profissional do professor formador de professores de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.14, n.2, p.299-315, 2012.

ALMEIDA, Amanda Larissa de. **Um estudo interpretativo de teses e dissertações sobre disciplinas de conteúdo matemático : articulações com o campo da formação de professores de Matemática**. 2019. 206 p. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2019.

BALL, D.L.; THAMES, M.H.; PHELPS, G. Content Knowledge for teaching: what makes it special? **J. Teacher Educ.**, v.59, n.5, p.389-407, 2008.

BALL, D. L. y BASS, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. Comunicación presentada en el 43rd Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Oldenburg, Germany.

BRASIL. Parecer n. 1.302/2001 de 06 de novembro de 2001. Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf

BUENO, Rafael Winícius da Silva. **A construção do conceito de Integral: uma viagem pelos Três Mundos da Matemática**. 2019. 186 p. Tese (doutorado) - Pontifícia Universidades Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2021.

CARRILLO, J.; CONTRERAS, L. C.; CLIMENT, N.; ESCUDERO-AVILA, D.; FLORES-MEDRANO, E.; & MONTES, M. A. Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Universidad de Huelva Publicaciones, 2014.

CARRILLO-YAÑEZ, J., CLIMENT, N., MONTES, M., CONTRERAS, L. C., FLORES-MEDRANO, E., ESCUDERO-ÁVILA, D., MUÑOZ-CATALÁN, M. C. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**, *20*(3), 236-253, 2018.

FIORENTINI, D. A Formação Matemática e Didático-Pedagógica nas Disciplinas da Licenciatura em Matemática. Revista de Educação da PUC. Campinas: PUC, nº. 18, p.107-115, 2005.

FERREIRA, Nilton Cezar. **Uma proposta de ensino de álgebra abstrata moderna, com a utilização da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas, e suas contribuições para a formação inicial de professores de matemática**. 2017. 281 p. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2017.

FLORES, Marcia Viaro. **Construção dos números racionais na licenciatura: um estudo desenvolvido à luz dos Três Mundos da Matemática**. 2020. 180 p. Tese (doutorado) - Universidades Franciscana, Santa Maria, 2020.

FONSECA, Jussara Aparecida da. **Investigação de aspectos da compreensão relacional e da instrumental em geometria esférica**. 2020. 207 p. Tese (doutorado) - Universidade Franciscana, Santa Maria, 2020.

GIL, A. C. Métodos e técnicas de pesquisa social. São Paulo: Atlas, 2008.

LINS, R. C. A formação pedagógica em disciplinas de conteúdo matemático nas Licenciaturas em Matemática. **Revista de Educação PUC-Campinas**, Campinas, n.18, p.117-123, junho de 2005.

MORAES, R. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. **Ciência & educação**, v.9, n.2, p.191-211, 2003.

MORAES, R.; GALIAZZI, M. do C. Análise Textual Discursiva: processo reconstrutivo de múltiplas faces. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 12, n. 1, p. 117-128, 2006.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica. **Revista Brasileira de Educação**, Campinas, SP, p. 50-61, 2005

MOREIRA, Plínio Cavalcanti. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar** / Plínio Cavalcanti Moreira, Maria Manuela M. S. David. - 2. ed.; 3. reimp. - Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2018.

MORIEL JUNIOR, J. G.; WIELEWSKI, G. D.; MONTES, M. Conhecimentos mobilizados durante uma formação docente sobre por quês matemáticos: o caso da divisão de frações. *In*: VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática, 2013, Canoas.

SBEM. **Subsídios para a Discussão de Propostas para cursos de Licenciatura em Matemática: uma contribuição da Sociedade Brasileira de Educação Matemática**. São Paulo, 2002, 43 f.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. In.: **Educational Researcher**, v. 15, n.2, p. 4-14, 1986.

SHULMAN, L. S. Conhecimento e ensino: fundamentos para a nova reforma. **Cadernos Cenpec**, São Paulo, v.4, n.2, p.196-229, dezembro de 2014.

VIDOTTI, Daniela Barbieri. **Potencialidades da Modelagem Matemática e da Análise de Erros para o ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral em várias variáveis**. 2019. 212 p. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Maringá, 2019.

VIOLA DOS SANTOS, J. R.; LINS, R. C. Para uma outra formação matemática na Licenciatura em Matemática. **Perspectiva da Educação Matemática**, UFMS, v.7, n.14, p.339-357, 2014.

7 APÊNDICE

APÊNDICE I - TESES ANALISADAS

1. BUENO, 2021

Autor (a)	Rafael Winícius da Silva Bueno
Título	A construção do conceito de Integral: uma viagem pelos Três Mundos da Matemática
Orientador (a)	Professor Dr. Lori Viali
Tipo	Tese
Ano	2021
Programa	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática
Instituição	Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
Objetivo	Investigar a construção histórica do conceito de integral e como se dá o ensino desse conteúdo, à luz da teoria dos Três Mundos da Matemática, na formação inicial de professores de Matemática, e, então, buscar compreender como os futuros docentes percebem a introdução desse conceito, a partir de uma prática fundamentada no arcabouço teórico estudado.
Questão de Pesquisa	Que características dos Três Mundos da Matemática estão sendo trabalhadas na construção do conceito de integral, na formação inicial de professores de Matemática, no estado do Rio Grande do Sul, e como futuros docentes percebem a introdução desse conceito, a partir de uma prática alternativa, fundamentada no arcabouço teórico estudado?

De que forma a pesquisa foi desenvolvida?

“Esta pesquisa iniciou-se com um estudo documental ou bibliográfico sobre a construção histórica do Cálculo Diferencial e Integral. Esse processo, em conformidade com o que apontam Fiorentini e Lorenzato (2012), foi realizado a partir de análises históricas e revisão de estudos, tendo como material de trabalho referenciais publicados em documentos escritos, como livros, artigos científicos e anais de eventos, entre outros.” (p.112)
“Em um segundo momento, foram investigadas as ideias propostas por David Tall, na teoria dos Três Mundos da Matemática, a partir da leitura e interpretação do seu livro, *How Humans Learn to Think Mathematically: exploring the three worlds of mathematics*, e de diversos artigos publicados pelo autor, de forma isolada ou em

conjunto com outros estudiosos, que estão disponíveis na sua página pessoal. O objetivo dessa etapa da pesquisa foi buscar vincular as concepções de David Tall com os conteúdos estudados nas disciplinas de Cálculo e, de forma mais específica, com o ensino e aprendizagem do conceito de integral.” (p.112)

“Posteriormente, buscou-se identificar quais são os livros didáticos mais indicados nas referências básicas das disciplinas que trabalham com o conceito de integral, em cursos de Licenciatura em Matemática, no Estado do Rio Grande do Sul. A partir dessa busca, investigou-se que características dos Três Mundos da Matemática são exploradas na construção do conceito de integral nessas obras.” (p.112)

No desenvolvimento do estudo de caso, “aplicou-se, junto a uma turma da disciplina de Cálculo II, uma abordagem diferente daquelas propostas nos livros didáticos para a introdução do estudo do conceito de integral. A turma era formada por sete discentes, do terceiro semestre de um curso de Licenciatura em Matemática, de uma instituição de ensino do Estado do Rio Grande do Sul, sendo três do sexo feminino e quatro do masculino, com idades variando entre 21 e 38 anos. Assim, foi realizada com a turma, em dois encontros, uma atividade de Modelação, fundamentada na teoria dos Três Mundos da Matemática e em aspectos históricos da Construção do Cálculo.” (p.113)

No final das duas aulas, os acadêmicos também responderam a um questionário composto por duas perguntas: o que você pensa sobre o uso de experiências que requerem observação, descrição, ação e reflexão no estudo de Matemática? Você acredita que atividades de Modelação, como a que foi realizada em aula, são importantes para a Educação Matemática? “Os sete alunos responderam aos dois questionamentos, trazendo suas ideias e argumentos sobre o tema abordado. Dessa forma, suas narrativas foram estudadas para essa investigação à luz da Análise Textual Discursiva (ATD), conforme propõem Moraes e Galiazzi (2016)” (p.113-114)

“À luz do quadro teórico abordado, são trazidas as análises dos três livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral mais citados como referências básicas nos cursos de Licenciatura em Matemática de instituições de ensino superior (IES) do Estado do Rio Grande do Sul.” (p.116)

“Foi realizada a análise dos livros didáticos destacados [Stwart (2014), Leithold (1994) e Anton, Bivens e Davis (2014)], buscando-se, em cada caso, identificar quais *já-encontrados* são abordados, para caracterizar quais pré-requisitos os autores invocam, e que características da teoria dos Três Mundos da Matemática, proposta por David Tall, emergem na introdução do estudo do conceito de integral. Além disso, são analisados os exercícios propostos em cada obra, com o objetivo de verificar que estratégias são necessárias para a sua resolução e como essas estão relacionadas com os mundos: Corporificado, Simbólico e Formal.” (p.117-118)

“Com base nos estudos feitos acerca da construção histórica do Cálculo e da teoria dos Três Mundos da Matemática, entende-se que a utilização da Modelagem Matemática como método de ensino pode auxiliar os acadêmicos na busca pela construção de significados relativos ao conceito de integral.” (p.150)

“As atividades apresentadas nessa investigação foram realizadas no primeiro semestre de 2020, com uma turma da disciplina de Cálculo II, que prevê 72 horas-aula [...] Após participarem da disciplina de Cálculo I, na qual são estudados os conceitos de limite e derivada, além de suas aplicações, os acadêmicos, ao ingressarem na turma de Cálculo II, propõem-se, conforme a ementa da disciplina, a estudar: o conceito de integral como antiderivada; técnicas de integração; o teorema fundamental do Cálculo; a integral definida e suas propriedades; e aplicações de integrais definidas no cálculo de áreas e volumes de sólidos de revolução.” (p.153-154)

“No primeiro encontro com a turma, de quatro horas aula, foi feita a apresentação do docente, dos objetivos da disciplina e dos critérios de avaliação. A seguir, foi proposto um questionário para os acadêmicos [...] Analisando os resultados desse questionário inicial, que buscou caracterizar o grupo de participantes quanto a suas experiências anteriores no estudo de Cálculo Diferencial e Integral, pôde-se perceber, por exemplo, que consideravam que os conceitos estudados nessa área foram desenvolvidos desvinculados da realidade. Nesse sentido, conforme observa-se na Figura 39, todos os alunos da turma acreditavam que, inicialmente, foram desenvolvidas as criações conceituais abstratas e simbólicas e suas demonstrações formais, complexas e sofisticadas, dentro de um mundo exclusivamente matemático, para, somente depois, essas ideias e conceitos serem aplicados a alguns problemas concretos, relacionados a contextos reais subordinados a cenários físicos, sociais ou econômicos de suas respectivas épocas.” (p.154)

“Essa visão dos futuros professores de Matemática pode ser compreendida pelo fato de, segundo é possível perceber na Figura 40, não terem, até então, conhecimento algum sobre o desenvolvimento histórico dos conceitos desse campo. Esse contexto é consequência da falta de interesse dos discentes em buscar espontaneamente informações sobre a criação histórica de conceitos como limite, derivada ou integral, e também do fato de esse tipo de discussão, segundo os acadêmicos, não ter sido proposta anteriormente durante a sua graduação. Esse cenário leva, então, a uma provável alienação dos futuros docentes sobre como se dá a construção de ideias matemáticas, o que pode levá-los a assumir uma postura semelhante nas suas aulas, quando iniciarem seu trabalho como Professores." (p.155)

"Buscando-se descontruir esse panorama e iniciar uma jornada diferente pelos Três Mundos da Matemática, na segunda aula da turma, propôs-se uma atividade baseada nas premissas da Modelação. Com isso, procurou-se contribuir para que os acadêmicos pudessem desenvolver ideias utilizando, de acordo com Tall (2010), suas percepções sobre a realidade, operações matemáticas e o uso de linguagem adequada." (p.157)

Quais foram os resultados?

"Analisando a construção histórica do Cálculo e, em especial, do conceito de integral, pôde-se perceber que sua gênese está associada à vontade do ser humano de explicar e resolver situações corpóreas do seu tempo. Assim, diversas experiências foram realizadas ao longo dos séculos de evolução desse campo do conhecimento matemático. [...] Em contrassenso com esse panorama histórico construído [apresentado pelo pesquisador em um capítulo exclusivo da tese], percebeu-se que as aulas contemporâneas de Cálculo são conduzidas, de acordo com a análise dos livros didáticos de Stwart (2014), Leithold (1994) e Anton, Bivens e Davis (2014), com uma lógica matemática inversa, abordando, nessa ordem: limites, derivadas e, só então, integrais." (p.178)

"Além disso, quando foi analisada especificamente a introdução ao conceito de integral, percebeu-se que, apesar de essa ser inicialmente ilustrada com algumas situações reais, o estudo se direciona, rapidamente, para a ideia de limite. Assim, somas aproximantes, direitas e esquerdas, são construídas, de tal maneira que, em poucas páginas, chega-se à definição de integral como o limite da soma de Riemann, uma ideia altamente sofisticada e complexa. Seguindo esse paradigma dominante de ensino, acredita-se, entretanto, que se contribui para criar uma barreira cognitiva considerável entre os mundos Conceitual Corporificado e

Operacional Simbólico, habitados pelos acadêmicos que ingressam nas universidades, e o Mundo Formal Axiomático, habitado pelos Professores de Cálculo. Dessa forma, concordando com Tall e Mejía-Ramos (2004), entende-se que a introdução ao estudo do conceito de integral não deve ser feita a partir de um mundo muito sofisticado, que enxerga o Cálculo pelas lentes do conceito de limite, um já-encontrado típico dos matemáticos, mas complexo demais para quem nunca realizou uma incursão, sequer, ao Mundo Formal Axiomático.” (p.179)

“Sendo assim, procurou-se construir um cenário no qual o estudo do conceito de integral fosse realizado com base na realidade corpórea dos discentes, caracterizada, em grande parte, pelas concepções de Newton e Leibniz. Nesse sentido, buscou-se criar condições, com o auxílio da Modelação, para que os futuros professores percebessem a ideia de integral a partir de *já-encontrados* vindos da geometria, aritmética e álgebra, que pertencem aos mundos onde eles ainda residem, ao ingressar no Curso de Licenciatura em Matemática.” (p.179)

“Nesse contexto, pôde-se notar que a abordagem proposta e aplicada junto aos futuros professores de Matemática foi bem aceita pela turma, que, conforme entendeu-se com o questionário inicial, estava habituada com realidades pedagógicas pautadas pelo paradigma: definição, teorema, exemplos e exercícios. Sendo assim, os alunos trouxeram sua percepção sobre a prática alternativa, construída nos mundos *Conceitual Corporificado* e *Operacional Simbólico*, destacando, nos metatextos elaborados por meio da ATD, que experiências palpáveis são mais significativas, trazendo, portanto, mais sentido para o que se estuda. Ademais, frisaram que uma postura docente que não prioriza as manipulações algébricas e as definições formais é capaz de trazer mais motivação aos educandos, servindo, inclusive, como uma inspiração para sua futura atuação profissional.” (p.179)

“Considera-se, portanto, que os resultados dessa pesquisa apontam que os acadêmicos puderam construir uma introdução alternativa ao estudo do conceito de integral, a partir de seus já-encontrados, provenientes dos mundos Conceitual Corporificado e Operacional Simbólico. Assim, a definição de limite, que pertence ao Mundo Formal Axiomático, ainda inabitado por esses estudantes, não foi necessária e a turma pôde percorrer caminhos diferentes dos tradicionais, que levaram a estradas (talvez) mais tortuosas, mas também mais semelhantes àquelas percorridas pela humanidade e, portanto, provavelmente mais naturais.” (p.179-180)

2. FERREIRA, 2017

Autor (a)	Nilton Cezar Ferreira
Título	Uma proposta de ensino de Álgebra Abstrata Moderna, com a utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, e suas contribuições para a Formação Inicial de Professores de Matemática
Orientador (a)	Lourdes de la Rosa Onuchic
Tipo	2017
Ano	Tese
Programa	Pós-Graduação em Educação Matemática
Instituição	Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Objetivo	Compreender quais as contribuições que uma disciplina, intitulada nos livros didáticos por Álgebra Abstrata ou Álgebra Moderna, cujos conteúdos têm por base as teorias de Grupo, Anel e Corpo, podem dar a um professor da Educação Básica.
Questão de Pesquisa	Quais as contribuições de um curso de Álgebra Abstrata Moderna (AAM) para a formação de professores da Educação Básica, ministrado para alunos do quinto período de Licenciatura em Matemática do IFG? Como, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, podemos levar o aluno da Licenciatura em Matemática do IFG a construir conhecimentos de Álgebra Abstrata Moderna?

De que forma a pesquisa foi desenvolvida?

Para que nossa pesquisa se consolidasse foi necessária uma pesquisa de campo, com um trabalho desenvolvido em uma turma do quinto período do curso de Licenciatura em Matemática do IFG, no primeiro semestre de 2015. Foi aplicado, nesse período, um projeto de ensino que fazia uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na inserção dos principais conceitos da AAM (Álgebra Abstrata Moderna). (p.17)
Procuramos responder as seguintes questões: Quais as contribuições de um curso de Álgebra Abstrata Moderna (AAM) para a formação de professores da Educação Básica, ministrado para alunos do quinto período de Licenciatura em Matemática do IFG? Como, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, podemos levar o aluno da

Licenciatura em Matemática do IFG a construir conhecimentos de Álgebra Abstrata Moderna? (p.17)

O projeto de ensino foi elaborado com atividades a serem desenvolvidas em dezesseis encontros durante a disciplina Álgebra II, do curso de Licenciatura em Matemática do IFG. Cada encontro tem previsão de duração de uma hora e trinta minutos. Durante a sua implementação, em alguns momentos, utilizaremos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas – MEAAMaRP e, em outros, trabalharemos Atividades Extraclasse, importantes para fixar os conceitos introduzidos e relacionar esses conceitos com conteúdos da Educação Básica. Em dois desses encontros será trabalhada uma lista de Exercícios em que aparecem situações onde podemos utilizar a AAM no auxílio do entendimento de conteúdos da Educação Básica. Ainda, para o último encontro, está prevista uma avaliação diagnóstica. Essa avaliação abordará três temas: A Formação do Professor de Matemática, Álgebra e Resolução de Problemas. (p.95-96)

Objetivo Geral: levar os alunos do curso de Licenciatura em Matemática do IFG a construir um conhecimento satisfatório de Álgebra Abstrata Moderna e, torná-los capazes de refletir sobre as potencialidades que esse conhecimento poderá ter em sua futura prática docente. (p.96)

O projeto de ensino foi dividido em duas partes. Na primeira, (Parte I), o foco principal foi a construção, por parte do aluno, de um conhecimento satisfatório em AAM. Nessa etapa, utilizamos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, pois acreditamos, baseados em pesquisas referenciadas nos aportes teóricos, que ela é capaz de levar o aluno a ser construtor do seu próprio conhecimento. Na segunda, (Parte II), o foco foi levar os alunos a refletir sobre as potencialidades que seu conhecimento em AAM poderá ter em sua futura prática docente. Para esse caso, foram elaborados problemas ou situações que relacionassem os conteúdos estudados em AAM com conteúdos da Educação Básica. Nessa relação, o aluno, fazendo uso da AAM, deveria observar, analisar, criticar e justificar alguns conceitos e proposições que aparecem com frequência no Ensino Básico. (p.129)

No primeiro encontro, o Professor-Pesquisador iniciou com uma apresentação expositiva dialogada (professor e alunos). Nessa apresentação, fazendo uso de slides (projetados por um Datashow), ele fez uma breve introdução à Resolução de

Problemas. Inicialmente falou sobre algumas Teorias da Aprendizagem chamando a atenção para a necessidade da utilização de novas metodologias de ensino. (p.131-132)

Em seguida, foram formados dois grupos com três alunos cada, cuja escolha foi feita por eles próprios. Logo após, foi entregue a cada aluno um problema (Atividade 1) e o Professor-Pesquisador seguiu as instruções de trabalho de acordo com o roteiro estabelecido em 5.3.2. Essa atividade tinha dois objetivos: mostrar, na prática, como se trabalha a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas; e introduzir o conceito de Operação Binária. (p.138)

No segundo encontro, o Professor-Pesquisador começou tecendo um breve comentário sobre o encontro anterior, enfatizando o que fora abordado, reexplicando a metodologia trabalhada, com o objetivo de inteirar os alunos que não haviam participado do encontro anterior e sanar dúvidas que ainda houvessem. Em seguida, propôs a Atividade 2, que apresentamos a seguir, e que foi trabalhada, seguindo o mesmo roteiro da atividade desenvolvida no encontro anterior. (p.145)

No terceiro encontro, o Professor-Pesquisador pediu aos alunos que colocassem, na lousa, suas resoluções da Atividade Extraclasse 1, para que fossem discutidas. [...] A Atividade Extraclasse 1, pedia que se buscasse, nos conteúdos da Educação Básica (fundamental e médio) ou superior, estruturas que pudessem ser identificadas como um grupo. Após a apresentação das resoluções da Atividade Extraclasse 1, feitas por alguns alunos, cada aluno, que havia feito a atividade, explicava por que a estrutura apresentada por ele se constituía um grupo. Logo após, promoveu-se uma discussão sobre questões relevantes a cada caso. Como, por exemplo, qual era a operação da estrutura apresentada e como verificar a existência das propriedades dessas operações que caracterizavam essa estrutura como um grupo e o que aconteceria se fosse mudada a operação. Isso foi feito para o aluno perceber que o que caracteriza um grupo é a operação e não o conjunto. Vale ressaltar que um outro objetivo, também importante, era o de levar o aluno a perceber a presença da estrutura de grupo na Educação Básica e mostrar que, ao tratar esses conteúdos como uma estrutura algébrica, se pode correlacionar tal conteúdo com outro de mesma estrutura algébrica, e fazer uso de propriedades comuns de sua operação quando for necessário. Porém, os professores, Pesquisador e Colaborador, perceberam que esse momento serviu fortemente para fixar o conceito de grupo que, para muitos alunos, ainda não estava claro. (p.149-150)

No quarto encontro, o Professor-Pesquisador fez uma apresentação expositiva e dialogada sobre álgebra. Apresentou um breve histórico sobre a origem da álgebra; falou sobre as suas diferentes abordagens e suas aplicações, enfatizando as estruturas algébricas. (p.152)

Ao término da apresentação, houve um momento para perguntas e comentários e, logo em seguida, foi proposta a Atividade 3 [...] O objetivo desse encontro foi mostrar aos alunos que uma estrutura de grupo pode ser finita, isto é, é possível estabelecer uma operação binária em um conjunto finito, de forma que essa operação possua as propriedades que caracterizam um grupo. (p.154)

No quinto encontro, trabalhou exclusivamente com a Atividade Extraclasse 2. Os alunos alegaram que tiveram muitas dificuldades para resolver essa atividade sozinhos. Assim, os professores decidiram dar um tempo para que, em grupo, eles pudessem resolver a questão 1, desta atividade, em sala de aula. (p.157)

O sexto encontro teve como objetivo introduzir o conceito de subgrupo. Para isso foi trabalhada a Atividade 4 de forma que, durante sua resolução, os alunos pudessem perceber que a operação adição de inteiros é fechada nos Pares e, consequentemente, possuía a propriedade associativa – herdada da associatividade dos inteiros – pois todo número par é inteiro. [...] Neste encontro compareceram oito alunos e foi utilizada a Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. (p.159-160)

No sétimo encontro, foi trabalhada a Atividade Extraclasse 3. Essa atividade foi distribuída em duas partes: A primeira parte composta pela questão 1, que buscava relacionar o conceito de subgrupo com conteúdos da Educação Básica; e, a segunda parte, pelas questões 2, 3 e 4, que tinham por objetivo introduzir novos resultados envolvendo subgrupos, fixar os conceitos estudados e trabalhar o processo de demonstração, muito importante no curso de Álgebra Abstrata e em outras áreas da Matemática. (p.165)

O oitavo encontro teve como objetivo definir grupo abeliano. Para isso foi trabalhada a Atividade 5. Essa atividade apresentou um exemplo de um grupo não-abeliano levando os alunos a perceber que nem sempre a comutativa está presente em estruturas matemáticas. Na maioria dos conteúdos, estudados na Educação Básica, as operações possuem a propriedade comutativa e, nas poucas situações em que isso não ocorre, surgem muitos transtornos para os alunos, por desconhecerem, ou mesmo, não se dar importância às propriedades das operações. Muitas vezes, essas propriedades só são percebidas, ou valorizadas quando algo dá errado. (p.170-171)

No nono encontro, primeiramente foi trabalhada a Atividade Extraclasse 4. (p.176)

Logo em seguida, foi trabalhada a Atividade 6 [...] O objetivo dessa atividade era introduzir o conceito de partição, relação de equivalência e classes de equivalência. (p.178)

O décimo encontro teve início com a Atividade Extraclasse 5, deixada no último encontro (p.183). Ainda no décimo encontro foi trabalhada a atividade 7 (p.185). O objetivo deste encontro foi o de introduzir o conceito de anel. Para isso, partiu-se de um problema de criptografia cujo sistema criptográfico se dava pelas operações com matrizes. Com isso, discutiram-se as propriedades das operações de adição e multiplicação de matrizes e, a partir delas, foi feita a introdução do conceito de anel. (p.186-187)

No décimo primeiro encontro, os alunos deram continuidade à resolução da Atividade 7 (p.188). O encontro terminou com a proposta da Atividade Extraclasse 6 (p.192).

No décimo segundo encontro, primeiramente, foi trabalhada a Atividade Extraclasse 6, proposta no encontro anterior (p.192). Na segunda parte desse encontro, foi trabalhada a Atividade 8. O objetivo desta atividade era discutir uma nova propriedade para operação de multiplicação: "a existência de inverso multiplicativo" e, consequentemente, introduzir o conceito de corpo. (p.193)

O décimo terceiro encontro teve como objetivo apresentar um exemplo de corpo finito, ou seja, o de mostrar aos alunos que estruturas mais completas também podem estar restritas a conjuntos com poucos elementos. Para isso foi trabalhada a atividade 9. Essa atividade utiliza uma aplicação matemática – criptografia – para mostrar a necessidade do inverso multiplicativo em uma estrutura matemática. (p.197)

Nos encontros 14 e 15 foi trabalhado um material intitulado: "Números Inteiros: um domínio de integridade", elaborado pelo Professor-Pesquisador. (p.203)

No décimo sexto e último encontro, foi feita uma avaliação diagnóstica. Essa avaliação abordou três temas: Formação de Professores, Álgebra e Resolução de Problemas. O objetivo desta avaliação foi o de obter informações sobre o que esses temas representam para os alunos, isto é, como esses alunos veem sua formação profissional, o que eles apontariam como pontos positivos e quais seriam os desafios na Formação de Professores de Matemática no IFG. Sobre Álgebra, queríamos investigar, primeiramente, que conteúdos ficaram vivos na mente dos alunos, logo após o término do curso de Álgebra II, e que foram trabalhados com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através de Resolução de Problemas. Além disso, pretendíamos verificar se esses alunos acreditavam que a AAM pode trazer contribuições significativas para sua formação. E ainda, inquirir se o curso de AAM deveria mudar e, em caso afirmativo, o que deveria mudar. Sobre Resolução de Problemas, gostaríamos de evidenciar, do ponto de vista dos alunos, a influência da MEAAMaRP no seu aprendizado de AAM e se eles utilizariam essa metodologia em sua prática docente. (p.212-213)

Quadro 19 – Avaliação Diagnóstica

1) Faça uma lista de todos os conteúdos de álgebra abstrata que você consegue se lembrar e, relate tudo que você sabe sobre eles.

2) Destaque os pontos positivos e os pontos negativos da disciplina de álgebra, que você cursou este semestre. Se pudesse mudar alguma coisa, o que você mudaria?

3) Sobre os conteúdos estudados em álgebra II, você considera algum deles desnecessários para sua formação como professor do ensino básico? se sim, quais?

4) Você considera o curso de álgebra II importante para a sua formação como professor do ensino básico? se sim, quais as contribuições que esse curso poderá dar à sua formação?

5) Faça um comentário sobre à Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, destacando o que você considera mais relevante e evidencie os prós e os contra dessa metodologia.

6) Você utilizaria a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na sua prática docente? por que?

7) Disserte sobre outros pontos que você considerar importantes, relacionados à disciplina de álgebra II, na formação de professores.

Fonte: Elaborada pelo autor

(p.216)

Na questão 1, todos os alunos fizeram referência ao conceito de grupo. Anéis e corpos também foram lembrados pela maioria dos estudantes. A maioria dos conceitos postos pelos alunos, em suas respostas, foram introduzidos com a

Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Podemos observar também, pela Figura 25 e nos dados apresentados no anexo I, que houve uma preocupação, por parte dos estudantes, em escrever formalmente suas ideias e, consequentemente, houve muitos erros na escrita, reforçando o que já havíamos percebido durante todo o trabalho feito em sala de aula, isto é, a grande dificuldade que os alunos dessa disciplina tinham em expressar formalmente suas ideias. Com isso, chamamos a atenção para a necessidade de um trabalho voltado para essa questão, ou seja, os professores formadores de professores precisam, em todas as disciplinas do curso de Formação de Professores observar como o aluno escreve e, diante disso, fazer as devidas intervenções. Afinal, esses alunos futuramente estarão em sala de aula, escrevendo na lousa, elaborando materiais didáticos, criando e corrigindo atividades dos alunos, etc. Acreditamos que esse trabalho, de leitura e escrita em matemática, não pode se restringir a apenas alguns professores como, por exemplo, os de Didática e Estágios Supervisionados. Esse trabalho deveria ser feito por todos os professores envolvidos nesse processo de formação. (p.217-218)

Na questão 2, os estudantes apontaram como principal ponto positivo da disciplina Álgebra II, na forma em que ela foi trabalhada, a forma diferenciada de trabalho. Entendemos que os alunos, neste ponto, se referiram à MEAAMaRP e à constante busca, na Educação Básica, da presença de cada conteúdo de AAM que era introduzido. Ambos os casos promoviam aulas mais dinâmicas, maior interação professor-aluno e aluno-aluno, maior envolvimento de todos os alunos, uma visão mais ampla de conteúdos que eles já haviam aprendido e maior entusiasmo com a disciplina. Foram poucos os pontos negativos apresentados pelos alunos. Os únicos citados foram: certa dificuldade em se conceber a presença de dois professores trabalhando de formas diferentes numa mesma disciplina; A falta de um momento próprio para discutir dúvidas gerais pertinentes à disciplina; e falta de tempo para se trabalhar melhor alguns conteúdos como, por exemplo, os relacionados ao conceito de corpo. E, a única mudança sugerida foi a de se trabalhar todos os tópicos da AAM sempre relacionando com os conteúdos da Educação Básica, não apenas alguns como foi feito durante a aplicação do projeto. (p.218-219)

Na questão 3, esperávamos que fossem apontados mais conteúdos de AAM que eles achassem desnecessários à sua formação, pois, sempre que conversamos com algum estudante, que já cursou essa disciplina anteriormente, ele diz não ter entendido e não vê motivos da presença dessa disciplina em curso de Licenciatura em Matemática. Não sabemos se não apareceram mais respostas apontando outros conteúdos que eles, os alunos investigados, consideraram desnecessários, porque realmente acreditavam ser possível relacionar todo conteúdo da AAM com a Educação Básica, ou se eles não tinham argumentos para defender o contrário. (p.219)

Na questão 4, todos os alunos consideraram a Álgebra II como importante para sua formação. As respostas para esta questão, apresentadas pelos alunos, nos levam a crer que a forma com que trabalhamos essa disciplina, durante a nossa investigação, contribuiu para que todos considerassem a AAM importante para a sua formação. (p.220)

Na questão 5, todos os comentários sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas foram elogiosos. (p.220)

A questão 6, mostrou que os alunos têm interesse em trabalhar MEAAMaRP em suas futuras práticas docentes. Mas sabemos que para isso acontecer necessitaríamos de um trabalho voltado a isso. (p.220)

Nem todos os alunos responderam a questão 7 e as respostas apresentadas foram um tanto vagas [...] Acreditamos que o fato de poucos alunos responderem a questão 7 e, ainda, os poucos que responderam apresentaram resposta vaga, se deve à falta de experiência e oportunidades em opinar sobre questões relativas às disciplinas que eles estudam. (p.221)

Quais foram os resultados?

Em suma, os dados nos mostraram que, apesar do grande nível de abstração da AAM, é possível, e mais fácil, ensinar seus conteúdos a partir de conexões entre conhecimentos dos próprios alunos, como os aprendidos na Educação Básica ou em outras disciplinas de matemática do Ensino Superior (p.232)

Os conteúdos de AAM se apresentam de forma bastante significativa nos conteúdos da Educação Básica. É importante que o professor dessa disciplina busque sempre enfatizar essa relação. Pois isso, além de promover uma melhor formação do professor, ao estabelecer uma relação entre teoria e prática, serve como um agente motivador, incentivando os alunos a se dedicarem mais ao estudo dessa disciplina.

Acreditamos, também, que o mesmo poderá ser feito para outras disciplinas de matemática superior. (p.237)

O conhecimento de AAM pode ser usado como principal instrumento para se fazer justificativas formais de propriedades e, até mesmo, de definições trabalhadas na Educação Básica. De fato, a AAM trata do estudo das propriedades de uma dada operação definida em um conjunto qualquer. Se olharmos atentamente para os conteúdos de matemática da Educação Básica, as proposições (teoremas ou propriedades), quase sempre, estão relacionadas com as operações de adição e/ou multiplicação definidas no conjunto dos Naturais, Inteiros, Racionais, Reais ou Complexos. Assim, as propriedades das operações são fundamentais para se demonstrar essas proposições. Consequentemente, podemos recorrer ao conhecimento de AAM durante esse processo de demonstração. Gostaríamos de observar que, quando nos restringimos ao conjunto dos Irracionais, a AAM perde sua força, visto que os Irracionais não formam uma estrutura algébrica com nenhuma das operações usuais (adição e multiplicação). Na verdade, a adição e a multiplicação nem mesmo são operações no conjunto dos Irracionais, pois nem sempre a soma ou o produto de dois números irracionais dá um número irracional. Nesta circunstância, onde a AAM não está presente, devemos recorrer a uma outra disciplina tão importante quanto a Álgebra, a Análise Real. (p.237-238)

O conhecimento de AAM ajuda o professor da Educação Básica a identificar semelhanças e diferenças entre os conteúdos que ele irá trabalhar na sua prática profissional e, com isso, ensinar um novo conteúdo, baseando-se nas semelhanças ou diferenças desse novo com outros conteúdos já trabalhados. Isso foi feito durante o nosso Projeto de Ensino. Ao discutirmos as relações de equivalência, buscamos identificar, na Educação Básica, situações onde essas relações ocorriam. Discutimos as semelhanças e diferenças entre os Inteiros e os Polinômios; entre matrizes e inteiros; entre polinômios e matrizes, etc. (p.238)

O ensino de AAM, nos cursos de Licenciatura, pode levar os alunos a serem mais criteriosos em relação às hipóteses de propriedades matemáticas e a se preocuparem com a composição da estrutura e dos elementos com que eles estiverem trabalhando. Durante discussões em sala de aula, os alunos a princípio acreditavam que estavam de posse de uma estrutura algébrica e, após uma analise criteriosa, descobriram que estavam enganados, levando-os a perceber que é preciso tomar cuidado em fazer afirmações baseadas apenas em uma primeira observação. (p.238)

O ensino de AAM, nos cursos de Licenciatura, pode levar os alunos a serem mais críticos – não aceitar um resultado sem justificativa – e mais criteriosos – até o óbvio precisa ser justificado. Isso apareceu de forma bem contundente durante demonstrações de propriedades algébricas, como, por exemplo, o produto de um elemento, de um anel ou corpo, por zero, dá zero. (p.238)

O ensino de AAM propicia um ambiente adequado para melhorar a escrita matemática do estudante. De fato, a aprendizagem de conceitos e, principalmente, procedimentos dessa disciplina exige muita escrita e intepretação lógica de textos e simbologias matemáticas. E, a inserção da MEAAMaRP nesse processo ajuda o professor a identificar erros de leitura e escrita dando, assim, condições dele fazer as devidas intervenções. (p.238)

Porém, para alcançar esses resultados, o professor da disciplina de AAM precisa:

• Promover uma participação ativa dos alunos durante suas aulas;

• Levar os alunos a refletir sobre cada conteúdo trabalhado. Nesse sentido, seria interessante reservar um tempo, em sala de aula, para tal reflexão. Principalmente, na análise das atividades deixadas como tarefa extraclasse;

• Estimular o aluno a expor suas ideias (perguntar, ouvir, promover debates etc.);

• Dispor de um instrumento eficiente de avaliação contínua, não apenas do aluno, mas, principalmente, da metodologia adotada e da sua prática;

• Buscar relacionar cada conteúdo trabalhado com a futura prática dos estudantes. Isso poderá motivar o aluno e ajudar a responder a “famosa” pergunta: “por que eu preciso aprender isso?”. (p.239)

Por fim, os dados da pesquisa evidenciaram a necessidade de se trabalhar, de forma mais consistente, novas metodologias de ensino, visto que os alunos, futuros professores de Matemática, anseiam por maneiras mais eficientes de se ensinar matemática. (p.239-240)

Relatos desses alunos mostraram o descrédito em relação à metodologia tradicional. Nesse ponto, a Resolução de Problemas revelou-se, para esses alunos, como um elemento diferencial no ensino, na aprendizagem e na avaliação de matemática. Pois, pela vivência de cada aula, observando o crescimento conceitual dos alunos, no diálogo professor-aluno, dentro e fora da sala de aula, pelos relatos dos alunos e por pesquisas já consolidadas, comprova-se que a Metodologia de

Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, além de ser um elemento motivador, coloca o aluno como principal agente no processo de ensino-aprendizagem-avaliação, levando-o a refletir, discutir e tirar suas próprias conclusões, sem esperar que o professor pense por ele e, consequentemente, produzindo aprendizagem. Além disso, foi detectado em alguns momentos, durante o uso dessa metodologia, que o fato de o aluno conseguir resolver um problema não garante sua aprendizagem. Isso serviu para mostrar que realmente nessa metodologia, a avaliação acontece de forma integrada ao ensino, promovendo a aprendizagem. (p.240)

Acreditamos que a Álgebra Abstrata Moderna, bem como outras disciplinas de matemática superior, pode trazer contribuições significativas como: levar os alunos a refletir criticamente sobre sua futura prática profissional; buscar sempre uma relação entre novos conteúdos aprendidos com outros conteúdos de seu conhecimento, bem como refletir, analisar e criticar situações onde isso não ocorra; e, principalmente, melhorar sua formação matemática. (p.233)

Por fim, gostaríamos de enfatizar que a AAM, ou qualquer outra disciplina de matemática superior, poderá dar contribuição para a formação do professor de matemática se for trabalhada de forma adequada, ou seja, com o uso de uma metodologia adequada capaz de levar o aluno a produzir um conhecimento satisfatório dessa disciplina e, ao mesmo tempo, ser capaz de promover uma relação entre a teoria e a prática. Para que isso ocorra, precisamos de professores formadores de professores experientes e, realmente, comprometidos com o processo de formação de professores. (p.234)

3. FLORES, 2020

Autor (a)	Marcia Viaro Flores
Título	Construção dos Números Racionais na Licenciatura: um estudo desenvolvido à luz dos Três Mundos da Matemática
Orientador (a)	Profª. Drª. Vanilde Bisognin / Profª. Drª. Silvia Maria de Aguiar Isaia
Tipo	Tese
Ano	2020
Programa	Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Instituição	Universidade Franciscana

Objetivo	Investigar como os princípios da teoria dos Três Mundos da Matemática, preconizada por David Tall, podem sustentar uma proposta de formação de futuros licenciados em Matemática sobre conceitos relacionados com os números racionais e perceber quais resultados a proposta produz sobre as aprendizagens desses conceitos.
Questão de Pesquisa	Como os princípios da teoria dos Três Mundos da Matemática, preconizada por David Tall, podem sustentar uma proposta de formação de futuros licenciados em Matemática sobre conceitos relacionados com os números racionais e quais resultados a proposta produz sobre as aprendizagens desses conceitos?

De que forma a pesquisa foi desenvolvida?

[...] propor uma relação entre o que é estudado, nas disciplinas de caráter mais específico, e os conteúdos da Educação Básica é importante para a busca de melhorias nos processos de formação docente. Por isso, optamos por investigar quais contribuições uma proposta de ensino pode trazer para a compreensão do conceito de número racional em um curso de Licenciatura em Matemática. Escolhemos, para fundamentar nossa pesquisa, na construção das tarefas da sequência de ensino e análise dos dados, a Teoria dos Três Mundos da Matemática, do pesquisador David Tall. (p.19)

O propósito principal, deste estudo, é investigar como os princípios da teoria dos Três Mundos da Matemática, preconizada por David Tall, podem sustentar uma proposta de formação de futuros licenciados em Matemática sobre conceitos relacionados com os números racionais e perceber quais resultados a proposta produz sobre as aprendizagens desses conceitos. Para esse fim, realizamos uma experiência de ensino que foi desenvolvida na sala de aula, ambiente da coleta de dados, cujos resultados foram analisados a partir do quadro teórico de Tall. (p.77)

Os participantes da pesquisa foram oito estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática de um Instituto Federal, localizado no estado do Rio Grande do Sul e matriculados no segundo semestre do ano de 2018, na disciplina de Fundamentos de Análise, segundo Projeto Pedagógico de Curso (PPC) dessa instituição. (p.78)

A escolha dos estudantes matriculados nessa disciplina se deu ao observar a trajetória deles, por meio da matriz curricular do curso, e em função de ter percebido que eles já haviam cursado disciplinas de Fundamentos de Matemática, que abordam conteúdos, geralmente, vistos no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, disciplinas de Álgebra, entre outras.

Todas essas são importantes bases para o desenvolvimento dos conceitos relacionados ao nosso estudo. (p.78)

Para isso, a fonte de coleta de dados foi o próprio ambiente de ensino e de aprendizagem. Na realização dessa coleta, empregamos os seguintes instrumentos: o diário de campo, que serviu para registrar o desenvolvimento da sequência, possíveis problemas e mudanças que ocorreram, bem como as nossas impressões sobre o andamento da proposta; os protocolos das produções dos estudantes a partir da sequência de tarefas. Por meio desses registros, foi possível analisar as conjecturas formuladas por eles, bem como a compreensão dos conceitos estudados e as formas utilizadas para comunicar suas ideias; os diálogos realizados entre nós, enquanto pesquisadora, e os estudantes, durante a aplicação da sequência de ensino, para sanar eventuais dúvidas que permaneceram após a leitura das produções escritas. Esses diálogos foram gravados com o propósito de se evitar a perda de informações importantes. (p.79)

No caso do estudo aqui apresentado, os dados obtidos, a partir da aplicação da sequência de ensino, foram analisados sob a luz da teoria dos Três Mundos da Matemática, buscando estabelecer relações entre os dados coletados e o quadro teórico utilizado. Isso foi feito por meio da identificação do raciocínio utilizado pelos estudantes, ao responderem as tarefas propostas, das conjecturas elaboradas, bem como a partir das diferentes formas de manifestação de compreensão dos conceitos trabalhados e das suas trajetórias. No entanto, mesmo que, ao realizar isso, estivéssemos amparadas pelo quadro teórico utilizado, a análise continuou sendo interpretativa, baseada em nossas percepções e reflexões acerca dos resultados obtidos. (p.79-80)

De acordo com alguns pressupostos, advindos de nossa própria experiência e ratificados pela literatura consultada, de que os números racionais têm sido trabalhados apenas superficialmente nos cursos de formação inicial e entendendo o quanto esse conteúdo é importante para futuros professores de matemática, elaboramos uma sequência de ensino. Com essa, objetivamos promover a compreensão dos estudantes para a construção axiomática do conjunto dos números racionais. (p.80)

Nesse sentido, destacamos, de forma geral, quais foram os objetivos de aprendizagem que julgamos importantes para a construção da proposta. Como nosso foco decaiu na construção axiomática dos números racionais, entendemos que os estudantes devem ser capazes de compreender a relação de equivalência que sustenta a construção do conjunto dos números racionais e construir as classes de equivalência para elementos dados. Ainda, eles necessitam ser capazes de generalizar o processo, de definir as operações de adição e multiplicação, de justificar as principais propriedades e de entender a relação de ordem que está presente na construção do conjunto. Além da construção formal do conjunto, outra meta foi possibilitar, aos estudantes, a observação das relações entre essa construção e a maneira como os números racionais são abordados na Educação Básica, destacando, ainda, as várias interpretações que podem ser dadas a esses números. (p.80)

Com relação ao processo de aprendizagem dos estudantes, tivemos, como base, o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática de David Tall, por entendermos que esse fornece uma explicação de como o pensamento matemático se desenvolve. Portanto, procuramos construir as tarefas baseadas nas características dos Três Mundos da Matemática, buscando características do Mundo Corporificado, do Mundo Simbólico e do Mundo Formal, ou seja, foram desenvolvidas tarefas que possibilitassem a corporificação dos conceitos, que fizessem os estudantes trabalharem com os símbolos envolvidos e, principalmente, que os encaminhassem para a formalização, explorando também as interseções entre os mundos. (p.80)

<u>A proposta de ensino:</u>

Ao todo, foram propostas nove tarefas, organizadas conforme a seguir: 1ª Parte: A Equivalência e a Construção do Conjunto Q; 2ª Parte: As Operações de Adição e Multiplicação, a Ordenação e a Imersão em Q; 3ª Parte: Os Significados dos Números Racionais. (p.81)

Na primeira parte, foram trabalhados os conceitos relacionados à equivalência e à construção do conjunto Q. Esse momento do estudo abrangeu quatro tarefas, sendo que as duas primeiras exploraram a relação de equivalência, que é base para a construção feita, e as outras duas exploraram as classes de equivalência e o conjunto quociente. Na segunda parte, foram exploradas as operações de adição e de multiplicação construídas no conjunto Q, juntamente com algumas propriedades que podem ser trabalhadas a partir da definição das operações. Ainda, foi explorada a ordenação do conjunto construído. Com o intuito de finalizar a construção do ponto

de vista axiomático, trabalhamos com o conceito de imersão em Q. Por fim, na terceira parte, foram trabalhados os diferentes significados dos números racionais sob o ponto de vista da Educação Básica. (p.159-160)
As tarefas foram desenvolvidas de forma que os estudantes pudessem, em um primeiro momento, evocar suas imagens conceituais para um dado conceito, explorando os significados pessoais construídos ao longo da trajetória escolar e acadêmica e só depois deveriam apresentar a definição formal, baseada em um sistema axiomático. (p.159)

Todas as atividades são descritas no capítulo 5 (p.86-157)

<u>Análise dos dados:</u>

[...] baseamos nossa análise na forma como Tall define cada um dos mundos. Para o **Mundo Corporificado**, temos o foco nas percepções e nas ações sobre os objetos matemáticos, sejam eles físicos ou mentais e, nesse sentido, entendemos que o pensamento matemático que se manifesta, nesse mundo, em geral, está baseado nas relações criadas com objetos corporificados, como gráficos, tabelas, diagramas, figuras, exemplos, dentre outros. No **Mundo Simbólico**, apontamos o uso e manipulação da simbologia matemática vinculada aos números racionais para representar e efetuar ações, bem como para produzir conclusões baseadas no simbolismo. Ainda, no caso do **Mundo Formal**, temos o desenvolvimento baseado em definições, axiomas e teoremas, consistindo na estrutura axiomática da matemática. Portanto, entendemos que o Mundo Formal necessita de uma linguagem matemática adequada, de uma estrutura lógica correta e de justificativas das passagens realizadas no sistema axiomático considerado. (p.86-87)
A partir das respostas dos estudantes para as questões propostas, propomos uma categorização, apresentada no Quadro 04, explicitando as características observadas para o enquadramento em cada um dos mundos. Salientamos que, nas análises, igualmente, consideramos as interseções entre os mundos, conforme destaca Tall. (p.87)

Quadro 04 – Categorização para as respostas dos estudantes

Mundo	**Evidências observadas**
Mundo Corporificado	➢ As respostas são baseadas em textos com o uso de linguagem corrente ou exemplos do cotidiano; ➢ O estudante faz uso de desenhos, de esquemas, de diagramas ou de gráficos para produzir sua resposta; ➢ Quando solicitado a fazer a prova de uma afirmação, o aluno se baseou no uso de exemplos ou de imagens.
Mundo Simbólico	➢ As respostas são baseadas no uso da linguagem matemática, utilizando sua simbologia; ➢ Consegue associar imagens, esquemas ou gráficos a uma linguagem simbólica; ➢ Quando solicitado a fazer a prova de uma afirmação, ela é baseada no uso de cálculos aritméticos específicos ou em manipulações algébricas.
Mundo Formal	➢ As respostas são baseadas no uso correto da linguagem matemática; ➢ O estudante consegue, a partir das corporificações e simbolismos, fazer as generalizações solicitadas; ➢ Quando solicitado a fazer a prova de uma afirmação, baseia-se no sistema axiomático, percorrendo uma estrutura lógica de demonstração.

Fonte: Autoria própria.

[...] seção focada nos significados que os números racionais assumem quando tratados sob o ponto de vista da Educação Básica. Para isso, propomos o trabalho com questões abordando os diferentes significados sob o ponto de vista de Kieren (1980), a saber: parte-todo, medida, quociente, razão e operador. Também, discutimos os resultados encontrados sob o ponto de vista desses pressupostos teóricos e da teoria dos Três Mundos da Matemática. (p.86)

Quais foram os resultados?

Caminhando no sentido de atender ao que nos propomos enquanto pesquisadores, procuramos explorar a formalização dos conceitos por meio da construção axiomática do conjunto dos números racionais, porém não simplesmente reproduzindo essa construção teórica, como já encontrado em materiais disponíveis, mas sim pensando em uma proposta que levasse em conta o desenvolvimento do pensamento matemático. Nesse intuito, encontramos, na Teoria dos Três Mundos da Matemática, essa base teórica. (p.158-159)

As tarefas foram desenvolvidas de forma que os estudantes pudessem, em um primeiro momento, evocar suas imagens conceituais para um dado conceito, explorando os significados pessoais construídos ao longo da trajetória escolar e acadêmica e só depois deveriam apresentar a definição formal, baseada em um sistema axiomático. Procuramos desenvolver questões que explorassem características do Mundo Corporificado ao solicitar que os estudantes desenhassem gráficos e diagramas ou, ainda, quando procuramos conhecer os significados pessoais dos conceitos, pois esperávamos que as respostas trouxessem indícios de usos cotidianos e de corporificações. O Mundo Simbólico foi explorado na sequência proposta, tendo em vista que esse se apresenta nas definições, nas produções de justificativas pedidas ou no trabalho com exemplos solicitados. Por fim, as características formais permearam toda a proposta, pois, em todas as tarefas, exploramos a formalização dos conceitos trabalhados, salientando a linguagem matemática correta e a estrutura lógica de demonstração produzida a partir do sistema axiomático. (p.159)

[...] com relação à aprendizagem dos estudantes, envolvendo os conceitos relacionados a números racionais trabalhados na sequência de ensino, podemos destacar que foi possível acompanhar a jornada individual de cada um e conhecer quais as características predominantes nas produções. (p.159)

No decorrer das atividades, notamos que os estudantes conseguiram produzir as justificativas solicitadas baseadas na manipulação simbólica e, também, com algumas passagens justificadas pelo sistema axiomático. A maioria das respostas ainda estava situada na transição do Mundo Simbólico para o Mundo Formal e, assim, entendemos ter ocorrido uma evolução na forma como eles desenvolveram os conceitos. A etapa de formalização, em seu nível mais complexo, não foi atingida plenamente, porém esse não é o caso específico dos estudantes pesquisados, já que, conforme Tall (2013), essa transição costuma ser complicada para a maioria dos estudantes, mesmo os mais familiarizados com a matemática formal. (p.161)

[...] entendemos que o quadro teórico escolhido conseguiu sustentar uma proposta de formação de futuros licenciados em matemática no tocante aos conceitos relacionados aos Números Racionais, pois salienta que existem diferentes maneiras de se pensar matematicamente, chamando atenção para que o professor esteja atento ao modo como os alunos pensam e proporcione diferentes abordagens de um mesmo conceito, levando em consideração a jornada individual de cada estudante em sua evolução do pensamento matemático. (p.161)

Nosso terceiro objetivo específico tratou de averiguar a relação da construção formal dos Números Racionais com a forma como esses são abordados na Educação Básica. Entendemos ter alcançado esse objetivo quando, ao longo da construção formal, discutimos, com questões propostas na sequência de ensino, algumas das relações que podem ser tecidas e quando, a partir das manifestações dos próprios estudantes, foram feitas essas relações. Nas respostas para as primeiras tarefas já apareceram, naturalmente, algumas relações dos conceitos que estávamos trabalhando com os vistos na trajetória escolar dos estudantes, como, por exemplo, o conceito de frações equivalentes. Ao propormos questões que trabalharam com mais profundidade essa relação, percebemos que a maioria dos estudantes conseguiu fazer a ligação entre as tarefas respondidas e o conceito de fração equivalente conhecido desde o Ensino Fundamental. Como mais alguns exemplos das relações dos conceitos formais estudados com a Educação Básica, podemos citar a dúvida que os estudantes mencionaram sobre o porquê do uso do mínimo múltiplo comum na operação de adição. Tal dúvida foi esclarecida a partir do momento em que eles relacionaram o uso com o conceito de equivalência e, também, após a discussão gerada na retomada das propriedades das operações, principalmente focada no significado dos elementos neutro e simétrico. (p.161-162)

Além das relações, tecidas ao longo do desenvolvimento da proposta de construção axiomática, do mesmo modo, trabalhamos com uma tarefa que explorou os significados dos números racionais no contexto da Educação Básica. Optamos por abordar os significados sob o ponto de vista de Kieren (1980) e propomos que os estudantes respondessem a questões envolvendo cinco significados: parte-todo, razão, quociente, medida e operador. O significado parte-todo foi o mais familiar para os estudantes. Eles destacaram que esse significado costuma ser o mais trabalhado na Educação Básica, apesar de terem cometido alguns equívocos na resolução da questão que o abordou. Essa percepção vem ao encontro de pesquisas que relatam esses resultados. Com relação ao significado razão, percebemos que esse não era muito conhecido, pelos estudantes, como um significado para o número racional. Provavelmente, durante a trajetória escolar deles, deva ter sido abordado em outro contexto, como de proporcionalidade, por exemplo. Na resolução das questões envolvendo esse significado, os estudantes tiveram algumas dificuldades, porque, além da razão, necessitavam de outros conceitos para resolvê-las. O significado quociente foi tratado na sequência e abordado nos contextos discreto e contínuo. Pelas respostas, percebemos algumas dificuldades de resolução e de interpretação do que o número racional que foi encontrado como resposta representava naquele contexto. Outro significado, para o número racional, que se revelou quase desconhecido pela maioria dos estudantes, foi o de medida. Essa foi uma surpresa para nós enquanto pesquisadoras, pois os estudantes já haviam trabalhado com várias disciplinas que haviam abordado esse conceito. Mesmo assim, esse conteúdo, ao que percebemos, não ficou compreendido por eles. Observamos, dessa maneira, dificuldades na resolução da questão que abordaram esse significado. Por fim, o último significado trabalhado foi o de operador e, no caso desse, encontramos duas situações: a primeira foi na resolução da questão que abordou o operador no contexto aritmético. Nesse caso, todos os estudantes responderam com facilidade. Já no que se refere à questão que abordou o operador no contexto geométrico, alguns estudantes apresentaram respostas incorretas. (p.162-163)

Os dados nos levam a inferir que a sequência de ensino contribuiu para que grande parte deles pudesse transitar pelos mundos, respeitando a sua jornada individual. [...] a partir dos princípios da teoria dos Três Mundos da Matemática, foi possível desenvolver uma sequência de ensino que levou em consideração o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes. Partimos das imagens conceituais que eles já tinham, e notamos que a maioria dos estudantes apresentava características corporificadas e/ou simbólicas, mas, gradativamente, foram desenvolvendo os conceitos até atingir a formalização. (p.163)

4. FONSECA, 2020

Autor (a)	Jussara Aparecida da Fonseca
Título	Investigação de aspectos da compreensão relacional e da instrumental em Geometria Esférica
Orientador (a)	Prof. Dr. José Carlos Pinto Leivas
Tipo	Tese

Ano	2020
Programa	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Instituição	Universidade Franciscana
Objetivo	Analisar como alunos de um curso de licenciatura em matemática, de um instituto federal de educação, compreendem relações métricas em triângulos esféricos, a partir de relações na geometria euclidiana.
Questão de Pesquisa	Como alunos de um curso de licenciatura em matemática, de um instituto federal de educação, compreendem relações métricas em triângulos esféricos, a partir de relações na geometria euclidiana?

De que forma a pesquisa foi desenvolvida?

[...] compreender as geometrias não-euclidianas auxilia o entendimento de muitos conceitos da matemática, em especial, da própria geometria euclidiana, além de permitir a relação com outras áreas de conhecimento. (p.25)

[...] o tema escolhido para esta tese é a geometria esférica, compreendendo, neste contexto, o estudo de noções preliminares (ponto e reta), a definição, classificação e propriedades de triângulos esféricos e a trigonometria em triângulos esféricos retângulos. Isto posto, nosso estudo, de caráter exploratório, foi realizado com alunos de um curso de licenciatura em matemática de um instituto federal do Rio Grande do Sul. As atividades propostas foram compostas por tarefas exploratórias como preconiza Ponte (2001, 2003a, 2003b, 2005, 2010, 2014) e Ponte, Brocardo e Oliveira (2016). (p.28)

[...] a partir das atividades exploratórias realizadas, acreditamos que proporcionamos aos participantes a associação de conhecimentos anteriores da geometria plana com novos da geometria esférica. Desse modo, procuramos construir novos conhecimentos alicerçados e articulados com conhecimentos prévios. (p.28-29)

[...] em nossa pesquisa, buscamos em Skemp (1989, 2016a, 2016b) elementos para analisar se a compreensão desenvolvida pelos participantes, quanto aos tópicos de geometria esférica trabalhados, é de ordem instrumental ou relacional. Para o autor, a compreensão instrumental se refere à utilização de regras para resolução de atividades matemáticas, sem entendimento do porquê, e a compreensão relacional é saber resolver as situações propostas com fundamentação, é saber o porquê. (p.29)

[...] acreditamos que o trabalho desenvolvido a partir de tarefas exploratórias para o ensino de tópicos de geometria esférica favorece a aprendizagem voltada à compreensão relacional. Com isso, nossa investigação vem contribuir com discussões sobre o ensino e a aprendizagem de geometrias não-euclidianas, em especial, da geometria esférica. (p.29)

Fundamentação teórica: concepções de Richard Skemp sobre a aprendizagem matemática, categorizada em aprendizagem por memorização (ou habitual) e aprendizagem esquemática (ou inteligente), relacionadas, respectivamente, à compreensão instrumental e à compreensão relacional. (p.60)

Referenciais metodológicos: investigação matemática, proposta por João Pedro da Ponte e alguns colaboradores.

[...] acreditamos que a utilização de tarefas, construídas na direção do desenvolvimento conceitual e voltadas a um ensino exploratório, potencializa o processo de ensino e de aprendizagem, visto que com tais características promovem ações que vão muito além da mera memorização e aplicação de regras (compreensão instrumental), possibilitando a construção na direção da compreensão relacional. (p.93)

A pesquisa foi realizada com alunos do curso de licenciatura em matemática do Instituto Federal Farroupilha - Campus Alegrete (IFFar-Alegrete). (p.96)

[...] o referido curso não apresenta em sua matriz curricular disciplina ou componente curricular que contemple o estudo de geometrias não-euclidianas. Assim, um dos objetivos implícitos da nossa pesquisa era aproximar os acadêmicos a esse ramo da matemática. (p.96)

A coleta de dados da pesquisa, junto aos sujeitos participantes, deu-se por intermédio de uma sequência de atividades, vinculada a um projeto de ensino, correspondente a uma modalidade contemplada pela instituição, tendo como público-alvo os seus próprios alunos. Os projetos de ensino são incentivados por meio do Programa Institucional de Projetos de Ensino (PROJEN) e visam aprofundar temáticas relacionadas às áreas de formação dos cursos a que estão vinculados. (p.96)

[...] a coleta de dados ocorreu via atividade extraclasse (projeto de ensino), durante o segundo semestre de 2018 e contou com a participação de 12 alunos, matriculados em diferentes semestres do curso de licenciatura em matemática do IFFar-Alegrete. (p.97-98)

Visando possibilitar aos participantes a inserção ao estudo de geometrias não-euclidianas,em especial, da geometria esférica, elaboramos uma sequência de atividades, composta por atividades exploratórias e atividades avaliativas, envolvendo diferentes tarefas, como proposto por Ponte (2003a, 2003b, 2005, 2010, 2014). (p.98)

As atividades focaram em explorações no plano, na superfície esférica e em triângulos esféricos [...] Além dessas, foram realizadas cinco atividades avaliativas. A sequência de atividades exploratórias e avaliativas foram realizadas ao longo de dez encontros semanais, com duração de quatro horas-aula cada um, totalizando 40 horas-aula. (p.98-99)

A metodologia utilizada para a aplicação da sequência de atividades foi baseada nos princípios das investigações matemáticas em sala de aula (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016). Assim, pautou-se em três etapas: introdução da tarefa, realização da investigação e discussão dos resultados e formalização/sistematização, as quais foram detalhadas na seção 3.2. (p.100)

À medida que se desenvolveu a aplicação da sequência de atividades exploratórias e avaliativas, os registros escritos, elaborados pelos participantes, foram coletados, os quais constituíram o corpus de análise para pesquisa. Além dos dados coletados, por meio dos registros dos alunos nas atividades, utilizamos um diário de campo [...] Todo o desenvolvimento da proposta didática foi registrado por meio de gravação em áudio e vídeo, de modo a possibilitar que a pesquisadora retornasse à realização da prática. (p.100-101)

Para a análise dos dados, organizamos as atividades realizadas em três blocos de estudo, conforme o conhecimento geométrico envolvido. (p.101)

Quadro 6 – Organização dos blocos de estudo

Bloco	Atividade exploratória	Tema abordado
1	No plano I	Reta, semirreta e segmento de reta; Divisão da reta por dois pontos distintos; Medida de segmento de reta.
	Na superfície esférica I	Circunferência máxima e arco; Divisão da circunferência máxima por dois pontos distintos; Medida de arco de circunferência máxima.
	No plano II	Posições relativas entre duas retas; Retas perpendiculares.
	Na superfície esférica II	Posições relativas entre duas circunferências máximas; Circunferências máximas perpendiculares; Biângulo ou fuso esférico.
2	No plano III	Triângulos; Noção de limitada/ilimitada e congruência.
	Na superfície esférica III	Triângulos; Noção de limitada/ilimitada e congruência.
	Em triângulos esféricos I	Soma de dois e três lados; Soma dos três ângulos internos.
	No plano IV	Triângulo retângulo.
	Na superfície esférica IV	Triângulo retângulo, birretângulo e trirretângulo.
3	Em triângulos esféricos II (parte 1)	Triângulo esférico retângulo e seu respectivo triedro.
	Em triângulos esféricos II (parte 2)	Triângulo esférico retângulo e relações com triângulo retângulos planos.
	Em triângulos esféricos IIII	Trigonometria em triângulos esféricos retângulos.

Fonte: elaborado pela autora (p.102)

As atividades exploratórias e avaliativas foram analisadas de formas diferentes. Nas primeiras seguimos as indicações de Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) para avaliação do trabalho investigativo; para as segundas, nos pautamos nos tipos de compreensão de Skemp (1989, 2016a, 2016b). (p.103)

Na 4.4.1 são apresentados os procedimentos de análise de cada tipo de atividade.

Quais foram os resultados?

No capítulo 5 são apresentados a descrição e a discussão dos resultados das atividades exploratórias e avaliativas.

Sendo assim, os resultados apontam que a sequência de atividades, pautadas em tarefas exploratórias, contribuiu para a articulação dos conhecimentos prévios da geometria plana com novos da geometria esférica, e mostraram que a manipulação de materiais concretos favorece a compreensão de conceitos geométricos, assim como a utilização de um software de geometria dinâmica, no caso deste estudo, o GeoGebra. Ademais, pelos resultados, constatamos que a abordagem utilizada possibilitou o desenvolvimento da compreensão relacional dos participantes. (p.272-273)

[...] pensamos que o trabalho realizado venha a contribuir com a ampliação dos conhecimentos geométricos dos sujeitos participantes, possibilitando-lhes nova visão sobre o desenvolvimento do campo geométrico almejando, enquanto possíveis desdobramentos, que possam, no futuro, em sua atuação docente, inserir estes conhecimentos na educação básica, respeitadas as características do público a que se destinar ou que possam aprofundar seus estudos em geometrias não-euclidianas, buscando elementos de áreas da matemática, como por exemplo, da geometria diferencial. (p.273)

Do mais, os resultados apontaram que é possível desenvolver tópicos da geometria esférica, de modo a proporcionar a compreensão (relacional) dos participantes, mostrando que o estudo também traz contribuições para pesquisas no campo da educação matemática, no qual observamos carência de trabalhos realizados com professores em formação, na direção de sua compreensão em relação à aprendizagem de tópicos de geometrias não-euclidianas. (p.273)

Ainda, acreditamos que o trabalho realizado vem a contribuir com pesquisas no âmbito da Educação Matemática, voltadas a discussão da aprendizagem matemática, posto que verificou a existência dos tipos de compreensão propostos por Skemp e propôs outros intermediários: quase relacional e quase instrumental. Além disso, pode vir a colaborar com a prática docente, visto haver o entendimento de que os alunos compreendem de formas diferentes, o professor pode repensar e aprimorar estratégias de ensino. (p.274)

5. VIDOTTI, 2019

Autor (a)	Daniela Barbieri Vidotti
Título	Potencialidades da Modelagem Matemática e da Análise de Erros para o ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral em Várias Variáveis
Orientador (a)	Profª. Drª. Lilian Akemi Kato
Tipo	Tese
Ano	2019
Programa	Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática
Instituição	Universidade Estadual de Maringá

Objetivo	Investigar o potencial da Modelagem Matemática para explorar os erros dos estudantes a fim de problematizá-los.
Questão de Pesquisa	Que dificuldades de aprendizagem são apresentadas por estudantes de CDI II e que potenciais a Modelagem Matemática oferece para explorar os erros que os estudantes cometem a fim de problematizá-los?

De que forma a pesquisa foi desenvolvida?

"A pesquisa foi realizada com uma turma de 11 alunos que cursavam a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II (CDI II), do terceiro ano de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) – Campus de Paranavaí, no ano letivo de 2016, no período noturno." (p.89)

"A professora regente da turma era a própria pesquisadora, o que justifica tanto a escolha da turma quanto da Instituição." (p.90)

"A disciplina de CDI II é obrigatória, anual e tem uma carga horária total de 136 horas-aula (h-a), e uma carga horária semanal de quatro h-a, sendo que nesse ano de coleta dos dados ocorreu em dois encontros semanais de duas h-a cada." (p.90)

"O planejamento das aulas foi feito de acordo com a ementa da disciplina; por isso, foram selecionados os conteúdos que seriam abordados em cada um dos quatro bimestres do ano letivo, considerando que o curso funciona em regime seriado anual, sendo, portanto, necessário emitir uma nota avaliativa do rendimento escolar do aluno ao final de cada bimestre, conforme estabelecido no regimento geral da universidade." (p.90)

"Em linhas gerais, os dados da pesquisa foram constituídos pelos registros escritos produzidos pelos alunos nas avaliações bimestrais e nas atividades de Modelagem Matemática, por transcrições de áudios gravados nas aulas de Modelagem Matemática e por registros da pesquisadora em um diário de campo." (p.93)

"Os registros produzidos pelos alunos nas provas bimestrais da disciplina foram analisados segundo a metodologia de análise de conteúdo das respostas, apresentada em Cury (2008). Foram três avaliações, apresentadas nos Apêndices B, C e D. Os erros identificados nessas avaliações foram interpretados à luz dos elementos teóricos *conceito imagem* e *conceito definição* apresentados por Tall e Vinner (1981), expostos na subseção anterior, com intuito de identificar e compreender as dificuldades de aprendizagem dos alunos." (p.103)

“As análises apontaram diversos tipos de erros: (1) erros relacionados à construção de gráficos de funções reais e vetoriais; (2) erros relacionados ao conceito de limite, suas propriedades e notações; (3) erros relacionados ao conceito de função diferenciável; (4) erros relacionados à determinação das derivadas parciais; (5) erros relacionados a métodos de integração; (6) erros relacionados à identificação da região de integração e dos limites de integração na integral iterada; (7) erros em operações algébricas; e (8) erros de notação das integrais.” (p.194)
“O desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática pelos alunos, orientado pela professora|pesquisadora, foram analisados de acordo com a taxionomia dos usos dos erros apresentada por Borasi (1996), com o intuito de identificar as relações construídas entre a Modelagem Matemática e possíveis formas de explorar os erros cometidos pelos alunos nessas atividades. Para isso, as transcrições dessas aulas e os registros escritos dos alunos foram analisados com o intuito de identificar e categorizar os episódio de erros.” (p.103-104)
“Nessas atividades de MM, os alunos foram instigados a pensarem em problemas da realidade que pudessem ser modelados por uma função de várias variáveis e resolvidos aplicando conceitos do CDI II. Apresentamos o desenvolvimento de duas atividades desenvolvidas nas aulas regulares, a saber: (1) capacidade de um copo e (2) tema livre: modelo matemático de uma lombada; e mais duas atividades desenvolvidas pelos sujeitos da nossa pesquisa num curso de extensão: (4) latinhas de alumínio e (5) laranja.” (p.195)

Quais foram os resultados?

“As diferentes variações dos usos dos erros, apontadas por Borasi (1996), surgiram nas atividades realizadas pelos sujeitos da nossa pesquisa, naturalmente, por meio da Modelagem Matemática. Em diversas situações, os próprios alunos perceberam os seus erros, e, assumindo uma postura de remediação/tarefa ou remediação/conteúdo, puderam corrigilos. Os erros não foram vistos como fracasso, mas como oportunidades de aprendizagem. A professora|pesquisadora não pediu para que os alunos apagassem as suas resoluções incorretas e as refizessem, pelo contrário, precisavam entender em que e por que erraram para que pudessem resolver o problema. Desse modo, entendemos que, por meio da taxionomia do uso dos erros apresentada em Borasi (1996), pudemos identificar relações entre a

Modelagem Matemática e possíveis formas de explorar os erros cometidos pelos alunos, atendendo aos objetivos da nossa pesquisa.” (p.196)

“Para além desses objetivos, vale destacar outras contribuições oportunizadas aos estudantes por meio das atividades implementadas, como o estabelecimento de relações entre a Matemática e a realidade, proporcionando uma visão diferenciada dos conceitos de CDI II, em que é possível imaginar suas aplicações quando olham para determinados objetos. Nesse contexto, constituiu-se um espaço importante na formação desses estudantes por possibilitar reflexões acerca dos distanciamentos entre teoria e prática na Matemática. Esses apontamentos ficaram mais evidentes nas entrevistas, quando foram questionados sobre o que aprenderam com as atividades desenvolvidas, uma vez que vários deles responderam que aprenderam a aplicar os conceitos do CDI II em situações reais. (p.196-197)

“Do ponto de vista da formação de professores, a proposta também contribuiu com a formação de competências referentes ao conhecimento pedagógico, uma vez que constituiu um espaço de experimentação, servindo para futuras reflexões quanto ao tipo de ensino que se deseja oferecer (VIDOTTI, KATO; 2017). Essas reflexões ficaram evidentes na fala do aluno Marcelo, quando questionado sobre o que aprendeu com as atividades desenvolvidas: “[...] além dos conteúdos de Cálculo, eu posso utilizar o que aprendi para dar uma aula, para projetar, criar uma aula mais iterativa com os alunos, onde eles tenham que criar um problema para eles resolverem”. (p.197)

“Além disso, aprenderam a problematizar por meio da matemática e desenvolveram senso crítico. A aluna Paloma, que participou da atividade sobre o modelo matemático da lombada, protocolou junto à prefeitura um pedido para implantar um redutor de velocidade na rua onde mora. Essa atitude vai ao encontro dos pressupostos da Modelagem Matemática na perspectiva sócio-crítica, a qual enfatiza reflexões sobre o papel da matemática na sociedade (BARBOSA; SANTOS; 2007).” (p.197)

“Dentre às contribuições dessa pesquisa para a Educação Matemática, sinalizamos possibilidades para o professor auxiliar o aluno a formar *conceitos imagem* apropriados dos conceitos de CDI II, podendo mostrar imagens incorretas dos conceitos para que reflitam sobre elas, ou ainda, envolver os alunos em situações que possam provocar os conflitos cognitivos. Por isso, a importância de conhecer possíveis fatores de conflitos potenciais, que podem se formar na mente do aluno.” (p.197)

“Além disso, essa pesquisa contribui evidenciando potencialidades da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem na disciplina de CDI II. Considerando que essa disciplina compõe os currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática, destacamos a importância do desenvolvimento dessas estratégias de ensino, visto que essa prática, ao promover o estabelecimento de relações entre a Matemática e a realidade, atende a recomendações das DCNs. “(p.197)

APÊNDICE II - Unitarização

Legenda para auxiliar no processo de categorização:

- conteúdos matemáticos desenvolvidos
- referencial teórico e/ou metodologias utilizado
- contribuições na formação do licenciando

Ferreira (2017)	Em suma, os dados nos mostraram que, apesar do grande nível de abstração da AAM (Álgebra Abstrata Moderna), é possível, e mais fácil, ensinar seus conteúdos a partir de conexões entre conhecimentos dos próprios alunos, como os aprendidos na Educação Básica ou em outras disciplinas de matemática do Ensino Superior (p.232)	Ensinar conteúdos a partir de conexões entre conhecimentos dos próprios alunos
Ferreira (2017)	Os conteúdos de AAM se apresentam de forma bastante significativa nos conteúdos da Educação Básica. É importante que o professor dessa disciplina busque sempre enfatizar essa relação. Pois isso, além de promover uma melhor formação do professor, ao estabelecer uma relação entre teoria e prática, serve como um agente motivador, incentivando os alunos a se dedicarem mais ao estudo dessa disciplina. Acreditamos, também, que o mesmo poderá ser feito para outras disciplinas de matemática superior. (p.237)	Relação de teoria e prática Motivação para estudar
Ferreira (2017)	O conhecimento de AAM pode ser usado como principal instrumento para se fazer justificativas formais de propriedades e, até mesmo, de definições trabalhadas na Educação Básica. De fato, a AAM trata do estudo das propriedades de uma dada operação definida em um conjunto qualquer. Se olharmos atentamente para os conteúdos de matemática da Educação Básica, as proposições (teoremas ou propriedades), quase sempre, estão relacionadas com as	Justificativas formais de propriedades e definições trabalhados na Educação Básica

	operações de adição e/ou multiplicação definidas no conjunto dos Naturais, Inteiros, Racionais, Reais ou Complexos. Assim, as propriedades das operações são fundamentais para se demonstrar essas proposições. Consequentemente, podemos recorrer ao conhecimento de AAM durante esse processo de demonstração. Gostaríamos de observar que, quando nos restringimos ao conjunto dos Irracionais, a AAM perde sua força, visto que os Irracionais não formam uma estrutura algébrica com nenhuma das operações usuais (adição e multiplicação). Na verdade, a adição e a multiplicação nem mesmo são operações no conjunto dos Irracionais, pois nem sempre a soma ou o produto de dois números irracionais dá um número irracional. Nesta circunstância, onde a AAM não está presente, devemos recorrer a uma outra disciplina tão importante quanto a Álgebra, a Análise Real. (p.237-238)	
Ferreira (2017)	O conhecimento de AAM ajuda o professor da Educação Básica a identificar semelhanças e diferenças entre os conteúdos que ele irá trabalhar na sua prática profissional e, com isso, ensinar um novo conteúdo, baseando-se nas semelhanças ou diferenças desse novo com outros conteúdos já trabalhados. Isso foi feito durante o nosso Projeto de Ensino. Ao discutirmos as relações de equivalência, buscamos identificar, na Educação Básica, situações onde essas relações ocorriam. Discutimos as semelhanças e diferenças entre os Inteiros e os Polinômios; entre matrizes e inteiros; entre polinômios e matrizes, etc. (p.238)	Aprender as semelhanças e diferenças entre os conteúdos
Ferreira (2017)	O ensino de AAM, nos cursos de Licenciatura, pode levar os alunos a serem mais criteriosos em relação às hipóteses de propriedades matemáticas e a se preocuparem com a composição da estrutura e dos elementos com que eles estiverem trabalhando. Durante discussões em sala de aula, os alunos a princípio acreditavam que estavam de posse de uma estrutura algébrica e, após uma analise criteriosa, descobriram que estavam enganados, levando-os a perceber que é preciso tomar cuidado em fazer afirmações baseadas apenas em uma primeira observação. (p.238)	Hipóteses de propriedades matemáticas
Ferreira (2017)	O ensino de AAM, nos cursos de Licenciatura, pode levar os alunos a serem mais críticos – não aceitar um resultado sem justificativa – e mais criteriosos – até o óbvio precisa ser justificado. Isso apareceu de forma bem contundente durante demonstrações de propriedades algébricas, como, por exemplo, o produto de um elemento, de um anel ou corpo, por zero, dá zero. (p.238)	Ensinar os licenciandos a serem mais críticos em relação às demonstrações

Ferreira (2017)	O ensino de AAM propicia um ambiente adequado para melhorar a escrita matemática do estudante. De fato, a aprendizagem de conceitos e, principalmente, procedimentos dessa disciplina exige muita escrita e intepretação lógica de textos e simbologias matemáticas. E, a inserção da MEAAMaRP nesse processo ajuda o professor a identificar erros de leitura e escrita dando, assim, condições dele fazer as devidas intervenções. (p.238)	Melhorar a escrita matemática
Ferreira (2017)	Relatos desses alunos mostraram o descrédito em relação à metodologia tradicional. Nesse ponto, a Resolução de Problemas revelou-se, para esses alunos, como um elemento diferencial no ensino, na aprendizagem e na avaliação de matemática. Pois, pela vivência de cada aula, observando o crescimento conceitual dos alunos, no diálogo professor-aluno, dentro e fora da sala de aula, pelos relatos dos alunos e por pesquisas já consolidadas, comprova-se que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, além de ser um elemento motivador, coloca o aluno como principal agente no processo de ensino-aprendizagem-avaliação, levando-o a refletir, discutir e tirar suas próprias conclusões, sem esperar que o professor pense por ele e, consequentemente, produzindo aprendizagem. Além disso, foi detectado em alguns momentos, durante o uso dessa metodologia, que o fato de o aluno conseguir resolver um problema não garante sua aprendizagem. Isso serviu para mostrar que realmente nessa metodologia, a avaliação acontece de forma integrada ao ensino, promovendo a aprendizagem. (p.240)	Uso da metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas Aluno como principal agente no processo ensino-aprendizagem-avaliação
Flores (2020)	Caminhando no sentido de atender ao que nos propomos enquanto pesquisadores, procuramos explorar a formalização dos conceitos por meio da construção axiomática do conjunto dos números racionais, porém não simplesmente reproduzindo essa construção teórica, como já encontrado em materiais disponíveis, mas sim pensando em uma proposta que levasse em conta o desenvolvimento do pensamento matemático. Nesse intuito, encontramos, na Teoria dos Três Mundos da Matemática, essa base teórica. (p.158-159)	Três Mundos da Matemática Construção axiomática do conjunto dos números racionais Levar em conta o desenvolvimento do pensamento matemática
Flores (2020)	As tarefas foram desenvolvidas de forma que os estudantes pudessem, em um primeiro momento, evocar suas imagens conceituais para um dado conceito, explorando os significados pessoais construídos ao longo da trajetória escolar e acadêmica e só depois deveriam apresentar a definição formal, baseada em um	Mundo Corporificado: gráficos, diagramas, usos cotidianos Mundo Simbólico: definições, justificativas, exemplos Mundo Formal: formalização

	sistema axiomático. Procuramos desenvolver questões que explorassem características do Mundo Corporificado ao solicitar que os estudantes desenhassem gráficos e diagramas ou, ainda, quando procuramos conhecer os significados pessoais dos conceitos, pois esperávamos que as respostas trouxessem indícios de usos cotidianos e de corporificações. O Mundo Simbólico foi explorado na sequência proposta, tendo em vista que esse se apresenta nas definições, nas produções de justificativas pedidas ou no trabalho com exemplos solicitados. Por fim, as características formais permearam toda a proposta, pois, em todas as tarefas, exploramos a formalização dos conceitos trabalhados, salientando a linguagem matemática correta e a estrutura lógica de demonstração produzida a partir do sistema axiomático. (p.159)	dos conceitos, linguagem matemática correta, demonstrações
Flores (2020)	[...] entendemos que o quadro teórico escolhido conseguiu sustentar uma proposta de formação de futuros licenciados em matemática no tocante aos conceitos relacionados aos Números Racionais, pois salienta que existem diferentes maneiras de se pensar matematicamente, chamando atenção para que o professor esteja atento ao modo como os alunos pensam e proporcione diferentes abordagens de um mesmo conceito, levando em consideração a jornada individual de cada estudante em sua evolução do pensamento matemático. (p.161)	Três Mundos da Matemática Existem diferentes maneiras de pensar matematicamente
Flores (2020)	Nosso terceiro objetivo específico tratou de averiguar a relação da construção formal dos Números Racionais com a forma como esses são abordados na Educação Básica. Entendemos ter alcançado esse objetivo quando, ao longo da construção formal, discutimos, com questões propostas na sequência de ensino, algumas das relações que podem ser tecidas e quando, a partir das manifestações dos próprios estudantes, foram feitas essas relações. Nas respostas para as primeiras tarefas já apareceram, naturalmente, algumas relações dos conceitos que estávamos trabalhando com os vistos na trajetória escolar dos estudantes, como, por exemplo, o conceito de frações equivalentes. Ao propormos questões que trabalharam com mais profundidade essa relação, percebemos que a maioria dos estudantes conseguiu fazer a ligação entre as tarefas respondidas e o conceito de fração equivalente conhecido desde o Ensino Fundamental. Como mais alguns exemplos das relações dos conceitos formais estudados com a Educação Básica, podemos citar a dúvida que os estudantes mencionaram sobre o porquê do	Relação da construção formal dos Números Racionais com a construção na Educação Básica

	uso do mínimo múltiplo comum na operação de adição. Tal dúvida foi esclarecida a partir do momento em que eles relacionaram o uso com o conceito de equivalência e, também, após a discussão gerada na retomada das propriedades das operações, principalmente focada no significado dos elementos neutro e simétrico. (p.161-162)	
Flores (2020)	Além das relações, tecidas ao longo do desenvolvimento da proposta de construção axiomática, do mesmo modo, trabalhamos com uma tarefa que explorou os significados dos números racionais no contexto da Educação Básica. Optamos por abordar os significados sob o ponto de vista de Kieren (1980) e propomos que os estudantes respondessem a questões envolvendo cinco significados: parte-todo, razão, quociente, medida e operador. O significado parte-todo foi o mais familiar para os estudantes. Eles destacaram que esse significado costuma ser o mais trabalhado na Educação Básica, apesar de terem cometido alguns equívocos na resolução da questão que o abordou. Essa percepção vem ao encontro de pesquisas que relatam esses resultados. Com relação ao significado razão, percebemos que esse não era muito conhecido, pelos estudantes, como um significado para o número racional. Provavelmente, durante a trajetória escolar deles, deva ter sido abordado em outro contexto, como de proporcionalidade, por exemplo. Na resolução das questões envolvendo esse significado, os estudantes tiveram algumas dificuldades, porque, além da razão, necessitavam de outros conceitos para resolvê-las. O significado quociente foi tratado na sequência e abordado nos contextos discreto e contínuo. Pelas respostas, percebemos algumas dificuldades de resolução e de interpretação do que o número racional que foi encontrado como resposta representava naquele contexto. Outro significado, para o número racional, que se revelou quase desconhecido pela maioria dos estudantes, foi o de medida. Essa foi uma surpresa para nós enquanto pesquisadoras, pois os estudantes já haviam trabalhado com várias disciplinas que haviam abordado esse conceito. Mesmo assim, esse conteúdo, ao que percebemos, não ficou compreendido por eles. Observamos, dessa maneira, dificuldades na resolução da questão que abordaram esse significado. Por fim, o último significado trabalhado foi o de operador e, no caso desse, encontramos duas situações: a primeira foi na resolução da questão que abordou o operador no contexto aritmético. Nesse caso, todos os estudantes responderam com facilidade. Já no que se refere à questão	Significados dos números racionais no contexto da Educação Básica

	que abordou o operador no contexto geométrico, alguns estudantes apresentaram respostas incorretas. (p.162-163)	
Fonseca (2020)	Sendo assim, os resultados apontam que a sequência de atividades, pautadas em tarefas exploratórias, contribuiu para a articulação dos conhecimentos prévios da geometria plana com novos da geometria esférica, e mostraram que a manipulação de materiais concretos favorece a compreensão de conceitos geométricos, assim como a utilização de um software de geometria dinâmica, no caso deste estudo, o GeoGebra. Ademais, pelos resultados, constatamos que a abordagem utilizada possibilitou o desenvolvimento da compreensão relacional dos participantes. (p.272-273)	Tipos de compreensão de Richard Skemp Investigações Matemáticas Articulação de conhecimentos da geometria plana com os da geometria esférica Manipulação de materiais concretos favorece a aprendizagem Compreensão relacional (saber os porquês)
Fonseca (2020)	[...] pensamos que o trabalho realizado venha a contribuir com a ampliação dos conhecimentos geométricos dos sujeitos participantes, possibilitando-lhes nova visão sobre o desenvolvimento do campo geométrico almejando, enquanto possíveis desdobramentos, que possam, no futuro, em sua atuação docente, inserir estes conhecimentos na educação básica, respeitadas as características do público a que se destinar ou que possam aprofundar seus estudos em geometrias não-euclidianas, buscando elementos de áreas da matemática, como por exemplo, da geometria diferencial. (p.273)	Conhecimentos geométricos Possibilidades para inserir esses conhecimentos na Educação Básica
Fonseca (2020)	Do mais, os resultados apontaram que é possível desenvolver tópicos da geometria esférica, de modo a proporcionar a compreensão (relacional) dos participantes, mostrando que o estudo também traz contribuições para pesquisas no campo da educação matemática, no qual observamos carência de trabalhos realizados com professores em formação, na direção de sua compreensão em relação à aprendizagem de tópicos de geometrias não-euclidianas. (p.273)	Tópicos de geometria esférica
Fonseca (2020)	Ainda, acreditamos que o trabalho realizado vem a contribuir com pesquisas no âmbito da Educação Matemática, voltadas a discussão da aprendizagem matemática, posto que verificou a existência dos tipos de compreensão propostos por Skemp e propôs outros intermediários: quase relacional e quase instrumental. Além disso, pode vir a colaborar com a prática docente, visto haver o entendimento de que os alunos compreendem de formas diferentes, o	Entender que os alunos compreendem de formar diferentes

	professor pode repensar e aprimorar estratégias de ensino. (p.274)	
Vidotti (2019)	“As diferentes variações dos usos dos erros, apontadas por Borasi (1996), surgiram nas atividades realizadas pelos sujeitos da nossa pesquisa, naturalmente, por meio da Modelagem Matemática. Em diversas situações, os próprios alunos perceberam os seus erros, e, assumindo uma postura de remediação/tarefa ou remediação/conteúdo, puderam corrigilos. Os erros não foram vistos como fracasso, mas como oportunidades de aprendizagem. A professora|pesquisadora não pediu para que os alunos apagassem as suas resoluções incorretas e as refizessem, pelo contrário, precisavam entender em que e por que erraram para que pudessem resolver o problema. Desse modo, entendemos que, por meio da taxionomia do uso dos erros apresentada em Borasi (1996), pudemos identificar relações entre a Modelagem Matemática e possíveis formas de explorar os erros cometidos pelos alunos, atendendo aos objetivos da nossa pesquisa.” (p.196)	Modelagem Matemática Análise de Erros Erro como oportunidade de aprendizado
Vidotti (2019)	“Para além desses objetivos, vale destacar outras contribuições oportunizadas aos estudantes por meio das atividades implementadas, como o estabelecimento de relações entre a Matemática e a realidade, proporcionando uma visão diferenciada dos conceitos de CDI II, em que é possível imaginar suas aplicações quando olham para determinados objetos. Nesse contexto, constituiu-se um espaço importante na formação desses estudantes por possibilitar reflexões acerca dos distanciamentos entre teoria e prática na Matemática. Esses apontamentos ficaram mais evidentes nas entrevistas, quando foram questionados sobre o que aprenderam com as atividades desenvolvidas, uma vez que vários deles responderam que aprenderam a aplicar os conceitos do CDI II em situações reais. (p.196-197)	Aplicação dos conceitos Relações entre teoria e prática
Vidotti (2019)	“Do ponto de vista da formação de professores, a proposta também contribuiu com a formação de competências referentes ao conhecimento pedagógico, uma vez que constituiu um espaço de experimentação, servindo para futuras reflexões quanto ao tipo de ensino que se deseja oferecer (VIDOTTI, KATO; 2017). Essas reflexões ficaram evidentes na fala do aluno Marcelo, quando questionado sobre o que aprendeu com as atividades desenvolvidas: “[...] além dos conteúdos de Cálculo, eu posso utilizar o que aprendi para dar uma aula, para projetar, criar uma aula mais iterativa com os alunos,	Aprender aplicação de metodologias diferenciadas

	onde eles tenham que criar um problema para eles resolverem". (p.197)	
Bueno (2021)	"[...] a abordagem proposta e aplicada junto aos futuros professores de Matemática foi bem aceita pela turma, que, conforme entendeu-se com o questionário inicial, estava habituada com realidades pedagógicas pautadas pelo paradigma: definição, teorema, exemplos e exercícios. Sendo assim, os alunos trouxeram sua percepção sobre a prática alternativa, construída nos mundos *Conceitual Corporificado* e *Operacional Simbólico*, destacando, nos metatextos elaborados por meio da ATD, que experiências palpáveis são mais significativas, trazendo, portanto, mais sentido para o que se estuda." (p.179)	Três Mundo da Matemática Modelagem Matemática Experiências mais palpáveis são mais significativas
Bueno (2021)	"[...] frisaram que uma postura docente que não prioriza as manipulações algébricas e as definições formais é capaz de trazer mais motivação aos educandos, servindo, inclusive, como uma inspiração para sua futura atuação profissional." (p.179)	Motivação para estudar Inspiração para a sua futura atuação profissional