



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

AMANDA CLAUDIA MALAGI DA SILVA

ASPECTOS DE UMA MEDIDA FUNCIONAL NO
SETOR ELETROFRACO DO MODELO PADRÃO

CURITIBA - PR, BRASIL

2024

AMANDA CLAUDIA MALAGI DA SILVA

ASPECTOS DE UMA MEDIDA FUNCIONAL NO SETOR
ELETROFRACO DO MODELO PADRÃO

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Iberê Oliveira Kuntz de Souza

CURITIBA - PR, BRASIL

2024

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Silva, Amanda Claudia Malagi da

Aspectos de uma medida funcional no setor eletrofraco do modelo padrão / Amanda Claudia Malagi da Silva. - Curitiba, 2024.

1 recurso on-line: PDF.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física.

Orientador: Prof. Dr. Iberê Oliveira Kuntz de Souza

1. Higgs, Bosóns de. 2. Feynman, Integrais de. 3. Interações eletrofracas. 4. Análise funcional. I. Souza, Iberê Oliveira Kuntz de. II. Universidade Federal do Paraná. III. Programa de Pós-Graduação em Física. IV. Título.

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **AMANDA CLAUDIA MALAGI DA SILVA** intitulada: "**Aspectos de uma medida funcional no setor eletrofraco do Modelo Padrão**", sob orientação do Prof. Dr. IBERE OLIVEIRA KUNTZ DE SOUZA, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestra está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 29 de Fevereiro de 2024.

Assinatura Eletrônica

29/02/2024 16:35:56.0

IBERE OLIVEIRA KUNTZ DE SOUZA

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

01/03/2024 09:35:06.0

ROLDAO DA ROCHA JUNIOR

Avaliador Externo (FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC)

Assinatura Eletrônica

29/02/2024 16:44:57.0

ANA CRISTINA SPROTTE COSTA

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer profundamente aos meus pais, Maurizia e Claudinei, por todo apoio e cuidado que tiveram comigo ao longo desses últimos anos. Eu acho curioso a sorte de ter pais com a capacidade sutil de cuidar e, ao mesmo tempo, ensinar a ser independente. Agradeço por todos os anos de trabalho que tiveram que enfrentar para cuidar de mim e do meu irmão.

Gostaria de fazer um agradecimento especial ao meu avô Valdetudes, quem me levou para a escola todos os dias até meus 13 anos de idade. Enquanto caminhávamos, ele ia me dizendo o quanto era importante que eu me dedicasse aos estudos porque “estudar é bonito demais”. Talvez, por nunca ter tido acesso a educação, ele a valorize tanto para os netos.

Devo meus agradecimentos ao meu irmão e minha cunhada por todos os momentos que passamos juntos (da Kilden às reuniões do mini) e por todo o cuidado que tiveram comigo ao longo desses anos. Me faltariam palavras para agradecer à Sophia, minha sobrinha/afilhada/irmã/amiga, por toda a paciência que teve comigo nos dias em que não pude brincar porque estava estudando. São raros os dias em que não me surpreendo sobre como essa criança pode ser tão incrível.

Aos meus amigos Gyovanne, Camila, Rodrigo e Dri, devo meus mais sinceros agradecimentos por sempre estarem ao meu lado. Nunca imaginei que um dia iria conhecer pessoas tão boas e que ainda teria a sorte de que fossem minhas amigas.

Gostaria de agradecer também aos amigos que fiz no mestrado Vitor, Felipe e Gabriel, por todos os momentos que passamos juntos a por toda a ajuda na escrita dessa dissertação. Lembro que, logo nos primeiros dias do mestrado, o Vitor me enviou uma mensagem avisando sobre as listas de eletro e me perguntando se eu estava bem. Me estranhou uma gentileza vinda de alguém que eu nem conhecia. Hoje eu entendo porquê.

Não poderia deixar de agradecer aos meus professores da graduação Marlos e Arandi, por toda a ajuda no início do mestrado, com conselhos e as melhores aulas de física matemática e mecânica quântica.

Sou profundamente grata ao meu orientador, professor Iberê, especialmente por me orientar com uma paciência que, para mim, ainda é surpreendente. Todas as discussões sobre física e conversas sobre o futuro foram muito inspiradoras.

Agradeço aos professores que, gentilmente, aceitaram avaliar esse trabalho: Alessandra, Ana, Viana e Roldão.

Agradeço também à CAPES pelo apoio financeiro.

“O que era isso que a desordem da vida podia sempre mais do que a gente?”

Grande Sertão: Veredas
Guimarães Rosa

RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma proposta de modelo BSM (do inglês, *Beyond Standard Model*) para o setor escalar de Higgs da teoria eletrofraca. Esse modelo considera uma correção quântica de um laço, além daquelas já compreendidas pelo Modelo Padrão. Tal correção introduz novos parâmetros livres ao setor de Higgs, os quais podem ser ajustados para que a massa do bóson W^\pm concorde com os dados experimentais reportados pelo CDF II (do inglês, *Collider Detector at Fermilab*), ou pelo LHC (do inglês, *Large Hadron Collider*). Obtivemos a nova correção quântica a partir da medida funcional da integral de caminho de Feynman, considerando aspectos de simetria da teoria eletrofraca. Essa correção foi, então, introduzida à ação clássica do setor escalar de Higgs. O potencial efetivo do campo de Higgs, o qual inclui a nova correção quântica, foi utilizado no cálculo das massas dos bósons de Higgs, W^\pm e Z^0 , através do processo de quebra espontânea de simetria. Obtivemos as expressões para as massas em função dos novos parâmetros livres introduzidos na teoria, os quais podem ser fixados pelos dados experimentais.

Palavras-chaves: Modelo Padrão. Teoria eletrofraca. Setor escalar de Higgs. Integral de caminho de Feynman. Medida funcional.

ABSTRACT

In this work we present a proposal for a BSM (Beyond Standard Model) model for the Higgs scalar sector of the electroweak theory. This model considers a quantum correction of one loop, in addition to those already considered by the Standard Model. Such correction introduces new free parameters to the Higgs sector, which can be adjusted in order to the mass of the W^\pm boson agree with the experimental data reported by the CDF II (Collider Detector at Fermilab), or by the LHC (Large Hadron Collider). We obtained the new quantum correction from the functional measure of the Feynman path integral, considering symmetry aspects of the electroweak theory. This correction was then introduced to the classical action of the Higgs scalar sector. The effective potential of the Higgs field, which includes the new quantum correction, was used in the calculation of the masses of the Higgs, W^\pm and Z^0 bosons, through the process of spontaneous symmetry breaking. We obtained the expressions for the masses in function of the new free parameters introduced into theory, which can be fixed by the experimental data.

Keywords: Standard Model. Electroweak theory. Higgs scalar sector. Feynman path integral. Functional measure.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Trajetórias que podem ser percorridas pela partícula entre a fonte S e o anteparo O . Retirado de [1].	16
Figura 2 – Possíveis trajetórias realizadas pela partícula, entre S e O , no aparato experimental com um número infinito telas e fendas. Retirado de [1].	17
Figura 3 – Um possível caminho $q(t)$ percorrido entre as posições inicial e final, definidas nos estados quânticos. Retirado de [2].	20
Figura 4 – Diagramas de Feynman para a teoria interagente. Adaptado de [2].	36
Figura 5 – Potencial que descreve a auto-interação do campo escalar $\varphi(x)$. Retirado de [3].	63
Figura 6 – Exemplo de um espaço de configuração para uma teoria composta por três campos.	73
Figura 7 – Potencial efetivo do setor escalar de Higgs. Consideramos os valores arbitrários $\eta = \Lambda = 246$, $\lambda = 0,13$ e $A = B = \gamma = 1$	76

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	INTEGRAL DE CAMINHO	13
2.1	Integral de caminho em mecânica quântica	13
2.2	Integral de caminho em teoria quântica de campos	21
2.2.1	Teoria quântica relativística	21
2.2.2	Teoria clássica de campos	24
2.2.3	Formulação de Feynman	25
2.2.4	Campo escalar livre	26
2.2.5	Campo escalar interagente	28
2.3	Funções de correlação	31
3	AÇÃO EFETIVA	37
3.1	Campo clássico	37
3.2	Ação efetiva	38
3.3	Potencial efetivo	41
4	TEORIAS DE CALIBRE	46
4.1	Grupos e álgebras de Lie	46
4.2	Teorias de calibre Abelianas	50
4.3	Teorias de Yang-Mills	54
4.4	Teoria eletrofraca: setor escalar de Higgs	58
5	QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIA	61
5.1	Quebra espontânea de simetrias globais	61
5.2	Quebra espontânea de simetrias de calibre	64
5.3	Quebra espontânea de simetria no setor escalar de Higgs	67
6	MODELO BSM	72
6.1	Correção quântica: medida funcional	72
6.2	Massas dos bósons do setor escalar de Higgs	76
6.3	Correção quântica: diagramas de Feynman	79
7	CONCLUSÕES	84
	Referências	85

APÊNDICE A – INTEGRAL GAUSSIANA	90
APÊNDICE B – AÇÃO EFETIVA NO ESPAÇO DOS MOMENTOS	92

1 Introdução

Todas as interações observadas na natureza são governadas por quatro forças fundamentais: forte, fraca, eletromagnética e gravitacional. As propriedades intrínsecas, tais como massa, spin, carga, etc., exibidas pelas partículas elementares que constituem a matéria ordinária, determinam quais forças fundamentais regem suas interações. Partículas subatômicas (não elementares) também apresentam características inerentes que dependem dos tipos de partículas elementares que compõem suas estruturas, o que determina o modo como interagem. Esse mecanismo continua sendo estendido a escalas maiores até o ponto em que as interações fundamentais, ou pelo menos algumas delas, tornam-se perceptíveis para nós.

As propriedades das partículas elementares podem ser investigadas experimentalmente através do estudo de estados ligados e de efeitos como o decaimento e o espalhamento de partículas [4]. Estas observações experimentais são comparadas a uma contraparte teórica, cuja formulação baseia-se em princípios gerais da mecânica quântica e da relatividade especial. Assim, essa teoria, denominada como Modelo Padrão de física de partículas, fornece a descrição das interações fraca, forte e eletromagnética, observadas entre as partículas elementares.

O Modelo Padrão, foi desenvolvido ao longo das décadas de 60 e 70, a partir de diversas contribuições [5–12]. Em 1964, Peter Higgs propôs um mecanismo capaz de atribuir massa às partículas mediadoras das interações fundamentais, conhecidas como bósons de calibre [5]. O então denominado mecanismo de Higgs foi utilizado por Abdus Salam e Steven Weinberg, de forma independente em 1967, na unificação das interações eletromagnética e fraca, que ficou conhecida como teoria eletrofraca [6, 7]. No início dos anos 70, Gerard t’Hooft desenvolveu a prova de que a teoria eletrofraca era renormalizável [8] e em 1978 houve a primeira comprovação experimental desta unificação [11].

A segunda parte integrante do Modelo Padrão, denominada como cromodinâmica quântica, foi proposta em 1965 por Yoishiro Nambu, como uma teoria de Yang-Mills do grupo de simetria $SU(3)$ [9]. Essa teoria é responsável por descrever a interação forte entre as partículas elementares que compõem hádrons, como prótons e nêutrons, as quais são conhecidas como quarks. Na década de 70, após a observação do quark *charm* [12], o Modelo Padrão de física de partículas, composto pela teoria eletrofraca e pela cromodinâmica quântica, se tornou bem estabelecido.

O Modelo Padrão compreende um conjunto de partículas elementares, incluindo bósons de spins 0 e 1 e férmions de spin 1/2. As partículas fermiônicas são divididas entre quarks, que interagem através de todas as forças fundamentais, e léptons, os quais não

sofrem a ação da força forte. Os bósons vetoriais (spin 1) são os responsáveis por mediar as interações fundamentais forte e eletrofraca, descritas pelo Modelo Padrão. As partículas que mediam a interação forte são denominadas como glúons, enquanto o fóton e os bósons W^\pm e Z^0 são os mediadores da interação eletrofraca. Por outro lado, o bóson escalar (spin 0), denominado como bóson de Higgs, é o responsável pela atribuição de massa às partículas elementares [4, 13].

As partículas leptônicas, identificadas pelo Modelo Padrão, são classificadas entre léptons carregados e neutrinos, as quais são divididas em três gerações de partículas: elétron e neutrino do elétron, compõem a primeira geração; múon e neutrino do múon, fazem parte da segunda geração; tau e neutrino do tau, são as partículas da terceira geração. Os quarks também são agrupados em três gerações: *up* e *down*, da primeira geração; *charm* e *strange*, são as partículas da segunda geração; e *top* e *bottom*, da terceira geração de partículas [4, 13].

Ainda que o Modelo Padrão se apresente como uma teoria bem sucedida, existem questões no cenário da física de partículas que não são compreendidas por esse modelo. Um exemplo é a matéria escura fria, cuja composição não pode ser explicada pelas partículas elementares descritas pelo Modelo Padrão. Outra questão é o fato de que não observamos a mesma quantidade de partículas e antipartículas na natureza (simetria CP^1), o que também não é explicado pela teoria. Além disso, o Modelo Padrão ainda não comporta a interação gravitacional, uma das quatro interações fundamentais da natureza [14]. Por esses motivos, há uma busca pela construção de teorias que propõem extensões ao Modelo Padrão, conhecidas como teorias BSM (do inglês, *Beyond Standard Model*) [15, 16].

Ademais, os fenômenos ainda não compreendidos pelo Modelo Padrão não são os únicos fatores que sugerem a necessidade de uma física além dessa teoria. As discordâncias entre previsões teóricas realizadas pelo Modelo Padrão e observações experimentais, como aquela vista no momento magnético anômalo do múon [17, 18], também indicam a existência de uma física além do Modelo Padrão.

Em 2022, uma nova medida da massa do bóson W^\pm , um dos mediadores da interação eletrofraca, exibiu um desvio² de 7σ em relação ao valor previsto pela teoria. Enquanto o Modelo Padrão prevê uma massa de 80,377 GeV [19] para essa partícula, o novo valor observado pelo CDF II (*Collider Detector at Fermilab*) foi de 80,433 GeV [20]. Entretanto, no ano seguinte uma reavaliação dos dados reportados em 2018 pelo LHC (*Large Hadron Collider*), corroborou o valor previsto pela teoria [21, 22].

Embora ainda haja a necessidade de outras medidas experimentais que certifiquem

¹ Simetria sob as transformações de conjugação de carga e paridade.

² O desvio padrão, expresso em unidades de σ , indica o quanto uma medida experimental desvia da hipótese. Um desvio suficiente do dado experimental em relação à hipótese indica uma nova descoberta. Tipicamente, uma nova descoberta requer um valor de, no mínimo, 5σ .

a observação relatada pelo CDF II, diversas teorias BSM propuseram-se a explicar o desvio detectado na massa do bóson W^\pm . Exemplos dessas teorias incluem o Modelo Padrão Supersimétrico Mínimo [23], a *Standard Model Effective Field Theory* [24] e o Modelo de dois dubletos de Higgs [25].

A massa do bóson W^\pm prevista pelo Modelo Padrão inclui correções quânticas de um e dois laços (proporcionais à \hbar e \hbar^2 , respectivamente), as quais originam-se nos diagramas de Feynman [26, 27]. Todavia, esses diagramas não são as únicas fontes de correções. A medida funcional da integral de caminho de Feynman, um dos formalismos utilizados em teoria quântica de campos, também pode dar origem a correções quânticas. Isso porque a medida funcional pode exibir aspectos não triviais [28, 29]. Nesses casos, esse objeto gera contribuições à integral de caminho que podem ser interpretadas como correções quânticas de um laço [30].

Tendo isso em vista, nesse trabalho propomos a construção de um modelo BSM para o setor escalar de Higgs da teoria eletrofraca, o qual descreve o processo de geração de massa dos bósons W^\pm e Z^0 através do mecanismo de Higgs. Essa construção baseia-se na introdução de uma correção quântica de um laço, ao setor escalar de Higgs, a qual origina-se na medida funcional da integral de caminho e ainda não é considerada pelo Modelo Padrão. A partir desse modelo, pretendemos obter uma nova massa para o bóson W^\pm que possa concordar com a observação experimental reportada pelo CDF II, ou manter-se em acordo com a previsão realizada pelo Modelo Padrão e corroborada pelo LHC.

O desenvolvimento desse trabalho foi dividido em capítulos nos quais abordaremos os assuntos que serão pertinentes à construção do modelo BSM. Ao longo desses capítulos, usaremos o sistema de unidades de Heaviside-Lorentz, além das unidades naturais³ em que $\hbar = c = 1$. Também utilizaremos a convenção de soma de Einstein, na qual índices repetidos indicam a soma sobre os índices. Além disso, adotaremos a métrica de Minkowski na assinatura $(+, -, -, -)$.

No Capítulo 2, faremos uma introdução geral ao formalismo da integral de caminho de Feynman, desde sua definição em mecânica quântica até sua generalização formal para a teoria quântica de campos. No Capítulo 3, abordaremos os aspectos quânticos das teorias de campos através da ação efetiva. As teorias de calibre abelianas e não-abelianas (teorias de Yang-Mills), serão introduzidas no Capítulo 4. Em especial, na Seção 4.4 apresentaremos o setor escalar de Higgs da teoria eletrofraca, principal objeto de estudo deste trabalho. Ao longo do Capítulo 5, trataremos do mecanismo de quebra espontânea de simetria, em teorias que exibem simetrias globais e locais. Na Seção 5.3, abordaremos especificamente o processo de quebra espontânea da simetria $SU(2) \times U(1)$ no setor escalar de Higgs, por meio do qual ocorre a atribuição de massa aos bósons W^\pm e Z^0 .

³ Nesse sistema, $[\text{comprimento}] = [\text{tempo}] = [\text{energia}]^{-1} = [\text{massa}]^{-1}$.

No Capítulo 6, apresentaremos a construção do nosso modelo BSM para o setor escalar de Higgs e os resultados obtidos para as massas das partículas envolvidas nesse setor (bósons W^\pm , Z^0 e de Higgs). Veremos como a correção quântica com origem na medida funcional da integral de caminho foi obtida e introduzida ao setor escalar de Higgs. Veremos também como as massas dos bósons de Higgs, W^\pm e Z^0 foram calculadas no modelo BSM e quais foram as modificações observadas em comparação às massas obtidas no setor escalar de Higgs do Modelo Padrão. Por fim, nossas conclusões serão apresentadas no Capítulo 7.

2 Integral de caminho

A quantização canônica é um método aplicado a teorias clássicas, através do qual os observáveis de um sistema físico são elevados a operadores Hermitianos e passam a satisfazer relações de comutação. Embora usualmente utilizada em mecânica quântica e também estendida à teoria de campos, a quantização canônica não é o único método por meio do qual uma teoria pode ser quantizada.

O formalismo de Feynman trata-se de outro método de quantização, especialmente utilizado em teoria de campos, construído com base nas chamadas integrais funcionais, ou de caminho. Nesse formalismo, o objeto central das teorias quânticas é denominado como funcional gerador, expresso por uma integral de caminho, o qual fornece toda a informação física acerca da teoria.

Na Seção 2.1, faremos a dedução da integral funcional para a mecânica quântica, partindo do formalismo canônico. Em seguida, na Seção 2.2, faremos a generalização formal dessa construção para a teoria de campos. Por fim, na Seção 2.3 apresentaremos as chamadas funções de correlação, tanto no contexto da mecânica quântica, como no das teorias quânticas de campos. Desenvolveremos esse capítulo com base nas referências [1, 2, 31–33], além daquelas citadas ao longo das seções.

2.1 Integral de caminho em mecânica quântica

Em mecânica quântica, um estado físico é caracterizado por um vetor em um espaço de Hilbert que, na representação de Dirac, é denotado por um ket $|\alpha\rangle$. Para todo vetor de estado $|\alpha\rangle$, existe um vetor correspondente em um espaço de Hilbert dual, denominado como bra $\langle\alpha|$ [34].

Na representação de Schrödinger, em que os estados quânticos são dependentes do tempo, a evolução de um sistema físico é obtida através da atuação do operador de evolução temporal $\hat{U}(t, t_0)$ sobre o estado inicial:

$$|\alpha, t_0; t\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle \longleftrightarrow \langle\alpha, t_0; t| = \langle\alpha, t_0| \hat{U}^\dagger(t, t_0), \quad (2.1)$$

o qual evolui $|\alpha, t_0\rangle$ de t_0 a $t > t_0$. O operador $\hat{U}(t, t_0)$, por sua vez, tem sua dinâmica regida por uma equação diferencial da forma:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0) = \hat{\mathcal{H}} \hat{U}(t, t_0), \quad (2.2)$$

na qual $\hat{\mathcal{H}}$ é o operador Hamiltoniano que descreve o sistema físico. Assim, um estado quântico $|\alpha, t_0; t\rangle$ definido em um tempo t qualquer, pode ser determinado através da Eq. (2.1), com $\hat{U}(t, t_0)$ sendo solução da Eq. (2.2).

Ademais, o estado $|\alpha, t_0; t\rangle$ também pode ser obtido diretamente através da equação de Schrödinger:

$$i\frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0; t\rangle = \hat{\mathcal{H}} |\alpha, t_0; t\rangle, \quad (2.3)$$

que resulta da aplicação da Eq. (2.2) ao estado inicial $|\alpha, t_0\rangle$ e da definição de $|\alpha, t_0; t\rangle$, dada pela Eq. (2.1).

A dinâmica de um sistema quântico pode ser descrita também na representação de Heisenberg. Nesse caso, a propriedade de unitariedade do operador $\hat{\mathcal{U}}(t, t_0)$ permite que a dependência temporal deixe de manifestar-se nos estados quânticos e passe a ser exibida pelos observáveis físicos [33]. De fato, o valor esperado de um observável qualquer \hat{A} , sugere duas interpretações:

$$\langle \alpha, t_0; t | \hat{A} | \alpha, t_0; t \rangle \rightarrow \left(\langle \alpha, t_0 | \hat{\mathcal{U}}^\dagger(t, t_0) \right) \hat{A} \left(\hat{\mathcal{U}}(t, t_0) | \alpha, t_0 \rangle \right), \quad (2.4)$$

ou

$$\langle \alpha, t_0; t | \hat{A}(t) | \alpha, t_0; t \rangle \rightarrow \langle \alpha, t_0 | \left(\hat{\mathcal{U}}^\dagger(t, t_0) \hat{A}(t) \hat{\mathcal{U}}(t, t_0) \right) | \alpha, t_0 \rangle. \quad (2.5)$$

A primeira delas, indica que os estados quânticos são os objetos que evoluem do tempo, enquanto o operador \hat{A} se mantém fixo, como ocorre na representação de Schrödinger. Por outro lado, na segunda interpretação, os kets de estado permanecem iguais, ao passo que o observável sofre a transformação unitária $\hat{A}(t) \rightarrow \hat{\mathcal{U}}^\dagger \hat{A}(t) \hat{\mathcal{U}}$. Isso significa que na representação de Heisenberg os observáveis tornam-se dinâmicos.

Embora a dependência temporal seja exibida por objetos distintos nas representações de Schrödinger e de Heisenberg, os estados quânticos, assim como os observáveis, são iguais em ambas representações para o tempo $t_0 = 0$:

$$|\alpha, t_0 = 0\rangle_H = |\alpha, t_0 = 0\rangle_S \quad \text{e} \quad \hat{A}^{(H)}(0) = \hat{A}^{(S)}, \quad (2.6)$$

sendo que os subscritos H e S denotam as representações de Heisenberg e Schrödinger, respectivamente. Para tempos posteriores, $|\alpha, t_0 = 0\rangle_H$ permanece inalterado, enquanto $\hat{A}^{(H)}(t)$ evolui no tempo. Na representação de Schrödinger, todavia, é $|\alpha, t_0 = 0\rangle_S$ quem evolui no tempo ao passo que $\hat{A}^{(S)}$ permanece igual.

Na representação de Heisenberg, a dinâmica de um observável $\hat{A}^{(H)}(t)$ é regida pela seguinte equação:

$$\frac{d\hat{A}^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i} [\hat{A}^{(H)}, \hat{\mathcal{H}}], \quad (2.7)$$

que fornece $\hat{A}^{(H)}(t)$ para qualquer instante de tempo. A dependência temporal explícita nos observáveis implica que seus autoestados também sejam dependentes do tempo, embora os estados quânticos mantenham-se temporalmente independentes. Assim, para um tempo t qualquer, um autoestado do observável $\hat{A}^{(H)}(t)$, denotado por $|a, t\rangle_H$, é dado por

$$|a, t\rangle_H = \hat{\mathcal{U}}^\dagger(t) |a\rangle \longleftrightarrow {}_H\langle a, t| = \langle a| \hat{\mathcal{U}}(t), \quad (2.8)$$

sendo $|a\rangle$ o autoestado do observável \hat{A} , na representação de Schrödinger. No tempo $t_0 = 0$, $|a, t\rangle_H = |a\rangle$.

De modo equivalente, esses autoestados, também conhecidos como estados de base, podem ser obtidos diretamente por meio da equação de Schrödinger:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |a, t\rangle_H = -\hat{\mathcal{H}} |a, t\rangle_H, \quad (2.9)$$

na qual o sinal negativo surge devido ao fato de que a evolução temporal dos kets de base é regida por $\hat{\mathcal{U}}^\dagger(t)$, conforme expresso pela Eq. (2.8).

A dinâmica de um sistema quântico pode, portanto, ser descrita de modo equivalente nas representações de Heisenberg e de Schrödinger. Em ambos os casos, podemos obter os kets de estado, bem como os de base, para qualquer instante de tempo t . Com a dinâmica desses estados bem determinada, nosso interesse recai sobre a probabilidade de que o sistema físico seja encontrado em estado quântico específico, ao evoluir temporalmente. O objeto que nos fornece essa informação é definido como amplitude de transição.

Como exemplo, considere que o estado inicial, no tempo t_i , de um sistema quântico composto por uma partícula, seja representado por um autoestado $|q_i, t_i\rangle_H$ do operador de posição $\hat{Q}(t)$. Então, em um tempo posterior t_f , a probabilidade de que esse sistema seja encontrado em outro autoestado de $\hat{Q}(t)$, expresso por $|q_f, t_f\rangle_H$, é dada pelo módulo quadrado da amplitude de transição. Tal amplitude é definida como a projeção entre esses dois estados:

$${}_H \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle_H, \quad (2.10)$$

ou, de modo equivalente, na representação de Schrödinger

$$\langle q_f | \hat{\mathcal{U}}(t_f, t_i) | q_i \rangle, \quad (2.11)$$

na qual utilizamos a Eq. (2.8).

No formalismo canônico, a amplitude de transição expressa pela Eq. (2.10) (ou pela Eq. (2.11)) pode ser obtida desde que o estado inicial $|q_i, t_i\rangle_H$ seja bem conhecido e contanto que saibamos resolver as equações que fornecem $|q_f, t_f\rangle_H$. Todavia, essa amplitude também podem ser obtida através do formalismo das integrais de caminho de Feynman. Nesse caso, tal objeto passa a ser definido em termos de uma integral funcional, a qual considera todos os caminhos possíveis que o sistema físico pode percorrer para chegar ao estado $|q_f, t_f\rangle_H$, tendo partido de $|q_i, t_i\rangle_H$.

Podemos explorar a ideia do formalismo de Feynman por meio do experimento da fenda dupla. Para isso, considere um aparato experimental no qual uma fonte S emite uma partícula no tempo t_0 que, ao passar por uma tela com duas fendas, A_1 e A_2 , é detectada em um anteparo O , em um tempo posterior $t > t_0$. Pelo princípio da superposição, a probabilidade P de que a partícula seja detectada em O é dada pela probabilidade de que

a partícula passe pela fenda A_1 e então alcance O , somada à probabilidade de que ela passe por A_2 e então se desloque ao anteparo:

$$P = P_1(S \rightarrow A_1 \rightarrow O) + P_2(S \rightarrow A_2 \rightarrow O). \quad (2.12)$$

Uma terceira fenda A_3 pode ser adicionada à tela do aparato experimental. Nesse caso, para que P seja obtida, a probabilidade de que a partícula passe pela fenda A_3 e então alcance o anteparo é simplesmente somada às probabilidades P_1 e P_2 . Também podemos incluir no experimento uma segunda tela com novas fendas B_1 , B_2 , B_3 e B_4 , conforme ilustrado pela Figura 1:

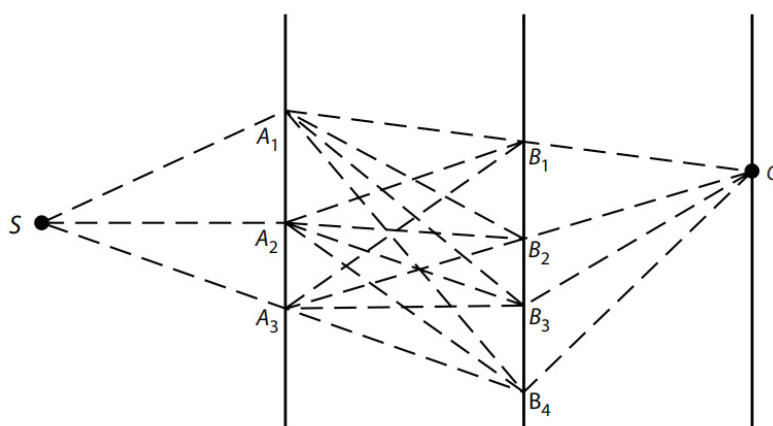


Figura 1 – Trajetórias que podem ser percorridas pela partícula entre a fonte S e o anteparo O . Retirado de [1].

Para que P seja obtida nessa configuração, consideramos a probabilidade de que a partícula passe por uma fenda A_i , em seguida por uma fenda B_j e, por fim, se desloque até O , e somamos sobre os índices i e j :

$$P = \sum_{i,j} P_{ij}(S \rightarrow A_i \rightarrow B_j \rightarrow O). \quad (2.13)$$

Podemos adicionar, livremente, novas telas ao aparato experimental. Cada uma, com um número de fendas igualmente livre. Da mesma forma que nos casos anteriores, a probabilidade de que a partícula emitida em S seja detectada em O é dada pela soma das probabilidades individuais.

De fato, podemos adicionar ao aparato, um número infinito de telas. Cada uma, com um número de fendas também infinito. Nesse caso, o espaço ocupado pelas telas é simplesmente compreendido como um espaço vazio, conforme ilustrado pela Figura 2.

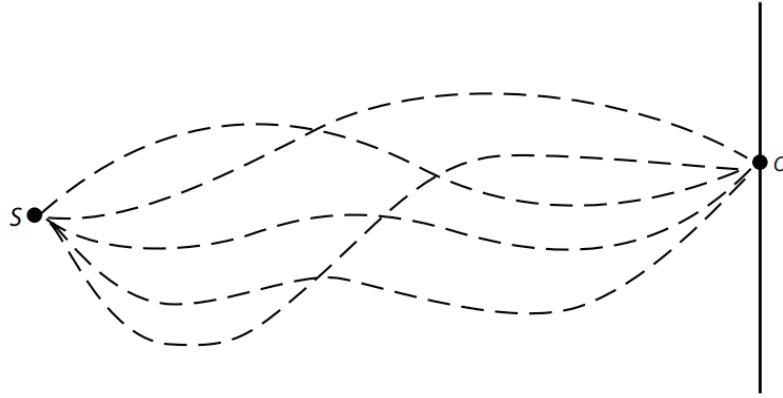


Figura 2 – Possíveis trajetórias realizadas pela partícula, entre S e O , no aparato experimental com um número infinito de telas e fendas. Retirado de [1].

Não obstante, a probabilidade de que a partícula seja propagada da fonte ao anteparo é dada pela soma das probabilidades de que ela alcance O passando pelas infinitas fendas das infinitas telas, isto é, por todos os caminhos existentes entre S e O :

$$P = \sum_{\text{Caminhos}} P(S \rightarrow O). \quad (2.14)$$

Através dessa discussão qualitativa, podemos concluir que a amplitude de transição expressa pela Eq. (2.10) pode ser obtida por meio da soma de todos os caminhos que a partícula do sistema quântico em questão pode percorrer para se propagar de q_i à q_f . A soma sobre todos esses caminhos é, então, expressa pela integral de caminho de Feynman.

Façamos agora a construção matemática dessa amplitude de transição (Eq. (2.10)) no formalismo de Feynman. Para isso, vamos supor que o sistema quântico em questão seja descrito pelo seguinte operador Hamiltoniano:

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{Q}), \quad (2.15)$$

em que \hat{Q} e \hat{P} são, respectivamente, os operadores de posição e momento que satisfazem a relação de comutação $[\hat{Q}, \hat{P}] = i$. Para casos como esse, em que \hat{H} não depende do tempo de forma explícita, o operador de evolução temporal é dado por

$$\hat{U}(t_f, t_i) = e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)}, \quad (2.16)$$

de forma que a amplitude de transição pode ser expressa como:

$${}_H \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle_H = \langle q_f | e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} | q_i \rangle. \quad (2.17)$$

A propriedade de composição exibida pelas amplitudes de transição permite que ${}_H \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle_H$ seja escrita em termos de N amplitudes intermediárias. Assim, dividimos o intervalo de

tempo $t_f - t_i$ em N partes infinitesimais δt e inserimos, entre cada ponto intermediário de ${}_H\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle_H$, a seguinte relação de completeza:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq |q\rangle \langle q| = \mathbb{1}, \quad (2.18)$$

em que $|q\rangle$ é um autoestado do operador de posição \hat{Q} . Com isso, obtemos:

$$\begin{aligned} {}_H\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle_H &= \prod_{j=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} dq_j \times \\ &\underbrace{\langle q_f | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_{N-1} \rangle \langle q_{N-1} | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_{N-2} \rangle \dots \langle q_1 | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_i \rangle}_{Nvezes}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Podemos analisar ${}_H\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle_H$ considerando uma de suas N amplitudes intermediárias, visto que todas exibem a mesma forma:

$$\langle q_2 | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_1 \rangle = \langle q_2 | e^{\frac{-i\delta t \hat{P}^2}{2m}} e^{-i\delta t V(\hat{Q})} e^{\mathcal{O}(\delta t^2)} | q_1 \rangle, \quad (2.20)$$

na qual substituímos o Hamiltoniano expresso pela Eq. (2.15) e utilizamos a fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff [35, 36],

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]+\dots}. \quad (2.21)$$

Os termos de ordens maiores em δt foram desprezados na Eq. (2.20), visto que δt se trata de um intervalo de tempo infinitesimal.

Note que as funções exponenciais da amplitude de transição intermediária (Eq. (2.20)) são expressas em termos dos operadores \hat{Q} e \hat{P} . Para que essas funções sejam compostas pelos autovalores desses operadores, inserimos na Eq. (2.20) a relação de completeza:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} |p\rangle \langle p| = \mathbb{1}, \quad (2.22)$$

sendo $|p\rangle$ um autoestado do operador de momento \hat{P} . Assim, obtemos:

$$\langle q_2 | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{2\pi} \langle q_2 | e^{\frac{-i\delta t \hat{P}^2}{2m}} | p_1 \rangle \langle p_1 | e^{-i\delta t V(\hat{Q})} | q_1 \rangle, \quad (2.23)$$

de forma que os operadores \hat{Q} e \hat{P} agora podem atuar em seus respectivos autoestados, $|q\rangle$ e $|p\rangle$. Como resultado, temos:

$$\begin{aligned} \langle q_2 | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_1 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{2\pi} \langle q_2 | p_1 \rangle \langle p_1 | q_1 \rangle e^{-i\delta t \frac{p_1^2}{2m}} e^{-i\delta t V(q_1)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{2\pi} e^{-i\delta t \frac{p_1^2}{2m}} e^{-i\delta t V(q_1)} e^{ip_1(q_2 - q_1)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{2\pi} e^{-i\delta t H(p_1, q_1)} e^{ip_1(q_2 - q_1)}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

em que utilizamos que as projeções entre os autoestados de posição e momento resultam em ondas planas:

$$\langle q|p\rangle = e^{iqp} \quad \text{e} \quad \langle q|p\rangle^* = \langle p|q\rangle = e^{-iqp}. \quad (2.25)$$

O resultado expresso pela Eq. (2.24) pode ser estendido às demais amplitudes de transição intermediárias que compõem ${}_H\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle_H$. Dessa forma:

$${}_H\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle_H = \prod_{k=1}^N \prod_{j=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_k}{2\pi} dq_j e^{\left[i\delta t \sum_{n=1}^N -H(p_n, q_n) + \frac{p_n(q_{n+1} - q_n)}{\delta t} \right]}. \quad (2.26)$$

Ao tomarmos os limites $\delta t \rightarrow 0$ e $N \rightarrow \infty$ nessa equação, obtemos:

$$\lim_{\substack{\delta t \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{n=1}^N \delta t \left[-H(p_n, q_n) + \frac{p_n(q_{n+1} - q_n)}{\delta t} \right] = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[-H(p(t), q(t)) + p(t)\dot{q}(t) \right]. \quad (2.27)$$

Com isso, a amplitude de transição entre os estados $|q_i, t_i\rangle_H$ e $|q_f, t_f\rangle_H$, passa a ser expressa como uma integral de caminho de Feynman, no espaço de fase:

$${}_H\langle q_i, t_i | q_f, t_f \rangle_H = \int \mathcal{D}p \mathcal{D}q e^{i \int_{t_i}^{t_f} dt \left(p(t)\dot{q}(t) - H(q, p) \right)}, \quad (2.28)$$

na qual definimos

$$\mathcal{D}p \mathcal{D}q = \prod_{k=1}^N \frac{dp_k}{2\pi} \prod_{j=1}^{N-1} dq_j. \quad (2.29)$$

Todavia, a integral de caminho mais usual é aquela definida no espaço de configuração, a qual é expressa em termos da Lagrangiana do sistema, em função de $q(t)$ e $\dot{q}(t)$. Para obtê-la, retomemos a Eq. (2.24):

$$\langle q_2 | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{2\pi} e^{-i\delta t \frac{p_1^2}{2m}} e^{-i\delta t V(q_1)} e^{ip_1(q_2 - q_1)}, \quad (2.30)$$

na qual podemos identificar que a função de integração no momento p_1 é do tipo Gaussiana, que pode ser integrada¹ sem grandes dificuldades. Com isso, temos:

$$\langle q_2 | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_1 \rangle = \left(\frac{-im}{2\pi\delta t} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\delta t(m/2) \left(\frac{q_2 - q_1}{\delta t} \right)^2} e^{-i\delta t V(q_1)}. \quad (2.31)$$

O resultado expresso pela Eq. (2.31) pode ser, então, estendido às N amplitudes de transição intermediárias de ${}_H\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle_H$:

$${}_H\langle q_i, t_i | q_f, t_f \rangle_H = \left(\frac{-im}{2\pi\delta t} \right)^{\frac{N}{2}} \left(\prod_{n=1}^{N-1} \int dq_j \right) e^{\left[i\delta t \sum_{n=1}^N \frac{m}{2} \left(\frac{q_{n+1} - q_n}{\delta t} \right)^2 - V(q_n) \right]}. \quad (2.32)$$

Nessa equação, já é possível identificar o argumento da função exponencial como uma versão discreta da Lagrangiana que descreve o sistema físico. Novamente, ao tomarmos o limite em que $N \rightarrow \infty$ e $\delta t \rightarrow 0$, obtemos:

$$\lim_{\substack{\delta t \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{n=1}^N \delta t \left[\frac{m}{2} \left(\frac{q_{n+1} - q_n}{\delta t} \right)^2 - V(q_n) \right] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q(t), \dot{q}(t)), \quad (2.33)$$

¹ Para detalhes dessa integração, veja o Apêndice A

em que $L(q(t), \dot{q}(t))$ é a Lagrangiana do sistema, cuja forma é

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{m}{2} \dot{q}^2(t) - V(q(t)). \quad (2.34)$$

Assim, a amplitude de transição entre os estados quânticos de posição, passa a ser expressa em termos da integral de caminho no espaço de configuração:

$${}_H \langle q_i, t_i | q_f, t_f \rangle_H = \int \mathcal{D}q e^{iS[q]}, \quad (2.35)$$

sendo $S[q]$ a ação do sistema, dada por

$$S[q] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q(t), \dot{q}(t)), \quad (2.36)$$

enquanto a medida funcional $\mathcal{D}q$ assume a seguinte forma:

$$\mathcal{D}q = \lim_{\substack{\delta t \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \left(\frac{-im}{2\pi\delta t} \right)^{\frac{N}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} dq_j. \quad (2.37)$$

O fator

$$\lim_{\substack{\delta t \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \left(\frac{-im}{2\pi\delta t} \right)^{\frac{N}{2}}, \quad (2.38)$$

da medida funcional, em princípio, não é bem definido devido aos limites $\delta t \rightarrow 0$ e $N \rightarrow \infty$. Todavia, essa divergência não gera problemas à amplitude de transição.

Na integral de caminho, expressa pela Eq. (2.35), os pontos inicial $q_i(t_i)$ e final $q_f(t_f)$, são mantidos fixos, enquanto as coordenadas intermediárias são integradas sobre todo o espaço. Desse modo, cada conjunto de pontos forma um caminho diferente $q(t)$ que conecta $q_i(t_i)$ e $q_f(t_f)$, conforme ilustrado pela Figura 3. A integração sobre todos esses caminhos é, então, representada pela medida funcional $\mathcal{D}q$. Assim, conforme discutido anteriormente, a amplitude de transição entre dois estados quânticos de posição, no formalismo de Feynman, é dada através da soma sobre todos os caminhos que conectam as posições inicial e final.

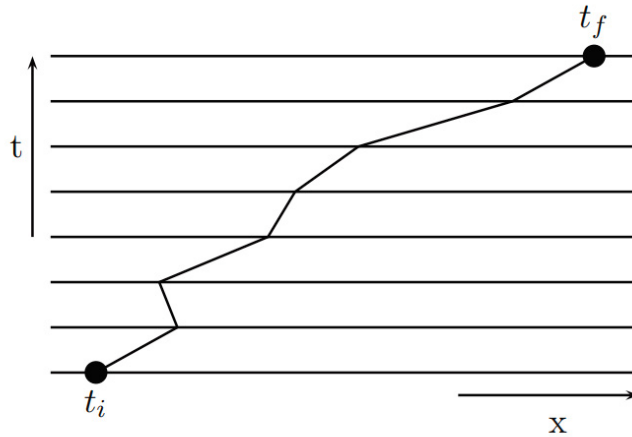


Figura 3 – Um possível caminho $q(t)$ percorrido entre as posições inicial e final, definidas nos estados quânticos. Retirado de [2].

A formulação de Feynman da mecânica quântica, é completamente equivalente a formulação canônica usual, na qual a dinâmica de um estado quântico é regida pela equação de Schrödinger [37].

2.2 Integral de caminho em teoria quântica de campos

Ao longo dessa seção, veremos o formalismo de Feynman no contexto da teoria quântica de campos, a qual sintetiza os princípios da mecânica quântica e da relatividade especial. Esse tipo de teoria é capaz de fornecer a descrição das interações entre partículas elementares que compõem a matéria ordinária. Nesse caso, as partículas são associadas às excitações dos campos que, por sua vez, são compreendidos como sistemas que exibem um número infinito de graus de liberdade. Além disso, a teoria quântica de campos não é restrita ao contexto da física de partículas. Os métodos dessa teoria também podem ser utilizados no âmbito da física da matéria condensada, por exemplo [38, 39]. Ademais, é possível observar uma analogia entre a teoria quântica de campos e a física estatística, por meio da integral de caminho de Feynman [40].

A combinação entre mecânica quântica e relatividade especial, fornecida pela teoria quântica de campos, é necessária uma vez que a mecânica quântica não é suficiente para descrever, corretamente, a dinâmica de partículas relativísticas. Isso porque, nesse regime, o número de partículas pode não ser conservado, o que não é comportado pela mecânica quântica. Por outro lado, a teoria quântica de campos é capaz de descrever esse fenômeno.

2.2.1 Teoria quântica relativística

As primeiras tentativas para a construção de uma teoria quântica consistente com a relatividade especial foram fundamentadas na generalização da mecânica quântica para o regime de altas velocidades [41–43]. Em princípio, poderíamos supor que a dinâmica de uma partícula relativística pudesse ser descrita por uma generalização da equação de Schrödinger:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = \sqrt{-\nabla^2 + m^2} \psi(\vec{x}, t), \quad (2.39)$$

na qual $\psi(\vec{x}, t) = \langle \vec{x} | \psi, t_0; t \rangle_S$ é a função de onda. No entanto, o fato de que essa equação exibe derivadas espaciais e temporal de ordens distintas indica uma assimetria entre espaço e tempo que não deveria ser observada em uma teoria de caráter relativístico.

De forma independente, Oskar Klein [41] e Walter Gordon [42] propuseram uma equação que fornece a descrição de uma partícula relativística livre e sem spin. Diferentemente da generalização da equação de Schrödinger, a equação de Klein-Gordon exibe derivadas espaciais e temporal de mesma ordem:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\vec{x}, t) = \left(-\nabla^2 + m^2 \right) \psi(\vec{x}, t). \quad (2.40)$$

Nesse caso, a assimetria entre espaço e tempo, associada às ordens das derivadas, deixa de ser observada explicitamente. Isso sugere uma possível consistência da equação de Klein-Gordon com a relatividade especial.

Um dos postulados da relatividade especial estabelece que, para qualquer referencial inercial, as leis físicas devem ser as mesmas [44]. Esse tipo de referencial é representado por um sistema de coordenadas do espaço-tempo, da seguinte forma:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \vec{x}). \quad (2.41)$$

Através de uma transformação de Lorentz, expressa pela matriz $\Lambda^\mu{}_\nu$, x^μ é relacionado à outro referencial inercial \bar{x}^μ , o qual se move com velocidade constante em relação à x^μ :

$$\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu. \quad (2.42)$$

A matriz de Lorentz, por sua vez, satisfaz:

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}, \quad (2.43)$$

em que $g_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski, dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

na assinatura $(+, -, -, -)$.

Assim, a equação de Klein-Gordon é consistente com a relatividade especial somente se sua forma for mantida nos referenciais x^μ e \bar{x}^μ , relacionados pela transformação de Lorentz (Eq. (2.42)). Para verificar se essa condição é satisfeita, podemos reescrever a equação de Klein-Gordon em termos dos quadrigredientes, definidos como:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad \text{e} \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right), \quad (2.45)$$

os quais transformam-se de forma covariante, assim como os referenciais inerciais,

$$\bar{\partial}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu \quad \text{e} \quad \bar{\partial}_\mu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho \partial^\rho, \quad (2.46)$$

em que usamos $\partial_\mu = g_{\mu\nu} \partial^\nu$.

Desse modo, a equação de Klein-Gordon no referencial inercial x^μ , assume a forma:

$$\left(-\partial^2 + m^2 \right) \psi(x) = 0, \quad (2.47)$$

enquanto no referencial \bar{x}^μ , essa equação é expressa como

$$\left(-\bar{\partial}^2 + m^2 \right) \bar{\psi}(\bar{x}) = 0, \quad (2.48)$$

nas quais $\partial^2 \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ é o operador d'Alembertiano.

Impondo que as funções de onda $\psi(x)$ e $\bar{\psi}(\bar{x})$ sejam iguais nos referenciais x^μ e \bar{x}^μ , as Eqs. (2.47) e (2.48) são as mesmas somente se o operador d'Alembertiano também for igual em ambos os referenciais. Através da Eq. (2.46), podemos concluir que $\bar{\partial}^2$ de fato é igual a ∂^2 :

$$\begin{aligned}\bar{\partial}^2 &= \bar{\partial}^\mu \bar{\partial}_\mu \\ &= g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \partial^\rho \partial^\sigma \\ &= \partial^\mu \partial_\mu = \partial^2,\end{aligned}\tag{2.49}$$

em que também utilizamos a Eq. (2.43) e renomeamos os índices contraídos (índices mudos) ρ e σ .

Portanto, a equação de Klein-Gordon é consistente com a relatividade especial, visto que sua forma é mantida em referenciais inerciais distintos. Entretanto, essa equação ainda não fornece uma descrição correta de um sistema quântico relativístico, pois exibe uma derivada temporal de segunda ordem. Isso sugere que as amplitudes de transição entre dois estados quânticos podem depender do tempo, o que viola a conservação da probabilidade postulada pela mecânica quântica.

Outra proposta para a descrição de uma mecânica quântica relativística é fornecida pela equação de Dirac para férmions livres de spin 1/2 [43]:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_a(x) = \left(-i(\alpha^j)_{ab} \partial_j + m(\beta)_{ab} \right) \psi_b(x),\tag{2.50}$$

em que a função de onda $\psi_a(x)$, com $a = 1, 2$, considera as configurações de spin $\pm 1/2$, enquanto α^j e β são matrizes de spin.

Diferente do caso anterior, a equação de Dirac exibe apenas derivadas de primeira ordem, de modo que a conservação da probabilidade deixa de ser violada. No entanto, essa equação ainda apresenta um problema: a existência de estados quânticos com energias negativas, o que implica na ausência de um estado fundamental. Como solução para esse problema, Dirac propôs que todos os estados de energia negativa já estivessem ocupados por elétrons, o que ficou conhecido como mar de Dirac. Assim, pelo princípio de exclusão de Pauli [45], outros elétrons não poderiam ocupar esses estados. Entretanto, Dirac supôs uma configuração na qual todos os estados de energia negativa estariam ocupados, exceto um. Esse “buraco” no mar de Dirac interagiria com os campos elétricos como se fosse uma partícula carregada positivamente [43]. Tal partícula, conhecida como pósitron, foi observada experimentalmente em 1933 [46].

Embora a generalização da mecânica quântica ao regime relativístico proposta por Dirac tenha sido, até certo ponto bem sucedida, não é possível estendê-la às partículas que

não satisfazem o princípio de exclusão de Pauli. Além disso, essa teoria requer um número infinito de elétrons para que todos os estados de energia negativa estejam ocupados.

Através das equações de Klein-Gordon e de Dirac, é possível notar que a generalização da mecânica quântica para o regime relativístico apresenta diversas dificuldades. Isso ocorre devido à distinção com a qual tempo e espaço são tratados em mecânica quântica. Nessa teoria, os observáveis são descritos por operadores Hermitianos, como ocorre com a posição. Todavia, não há nessa descrição um operador Hermitiano associado ao tempo, o qual é interpretado apenas como um parâmetro.

Desse modo, para que uma teoria quântica relativística seja construída de modo consistente, é necessário que tempo e espaço sejam fundamentalmente tratados da mesma forma. Isso sugere duas interpretações: a de que a posição seja tomada como um parâmetro ou a de que o tempo seja descrito por um operador Hermitiano. A escolha usual, que dá origem ao que conhecemos como teoria quântica de campos, é a de que a posição passe a ser compreendida apenas como um parâmetro, assim como o tempo. Nesse formalismo, os parâmetros \vec{x} e t passam então a rotular um novo operador, definido como campo quântico $\hat{\phi}(\vec{x}, t)$. Nesse sentido, uma teoria quântica consistente com a relatividade especial é, então, obtida através da quantização de uma teoria de campos (clássica) relativística.

2.2.2 Teoria clássica de campos

As teorias clássicas de campos são expressas na formulação covariante, a qual é manifestamente invariante por transformações de Lorentz. Isso garante que essas teorias descrevam a mesma física em qualquer referencial inercial. Usualmente, as teorias clássicas de campos são descritas por Lagrangianas construídas em termos de quantidades físicas que se transformam de modo covariante. Essas quantidades podem ser escalares, quadrivetores ou quadritensores, cujas transformações são definidas da seguinte forma:

1. Escalar:

$$\bar{S} = S. \quad (2.51)$$

2. Quadrivetor:

$$\bar{A}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu. \quad (2.52)$$

3. Quadritensor² (ordem 2):

$$\bar{T}^\beta{}_\alpha = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\beta{}_\nu T^\nu{}_\mu. \quad (2.53)$$

Assim, para que uma teoria de campos relativística seja consistente com a relatividade especial, a Lagrangiana que a descreve deve ser expressa em termos dessas

² Tensores de ordem n transformam-se sob n matrizes de Lorentz, ou de modo geral, sob qualquer representação do grupo de Lorentz.

quantidades, mas de modo que se mantenha igual em referenciais inerciais distintos. Isso significa que a Lagrangiana de uma teoria de campos relativística deve ser um escalar de Lorentz, assim como o objeto S da Eq. (2.51). Por consequência, a ação também é um escalar de Lorentz, o que assegura que as equações de movimento que regem a dinâmica dos campos de uma teoria sejam iguais em qualquer referencial inercial.

2.2.3 Formulação de Feynman

A quantização de uma teoria de campos relativística, por meio do formalismo de Feynman, pode ser realizada através de uma generalização formal da integral de caminho que obtivemos para a mecânica quântica (Eq. (2.35)). Para isso, consideremos uma teoria que descreve um sistema de N partículas, cuja Lagrangiana é dada em função das posições e velocidades de cada partícula, denotadas por $q_a(t)$ e $\dot{q}_a(t)$, respectivamente. No limite em que $N \rightarrow \infty$, o parâmetro discreto a que rotula as N partículas, passa a ser caracterizado por um vetor de posição tridimensional \vec{x} . Dessa forma, a posição torna-se um parâmetro que, em conjunto com o tempo, rotula uma nova função que definimos como campo: $\varphi(x)$, em que $x = (\vec{x}, t)$. Nesse sentido, o campo é compreendido como uma função que assume um determinado valor em todo ponto do espaço-tempo [1, 31].

Desse modo, a Lagrangiana, antes descrita como uma função de $q_a(t)$ e $\dot{q}_a(t)$, passa a ser expressa em termos do campo $\varphi(x)$ e de suas derivadas, na formulação covariante, o que garante a consistência da teoria com a relatividade especial. Além disso, a soma discreta sobre o parâmetro a passa a ser dada por uma integral sobre o espaço tridimensional:

$$\sum_a L(q_a(t), \dot{q}_a(t)) \rightarrow \int d^3x \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)), \quad (2.54)$$

em que $\mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x))$ é definida como densidade Lagrangiana³.

Ademais, a medida funcional da integral de caminho passa a indicar a integração sobre todas as configurações distintas assumidas pelo campo, dadas suas condições de contorno:

$$\mathcal{D}q = \lim_{\substack{\delta t \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \left(\frac{-im}{2\pi\delta t} \right)^{\frac{N}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \rightarrow \mathcal{D}\varphi = A \prod_{j=1}^{N-1} d\varphi(x_j), \quad (2.55)$$

em que A corresponde ao pré-fator expresso em $\mathcal{D}q$.

Assim, em teoria quântica de campos, a integral de caminho fornece a amplitude de transição entre duas configurações de campo distintas, $\varphi_i(x)$ e $\varphi_f(x)$:

$$\langle \hat{\varphi}_f(x) | \hat{\varphi}_i(x) \rangle = \int_{\varphi_i(x)}^{\varphi_f(x)} \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi]}, \quad (2.56)$$

em que a ação $S[\varphi]$ é dada por

$$S[\varphi] = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)). \quad (2.57)$$

³ Ao longo deste trabalho passaremos a nos referir à $\mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x))$ apenas como Lagrangiana, seguindo a formalidade usual dos livros de teoria quântica de campos.

De modo geral, nesse tipo de teoria, estamos interessados nas amplitudes de transição entre estados de vácuo, ou estados fundamentais, os quais são compreendidos como aqueles em que não existem partículas. Nesse caso, tomamos as configurações inicial e final do campo como sendo $\varphi_i(x) = \varphi_f(x) = 0$ nos limites $t_i \rightarrow -\infty$ e $t_f \rightarrow +\infty$. Dessa forma, obtemos:

$$Z[J] \equiv \langle 0|0 \rangle_J = \int \mathcal{D}\varphi e^{i\left(S[\varphi] + \int d^4x J(x)\varphi(x)\right)}, \quad (2.58)$$

na qual o termo

$$\int d^4x J(x)\varphi(x), \quad (2.59)$$

descreve uma interação entre o campo $\varphi(x)$ e uma fonte externa $J(x)$. Essa fonte é introduzida na descrição da teoria com o objetivo de gerar perturbações ao campo ao longo da transição entre os estados de vácuo. Desse modo, partículas, as quais são compreendidas como excitações do campo, são criadas.

De maneira análoga à função partição definida em física estatística, o funcional gerador⁴ $Z[J]$ contém toda a informação acerca do sistema físico [47]. Como veremos na Seção 2.3, $Z[J]$ gera todas as funções de correlação de uma teoria, a partir das quais as amplitudes de espalhamento, mensuradas em processos de espalhamento e decaimento, são obtidas.

Dessa forma, a quantização de uma teoria de campos relativística, por meio do formalismo de Feynman, equivale a resolver a integral de caminho expressa pela Eq. (2.58). Ao longo das próximas subseções, iremos obter as formas dos funcionais geradores para as teorias que descrevem campos escalares livre e interagente.

2.2.4 Campo escalar livre

Uma teoria de campos bastante simples é aquela que descreve um campo escalar massivo e livre de interações, cuja Lagrangiana é dada por:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2(x). \quad (2.60)$$

Para que possamos obter o funcional gerador desta teoria, substituímos a Lagrangiana \mathcal{L}_0 na definição de $Z[J]$, dada pela Eq. (2.58):

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[i \int d^4x \left(\mathcal{L}_0 + \varphi(x)J(x) \right) \right] \\ &= \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2(x) + \varphi(x)J(x) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.61)$$

em que o subscrito 0 denota a teoria livre.

⁴ O funcional gerador também pode ser definido em mecânica quântica, ao construirmos a amplitude de transição entre estados quânticos na presença de uma fonte externa.

Podemos reescrever $Z_0[J]$ no espaço dos momentos utilizando as transformadas de Fourier do campo $\varphi(x)$ e da fonte externa $J(x)$, definidas como:

$$\varphi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \varphi(k) \quad \text{e} \quad J(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} J(k), \quad (2.62)$$

sendo kx o produto quadrivetorial $k^0t - \vec{k} \cdot \vec{x}$. Assim, o funcional gerador assume a forma:

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[\frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\varphi(k)(k^2 - m^2)\varphi(-k) + J(-k)\varphi(k) + J(k)\varphi(-k) \right) \right], \quad (2.63)$$

no qual utilizamos a representação integral da delta de Dirac, expressa por

$$\int d^4x e^{ikx} = (2\pi)^4 \delta^4(k). \quad (2.64)$$

A Eq. (2.63) pode ser simplificada através da seguinte redefinição do campo $\varphi(x)$:

$$\varphi(k) = \chi(k) + \frac{J(k)}{m^2 - k^2}, \quad (2.65)$$

em que $\chi(x)$ é um novo campo escalar real. Com essa transformação, a medida funcional simplesmente passa de $\mathcal{D}\varphi$ para $\mathcal{D}\chi$ e não tem sua estrutura modificada. Desse modo, $Z_0[J]$ fica:

$$Z_0[J] = \exp \left(- \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{J(k)J(-k)}{k^2 - m^2} \right) \times \int \mathcal{D}\chi \exp \left[\frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\chi(k)(k^2 - m^2)\chi(-k) \right) \right]. \quad (2.66)$$

Podemos observar que o funcional gerador é expresso por um termo independente do campo $\chi(k)$, que não gera contribuições à integral funcional. Por outro lado, a integral de caminho não depende da fonte externa $J(k)$ e, portanto, descreve a amplitude de transição entre dois estados de vácuo sem que haja perturbações ao campo $\chi(k)$, visto que na teoria livre, $J(k)$ é a única fonte de interação. Nesse caso, a integral funcional em $\chi(k)$ resulta apenas em um termo constante que denotaremos como $Z_0[0]$.

Assim, o funcional gerador passa a ser dado por

$$Z_0[J] = \exp \left(- \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{J(k)J(-k)}{k^2 - m^2} \right) Z_0[0], \quad (2.67)$$

que pode ser reescrito no espaço das posições, como anteriormente, através da transformada de Fourier de $J(k)$:

$$J(k) = \int d^4x e^{ikx} J(x). \quad (2.68)$$

Desse modo, o funcional gerador para o campo escalar livre assume a forma:

$$Z_0[J] = \exp \left(-\frac{i}{2} \int d^4x d^4x' J(x') G_f(x-x') J(x) \right) Z_0[0], \quad (2.69)$$

na qual utilizamos a delta de Dirac (Eq. (2.64)) e sua propriedade de filtragem. O termo

$$G_f(x-x') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (2.70)$$

que surge entre as fontes $J(x)$ e $J(x')$, é definido como o propagador de Feynman. Esse objeto descreve a criação de uma partícula no ponto x do espaço-tempo e sua propagação até o ponto x' , onde é aniquilada. O fator $i\epsilon$, presente na integral, desloca os polos $k = \pm m$ acima e abaixo do eixo real, especificando o contorno no plano complexo para que a integral possa ser realizada.

O propagador de Feynman também é compreendido como a função de Green da equação de Klein-Gordon, a qual rege a dinâmica de um campo escalar livre:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) G_f(x-x') = \delta(x-x'). \quad (2.71)$$

2.2.5 Campo escalar interagente

Outro exemplo de teoria de campos, é aquele que descreve um campo escalar massivo e auto-interagente, cuja Lagrangiana é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2(x) - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4(x), \quad (2.72)$$

com λ sendo a constante de acoplamento, adimensional, do termo de auto-interação de $\varphi(x)$. A Lagrangiana dessa teoria também pode ser expressa como:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4, \quad (2.73)$$

sendo que \mathcal{L}_0 é a Lagrangiana que descreve um campo escalar livre (Eq. (2.60)).

Para que possamos obter o funcional gerador dessa teoria, substituímos a Lagrangiana dada pela Eq. (2.73) na definição de $Z[J]$ (Eq. (2.56)):

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[i \int d^4x \left(\mathcal{L}_0 + J(x)\varphi(x) \right) \right] \exp \left(-i \int d^4x \frac{\lambda}{4!} \varphi^4(x) \right). \quad (2.74)$$

Nessa equação, podemos ver que a função exponencial cujo argumento descreve a auto-interação do campo $\varphi(x)$, é o único termo que a distingue da Eq. (2.61), expressa para o caso da teoria livre. Esse termo pode ser reescrito de um modo que nos permita reaproveitar os resultados obtidos para aquela teoria. Para isso, introduzimos um objeto definido como derivada funcional [48]:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} J(y) = \delta^4(x-y) \quad \text{ou} \quad \frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^4y J(y) \phi(y) = \phi(x), \quad (2.75)$$

a qual é apenas uma generalização do caso discreto às funções contínuas:

$$\frac{\delta}{\delta x_i} x_j = \delta_{ij} \quad \text{ou} \quad \frac{\delta}{\delta x_i} (x_j k_j) = k_i. \quad (2.76)$$

Ao calcularmos a derivada funcional de $Z_0[J]$ com relação à fonte externa $J(x)$, fatores multiplicativos do campo $\varphi(x)$ são introduzidos na integral de caminho:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} Z_0[J] &= \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left[\int \mathcal{D}\varphi e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J(x)\varphi(x))} \right] \\ &= \int \mathcal{D}\varphi \left(i \int d^4x \frac{\delta J(x)}{\delta J(x_1)} \varphi(x) \right) e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J(x)\varphi(x))} \\ &= i \int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J(x)\varphi(x))}, \end{aligned} \quad (2.77)$$

em que usamos definição da derivada funcional e a propriedade de filtragem da delta de Dirac. Assim, podemos assumir a seguinte relação [2]:

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \rightarrow \varphi(x), \quad (2.78)$$

e reescrever o termo de interação quártica como

$$\frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \rightarrow \frac{\lambda}{4!} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4. \quad (2.79)$$

Dessa forma, o funcional gerador passa a ser expresso por:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4x \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right] \exp \left[i \int d^4x \left(\mathcal{L}_0 + J(x)\varphi(x) \right) \right]. \quad (2.80)$$

Podemos ver que a primeira função exponencial do funcional gerador agora é independente do campo $\varphi(x)$ e não contribui para a integral de caminho, enquanto os termos restantes correspondem ao funcional gerador da teoria livre $Z_0[J]$. Logo, $Z[J]$ pode ser reescrito como:

$$Z[J] = \exp \left[- \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right] Z_0[J]. \quad (2.81)$$

Ainda, para que a forma de $Z[J]$ seja obtida, as derivadas funcionais devem ser atuadas sobre $Z_0[J]$. Para isso, é necessário que a função exponencial seja expandida em série de Taylor:

$$\begin{aligned} \exp \left[- \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right] &= 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4x \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \int d^4y \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right)^4 + \dots \end{aligned} \quad (2.82)$$

Com isso, obtemos uma série de potências em termos da constante de acoplamento λ . Por uma questão de simplificação, consideraremos que a interação $\lambda\varphi^4(x)$ da teoria é pequena. Portanto, nessa expansão, desprezaremos os termos de segunda ordem, ou mais, em λ .

Assim, com a expansão da função exponencial, o funcional gerador se torna:

$$\begin{aligned} Z[J] &\approx \left[1 - \left(\frac{i\lambda}{4!} \right) \int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right] Z_0[J] \\ &\approx Z_0[0] \left[1 - \left(\frac{i\lambda}{4!} \right) \int d^4x \left(\frac{\delta^4}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)} \right)^4 \right] \\ &\quad \times \exp \left(- \frac{i}{2} \int d^4x d^4x' J(x) G_f(x-x') J(x') \right), \end{aligned} \quad (2.83)$$

em que utilizamos $Z_0[J]$ dado pela Eq. (2.69).

Ao atuarmos as derivadas funcionais na Eq. (2.83), obtemos:

$$\begin{aligned} Z[J] &\approx Z_0[0] \left[1 + \frac{i\lambda}{8} G_f(0) G_f(0) \int d^4x \right. \\ &\quad + \frac{\lambda}{4} G_f(0) \int d^4x \left(\int d^4x_3 G_f(x-x_3) J(x_3) \int d^4x_4 G_f(x-x_4) J(x_4) \right) \\ &\quad - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \left(\int d^4x_3 G_f(x-x_3) J(x_3) \int d^4x_4 G_f(x-x_4) J(x_4) \right. \\ &\quad \left. \left. \times \int d^4x_5 G_f(x-x_5) J(x_5) \int d^4x_6 G_f(x-x_6) J(x_6) \right) \right] \\ &\quad \times \exp \left(- \frac{i}{2} \int d^4x d^4x' J(x) G_f(x-x') J(x') \right), \end{aligned} \quad (2.84)$$

na qual o termo

$$\frac{i\lambda}{8} G_f(0) G_f(0) \int d^4x, \quad (2.85)$$

é divergente, visto que a integral é realizada sobre o espaço-tempo e as funções de Green avaliadas na origem não convergem. No entanto, estas divergências podem ser absorvidas pelo termo $Z_0[0]$. Isso porque nas funções de correlação, calculadas através do funcional gerador, as divergências contidas em $Z_0[0]$ são canceladas, pois os mesmos termos divergentes surgem no denominador e no nominador dessas funções. Desse modo, o

funcional gerador para a teoria interagente pode ser expresso como:

$$\begin{aligned}
Z[J] &\approx Z_0[0] \times \\
&\left[1 + \frac{\lambda}{4} G_f(0) \int d^4x \left(\int d^4x_3 G_f(x-x_3) J(x_3) \int d^4x_4 G_f(x-x_4) J(x_4) \right) \right. \\
&\quad - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \left(\int d^4x_3 G_f(x-x_3) J(x_3) \int d^4x_4 G_f(x-x_4) J(x_4) \right. \\
&\quad \left. \left. \times \int d^4x_5 G_f(x-x_5) J(x_5) \int d^4x_6 G_f(x-x_6) J(x_6) \right) \right] \\
&\quad \times \exp \left(-\frac{i}{2} \int d^4x d^4x' J(x) G_f(x-x') J(x') \right),
\end{aligned} \tag{2.86}$$

que é somente válido até primeira ordem em λ . Nessa expressão, podemos observar que $Z[J]$ é dado pelo funcional gerador da teoria livre acrescido de termos de correção proporcionais à λ .

2.3 Funções de correlação

No contexto de teoria quântica de campos, as funções de correlação são definidas como o valor esperado do produto de N campos, as quais podem ser expressas por meio das integrais de caminho de Feynman. É através desses objetos que as amplitudes de espalhamento, mensuradas em processos de decaimento e espalhamento, são descritas teoricamente.

Podemos obter as funções de correlação para a teoria quântica de campos, construindo-as para a mecânica quântica e, então, tomando o limite do contínuo assim como fizemos na Seção 2.2. Para isso, partimos da amplitude de transição entre dois estados quânticos, expressa por:

$${}_H \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle_H = \int \mathcal{D}q e^{i \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q})}. \tag{2.87}$$

Em seguida, consideramos o elemento de matriz:

$${}_H \langle q_f, t_f | \hat{Q}^{(H)}(t_1) \hat{Q}^{(H)}(t_2) | q_i, t_i \rangle_H, \quad \text{com } t_f \geq t_1 > t_2 \geq t_i, \tag{2.88}$$

o qual fornece o valor esperado do produto, temporalmente ordenado, de dois operadores de posição definidos em tempos distintos, ou seja, uma função de correlação de dois pontos.

Podemos determinar este elemento de matriz, inserindo a seguinte relação de completudeza:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq |q, t\rangle_H {}_H \langle q, t| = \mathbb{1}, \tag{2.89}$$

entre os operadores $\hat{Q}^{(H)}(t_1)$ e $\hat{Q}^{(H)}(t_2)$ da Eq. (2.88). Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} {}_H\langle q_f, t_f | \hat{Q}^{(H)}(t_1) \hat{Q}^{(H)}(t_2) | q_i, t_i \rangle_H &= {}_H\langle q_f, t_f | \hat{Q}^{(H)}(t_1) \mathbb{1} \hat{Q}^{(H)}(t_2) \mathbb{1} | q_i, t_i \rangle_H \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 dq_2 \left({}_H\langle q_f, t_f | \hat{Q}^{(H)}(t_1) | q_1, t_1 \rangle_H \right. \\ &\quad \left. \times {}_H\langle q_1, t_1 | \hat{Q}^{(H)}(t_2) | q_2, t_2 \rangle_H {}_H\langle q_2, t_2 | q_i, t_i \rangle_H \right), \end{aligned} \quad (2.90)$$

que resulta em

$$\begin{aligned} {}_H\langle q_f, t_f | \hat{Q}^{(H)}(t_1) \hat{Q}^{(H)}(t_2) | q_i, t_i \rangle_H &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 dq_2 \left(q_1(t) q_2(t) {}_H\langle q_f, t_f | q_1, t_1 \rangle_H \right. \\ &\quad \left. \times {}_H\langle q_1, t_1 | q_2, t_2 \rangle_H {}_H\langle q_2, t_2 | q_i, t_i \rangle_H \right), \end{aligned} \quad (2.91)$$

após a atuação dos operadores $\hat{Q}^{(H)}(t)$ em seus respectivos autoestados.

Podemos identificar na Eq. (2.91) três amplitudes de transição entre estados quânticos: a primeira, entre o estado inicial e aquele definido no tempo t_2 ; em seguida, entre os estados definidos em t_2 e t_1 ; e por fim, entre os estados caracterizados pelos tempos t_1 e t_f . Segundo a Eq. (2.87), essas amplitudes podem ser escritas em termos das integrais funcionais. Assim, temos:

$${}_H\langle q_f, t_f | \hat{Q}^{(H)}(t_1) \hat{Q}^{(H)}(t_2) | q_i, t_i \rangle_H = \int \mathcal{D}q q_1(t_1) q_2(t_2) e^{i \int_{t_i}^{t_2} dt L} e^{i \int_{t_2}^{t_1} dt L} e^{i \int_{t_1}^{t_f} dt L}, \quad (2.92)$$

em que dq_1 e dq_2 estão inseridos na medida funcional $\mathcal{D}q$. Ao somarmos os argumentos das funções exponenciais, obtemos a função de correlação de dois pontos no formalismo das integrais de caminho:

$${}_H\langle q_f, t_f | \hat{Q}^{(H)}(t_1) \hat{Q}^{(H)}(t_2) | q_i, t_i \rangle_H = \int \mathcal{D}q q_1(t_1) q_2(t_2) e^{i \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q})}, \quad (2.93)$$

a qual pode ser generalizada para N pontos:

$${}_H\langle q_f, t_f | \hat{T} \left(\hat{Q}^{(H)}(t_1) \dots \hat{Q}^{(H)}(t_N) \right) | q_i, t_i \rangle_H = \int \mathcal{D}q q_1(t_1) \dots q_N(t_N) e^{i \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q})}, \quad (2.94)$$

em que \hat{T} é o operador de ordenamento temporal.

Estas funções podem ser formalmente generalizadas para a teoria quântica de campos, de modo análogo ao que vimos na Seção 2.2. Com isso, obtemos:

$$\langle 0 | \hat{T} \left(\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_N) \right) | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) e^{i \int d^4x (\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) + J(x)\varphi(x))}. \quad (2.95)$$

Do lado esquerdo dessa equação, os campos $\varphi(x)$ atuam como operadores, o que justifica a necessidade do operador de ordenamento temporal \hat{T} . Este tratamento não é necessário do lado direito da igualdade. Isso porque a integral de caminho já fornece as funções de correlação com o ordenamento temporal correto, uma vez que os campos $\varphi(x_N)$ tornam-se apenas funções do espaço-tempo e comutam entre si.

As funções de correlação também podem ser expressas de modo simplificado através da derivada funcional, definida pela Eq. (2.75). Conforme vimos na Eq. (2.77), esse objeto introduz termos multiplicativos do campo $\varphi(x)$ na integral de caminho, ao atuar sobre o funcional gerador. Dessa forma, podemos escrever as funções de correlação da seguinte forma:

$$\langle 0|\hat{T}(\hat{\varphi}(x_1)\dots\hat{\varphi}(x_N))|0\rangle = \left(\frac{1}{i}\right)^N \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta^N Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\dots\delta J(x_N)} \Bigg|_{J=0}, \quad (2.96)$$

em que, após atuarmos as N derivadas funcionais sobre $Z[J]$, podemos avaliar a fonte $J(x)$ como zero, uma vez que trata-se apenas de uma variável auxiliar introduzida com o objetivo de gerar perturbações ao campo.

Como exemplo, calcularemos a função de correlação de dois pontos para as teorias livre e interagente, cujos funcionais geradores são dados pelas Eqs. (2.69) e (2.86), respectivamente. Essas funções, em particular, assumem um papel importante, pois fornecem os propagadores das teorias, como veremos adiante.

Para a teoria que descreve um campo escalar livre, a função de correlação de dois pontos é expressa por:

$$\begin{aligned} \langle 0|\hat{T}(\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2))|0\rangle &= \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{1}{Z_0[J]} \frac{\delta^2}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} Z_0[J] \Bigg|_{J=0} \\ &= - \frac{1}{Z_0[J]} \frac{\delta^2}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{i}{2} \int d^4x d^4x' J(x') G_f(x-x') J(x)\right) Z_0[0] \Bigg|_{J=0}. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Ao atuarmos a primeira derivada sobre o funcional gerador na Eq. (2.97), obtemos:

$$\begin{aligned} \langle 0|\hat{T}(\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2))|0\rangle &= - \frac{1}{Z_0[J]} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left(\frac{i}{2} \int d^4x G_f(x-x_2) J(x)\right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2} \int d^4x' G_f(x_2-x') J(x')\right) Z_0[J] \Bigg|_{J=0}, \end{aligned} \quad (2.98)$$

em que utilizamos a definição da derivada funcional, dada pela Eq. (2.75), e a propriedade de filtragem da distribuição delta de Dirac. Após a atuação da segunda derivada funcional sobre $Z_0[J]$, a função de correlação de dois pontos resulta em:

$$\langle 0|\hat{T}(\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2))|0\rangle = \frac{1}{i} \left(-\frac{1}{2} G_f(x_1-x_2) - \frac{1}{2} G_f(x_2-x_1)\right) = i G_f(x_1-x_2), \quad (2.99)$$

na qual utilizamos o fato que as funções de Green são simétricas. Dessa forma, podemos ver que a função de correlação de dois pontos para a teoria livre nos fornece o propagador de Feynman, definido pela Eq. (2.70).

Para a teoria interagente, a função de correlação de dois pontos é obtida de forma análoga a que utilizamos para a teoria livre, com a diferença de que o funcional gerador, neste caso, é dado pela Eq. (2.86). Assim, apresentamos apenas o resultado para essa função, sem passos intermediários

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \hat{T}(\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)) | 0 \rangle &= \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta^2}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} Z[J] \Big|_{J=0} \\
&= \frac{1}{i} \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left\{ Z_0[0] \left[1 + \frac{\lambda}{4} G_f(0) \int d^4x \right. \right. \\
&\quad \times \left(\int d^4x_3 G_f(x-x_3)J(x_3) \int d^4x_4 G_f(x-x_4)J(x_4) \right) \\
&\quad - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \left(\int d^4x_3 G_f(x-x_3)J(x_3) \right. \\
&\quad \times \int d^4x_4 G_f(x-x_4)J(x_4) \int d^4x_5 G_f(x-x_5)J(x_5) \\
&\quad \times \left. \left. \int d^4x_6 G_f(x-x_6)J(x_6) \right) \right] \\
&\quad \times \exp \left(-\frac{i}{2} \int d^4x d^4x' J(x)G_f(x-x')J(x') \right) \Big|_{J=0} \\
&= i G_f(x_1-x_2) - \frac{\lambda}{2} G_f(0) \int d^4x G_f(x-x_1)G_f(x-x_2).
\end{aligned} \tag{2.100}$$

Nessa expressão, podemos ver que o primeiro termo do propagador da teoria interagente é apenas o propagador de Feynman que obtivemos para a teoria livre. O termo restante representa correções quânticas que descrevem interações entre partículas, que não são observadas no propagador livre.

Funções de correlação de mais pontos resultam em formas modificadas do propagador, as quais incluem outras formas de correções quânticas. Por exemplo, a função de

correlação de quatro pontos para a teoria interagente é dada por:

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | \hat{T}(\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)\hat{\varphi}(x_3)\hat{\varphi}(x_4)) | 0 \rangle = \\
& - \left(G_f(x_1 - x_2)G_f(x_3 - x_4) + G_f(x_1 - x_3)G_f(x_2 - x_4) \right. \\
& \left. + G_f(x_1 - x_4)G_f(x_2 - x_3) \right) \\
& - \frac{i\lambda}{2} G_f(0) \int d^4x \left(G_f(x_1 - x_2)G_f(x - x_3)G_f(x - x_4) \right. \\
& + G_f(x_1 - x_3)G_f(x - x_2)G_f(x - x_4) + G_f(x_1 - x_4)G_f(x - x_2)G_f(x - x_3) \\
& + G_f(x_2 - x_3)G_f(x - x_1)G_f(x - x_4) + G_f(x_2 - x_4)G_f(x - x_1)G_f(x - x_2) \\
& \left. + G_f(x_3 - x_4)G_f(x - x_1)G_f(x - x_2) \right) \\
& - i\lambda \int d^4x \left(G_f(x - x_1)G_f(x - x_2)G_f(x - x_3)G_f(x - x_4) \right).
\end{aligned} \tag{2.101}$$

É importante notar que as funções de correlação calculadas para a teoria interagente foram obtidas em regime perturbativo, uma vez que obtivemos o funcional gerador $Z[J]$ a partir de expansões em λ . Outras correções quânticas podem ser introduzidas nessas funções ao considerarmos termos de ordens maiores em λ .

Podemos observar que as funções de correlação de dois e quatro pontos, obtidas para a teoria interagente, exibem termos bastante distintos, envolvendo o produto das funções de Green, $G_f(x - y)$. As formas exibidas por essas funções se tornam ainda mais complexas quando consideramos termos de ordens maiores em λ no regime perturbativo. Uma forma mais simples de compreender as interações exibidas pelas funções de correlação, é fornecida pelos diagramas de Feynman, os quais podem ser construídos a partir de algumas regras gerais [48]:

1. Cada ponto do espaço-tempo onde as funções de correlação são calculadas é representado por um ponto, enquanto cada propagador livre $G_f(x_1 - x_2)$ é representado por uma linha que conecta dois pontos.

2. Cada fator proporcional à $-\lambda \int d^4x$ é associado a um ponto interno.

3. Pontos internos onde quatro linhas se encontram são denominados como vértices e também são proporcionais à $-\lambda \int d^4x$.

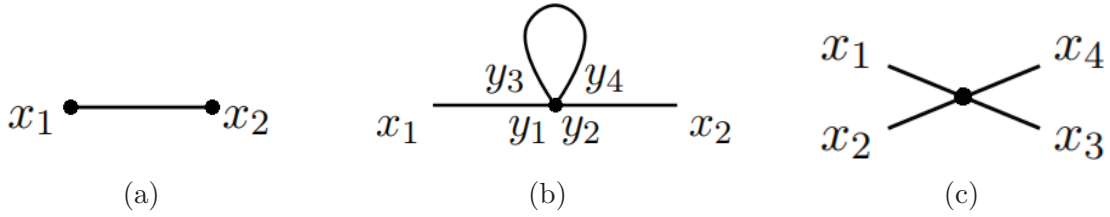


Figura 4 – Diagramas de Feynman para a teoria interagente. Adaptado de [2].

Os diagramas de Feynman da Figura 4 representam os termos das funções de correlação de dois e quatro pontos, obtidas para a teoria interagente. O diagrama exibido na Figura 4 (a) é associado aos termos da forma:

$$i G_f(x_1 - x_2), \tag{2.102}$$

que é apenas o propagador livre de Feynman, o qual descreve uma partícula sendo criada no ponto x_1 e propagada até o ponto x_2 , onde é aniquilada.

As Figuras 4 (b) e 4 (c) representam, respectivamente, termos das formas

$$\begin{aligned} & - i G_f(0) \int d^4y \left(G_f(x_1 - y) G_f(y - x_2) \right) \quad \text{e} \\ & - \lambda \int d^4x \left(G_f(x_1 - x) G_f(x_2 - x) G_f(x_3 - x) G_f(x_4 - x) \right), \end{aligned} \tag{2.103}$$

que descrevem interações entre partículas.

Os diagramas de Feynman podem ser divididos em duas classes: a dos diagramas conexos e a dos desconexos. A primeira classe é formada por diagramas cujas linhas estão ligadas a pelo menos uma linha externa, diferente do que ocorre com os diagramas desconexos. As funções de correlação, calculadas a partir do funcional gerador $Z[J]$, são descritas por produtos de funções de Green associadas a ambos os tipos de diagramas. Entretanto, apenas as funções de correlação que podem ser representadas por diagramas conexos contribuem às amplitudes de espalhamento físicas. Por esse motivo, definimos um funcional gerador que produz apenas esse tipo de diagrama:

$$W[J] = -i \log Z[J]. \tag{2.104}$$

Assim, as funções de correlação são agora calculadas a partir de $W[J]$:

$$\langle 0 | \hat{T}(\hat{\varphi}(x_1), \dots, \hat{\varphi}(x_N)) | 0 \rangle_c = \left(\frac{1}{i} \right)^{N-1} \frac{\delta^N W[J]}{\delta J(x_1), \dots, J(x_N)} \Big|_{J=0}, \tag{2.105}$$

em que o subscrito c indica que a função de correlação é conexa. A prova de que $W[J]$ gera apenas diagramas conexos está fora do escopo dessa dissertação. Para mais detalhes veja [49].

3 Ação efetiva

Ao longo desse capítulo, veremos como ocorre a descrição de teorias que apresentam um campo que exibe um valor esperado de vácuo não nulo, isto é, quando o valor assumido pelo campo, em seu estado de mínima energia, é diferente de zero. Quando desprezamos correções quânticas, esse valor é obtido através da minimização da função que descreve a energia potencial da teoria. Entretanto, quando essas correções são consideradas, é necessário que haja uma nova função cujo mínimo seja capaz de descrever as modificações sofridas pelo valor esperado de vácuo devido às correções. Tal função é denominada como potencial efetivo e inclui correções quânticas, de quaisquer ordens em \hbar , ao potencial clássico. Essa função é a componente potencial de um funcional denominado como ação efetiva: uma generalização da ação clássica, que também inclui correções quânticas.

Na Seção 3.1, veremos que o valor esperado de vácuo de um campo quântico é descrito por um funcional denominado como campo clássico, ou campo médio, o qual minimiza o potencial efetivo. Nas Seções 3.2 e 3.3, apresentaremos algumas características da ação e do potencial efetivos. Nessa última seção, em particular, calcularemos o potencial efetivo para a teoria que descreve um campo escalar interagente, considerando correções quânticas de um laço, isto é, aquelas proporcionais à \hbar . Essas seções foram desenvolvidas com base nas referências [2, 48, 49], além daquelas citadas ao longo do texto.

3.1 Campo clássico

O valor esperado de vácuo de um campo quântico $\varphi(x)$ é definido como uma função de correlação de um ponto, a qual fornece o valor médio assumido pelo campo no estado fundamental, ou estado de vácuo. Alguns campos podem assumir um valor esperado de

vácuo nulo, como é o caso do campo escalar livre:

$$\begin{aligned}
\langle 0|\varphi(x_1)|0\rangle_c &= \left. \frac{\delta W_0[J]}{\delta J(x_1)} \right|_{J=0} \\
&= \frac{1}{i} \frac{1}{Z_0[J]} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \\
&\quad \times \left[\exp \left(-\frac{i}{2} \int d^4x d^4x' J(x') G_f(x-x') J(x) \right) Z_0[0] \right] \Big|_{J=0} \\
&= -\frac{i}{2} \int d^4x G_f(x-x_1) J(x) - \frac{i}{2} \int d^4x' J(x') G_f(x_1-x') \Big|_{J=0} \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

em que utilizamos o funcional $Z_0[J]$ da teoria livre, dado pela Eq. (2.69), e a definição da função de correlação conexa, expressa pela Eq. (2.105).

De modo geral, na ausência de uma fonte externa $J(x)$, os campos podem assumir valores esperados de vácuo constantes, não necessariamente nulos. Por outro lado, quando a fonte é mantida, o valor esperado de vácuo de um campo quântico $\varphi(x)$, é expresso por um funcional de $J(x)$

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{1}{i} \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \langle 0|\varphi(x)|0\rangle_J \equiv \varphi_c(x), \tag{3.2}$$

em que $\varphi_c(x)$ é definido campo clássico, enquanto o subíndice J indica a presença da fonte externa.

A descrição do valor esperado de um campo quântico $\varphi(x)$, fornecida pelo campo clássico, ou campo médio, inclui correções quânticas que modificam a configuração clássica de mínima energia exibida por $\varphi(x)$. Quando essas correções são desconsideradas, ou seja, no limite em que $\hbar \rightarrow 0$, $\varphi_c(x)$ passa a descrever o valor esperado de vácuo de $\varphi(x)$, no regime clássico. Por esse motivo, $\varphi_c(x)$ é chamado de campo clássico o que, na realidade, não é uma boa escolha, dado seu caráter originalmente quântico. Assim, ao longo deste capítulo nos referiremos à $\varphi_c(x)$ somente como campo médio.

3.2 Ação efetiva

A partir da definição do campo médio

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \equiv \varphi_c(x), \tag{3.3}$$

a ação efetiva, que generaliza a ação clássica para o regime quântico, é definida como a transformada de Legendre do funcional $W[J]$ [50]

$$\Gamma[\varphi_c] = W[J] - \int d^4x J(x) \varphi_c(x). \tag{3.4}$$

Uma das características da ação efetiva é que, no limite em que $J(x) \rightarrow 0$, ela é estacionária. Isso pode ser visto ao calcularmos a derivada funcional de $\Gamma[\varphi_c]$, com relação ao campo médio:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta\Gamma[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x)} &= \frac{\delta W[J]}{\delta\varphi_c(x)} - \int d^4y \left(\varphi_c(y) \frac{\delta J(y)}{\delta\varphi_c(x)} + J(y) \frac{\delta\varphi_c(y)}{\delta\varphi_c(x)} \right) \\
 &= \int d^4y \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta\varphi_c(x)} - \int d^4y \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta\varphi_c(x)} - \int d^4y J(y) \delta^4(x-y) \\
 &= \int d^4y \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta\varphi_c(x)} - \int d^4y \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta\varphi_c(x)} - J(x) \\
 &= -J(x),
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

na qual utilizamos a regra da cadeia no primeiro termo do lado direito da igualdade e que

$$\frac{\delta\varphi_c(y)}{\delta\varphi_c(x)} = \delta(x-y). \tag{3.6}$$

Assim, da Eq. (3.5), concluímos que

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x)} = 0, \tag{3.7}$$

quando tomamos o limite $J(x) \rightarrow 0$.

A ação efetiva também pode fornecer o propagador de uma teoria, com a inclusão de correções quânticas proporcionais à quaisquer ordens de \hbar . Para obter a relação entre esses objetos, calculamos a derivada funcional da Eq. (3.5) com relação à fonte externa $J(x)$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\Gamma[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x_1)} &= \frac{\delta}{\delta J(x)} \left(-J(x_1) \right) \\
 &= -\delta(x-x_1).
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

A partir dessa equação, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 \int d^4z \frac{\delta\varphi_c(z)}{\delta J(x)} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\varphi_c(z)\varphi(x_1)} &= -\delta(x-x_1) \\
 \int d^4z \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x)\delta J(z)} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\varphi_c(z)\varphi(x_1)} &= -\delta(x-x_1)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

sendo que utilizamos a regra da cadeia e a definição do campo médio $\varphi_c(x)$. Esse resultado indica que o primeiro termo da integral é o funcional inverso do segundo termo:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\delta^2\Gamma[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x_1)\delta\varphi_c(x)} \right)^{-1} &= -\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x)} \\
 \left(\frac{\delta^2\Gamma[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x_1)\delta\varphi_c(x)} \right)^{-1} &= G(x-x_1),
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

na qual utilizamos que o propagador $G(x - x_1)$, expresso por uma função de Green, é obtido através da função de correlação conexa de dois pontos, conforme visto na Seção 2.3.

A Eq. (3.10) estabelece uma relação entre a função de correlação conexa de dois pontos e a derivada funcional da ação efetiva. As funções de correlação de mais pontos, continuam a se relacionar com as derivadas funcionais de $\Gamma[\varphi_c]$. Para uma função de correlação de três pontos, por exemplo, temos:

$$\frac{\delta^3 \Gamma[\varphi_c]}{\delta \varphi_c(x_1) \delta \varphi_c(x_2) \delta \varphi_c(x_3)} = - \int dx_1 dx_2 dx_3 \Gamma^{(2)}(x_1, y_1) \Gamma^{(2)}(x_2, y_2) \Gamma^{(2)}(x_3, y_3) \times \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(y_1) \delta J(y_2) \delta J(y_3)}, \quad (3.11)$$

em que $\Gamma^{(2)}(x, y)$ denota

$$\Gamma^2(x, y) = \frac{\delta^{(2)} \Gamma[\varphi_c]}{\delta \varphi_c(x) \delta \varphi_c(y)}. \quad (3.12)$$

O resultado obtido na Eq. (3.11) é compreendido como uma função de correlação que pode ser representada pelos chamados diagramas 1PI (do inglês, *one-particle irreducible*), os quais não podem ser divididos em duas partes por meio da remoção de uma única linha. De fato, a Eq. (3.11) pode ser generalizada para derivadas funcionais de ordens maiores, de modo que ação efetiva é compreendida como o funcional gerador de todas as funções de correlação 1PI [50]:

$$\frac{\delta^n \Gamma[\varphi_c]}{\delta \varphi_c(x_1) \dots \delta \varphi_c(x_n)} = G_{1PI}^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (3.13)$$

Nesse ponto, vale a pena lembrarmos que o funcional $Z[J]$ foi introduzido como o gerador de todas as funções de correlação de uma teoria. Entretanto, vimos que somente as funções conexas, fornecidas pelo funcional $W[J]$, contribuem para as amplitudes de espalhamento físicas. Todavia, esse funcional gera um número infinito de tais funções, diferente do que ocorre com a ação efetiva, uma vez que as funções 1PI formam uma base mínima de funções de correlação conexas.

Outro aspecto importante da ação efetiva é que podemos expressá-la em termos de uma expansão em derivadas, quando as variações dos campos são pequenas:

$$\Gamma[\varphi_c] = \int d^4x \left(V_{eff}(\varphi_c(x)) + \frac{1}{2} A(\varphi_c(x)) \partial_\mu \varphi_c(x) \partial^\mu \varphi_c(x) + \dots \right). \quad (3.14)$$

Uma vez que as derivadas, assim como os campos, possuem dimensão de energia, o segundo termo dessa expansão exhibe dimensão de energia elevada à quarta potência. Dessa forma, em baixas energias, os termos de ordens maiores em derivadas podem ser desprezados, conforme expresso pela Eq. (3.14). O termo sem derivadas $V_{eff}(\varphi_c)$, é compreendido como o potencial efetivo da teoria, o qual inclui as correções quânticas de quaisquer ordens em \hbar .

Nos casos em que o campo médio $\varphi_c(x)$ é constante, ou seja, quando não há a presença de uma fonte externa $J(x)$, a ação efetiva é simplesmente expressa em termos do potencial efetivo:

$$\begin{aligned}\Gamma[\varphi_c] &= V_{eff}(\varphi_c) \int d^4x \\ &= V_{eff}(\varphi_c)VT,\end{aligned}\tag{3.15}$$

na qual consideramos um espaço-tempo finito de volume VT .

3.3 Potencial efetivo

O potencial efetivo é definido como a função que descreve a energia potencial clássica modificada por correções quânticas. Para que possamos entender as características dessa função, vamos calculá-la para a teoria que descreve um campo escalar interagente, considerando apenas as correções quânticas de um laço, isto é, aquelas proporcionais à \hbar . Ao longo dessa seção, passaremos a apresentar os fatores de \hbar explicitamente.

Para isso, partimos da seguinte equação:

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x)} = -\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\varphi_c(x) - \frac{\lambda}{3!}\varphi_c^3(x) - \frac{i\lambda\hbar}{2}\varphi_c(x)G(0),\tag{3.16}$$

obtida através das Eqs. (3.5) e (2.104) para o caso da teoria escalar interagente, cuja Lagrangiana é dada pela Eq. (2.72).

Os termos da Eq. (3.16) que não são proporcionais à \hbar , podem ser reconhecidos como a equação de movimento clássica que rege a dinâmica do campo interagente, obtida através da extremização da ação clássica $S[\varphi_c]$ para essa teoria. Dessa forma, podemos reescrever tal equação como

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x)} = \frac{\delta S[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x)} - \frac{i\lambda\hbar}{2}\varphi_c(x)G(0),\tag{3.17}$$

na qual a ação efetiva inclui correções quânticas de todas as ordens em \hbar . No entanto, estamos interessados apenas na expansão de um laço do potencial efetivo, ou seja, aquela que inclui apenas as correções proporcionais à \hbar . Dessa forma, para que possamos nos restringir à expansão de um laço, partimos da seguinte equação:

$$e^{\frac{i}{\hbar}\Gamma[\varphi_c]} = \int \mathcal{D}\varphi e^{\frac{i}{\hbar}\left(S[\varphi] - \int d^4x (\varphi(x) - \varphi_c(x)) \frac{\delta\Gamma[\varphi_c]}{\delta\varphi_c}\right)},\tag{3.18}$$

obtida através da Eq. (3.5) e das definições dos funcionais $Z[J]$, $W[J]$ e $\Gamma[\varphi_c]$, expressas pelas Eqs. (2.58), (2.104) e (3.4), respectivamente. Por meio do método do campo de *background* [51], o campo quântico $\varphi(x)$ pode ser expandido em torno do campo médio, da seguinte forma:

$$\varphi(x) = \varphi_c(x) + \xi(x),\tag{3.19}$$

em que $\varphi_c(x)$ representa a parte clássica de $\varphi(x)$, enquanto o campo $\xi(x)$ computa sua parte quântica. Dessa forma, podemos introduzir uma expansão análoga para a ação efetiva:

$$\Gamma[\varphi] = S[\varphi_c] + \hbar S^{(1)}[\varphi_c] + \mathcal{O}(\hbar^2), \quad (3.20)$$

sendo $S[\varphi_c]$ apenas a ação clássica, enquanto $S^{(1)}[\varphi_c]$ é a ação que inclui todas as correções quânticas de um laço. Desse modo, ao substituirmos essa expansão na Eq. (3.17), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\varphi_c(x)} \left(S[\varphi_c] + \hbar S^{(1)}[\varphi_c] \right) &= \frac{\delta S[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x)} - \frac{i\lambda\hbar}{2!} \varphi_c(x) G(0) \\ \frac{\delta S^{(1)}[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x)} &= -\frac{i\lambda}{2!} \varphi_c(x) G(0), \end{aligned} \quad (3.21)$$

a qual inclui apenas correções quânticas de um laço, devido à $S^{(1)}[\varphi_c]$.

Na Seção 3.2, vimos que a ação efetiva pode ser expressa como uma expansão em derivadas. Assim, uma vez que $S^{(1)}[\varphi_c]$ é um dos termos da ação efetiva, também podemos escrevê-lo da forma:

$$S^{(1)}[\varphi_c] = \int d^4x \left(V_1(\varphi_c(x)) + \frac{1}{2} A_1(\varphi_c(x)) \partial_\mu \varphi_c(x) \partial^\mu \varphi_c(x) + \dots \right), \quad (3.22)$$

sendo $V_1(\varphi_c(x))$ o potencial de um laço no qual estamos interessados.

Por uma questão de simplificação, vamos nos restringir ao caso em que o campo médio é constante. Com isso, a ação $S^{(1)}[\varphi_c]$ deixa de apresentar termos de derivadas e passa a ser expressa por:

$$S^{(1)}[\varphi_c] = \int d^4x V_1(\varphi_c), \quad (3.23)$$

que pode ser, então, substituída na Eq. (3.21). Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\varphi_c(x)} \int d^4y \left(-V_1(\varphi_c(y)) + \dots \right) \Big|_{\varphi_c(x)=\varphi_c} &= -\frac{i\lambda}{2} \varphi_c G(0) \\ - \int d^4y \frac{\partial V_1}{\partial\varphi_c} \frac{\delta\varphi_c(y)}{\delta\varphi_c(x)} \Big|_{\varphi_c(x)=\varphi_c} &= -\frac{i\lambda}{2} \varphi_c G(0) \\ - \frac{\partial V_1}{\partial\varphi_c} \Big|_{\varphi_c(x)=\varphi_c} &= -\frac{i\lambda}{2} \varphi_c G(0), \end{aligned} \quad (3.24)$$

na qual utilizamos a Eq. (3.6) e a propriedade de filtragem da delta de Dirac.

Visto que a Eq. (3.24) depende do propagador $G(0)$ da teoria interagente, precisamos calculá-lo a fim de obter o potencial $V_1(\varphi_c)$. Para isso, substituímos a expansão da ação efetiva, dada pela Eq. (3.20), na Eq. (3.9). Entretanto, nesse caso, consideramos apenas o primeiro termo da expansão de $\Gamma[\varphi_c]$, o qual corresponde à ação clássica $S[\varphi_c]$, uma vez que o próprio propagador da teoria interagente já exhibe termos proporcionais à \hbar . Dessa

forma, evitamos que correções quânticas de ordens mais altas sejam incluídas ao potencial $V_1(\varphi_c)$. Dadas essas considerações, temos:

$$\begin{aligned}
 & - \int d^4z G(z-y) \frac{\delta^2 S[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(z)\delta\varphi_c(x)} \Big|_{\varphi_c(x)=\varphi_c} = -\delta(x-y) \\
 & \int d^4z G(z-y) \frac{\delta}{\delta\varphi_c(z)} \left[(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\varphi_c(x) - \frac{\lambda}{3!}\varphi_c^3(x) \right] \Big|_{\varphi_c(x)=\varphi_c} = -\delta(x-y) \\
 & \int d^4z G(z-y)\delta(x-z) \left[(\partial_\mu\partial^\mu + m^2) + \frac{\lambda\varphi_c^2(x)}{2} \right] \Big|_{\varphi_c(x)=\varphi_c} = -\delta(x-y) \\
 & (\partial_\mu\partial^\mu + m_{eff}^2)G(x-y) = -\delta(x-y),
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

em que definimos m_{eff}^2 como:

$$m_{eff}^2 = m^2 + \frac{\lambda\varphi_c^2}{2}. \tag{3.26}$$

O resultado obtido na Eq. (3.25) exibe a mesma forma da equação de Klein-Gordon (Eq. (2.71)), que descreve a dinâmica de um campo escalar livre. Vimos na Seção 2.2, que a solução desta equação é uma função de Green, a qual definimos como sendo o propagador de Feynman $G_f(x-y)$. Assim, o propagador $G(x-y)$ da teoria interagente, que soluciona a Eq. (3.25), pode ser expresso de forma análoga à $G_f(x-y)$, dado pela Eq. (2.70):

$$G(x-y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m_{eff}^2 + i\epsilon}, \tag{3.27}$$

que se distingue de $G_f(x-y)$ apenas pelo termo m_{eff}^2 .

Tendo obtido o propagador, podemos substituí-lo na Eq. (3.24). Com isso, obtemos:

$$\frac{\partial V_1}{\partial\varphi_c} = \frac{i\lambda}{2}\varphi_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m_{eff}^2}, \tag{3.28}$$

sendo que avaliamos $G_f(x-y)$ na origem, isto é, tomamos $x=y$.

Integrando a Eq. (3.28) sobre φ_c , temos:

$$V_1(\varphi_c) = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln \left(\frac{m_{eff}^2 - k^2}{m^2 - k^2} \right) \tag{3.29}$$

em que consideramos que o potencial $V_1(\varphi_c)$ assume um valor nulo quando avaliado na origem.

Por hora, o potencial $V_1(\varphi_c)$ é dado por uma integral de quatro dimensões no espaço de Minkowski. Essa integral pode ser resolvida de modo equivalente no espaço Euclidiano, através de uma rotação de Wick¹, na qual definimos as seguintes continuações

¹ A rotação de Wick é um método utilizado para que a solução de um problema no espaço de Minkowski seja obtida através da solução de um problema análogo, definido no espaço Euclidiano.

analíticas ao plano complexo [52]:

$$k^0 \rightarrow ik_E^0, \quad \vec{k} \rightarrow \vec{k}_E \quad \text{e} \quad d^4k \rightarrow id^4k_E, \quad (3.30)$$

com o elemento de integração id^4k_E dado por

$$id^4k_E = ik_E^3 dk_E d^3\Omega, \quad (3.31)$$

sendo $d^3\Omega$ o elemento de área superficial de uma esfera quadrimensional.

Assim, no espaço Euclidiano, a Eq. (3.28) passa a ser expressa da seguinte forma:

$$V_1(\varphi_c) = \frac{1}{2} \int d^3\Omega \int \frac{dk_E}{(2\pi)^4} k_E^3 \left[\ln(k_E^2 + m_{eff}^2) - \ln(k_E^2 + m^2) \right]. \quad (3.32)$$

A integração sobre ângulo sólido resulta apenas em $2\pi^2$, uma vez que a função de integração não depende das variáveis angulares. Com isso, obtemos:

$$V_1(\varphi_c) = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty dk_E^2 k_E^2 \left[\ln(k_E^2 + m_{eff}^2) - \ln(k_E^2 + m^2) \right], \quad (3.33)$$

no qual realizamos uma mudança de variável de $dk \rightarrow dk^2$, reescrevendo

$$dk_E k_E^3 = \frac{1}{2} k_E^2 dk_E^2. \quad (3.34)$$

Podemos observar na Eq. (3.33) que a integral sobre k_E^2 é divergente, visto que o limite superior é definido no infinito. Desse modo, para que o potencial $V_1(\varphi_c)$ seja obtido como uma função finita, esse limite é substituído por um valor Λ , definido como *cutoff* ultravioleta, o qual limita a escala de energia:

$$V_1(\varphi_c) = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\Lambda dk_E^2 k_E^2 \left[\ln(k_E^2 + m_{eff}^2) - \ln(k_E^2 + m^2) \right]. \quad (3.35)$$

Integrando a Eq. (3.35) sobre k_E^2 , obtemos:

$$\begin{aligned} V_1(\varphi_c) = & \frac{1}{32\pi^2} \left\{ \frac{\lambda}{2} \varphi_c^2 \Lambda^2 - \frac{\lambda}{4} \varphi_c^2 \left(2m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi_c^2 \right) \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi_c^2 \right) \left[\ln \left(\frac{m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi_c^2}{\mu^2} \right) - \frac{1}{2} \right] - \frac{m^4}{2} \left[\ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) - \frac{1}{2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

com μ sendo uma constante de escala, com dimensão de massa, introduzida para garantir a dimensão correta à $V_1(\varphi_c)$.

Podemos observar que, após a integração, o potencial $V_1(\varphi_c)$ é dependente de Λ e, portanto, torna-se divergente no limite $\Lambda \rightarrow \infty$. Entretanto, essa divergência do tipo ultravioleta pode ser eliminada através de um processo de renormalização. Esse processo

está fora do escopo de nosso trabalho. Detalhes acerca dos métodos de renormalização, tais como a dimensional e a de Pauli-Villars podem ser encontradas em [47, 48].

Sendo assim, o potencial efetivo de um laço para a teoria de campo escalar interagente é dado por:

$$\begin{aligned}
 V_{eff}(\varphi_c) &= V(\varphi_c) + V_1(\varphi_c) \\
 V_{eff}(\varphi_c) &= \frac{\lambda}{4!}\varphi_c^4 + \frac{1}{32\pi^2} \left\{ \frac{\lambda}{2}\varphi_c^2\Lambda^2 - \frac{\lambda}{4}\varphi_c^2 \left(2m^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi_c^2 \right) \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(m^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi_c^2 \right) \left[\ln \left(\frac{m^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi_c^2}{\mu^2} \right) - \frac{1}{2} \right] - \frac{m^4}{2} \left[\ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) - \frac{1}{2} \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

o qual ainda deve ser renormalizado.

No início desse capítulo, mencionamos que o campo médio $\varphi_c(x)$ descreve o valor esperado de vácuo de um campo, considerando as correções quânticas que modificam o valor clássico. Nesse sentido, $\varphi_c(x)$ também pode ser compreendido como aquele que minimiza a energia potencial clássica modificada por correções quânticas, descrita pelo potencial efetivo. Em nosso caso:

$$\left. \frac{\partial V_{eff}}{\partial \varphi_c} \right|_{\varphi_c(x)=\varphi_c} = 0, \tag{3.38}$$

uma vez que nos restringimos ao campo médio constante $\varphi_c(x) \rightarrow \varphi_c$. Além disso, essa restrição implica na ausência da fonte externa $J(x)$, conforme mencionamos no início da Seção 3.1. Portanto, o campo médio φ_c também é um extremo da ação efetiva:

$$\left. \frac{\delta \Gamma[\varphi_c]}{\delta \varphi_c(x)} \right|_{\varphi_c(x)=\varphi_c} = 0. \tag{3.39}$$

Naturalmente, a configuração clássica de mínima energia de um campo também é modificada por correções quânticas de ordens mais altas em \hbar , de modo que outras expansões do potencial efetivo devem ser consideradas para incluí-las.

4 Teorias de Calibre

A estrutura das teorias de campo são essencialmente determinadas por aspectos de simetria que podem se manifestar de modo global, ou de maneira local como ocorre nas chamadas teorias de calibre. A simetria local exibida por essas teorias é assegurada pelos denominados campos de calibre, os quais possuem uma propriedade de transformação intrínseca.

No contexto da física de partículas, as teorias de calibre fornecem a descrição das interações fundamentais forte, fraca e eletromagnética, mediadas por bósons vetoriais de spin 1 associados aos campos de calibre. A interação eletrofraca, uma unificação das interações fraca e eletromagnética, é descrita por uma teoria de calibre com base no grupo de simetria $SU(2) \times U(1)$, cujos mediadores são os bósons W^\pm , Z^0 e o fóton. Já a interação forte, mediada pelos glúons, é descrita pela cromodinâmica quântica, uma teoria com base no grupo de simetria $SU(3)$. Juntas, essas teorias compõem o Modelo Padrão da física de partículas, uma teoria de calibre do grupo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

Começaremos esse capítulo apresentando alguns aspectos gerais dos grupos de Lie, em particular no que diz respeito à sua álgebra, os quais utilizaremos na construção das teorias de calibre. Na Seção 4.2, veremos a construção de uma teoria de calibre Abelianas com base no grupo de simetria $U(1)$, através de um método denominado como acoplamento mínimo. Na Seção 4.3, estenderemos esse método às teorias de calibre não-Abelianas do grupo $SU(N)$, também conhecidas como teorias de Yang-Mills. Por fim, na Seção 4.4 apresentaremos o setor escalar de Higgs da teoria eletrofraca, principal objeto de estudo desse trabalho. O desenvolvimento dessas seções foi fundamentado nas referências [3, 13, 47, 53, 54], além daquelas citadas ao longo do texto.

4.1 Grupos e álgebras de Lie

Um grupo G é definido como um conjunto de elementos associados a uma operação de multiplicação, ou composição, que quando efetuada entre dois elementos do grupo resulta em um terceiro elemento também pertencente à G :

$$g_1 \cdot g_2 = g_3 \in G, \quad \forall g_1, g_2 \in G. \quad (4.1)$$

Tal operação deve satisfazer as seguintes propriedades:

1. Associatividade:

$$(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3), \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G. \quad (4.2)$$

2. Existe o elemento neutro I que satisfaz:

$$I \cdot g_1 = g_1 \quad \text{e} \quad g_1 \cdot I = g_1, \quad \forall g_1 \in G. \quad (4.3)$$

3. Existe um elemento inverso g_1^{-1} para cada elemento $g_1 \in G$:

$$g_1^{-1} \cdot g_1 = I \quad \text{e} \quad g_1 \cdot g_1^{-1} = I. \quad (4.4)$$

Um grupo G é dito Abeliano quando seus elementos g comutam entre si:

$$g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1, \quad (4.5)$$

caso contrário, o grupo é denominado como não-Abeliano.

Uma representação do grupo é aquela que associa um operador linear a um elemento g , de modo que a estrutura de G é preservada:

$$D_R(g_1)D_R(g_2) = D_R(g_1g_2). \quad (4.6)$$

A partir de uma representação, os elementos de um grupo, antes compreendidos como objetos abstratos, passam a poder realizar operações sobre outros elementos definidos em um espaço vetorial. Na representação matricial, um elemento $D_R(g)$ é expresso como uma matriz quadrada, cuja dimensão n é a mesma do espaço vetorial sobre o qual $D_R(g)$ atua. Nesta representação, a operação de um elemento do grupo sobre um vetor qualquer (ϕ^1, \dots, ϕ^n) é expressa da seguinte forma:

$$\phi^i \rightarrow (D_R(g))^i_j \phi^j. \quad (4.7)$$

É importante notar que os elementos de um grupo podem apresentar formas distintas, dependendo da representação. As matrizes unitárias com determinante igual a um, por exemplo, as quais são os elementos do grupo $SU(N)$, podem ser representadas como matrizes de outras dimensões, sem que a estrutura do grupo seja perdida.

No contexto das teorias físicas, os grupos desempenham um papel importante, pois representam simetrias de um sistema. Nesse caso, uma simetria é compreendida como a invariância da teoria sob a ação dos elementos de um grupo. A teoria eletrofraca, por exemplo, exibe simetria $SU(2) \times U(1)$. Isso significa que os campos que a compõem transformam-se sob a operação dos elementos desse grupo. Entretanto, ainda que os campos não permaneçam iguais, a Lagrangiana da teoria eletrofraca se mantém invariante, caracterizando a simetria. O mesmo ocorre com a cromodinâmica quântica, cujos campos transformam-se sob a ação dos elementos de $SU(3)$, enquanto sua Lagrangiana permanece a mesma. Os grupos que representam as simetrias exibidas pelas teorias que compõem o Modelo Padrão, $SU(2) \times U(1)$ e $SU(3)$, são exemplos dos chamados grupos de Lie.

Os grupos de Lie são compostos por elementos g que dependem de parâmetros contínuos e diferenciáveis θ^a . A representação $D_R(g)$ de um elemento de um grupo de Lie, sempre pode ser expressa como uma função exponencial dos objetos definidos como os geradores do grupo. Para demonstrar esta afirmação, consideremos uma expansão em série de Taylor de $D_R(g(\theta^a))$ em torno do parâmetro contínuo $\theta^a = 0$, dada por

$$D_R(g(\theta^a)) = \mathbb{1} + i\theta_a T_R^a + \mathcal{O}((\theta^a)^2), \quad (4.8)$$

em que os geradores T_R^a são definidos como:

$$T_R^a \equiv -i \frac{\partial D_R}{\partial \theta_a}. \quad (4.9)$$

Uma vez que a expansão expressa pela Eq. (4.8) foi realizada em torno de $\theta^a = 0$, podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$D_R(g(\theta^a)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\mathbb{1} + i \frac{\theta_a}{k} T_R^a \right)^k. \quad (4.10)$$

Utilizando uma das definições da função exponencial,

$$e^x = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{k} \right)^k, \quad (4.11)$$

podemos observar que o elemento $D_R(g(\theta^a))$ de fato pode ser escrito como uma função exponencial cujo argumento são os geradores do grupo:

$$D_R(g(\theta^a)) = e^{i\theta_a T_R^a} \implies g(\theta^a) = e^{i\theta_a T^a}. \quad (4.12)$$

Embora os elementos de um grupo de Lie possam sempre ser expressos conforme a Eq. (4.12), a forma assumida por $D_R(g(\theta^a))$ não é independente da representação, pois os geradores T_R^a dependem desse fator. No entanto, há uma estrutura importante correspondente ao grupo, denominada como álgebra de Lie, que independe da representação de seus elementos.

A definição da álgebra de Lie, satisfeita pelos geradores T_R^a , pode ser obtida a partir da Eq. (4.6) que caracteriza uma representação de G como aquela que preserva a estrutura do grupo. Dessa forma, uma vez que os elementos de um grupo de Lie podem ser representados segundo a Eq. (4.12), a estrutura do grupo deve ser mantida:

$$D_R(g_1)D_R(g_2) = D_R(g_1g_2) \longrightarrow e^{i\alpha_a T_R^a} e^{i\beta_b T_R^b} = e^{i\delta_c T_R^c}. \quad (4.13)$$

No entanto, visto que os geradores T_R^a e T_R^b são descritos por matrizes que podem não ser comutativas, o parâmetro δ_c não resulta simplesmente na soma de α e β :

$$e^{i\alpha_a T_R^a} e^{i\beta_b T_R^b} = e^{i\alpha_a T_R^a} e^{i\beta_b T_R^b} \neq e^{i(\alpha_a + \beta_b) T_R^a}, \quad (4.14)$$

em que usamos a relação

$$e^A e^B \neq e^{A+B}, \quad (4.15)$$

válida para quaisquer matrizes não comutantes A e B . Desse modo, é necessário que a forma assumida pelo parâmetro δ_c seja determinada. Para isso, expandimos as funções exponenciais do lado esquerdo da Eq. (4.13) em série de Taylor até segunda ordem nos parâmetros α e β e tomamos a função logarítmica:

$$\begin{aligned} i\delta_c T_R^c &= \log \left[\left(1 + i\alpha_a T_R^a - \frac{1}{2}(\alpha_a T_R^a)^2\right) \left(1 + i\beta_b T_R^b - \frac{1}{2}(\beta_b T_R^b)^2\right) \right] \\ &= \log \left[1 + i\alpha_a T_R^a + i\beta_b T_R^b - \frac{1}{2}(\alpha_a T_R^a)^2 - \frac{1}{2}(\beta_b T_R^b)^2 - \alpha_a \beta_b T_R^a T_R^b \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Utilizando a expansão $\log(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$, obtemos:

$$\begin{aligned} i\delta_c T_R^c &\approx i\alpha_a T_R^a + i\beta_b T_R^b - \frac{1}{2}\alpha_a \beta_b (T_R^a T_R^b - T_R^b T_R^a) \\ i\delta_c T_R^c &\approx i\alpha_a T_R^a + i\beta_b T_R^b - \frac{1}{2}\alpha_a \beta_b [T_R^a, T_R^b], \end{aligned} \quad (4.17)$$

em que definimos o comutador $[T_R^a, T_R^b] = T_R^a T_R^b - T_R^b T_R^a$. Essa equação pode ser reorganizada da seguinte forma:

$$-2i(\delta_c - \alpha_c - \beta_c) T_R^c \approx \alpha_a \beta_b [T_R^a, T_R^b], \quad (4.18)$$

na qual renomeamos os índices mudos a e b . Tendo em vista que essa expressão deve ser satisfeita para quaisquer α_a e β_b , o termo $-2i(\delta_c - \alpha_c - \beta_c)$ deve ser proporcional a esses parâmetros. Logo:

$$-2i(\delta_c - \alpha_c - \beta_c) = \alpha_a \beta_b f^{ab}{}_c, \quad (4.19)$$

com $f^{ab}{}_c$ sendo denominadas como as constantes de estrutura. Com isso, a álgebra de Lie é definida como:

$$[T_R^a, T_R^b] = i f^{ab}{}_c T_R^c, \quad (4.20)$$

a qual é satisfeita pelos geradores de um grupo de Lie, em qualquer representação.

As constantes de estrutura não dependem da representação do grupo, embora o mesmo não ocorra com os geradores T_R^a . Em particular, para grupos de Lie Abelianos, nos quais os elementos $g(\theta^a)$ comutam entre si, essas constantes são nulas. Isso porque os elementos $g(\theta^a)$ podem ser expressos como funções exponenciais dos geradores do grupo (Eq. (4.12)), de forma que a comutatividade desses elementos implica na comutatividade dos geradores.

Um exemplo de representação de um grupo de Lie é aquele definido como adjunto, no qual os geradores T_R^a são expressos como matrizes cuja dimensão é a mesma do grupo. Nesse caso, os índices das matrizes são iguais àqueles dos geradores T_R^a . Assim, as matrizes podem ser expressas pelas próprias constantes de estrutura que definem a álgebra de Lie:

$$(T_{adj}^a)_{bc} = -i f^a{}_{bc}. \quad (4.21)$$

Outra representação bastante comum é a fundamental, na qual os geradores T_R^a são descritos por matrizes cuja dimensão coincide com aquela em que os elementos do grupo são definidos.

4.2 Teorias de calibre Abelianas

As teorias de calibre Abelianas são aquelas descritas por Lagrangianas que se mantêm invariantes sob a ação dos elementos de um grupo Abeliano, os quais dependem de um parâmetro contínuo e local $\theta(x)$. O exemplo mais conhecido deste tipo de teoria é o eletromagnetismo clássico, que fornece a descrição da dinâmica do campo eletromagnético livre:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (4.22)$$

em que o tensor de intensidade do campo eletromagnético $F_{\mu\nu}(x)$ é definido por

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x), \quad (4.23)$$

com $A_\mu(x)$ sendo o quadripotencial que representa o campo eletromagnético.

A Lagrangiana do eletromagnetismo é invariante sob a denominada transformação de calibre do campo $A_\mu(x)$:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu\theta(x), \quad (4.24)$$

com o parâmetro contínuo $\theta(x)$, sendo uma função qualquer do espaço-tempo. De modo equivalente, essa transformação pode ser expressa em termos de um elemento $U(x)$ do grupo Abeliano $U(1)$:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu(U(x))U^\dagger(x), \quad (4.25)$$

com $U(x) = e^{i\theta(x)}$.

Nos casos em que o parâmetro $\theta(x)$ da transformação de calibre é meramente global, isto é, não depende do espaço-tempo, o campo eletromagnético transforma-se na representação adjunta do grupo $U(1)$. Nesse caso, a derivada em relação ao elemento de $U(1)$ se anula, assim como as constantes de estrutura que surgiriam nesse tipo de representação, visto que $U(1)$ é um grupo Abeliano. Dessa forma, a transformação do campo eletromagnético é trivial, $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x)$, diferente do caso não-Abeliano que veremos na Seção 4.3, em que as constantes de estrutura não são nulas.

Podemos verificar a invariância da teoria eletromagnética sob a transformação de calibre, aplicando essa transformação ao tensor de intensidade $F_{\mu\nu}(x)$:

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow \partial_\mu(A_\nu(x) - \partial_\nu\theta(x)) - \partial_\nu(A_\mu(x) - \partial_\mu\theta(x)) = F_{\mu\nu}(x), \quad (4.26)$$

em que usamos a propriedade de comutatividade das derivadas. Com esse resultado, concluímos que $F_{\mu\nu}(x)$ é invariante sob a transformação de calibre, o que implica na

invariância da Lagrangiana do eletromagnetismo, a qual é expressa pelo produto dos tensores $F_{\mu\nu}(x)$.

A transformação de calibre de $A_\mu(x)$ assegura a simetria local exibida pelo eletromagnetismo. Tal propriedade intrínseca do campo eletromagnético pode ser estendida a outras teorias por meio de um método denominado como acoplamento mínimo. Através desse processo, teorias que em princípio exibem apenas simetrias globais, também passam a ser invariantes sob transformações de simetria locais. Além disso, essas teorias, denominadas como teorias de calibre, passam a descrever a interação entre o campo eletromagnético e os demais campos que as compõem.

A Lagrangiana de Dirac, que descreve partículas fermiônicas de spin 1/2, é um exemplo de teoria que exhibe apenas simetria global ($U(1)$), mas que pode se tornar uma teoria de calibre através do método de acoplamento mínimo. Antes desse processo, a Lagrangiana de Dirac é expressa da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_D = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi, \quad (4.27)$$

na qual o espinor de Dirac $\Psi(x)$ é expresso em termos dos espinores de Weyl,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_R(x) \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

em que os subscritos L e R representam férmions levógiros e dextrógiros¹, respectivamente. As matrizes γ^μ , na representação quirial, são:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I_{2\times 2} \\ I_{2\times 2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

com σ^i sendo as matrizes de Pauli,

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

A transformação de simetria global do grupo $U(1)$ que mantém a Lagrangiana de Dirac invariante é dada por:

$$\Psi(x) \rightarrow U_q\Psi(x), \quad (4.31)$$

na qual $U_q = e^{iq\theta}$ é a representação de um elemento de $U(1)$ com q , interpretado como a carga do campo $\Psi(x)$, sendo o gerador do grupo. Podemos verificar que essa transformação não altera a forma de \mathcal{L}_D :

$$\mathcal{L}_D \rightarrow e^{-iq\theta}\Psi(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{iq\theta}\Psi = \mathcal{L}_D. \quad (4.32)$$

¹ Férmions dextrógiros exibem spin e momento linear paralelos. Nos férmions levógiros, essas quantidades físicas são antiparalelas

Por outro lado, a Lagrangiana de Dirac não é invariante sob a transformação de simetria local do grupo $U(1)$, definida da seguinte forma:

$$\Psi(x) \rightarrow U_q(x)\Psi(x), \quad (4.33)$$

em que $U_q(x) = e^{iq\theta(x)}$, com o parâmetro $\theta(x)$ agora sendo expresso como uma função qualquer do espaço-tempo. Ao aplicarmos essa transformação à Lagrangiana \mathcal{L}_D , obtemos:

$$\mathcal{L}_D \rightarrow e^{-iq\theta(x)}\Psi(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{iq\theta(x)}\Psi = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi - q\bar{\Psi}(\gamma^\mu\partial_\mu)\Psi \neq \mathcal{L}_D, \quad (4.34)$$

na qual vemos que \mathcal{L}_D de fato não é invariante sob a transformação de simetria local de $U(1)$.

Para que a Lagrangiana de Dirac também exiba simetria local do grupo $U(1)$, utilizaremos o método de acoplamento mínimo. Nesse processo, o campo eletromagnético $A_\mu(x)$ é introduzido à teoria através de um objeto definido como derivada covariante:

$$D_\mu\Psi(x) = (\partial_\mu + iqA_\mu(x))\Psi(x), \quad (4.35)$$

a qual deve substituir a derivada ordinária ∂_μ presente na Lagrangiana \mathcal{L}_D . Esse objeto é construído de modo que sua transformação ocorra da mesma forma que aquela do campo $\Psi(x)$, o que garante simetria local à teoria:

$$\begin{aligned} D_\mu\Psi(x) &\rightarrow [\partial_\mu + iq(A_\mu(x) - \partial_\mu\theta(x))]e^{iq\theta(x)}\Psi(x) \\ &\rightarrow e^{iq\theta(x)}D_\mu\Psi(x). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Ou, em termos do elemento do grupo $U(1)$:

$$D_\mu\Psi(x) \rightarrow U_q(x)D_\mu\Psi(x), \quad (4.37)$$

em que utilizamos as transformações locais dos campos $A_\mu(x)$ e $\Psi(x)$, dadas pelas Eqs. (4.24) e (4.33), respectivamente.

Ao substituirmos a derivada covariante na Lagrangiana de Dirac (Eq. (4.27)), obtemos:

$$\mathcal{L}_D = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi, \quad (4.38)$$

ou, de forma explícita,

$$\mathcal{L}_D = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi - qA_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi. \quad (4.39)$$

Com essa substituição, a teoria se torna invariante sob as denominadas transformações de calibre, expressas pelas transformações locais dos campos $A_\mu(x)$ e $\Psi(x)$:

$$\Psi(x) \rightarrow e^{iq\theta(x)}\Psi(x) \quad \text{e} \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu\theta(x), \quad (4.40)$$

que em termos dos elementos de $U(1)$ são expressas por

$$\Psi(x) \rightarrow U_q(x)\Psi(x) \quad \text{e} \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - (\partial_\mu U(x))U^\dagger(x). \quad (4.41)$$

É importante notar que essa teoria não deixa de exibir a simetria global do grupo $U(1)$. Ao tomarmos $\theta(x)$ como um parâmetro global nas transformações de calibre, a Lagrangiana de Dirac (Eq. (4.39)) continua sendo invariante:

$$\mathcal{L}_D \rightarrow e^{-iq\theta}\bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{-iq\theta}\Psi - qA_\mu e^{-iq\theta}\bar{\Psi}\gamma^\mu e^{-iq\theta}\Psi = \mathcal{L}_D. \quad (4.42)$$

Podemos identificar que, além de um termo cinético para o campo $\Psi(x)$, a Lagrangiana de Dirac, expressa pela Eq. (4.38) também exibe um termo de acoplamento que descreve a interação entre o campo fermiônico e o eletromagnético:

$$\mathcal{L}_{int} = -qA_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi, \quad (4.43)$$

em que $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ é a corrente conservada devido à simetria global $U(1)$, que pode ser obtida através do teorema de Noether [55]. Entretanto, não identificamos nessa teoria um termo cinético para $A_\mu(x)$ que é, então, interpretado como um campo sem dinâmica, o que não é válido. Isso pode ser corrigido por meio da introdução da Lagrangiana do eletromagnetismo clássico (Eq. (4.22)), que descreve a dinâmica de um campo eletromagnético livre, à Lagrangiana de Dirac:

$$\mathcal{L}_D = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (4.44)$$

É importante notarmos que a introdução da Lagrangiana do eletromagnetismo não viola a simetria local $U(1)$ exibida por \mathcal{L}_D , pois também é invariante sob a transformação de calibre do campo $A_\mu(x)$.

A teoria de calibre Abelianiana expressa pela Eq. (4.44) é conhecida eletrodinâmica quântica (*QED*, do inglês *Quantum electrodynamics*). Essa teoria descreve a interação de partículas fermiônicas de spin 1/2, a qual é mediada pelo campo eletromagnético, cujas excitações dão origem aos fótons. Assim, a interação entre férmions ocorre por meio da troca dessa partícula, compreendida como o bóson de calibre dessa teoria.

Desse modo, através do método de acoplamento mínimo, introduzimos o campo eletromagnético à Lagrangiana de Dirac, de forma a acoplá-lo ao campo fermiônico e garantir a simetria local $U(1)$ à teoria. De modo geral, quando esse método é aplicado a uma teoria que exibe uma simetria global qualquer, há a introdução de um campo $A_\mu(x)$ para cada gerador do grupo de simetria em questão. Embora compartilhem da mesma propriedade de transformação exibida pelo campo eletromagnético, os campos $A_\mu(x)$, denominados como campos de calibre, descrevem bósons vetoriais de spin 1 e não exclusivamente o fóton.

O método de acoplamento mínimo pode ser naturalmente estendido às teorias que exibem simetrias globais associadas a grupos não-Abelianos, a partir da construção que desenvolvemos para o grupo $U(1)$. Para isso, as transformações de calibre (Eq. (4.41)) e a derivada covariante (Eq. (4.35)) devem ser generalizadas, como veremos ao longo da seção seguinte.

4.3 Teorias de Yang-Mills

As teorias de Yang-Mills [56] são teorias de calibre baseadas no grupo de simetria não-Abeliano $SU(N)$, que generalizam as propriedades exibidas pela QED , às interações fundamentais eletrofraca e forte, descritas pelo Modelo Padrão.

Podemos construir uma teoria de Yang-Mills a partir do método de acoplamento mínimo, generalizando a construção desenvolvida na Seção 4.2, para o caso não-Abeliano $SU(N)$. Para isso, suponha uma teoria descrita por um conjunto de campos fermiônicos $\Psi^\alpha(x)$, com $\alpha = 1, 2, \dots, \dim(R)$, sendo R uma representação do grupo $SU(N)$. Então, a transformação dos campos $\Psi^\alpha(x)$, é definida como:

$$\Psi(x) \rightarrow U_R(x)\Psi(x), \quad (4.45)$$

ou, em termos de suas componentes,

$$\Psi^\alpha(x) \rightarrow (U_R(x))^\alpha_\beta \Psi^\beta(x), \quad (4.46)$$

em que $U_R(x)$ é a representação de um elemento do grupo $SU(N)$. Conforme vimos anteriormente, esse elemento pode ser expresso como uma função exponencial dos geradores T_R^a do grupo:

$$U_R(x) = e^{ig\theta^a(x)T_R^a}, \quad (4.47)$$

no qual os parâmetros locais $\theta^a(x)$ foram redefinidos como $g\theta^a(x)$, com g sendo interpretada como a constante de acoplamento da teoria.

Para que a simetria local do grupo $SU(N)$ seja garantida por meio do acoplamento mínimo, é necessário que campos de calibre sejam introduzidos à teoria. O grupo de simetria em questão exibe um conjunto de $N^2 - 1$ geradores, o que implica na introdução de $N^2 - 1$ campos de calibre. Para descrever todos esses campos, a matriz $A_\mu(x)$ é definida como

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x)T_R^a, \quad (4.48)$$

na qual os denominados campos de calibre não-Abelianos são denotados por $A_\mu^a(x)$. A matriz $A_\mu(x)$, se transforma do seguinte modo:

$$A_\mu(x) \rightarrow U_R(x)A_\mu(x)U_R^\dagger(x) - \frac{i}{g}(\partial_\mu U_R(x))U_R^\dagger(x), \quad (4.49)$$

com $U_R(x)$ dado pela Eq. (4.47).

Embora a transformação da matriz $A_\mu(x)$ dependa da representação do grupo $SU(N)$, o mesmo não ocorre com os campos $A_\mu^a(x)$. Podemos demonstrar que a transformação de calibre desses campos independe da representação, através de uma transformação infinitesimal

$$U_R(x) = 1 + ig\theta^a(x)T_R^a + \mathcal{O}(\theta^2), \quad (4.50)$$

aplicada à matriz $A_\mu(x)$. Assim, a Eq (4.49) se torna:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= A_\mu^a T_R^a \rightarrow \left(1 + ig\theta^a(x)T_R^a\right) A_\mu^b T_\mu^b \left(1 - ig\theta^c(x)T_R^c\right) \\ &\quad - \frac{i}{g} \left[\partial_\mu \left(1 + ig\theta^a(x)T_R^a\right)\right] \left(1 - ig\theta^c(x)T_R^c\right) \\ &= A_\mu^b T_R^b + (\partial_\mu \theta^a(x)) T_R^a - g A_\mu^b \theta^a(x) f^{abc} T_R^c + \mathcal{O}(\theta^2), \end{aligned} \quad (4.51)$$

em que usamos a definição da álgebra de Lie, expressa por $[T_R^a, T_R^b] = if^{abc}T_R^c$, com f^{abc} sendo as constantes de estrutura. Com esse resultado, concluímos que os campos de calibre $A_\mu^a(x)$ transformam-se como:

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A_\mu^a(x) + \partial_\mu \theta^a(x) - gf^{abc} \theta^b(x) A_\mu^c(x) + \mathcal{O}(\theta^2), \quad (4.52)$$

na qual rearranjamos os índices mudos a, b e c . Essa transformação é independente da representação do grupo $SU(N)$, visto que as constantes de estrutura são as mesmas para qualquer representação. Isso também significa que quando o parâmetro da transformação é simplesmente global, $\theta(x) \rightarrow \theta$, os campos $A_\mu^a(x)$ transformam-se na representação adjunta:

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A_\mu^a(x) - gf^{abc} \theta^b A_\mu^c(x), \quad (4.53)$$

a qual ainda é independente da representação do grupo $SU(N)$, devido às constantes de estrutura.

Os campos de calibre são introduzidos à teoria, através da derivada covariante que, para o grupo $SU(N)$, é definida como:

$$D_\mu \Psi(x) = \left(\partial_\mu - igA_\mu^a(x)T_R^a\right) \Psi(x), \quad (4.54)$$

cuja transformação depende da representação, assim as transformações do campo $\Psi(x)$ e da matriz $A_\mu(x)$:

$$D_\mu \Psi(x) \rightarrow \left[\partial_\mu - ig \left(U_R A_\mu(x) U_R^\dagger - \frac{i}{g} (\partial_\mu U_R) U_R^\dagger\right)\right] U_R \Psi(x) = U_R D_\mu \Psi(x), \quad (4.55)$$

em que usamos as Eqs. (4.45), (4.48) e (4.49).

A partir dessa construção podemos, então, obter teorias de calibre $SU(N)$, ou de Yang-Mills, por meio do método de acoplamento mínimo. Nesse processo, as derivadas

presentes na Lagrangiana de uma teoria invariante sob a transformação de simetria global $SU(N)$, são substituídas pela derivada covariante expressa pela Eq. (4.54). Como resultado, campos de calibre não-Abelianos são introduzidos à teoria, a qual passa a exibir simetria local do grupo $SU(N)$.

Como exemplo, consideremos a Lagrangiana de Dirac composta por N campos fermiônicos $\psi^\alpha(x)$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^\alpha (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi^\alpha. \quad (4.56)$$

Através da substituição da derivada ordinária pela derivada covariante (Eq. (4.54)), obtemos

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^\alpha (i\gamma^\mu (D_\mu \psi)^\alpha - m\psi^\alpha), \quad (4.57)$$

ou, de modo explícito,

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}^\alpha \gamma^\mu (\partial_\mu \psi^\alpha) + gA_\mu^a \bar{\psi}^\alpha \gamma^\mu (T_R^a)_{\alpha\beta} \psi^\beta - m\bar{\psi}^\alpha \psi^\alpha. \quad (4.58)$$

Nessa teoria, podemos identificar termos cinéticos para os campos fermiônicos, assim como um termo de interação entre os campos fermiônicos e de calibre

$$\mathcal{L}_{int} = gA_\mu^a \bar{\psi}^\alpha \gamma^\mu (T_R^a)_{\alpha\beta} \psi^\beta. \quad (4.59)$$

Entretanto, não identificamos termos cinéticos para os campos $A_\mu^a(x)$, os quais são, então, compreendidos como não dinâmicos. Para que isso possa ser corrigido, introduzimos o tensor de intensidade dos campos de calibre não-Abelianos:

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) - ig[A_\mu, A_\nu], \quad (4.60)$$

cuja transformação é expressa por

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow U_R(x) F_{\mu\nu}(x) U_R^\dagger(x). \quad (4.61)$$

Esse objeto também pode ser escrito em termos dos campos de calibre não-Abelianos $A_\mu^a(x)$, através da definição da matriz $A_\mu(x)$ (Eq. (4.48)):

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\nu (A_\mu^a T_R^a) - \partial_\mu (A_\nu^a T_R^a) - igA_\mu^a T_R^a A_\nu^b T_R^b + igA_\nu^b T_R^b A_\mu^a T_R^a \\ &= (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - igf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c) T_R^a \\ &= F_{\mu\nu}^a T_R^a, \end{aligned} \quad (4.62)$$

com $F_{\mu\nu}^a$ sendo

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - igf^{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x). \quad (4.63)$$

A partir do tensor de intensidade $F_{\mu\nu}(x)$, podemos construir o objeto que atribui dinâmica aos campos de calibre não-Abelianos $A_\mu^a(x)$, o qual deve ser invariante sob a

transformação de calibre do grupo $SU(N)$. Essa condição é satisfeita por um objeto da forma

$$-\frac{1}{2}\text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}), \quad (4.64)$$

conforme podemos verificar:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) &\rightarrow -\frac{1}{2}\text{tr}(U_R F_{\mu\nu} U_R^\dagger U_R F^{\mu\nu} U_R^\dagger) \\ &\rightarrow -\frac{1}{2}\text{tr}(U_R U_R^\dagger F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \\ &\rightarrow -\frac{1}{2}\text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (4.65)$$

em que usamos a propriedade cíclica do traço $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB) = \text{tr}(BCA)$ e que $U_R U_R^\dagger = \mathbb{1}$. Também podemos escrever esse objeto em termos das componentes do tensor de intensidade:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) &= -\frac{1}{2}\text{tr}(F_{\mu\nu}^a T^a F^{b\mu\nu} T^b) \\ &= -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} \text{tr}(T^a T^b) \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} \delta^{ab} \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.66)$$

na qual usamos que $\text{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$.

Com a atribuição de dinâmica aos campos de calibre não-Abelianos, a Lagrangiana de Yang-Mills com campos fermiônicos de Dirac é expressa da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{YM} = i\psi^\alpha \gamma^\mu (\partial_\mu \bar{\psi}^\alpha) + g A_\mu^a \bar{\psi}^\alpha \gamma^\mu (T_R^a)_{\alpha\beta} \psi^\beta - m \bar{\psi}^\alpha \psi^\alpha - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad (4.67)$$

a qual exhibe simetria local do grupo $SU(N)$, ou seja, é invariante sob as transformações de calibre, definidas pelas Eqs. (4.46) e (4.52).

O termo que descreve a dinâmica dos campos de calibre não-Abelianos $A_\mu^a(x)$, presente na Lagrangiana \mathcal{L}_{YM} , também inclui termos de auto-interação devido à definição do tensor $F_{\mu\nu}^a(x)$. Isso significa que em teorias de Yang-Mills, os bósons de calibre, responsáveis por mediar as interações fundamentais, interagem entre si. Na cromodinâmica quântica, por exemplo, uma teoria de Yang-Mills com base no grupo de simetria $SU(3)$, é possível observar a interação entre glúons, os bósons de calibre que mediam a interação forte. Isso não ocorre em teorias Abelianas como a *QED*, na qual a interação entre fótons não é observada.

4.4 Teoria eletrofraca: setor escalar de Higgs

A teoria eletrofraca, que em conjunto com a cromodinâmica quântica compõe o Modelo Padrão da física de partículas, é uma teoria de Yang-Mills com base no grupo de simetria $SU(2) \times U(1)$, a qual descreve a interação eletrofraca entre as partículas leptônicas [6, 7]. Essa interação é mediada por quatro bósons de calibre, denominados como bósons W^\pm , Z^0 e fóton. Três desses bósons estão associados aos geradores do grupo $SU(2)$, enquanto um deles corresponde ao gerador do grupo $U(1)$, uma vez que em teorias de calibre o número de bósons mediadores é igual ao número de geradores do grupo de simetria. Além disso, a teoria eletrofraca também descreve o mecanismo de geração de massa das partículas leptônicas e dos bósons W^\pm e Z^0 , através do acoplamento dessas partículas com o bóson de Higgs.

A teoria eletrofraca pode ser dividida em dois setores: o leptônico, o qual descreve as interações associadas aos léptons e o setor escalar de Higgs, no qual a interação entre os bósons de calibre e o de Higgs é descrita. Nesse trabalho, nos restringiremos à abordagem do setor escalar de Higgs da teoria eletrofraca, visto que nosso objetivo é inserir uma correção quântica nesse setor, o que será apresentado ao longo do Capítulo 6. A descrição completa da teoria eletrofraca, incluindo o setor de léptons, pode ser encontrada em [6, 7].

A Lagrangiana que descreve o setor escalar de Higgs é expressa pela soma das Lagrangianas de calibre \mathcal{L}_g e de Higgs \mathcal{L}_h :

$$\mathcal{L}_{h,g} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_h. \quad (4.68)$$

A Lagrangiana de calibre, que descreve a dinâmica dos bósons mediadores da teoria eletrofraca é expressa como:

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu}, \quad (4.69)$$

na qual os tensores de força são dados por

$$B_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu B_\nu(x) - \partial_\nu B_\mu(x) \quad (4.70)$$

$$\text{e } W_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu W_\nu^a(x) - \partial_\nu W_\mu^a(x) - igf^{abc}W_\mu^b(x)W_\nu^c(x),$$

com $a = 1, 2, 3$.

Os três campos de calibre denotados por $W_\mu^a(x)$ são associados ao grupo $SU(2)$ e por isso, são não-Abelianos, enquanto o campo Abelianos $B_\mu(x)$ é associado ao grupo $U(1)$. Conforme discutido na Seção 4.3, o termo que descreve a dinâmica dos campos $W_\mu^a(x)$ também introduz termos de auto-interação, devido à definição do tensor de intensidade para o caso não-Abeliano.

Os campos de calibre $W_\mu^1(x)$ e $W_\mu^2(x)$ estão associados aos bósons W^\pm . Por outro lado, os campos $W_\mu^3(x)$ e $B_\mu(x)$ são redefinidos em termos dos campos de calibre $A_\mu(x)$,

associado ao fóton, e $Z_\mu(x)$, associado ao bóson Z^0 [6, 7, 10]:

$$W_\mu^3(x) = \sin \theta_W A_\mu(x) + \cos \theta_W Z_\mu(x) \quad \text{e} \quad B_\mu(x) = \cos \theta_W A_\mu(x) - \sin \theta_W Z_\mu(x), \quad (4.71)$$

em que θ_W é o ângulo de Weinberg. Na Seção 5.3, veremos que a rotação sofrida pelos campos $W_\mu^3(x)$ e $B_\mu(x)$ é necessária para que apenas os bósons W^\pm e Z^0 adquiram massa através do acoplamento com o bóson de Higgs.

A Lagrangiana de Higgs \mathcal{L}_h , a qual descreve a dinâmica do bóson de Higgs, é definida como:

$$\mathcal{L}_h = (D_\mu \varphi)^\dagger (D^\mu \varphi) - V(\varphi^\dagger \varphi), \quad (4.72)$$

sendo $\varphi(x)$ o dubleto de Higgs, expresso em termos de dois campos escalares complexos:

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1 e^{i\alpha_1} \\ \varphi_2 e^{i\alpha_2} \end{pmatrix}, \quad (4.73)$$

com as componentes $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\alpha_1(x)$ e $\alpha_2(x)$ sendo campos escalares reais. A derivada covariante em \mathcal{L}_h é dada por:

$$D_\mu \varphi(x) = \left(\partial_\mu - igT^a W_\mu^a(x) - ig'T B_\mu(x) \right) \varphi(x), \quad (4.74)$$

na qual g e g' são as constantes de acoplamento, adimensionais, dos grupos $SU(2)$ e $U(1)$, respectivamente. Essas constantes se relacionam da seguinte forma [6, 7]:

$$e^2 = \frac{g g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad (4.75)$$

sendo e a carga elétrica adimensional, em unidades naturais. Os geradores dos grupos $SU(2)$ e $U(1)$, T^a e T , respectivamente, assumem as seguintes formas na representação fundamental:

$$T^a = \frac{\sigma^a}{2} \quad \text{e} \quad T = \frac{1}{2} Y_W \mathbb{1}_{2 \times 2}, \quad (4.76)$$

em que Y_W é a hipercarga fraca², enquanto σ^a são as matrizes de Pauli, definidas pela Eq. (4.30). A representação dos geradores dos grupos $SU(2)$ e $U(1)$, expressa em termos de matrizes 2×2 , é necessária uma vez que o campo de Higgs é representado por um dubleto, isto é, exibe dimensão 2.

O potencial $V(\varphi^\dagger \varphi)$, presente na Lagrangiana de Higgs, é expresso como uma auto-interação do dubleto de Higgs $\varphi(x)$:

$$V(\varphi^\dagger \varphi) = \frac{\lambda^2}{2} (\varphi^\dagger \varphi - \eta^2)^2, \quad (4.77)$$

² A hipercarga fraca é associada à carga elétrica e à terceira componente do isospin. A relação entre esses geradores é dada através da fórmula de Gell-Mann-Nishijima [57, 58]:

$$Q = T^3 + \frac{Y_W}{2}$$

em que λ é a constante adimensional de auto-acoplamento de $\varphi(x)$, enquanto o parâmetro η exibe dimensão de massa.

Desse modo, podemos expressar a Lagrangiana do setor escalar de Higgs da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{h,g} = (D_\mu \varphi)^\dagger (D^\mu \varphi) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} + V(\varphi^\dagger \varphi), \quad (4.78)$$

a qual é invariante sob as transformações de calibre do grupo $SU(2) \times U(1)$, definidas como:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\rightarrow e^{i\theta^a(x)T^a} e^{i\beta(x)T} \varphi(x), & B_\mu(x) &\rightarrow B_\mu(x) - \partial_\mu \beta(x), \\ & & \text{e } W_\mu^a(x) &\rightarrow W_\mu^a + \partial_\mu \theta^a(x) - g f^{abc} \theta^b(x) W_\mu^c(x), \end{aligned} \quad (4.79)$$

sendo $\theta^a(x)$, com $a = 1, 2, 3$, e $\beta(x)$ os parâmetros locais dessas transformações.

Uma teoria de Yang-Mills, como a eletrofraca, não comporta termos de massa para os bósons de calibre, pois esses termos violam a simetria local. Por esse motivo, a Lagrangiana do setor escalar de Higgs não exibe termos de massa para essas partículas. No entanto, os bósons de calibre W^\pm e Z^0 são observados experimentalmente como sendo partículas massivas [59]. Dessa forma, as massas dessas partículas são geradas através de um mecanismo que evita a quebra explícita da simetria de calibre $SU(2) \times U(1)$. Nesse processo, o potencial expresso pela Eq. (4.77) atribui um valor esperado de vácuo não nulo ao dubleto de Higgs, o que induz a quebra espontânea da simetria $SU(2) \times U(1)$. Após essa quebra, os bósons W^\pm e Z^0 passam a interagir com o bóson de Higgs e adquirem massa, enquanto o fóton permanece não massivo. Veremos os detalhes desse processo, conhecido como mecanismo de Higgs, na Seção 5.3.

5 Quebra espontânea de simetria

A quebra espontânea de simetria (global ou local), ocorre quando uma teoria exibe uma família de estados de vácuo que relacionam-se por meio de uma transformação de simetria, sob a qual a Lagrangiana é invariante. Na teoria eletrofraca, esse mecanismo é essencial para a geração de massa dos bósons mediadores W^\pm e Z^0 , sem que haja a quebra explícita da simetria $SU(2) \times U(1)$, exibida por essa teoria.

Na Seção 5.1, veremos que o processo de quebra espontânea de uma simetria global implica no surgimento de partículas não massivas, denominadas como bósons de Goldstone. Na Seção 5.2, discutiremos sobre a quebra espontânea de simetria em teorias de calibre. Veremos que, nesse caso, esse processo está associado à geração de massa dos bósons de calibre. Por fim, na Seção 5.3 trataremos da quebra espontânea de simetria no setor escalar de Higgs da teoria eletrofraca, a partir da qual ocorre a atribuição de massa aos bósons W^\pm e Z^0 . Essas seções foram desenvolvidas com base nas referências [3, 47, 48] e naquelas citadas durante o texto.

5.1 Quebra espontânea de simetrias globais

A quebra espontânea de simetria global ocorre quando a Lagrangiana de uma teoria exibe tal simetria, enquanto apresenta uma família de estados de vácuo que não são simétricos. A simetria é, então, quebrada espontaneamente quando o próprio sistema escolhe um desses estados fundamentais, ao redor do qual a teoria é perturbada. Após o processo de quebra espontânea, a teoria passa a exibir partículas não massivas denominadas como bósons de Goldstone.

Para entendermos como esse processo ocorre, consideremos uma teoria descrita por um campo escalar complexo e massivo, cuja Lagrangiana é expressa por:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - V(|\varphi(x)|), \quad (5.1)$$

a qual é invariante sob a transformação de simetria global do grupo $U(1)$:

$$\varphi(x) \rightarrow U(\theta)\varphi(x), \quad (5.2)$$

em que $U(\theta) = e^{i\theta}$ é a representação de um elemento do grupo $U(1)$, com θ sendo o parâmetro global dessa transformação, enquanto o gerador de $U(1)$ é apenas a identidade.

O potencial $V(|\varphi(x)|)$ dessa teoria descreve uma auto-interação do campo escalar $\varphi(x)$:

$$V(|\varphi(x)|) = \frac{1}{2}\lambda^2(|\varphi(x)|^2 - \eta^2)^2, \quad (5.3)$$

com λ sendo a constante de acoplamento, adimensional, da auto-interação de $\varphi(x)$, enquanto η é um parâmetro com dimensão de massa. O potencial $V(|\varphi(x)|)$ é responsável por atribuir um valor esperado de vácuo não nulo à $\varphi(x)$, que caracterizará a família de estados de vácuo exibida pela teoria. A minimização desse potencial fornece o valor esperado de vácuo do campo $\varphi(x)$:

$$\lambda^2(|\varphi(x)|^2 - \eta^2) = 0 \longrightarrow |\varphi(x)| = \eta. \quad (5.4)$$

Uma vez que $\varphi(x)$ é um campo complexo, podemos expressá-lo como:

$$\varphi(x) = |\varphi(x)|e^{i\alpha(x)}, \quad (5.5)$$

com a componente $\alpha(x)$ sendo um campo real. Assim, todo campo $\varphi(x)$ cujo módulo satisfaça a Eq. (5.4), constitui um estado de vácuo, de modo que a teoria passa a exibir um conjunto desses estados, descritos da forma:

$$\varphi(x) = \eta e^{i\alpha(x)}, \quad (5.6)$$

para qualquer campo $\alpha(x)$.

Podemos ver que, embora a Lagrangiana da teoria se mantenha invariante sob a transformação de simetria global do grupo $U(1)$, definida pela Eq. (5.2), o mesmo não ocorre com um estado de vácuo arbitrário $\varphi_0(x)$:

$$\varphi_0(x) = \eta e^{i\alpha_0(x)} \rightarrow \eta e^{i\alpha_0(x)} e^{i\theta} = \eta e^{i\alpha_1(x)} \neq \varphi_0(x). \quad (5.7)$$

Dessa forma, a Lagrangiana exibe uma simetria que não é compartilhada pelos estados fundamentais da teoria.

O resultado expresso pela Eq. (5.7), indica que a transformação de simetria de um estado de vácuo qualquer, gera um segundo estado fundamental equivalente ao primeiro. Desse modo, a teoria passa a exibir uma família de vácuos equivalentes entre si. A quebra espontânea de simetria ocorre, então, a partir da escolha de um desses estados, ao redor do qual a teoria é perturbada. Vale destacar que a teoria obtida após a escolha de um dos estados fundamentais é completamente equivalente às demais teorias que poderiam ser obtidas caso outros estados de vácuo fossem escolhidos.

Dessa maneira, para que a simetria $U(1)$ seja quebrada espontaneamente, escolhemos um dos estados de vácuo equivalentes, ao redor do qual faremos uma perturbação. Por conveniência, escolhemos o vácuo real, expresso por:

$$\varphi(x) = \eta. \quad (5.8)$$

Para que esse estado seja perturbado, introduzimos um novo campo escalar complexo $\rho(x)$:

$$\varphi(x) = \eta + \frac{1}{\sqrt{2}}\rho(x) = \eta + \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi(x) + i\psi(x)), \quad (5.9)$$

em que o fator $1/\sqrt{2}$ é usado por conveniência, enquanto os campos escalares reais $\chi(x)$ e $\psi(x)$ são os componentes de $\rho(x)$.

Assim, para que possamos analisar a teoria após o processo quebra espontânea de simetria, substituímos a expansão do campo $\varphi(x)$ (Eq. (5.9)) na Lagrangiana definida pela Eq. (5.1). Com isso, obtemos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi + \frac{1}{2}\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi - \frac{\lambda^2}{8}(2\sqrt{2}\eta\chi + \chi^2 + \psi^2)^2, \quad (5.10)$$

na qual identificamos termos cinéticos para os campos $\chi(x)$ e $\psi(x)$, assim como termos de interação. Além disso, reconhecemos um termo de massa para o campo $\chi(x)$:

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2}(2\lambda^2\eta^2)\chi^2, \quad (5.11)$$

enquanto $\psi(x)$ é descrito pela teoria como sendo um campo não massivo.

A assimetria observada entre os campos $\chi(x)$ e $\psi(x)$, no que diz respeito às suas massas, pode ser compreendida através da Figura 5. Nessa ilustração, podemos interpretar o campo $\psi(x)$ como excitações que tangenciam o estado de vácuo e que, portanto, conservam a energia do sistema. Por outro lado, $\chi(x)$ é associado a flutuações ortogonais ao estado fundamental, de modo que a energia não é conservada. Por esse motivo, o campo $\chi(x)$ é massivo, diferentemente de $\psi(x)$.

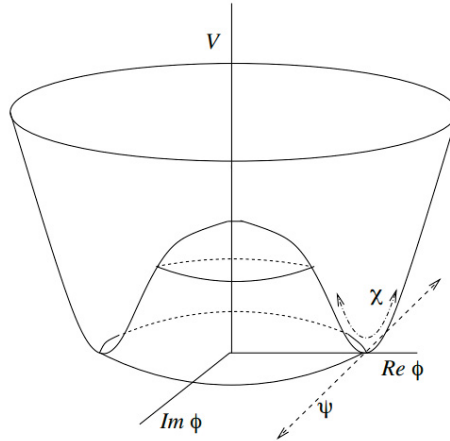


Figura 5 – Potencial que descreve a auto-interação do campo escalar $\varphi(x)$. Retirado de [3].

Portanto, como consequência do processo de quebra espontânea da simetria global $U(1)$, a teoria, antes descrita apenas pelo campo escalar complexo $\varphi(x)$, passou a ser expressa em termos de dois campos escalares reais: $\chi(x)$, o qual é massivo e $\psi(x)$, que é não massivo. Além disso, após a quebra espontânea de simetria, a Lagrangiana expressa pela Eq. (5.10) não exibe a simetria global do grupo $U(1)$, uma vez que $\psi(x)$ e $\chi(x)$ são campos escalares reais.

O surgimento de um campo não massivo após a quebra espontânea de uma simetria global é justificado pelo teorema de Goldstone [60, 61]. Nele, se estabelece que para cada gerador do grupo de simetria que sofre quebra espontânea, uma partícula não massiva de spin 0, denominada como bóson de Goldstone, surge na teoria. Após a quebra espontânea da simetria global $U(1)$, abordada nessa seção, observamos o surgimento de apenas um bóson de Goldstone, descrito pelo campo $\psi(x)$, uma vez que o grupo de simetria em questão possui somente um gerador.

5.2 Quebra espontânea de simetrias de calibre

Os aspectos exibidos por uma teoria após o fenômeno de quebra espontânea dependem do tipo de simetria que é violada nesse processo. Conforme vimos na seção anterior, quando uma simetria global é quebrada espontaneamente, partículas não massivas, conhecidas como bósons de Goldstone, surgem na teoria. No caso das teorias que exibem simetria local, as implicações de um processo de quebra espontânea são diferentes. Embora nesse caso também surjam bósons de Goldstone, a liberdade de calibre exibida por esse tipo de teoria é utilizada para que tais partículas sejam eliminadas. Como consequência dessa exclusão, os bósons de calibre presentes na teoria tornam-se partículas massivas. Esse processo, denominado como mecanismo de Higgs [5], é essencial para a geração de massa dos bósons de calibre, uma vez que as massas dessas partículas não podem ser adicionadas diretamente na Lagrangiana da teoria pois violam a simetria local.

Para que possamos entender os processos envolvidos no mecanismo de Higgs, consideremos uma teoria de calibre com base no grupo $U(1)$, a qual descreve um campo escalar complexo $\varphi(x)$:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \varphi)^* (D^\mu \varphi) - V(|\varphi(x)|) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (5.12)$$

em que a derivada covariante é dada por

$$D_\mu \varphi(x) = (\partial_\mu + iqA_\mu(x))\varphi(x), \quad (5.13)$$

com $A_\mu(x)$ sendo o campo de calibre. O potencial $V(|\varphi(x)|)$, presente na Lagrangiana, é o mesmo que utilizamos na Seção 5.1, expresso pela Eq. (5.3), o qual é responsável por atribuir um valor esperado de vácuo não nulo ao campo $\varphi(x)$.

A Lagrangiana definida pela Eq. (5.12) é invariante sob as seguintes transformações de calibre do grupo $U(1)$:

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x)e^{iq\theta(x)}, \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu\theta(x), \quad (5.14)$$

em que $\theta(x)$ é o parâmetro local das transformações de simetria.

Devido ao valor esperado de vácuo não nulo atribuído ao campo $\varphi(x)$ pelo potencial $V(|\varphi(x)|)$, a teoria de calibre apresenta uma família de estados de vácuo, caracterizados por:

$$\varphi(x) = \eta e^{i\alpha(x)}, \quad (5.15)$$

para qualquer campo $\alpha(x)$, assim como vimos na Seção 5.1. Embora a Lagrangiana da teoria seja invariante sob as transformações de simetria expressas pela Eq. (5.14), o mesmo não ocorre com a família de estados fundamentais exibida pela teoria. Isso pode ser visto, ao aplicarmos a transformação de calibre sobre um estado de vácuo arbitrário $\varphi_0(x)$:

$$\varphi_0(x) = \eta e^{i\alpha_0(x)} \rightarrow \eta e^{i\alpha_0(x)} e^{iq\theta(x)} = \eta e^{i\alpha_1(x)} \neq \varphi_0(x). \quad (5.16)$$

A quebra espontânea da simetria de calibre $U(1)$ ocorre, então, a partir da escolha de um dos estados fundamentais exibidos pela teoria. Desse modo, para que a simetria em questão seja quebrada espontaneamente, escolhemos um dos estados de vácuo da teoria e realizamos excitações ao seu redor:

$$\varphi(x) = \eta e^{i\alpha'(x)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\xi(x), \quad (5.17)$$

em que a perturbação $\xi(x)$ é um campo escalar complexo, o qual também pode ser expresso na forma polar. Assim, obtemos:

$$\varphi(x) = \eta e^{i\alpha'(x)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\rho(x)e^{i\psi(x)} = \left(\eta + \frac{1}{\sqrt{2}}\rho(x) \right) e^{i\psi(x)}, \quad (5.18)$$

sendo $\rho(x)$ e $\psi(x)$ campos escalares reais, componentes de $\xi(x)$. Visto que qualquer campo $\alpha'(x)$ constitui um estado de vácuo (Eq. (5.15)), escolhemos $\alpha'(x) = \psi(x)$.

Na equação (5.18), podemos utilizar a transformação de calibre, expressa pela Eq. (5.14), para eliminar um dos graus de liberdade do campo $\varphi(x)$ através de uma escolha conveniente do parâmetro local $\theta(x)$. Ao aplicarmos a transformação de simetria sobre o campo $\varphi(x)$, temos:

$$\varphi(x) \rightarrow \left(\eta + \frac{1}{\sqrt{2}}\rho(x) \right) e^{i\alpha(x)} e^{iq\theta(x)}, \quad (5.19)$$

sendo que o parâmetro $\theta(x)$, expresso por uma função qualquer do espaço-tempo, pode ser escolhido livremente (liberdade de calibre). Ao considerarmos $\theta(x) = -\alpha(x)/q$, o campo $\varphi(x)$ assume a seguinte forma:

$$\varphi(x) = \eta + \frac{1}{\sqrt{2}}\rho(x), \quad (5.20)$$

o qual possui apenas um grau de liberdade, visto que a componente $\alpha(x)$ foi eliminada por meio da liberdade de calibre.

Desse modo, podemos analisar a teoria após a quebra espontânea de simetria, substituindo o campo $\varphi(x)$, expresso pela Eq. (5.19), na Lagrangiana (Eq. (5.12)). Com

isso, obtemos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + q^2 \left(\eta + \frac{\rho}{\sqrt{2}} \right)^2 A_\mu A^\mu - \frac{\lambda^2}{8} (2\sqrt{2}\eta\rho + \rho^2)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (5.21)$$

na qual podemos reconhecer termos cinéticos para os campos $\rho(x)$ e $A_\mu(x)$, assim como termos de interação. Além disso, podemos identificar termos de massa para ambos os campos:

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} (2q^2\eta^2) A_\mu A^\mu - \frac{1}{2} (2\lambda^2\eta^2) \rho^2. \quad (5.22)$$

Podemos observar que a quebra espontânea da simetria de calibre $U(1)$, não produziu nenhuma partícula não massiva, diferente do que vimos na quebra espontânea da simetria global $U(1)$. Na verdade, a componente $\alpha(x)$ do campo $\varphi(x)$, que daria origem ao bóson de Goldstone, foi eliminada através da liberdade de calibre, na Eq. (5.19). Por outro lado, o bóson de calibre $A_\mu(x)$, descrito inicialmente como uma partícula sem massa, se tornou massivo após o processo de quebra espontânea.

Um ponto que vale a pena ser discutido refere-se ao fato de que a liberdade de calibre permite que qualquer um dos graus de liberdade do campo $\varphi(x)$ seja eliminado. Na Eq. (5.19), escolhemos o parâmetro $\theta(x)$ a fim de que a componente $\alpha(x)$ fosse cancelada. No entanto, também podemos escolher um parâmetro $\theta(x)$ da forma:

$$\theta(x) = \frac{-i}{q} \ln(\sqrt{2}\eta) + \frac{i}{q} \ln(\sqrt{2}\eta + \rho(x)), \quad (5.23)$$

o qual permite que a componente $\rho(x)$ seja eliminada. Com essa escolha, o campo $\varphi(x)$ passa a ser dado por:

$$\varphi(x) = \eta e^{i\alpha(x)}, \quad (5.24)$$

o qual exibe apenas um grau de liberdade, $\alpha(x)$.

Ao substituirmos o campo $\varphi(x)$ (Eq. (5.24)) na Lagrangiana da Eq. (5.12), obtemos:

$$\mathcal{L} = \eta^2 (\partial_\mu \alpha \partial^\mu \alpha) + q^2 \eta^2 A_\mu A^\mu + 2q\eta^2 A^\mu (\partial_\mu \alpha) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (5.25)$$

Nessa Lagrangiana, podemos observar um termo de acoplamento cinético da forma:

$$\mathcal{L}_{int} = 2q\eta^2 A^\mu (\partial_\mu \alpha), \quad (5.26)$$

indicando que o campo escalar $\alpha(x)$ se transforma no campo de calibre $A_\mu(x)$. Isso está associado ao fato de que os campos foram identificadas equivocadamente dentro da teoria [4]. Por essa razão a liberdade de calibre é utilizada de forma a eliminar a componente $\alpha(x)$ do campo escalar $\varphi(x)$, e não a componente $\rho(x)$.

5.3 Quebra espontânea de simetria no setor escalar de Higgs

No setor escalar de Higgs da teoria eletrofraca, a quebra espontânea de simetria é responsável por atribuir massa aos bósons de calibre W^\pm e Z^0 . Esse mecanismo torna-se necessário uma vez que, experimentalmente, essas partículas são identificadas como sendo massivas e termos de massa para bósons de calibre não podem ser adicionados diretamente ao setor de Higgs, pois violam a simetria local $SU(2) \times U(1)$. As massas obtidas através da quebra espontânea de simetria, por outro lado, permitem que a teoria eletrofraca ainda seja renormalizável [8].

A Lagrangiana do setor escalar de Higgs exibe um potencial que é responsável por atribuir um valor esperado de vácuo não nulo ao dubleto de Higgs, de modo que a teoria passa a apresentar um conjunto de estados de vácuo não simétricos. Assim como vimos nas seções anteriores, a quebra espontânea de simetria ocorre por meio da escolha de um desses estados, em torno do qual a teoria é perturbada. Após a quebra espontânea da simetria $SU(2) \times U(1)$, os bósons W^\pm e Z^0 passam a interagir com o bóson de Higgs. Como resultado desse processo (mecanismo de Higgs), os bósons W^\pm e Z^0 adquirem massa, enquanto o fóton, que também media a interação eletrofraca, permanece sem massa, uma vez que não interage com o bóson de Higgs.

Para entendermos os detalhes do mecanismo de Higgs no contexto da teoria eletrofraca, consideremos a Lagrangiana do setor escalar de Higgs, definida na Seção 4.4 como:

$$\mathcal{L}_{h,g} = (D^\mu \varphi)^\dagger (D_\mu \varphi) - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - V(\varphi^\dagger \varphi), \quad (5.27)$$

que é invariante sob as transformações de calibre do grupo $SU(2) \times U(1)$, definidas pela Eq. (4.79). O dubleto de Higgs $\varphi(x)$ é expresso em função de dois campos escalares complexos da seguinte forma:

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1 e^{i\alpha_1} \\ \varphi_2 e^{i\alpha_2} \end{pmatrix}, \quad (5.28)$$

com as componentes $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\alpha_1(x)$ e $\alpha_2(x)$ sendo campos escalares reais. A derivada covariante dessa teoria, é dada por:

$$(D_\mu \varphi(x))^\alpha = \partial_\mu \varphi^\alpha(x) - \frac{ig}{2} W_\mu^a(x) (\sigma^a)^\alpha_\beta \varphi^\beta(x) - \frac{i}{2} g' B_\mu(x) Y(\mathbb{1})^\alpha_\beta \varphi^\beta(x), \quad (5.29)$$

com $a = 1, 2, 3$, contabilizando os três geradores do grupo $SU(2)$, enquanto $\alpha = \beta = 1, 2$ compreende as duas componentes do dubleto de Higgs. Nessa representação (fundamental), os geradores do grupo $SU(2)$ são expressos em termos das matrizes de Pauli, ao passo que a hipercarga fraca Y_W é o gerador do grupo $U(1)$, conforme discutido na Seção 4.4.

O potencial $V(\varphi^\dagger \varphi)$ presente em $\mathcal{L}_{h,g}$, é expresso como uma auto-interação do dubleto de Higgs:

$$V(\varphi^\dagger \varphi) = \frac{\lambda^2}{2} (\varphi^\dagger \varphi - \eta^2)^2, \quad (5.30)$$

o qual exibe a mesma forma do potencial que utilizamos ao longo desse capítulo. Tal potencial atribui um valor esperado de vácuo não nulo ao dubleto de Higgs, caracterizado por:

$$\varphi^\dagger\varphi = |\varphi(x)|^2 = \eta^2 \rightarrow |\varphi(x)| = \eta. \quad (5.31)$$

Dessa forma, todo $\varphi(x)$ cujo módulo seja igual a η , constitui um estado fundamental do setor de escalar de Higgs. Assim, um conjunto de estados de vácuo (não simétricos) é exibido pela teoria.

Conforme vimos da Seção 5.2, podemos utilizar a transformação de calibre, nesse caso do dubleto de Higgs, para eliminar alguns de seus graus de liberdade, uma vez que podemos escolher livremente os parâmetros locais dessa transformação. Na Seção 4.4, definimos a transformação do dubleto de Higgs da seguinte forma:

$$\varphi(x) \rightarrow \begin{pmatrix} \varphi_1 e^{i\alpha_1} \\ \varphi_2 e^{i\alpha_2} \end{pmatrix} e^{i\theta^a(x)\frac{\sigma^a}{2}} e^{i\beta(x)\frac{Y}{2}}. \quad (5.32)$$

Assim, os parâmetros locais $\theta^a(x)$, com $a = 1, 2, 3$, e $\beta(x)$ podem ser escolhidos de modo que três dos quatro graus de liberdade de $\varphi(x)$ sejam eliminados. Essas escolhas são feitas a fim de que o dubleto de Higgs seja expresso em termos de um único campo real:

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}. \quad (5.33)$$

Dessa forma, a condição que caracteriza um estado de vácuo da teoria, definida pela Eq. (5.31), pode ser reescrita em termos da única componente do dubleto de Higgs, $\varphi_2(x)$:

$$\varphi^\dagger\varphi = \varphi_2^2(x) = \eta^2 \rightarrow \varphi_2(x) = \eta. \quad (5.34)$$

Sendo assim, podemos expandir o dubleto de Higgs $\varphi(x)$ ao redor de um estado vácuo, conforme fizemos nas seções anteriores:

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (5.35)$$

e, então, analisar o setor escalar de Higgs após a quebra espontânea de simetria. A perturbação $\chi(x)$, realizada em torno do estado de vácuo, se trata de um campo escalar real, o qual passa a ser denominado como campo de Higgs.

Dessa maneira, para analisar o setor escalar de Higgs após o processo de quebra espontânea de simetria, substituímos o campo $\varphi(x)$, expresso pela Eq. (5.35), na Lagrangiana $\mathcal{L}_{h,g}$. Primeiramente, podemos analisar como o termo cinético do dubleto $\varphi(x)$ se modifica após a quebra espontânea. Para isso, substituímos $\varphi(x)$, na derivada covariante

definida pela Eq. (5.29). Para primeira componente desse objeto, obtemos:

$$\begin{aligned}
(D_\mu\varphi)^1 &= \frac{ig}{2} \left(W_\mu^1(\sigma^1)^1{}_2 + W_\mu^2(\sigma^2)^1{}_2 + W_\mu^3(\sigma^3)^1{}_2 \right) \left(\eta + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \right) \\
&\quad - \frac{ig'}{2} B_\mu(\mathbb{1})^1{}_2 \left(\eta + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \right) \\
&= -\frac{ig}{2} \left(\eta + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \right) (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2} ig \left(\eta + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \right) W_\mu^-,
\end{aligned} \tag{5.36}$$

na qual introduzimos a notação [6]:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \pm iW_\mu^2). \tag{5.37}$$

Analogamente, a segunda componente da derivada covariante resulta em:

$$(D_\mu\varphi)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu\chi + \frac{i}{2} \left(\eta + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \right) (gW_\mu^3 - g'B_\mu). \tag{5.38}$$

Essas duas componentes, expressas pelas Eqs. (5.36) e (5.38), podem ser escritas na forma matricial como:

$$D_\mu\varphi = \partial_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \left(\eta + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} -g\sqrt{2}W_\mu^- \\ gW_\mu^3 - g'B_\mu \end{pmatrix}. \tag{5.39}$$

Assim, podemos calcular o termo cinético do campo escalar $\varphi(x)$, a partir da derivada covariante expressa pela Eq. (5.39):

$$\begin{aligned}
(D_\mu\varphi)^\dagger(D^\mu\varphi) &= \frac{1}{2} \partial^\mu\chi\partial_\mu\chi + \frac{g^2}{2} \left(\eta + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \right)^2 W^{+\mu}W_\mu^- \\
&\quad + \frac{g^2}{4} \left(\eta + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \right)^2 \left(W^{3\mu} - \frac{g'}{g}B^\mu \right) \left(W_\mu^3 - \frac{g'}{g}B_\mu \right),
\end{aligned} \tag{5.40}$$

em que utilizamos a relação $(W_\mu^-)^* = W_\mu^+$, obtida através da Eq. (5.37).

Podemos reescrever a Eq. (5.40), por meio das seguintes definições:

$$\bar{g} = \sqrt{g^2 + g'^2}, \quad \frac{g}{\bar{g}} = \cos\theta_W \quad \text{e} \quad \frac{g'}{\bar{g}} = \sin\theta_W, \tag{5.41}$$

que estabelecem uma relação entre as constantes de acoplamento g e g' dos grupos $SU(2)$ e $U(1)$, respectivamente, como o ângulo de Weinberg θ_W [10]. Esse ângulo está relacionado às rotações sofridas pelos campos $W_\mu^3(x)$ e $B_\mu(x)$, as quais dão origem aos campos associados ao bóson Z^0 e ao fóton, conforme visto na Seção 4.4.

Desse modo, a partir das definições expressas pela Eq. (5.41), o termo cinético para o campo $\varphi(x)$, passa assumir a seguinte forma:

$$\begin{aligned} (D^\mu \varphi)^\dagger (D_\mu \varphi) &= \frac{1}{2} \partial^\mu \chi \partial_\mu \chi + \frac{g^2}{4} \left(\eta + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \right)^2 (W^{1\mu} W_\mu^1 + W^{2\mu} W_\mu^2) \\ &+ \frac{\bar{g}^2}{4} \left(\eta + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \right)^2 (W^{3\mu} \cos \theta_W - B^\mu \sin \theta_W) \\ &\times (W_\mu^3 \cos \theta_W - B_\mu \sin \theta_W), \end{aligned} \quad (5.42)$$

na qual também utilizamos a Eq. (5.37). Nesse ponto, os campos de calibre $W_\mu^3(x)$ e $B_\mu(x)$ são redefinidos da seguinte forma [6, 7, 10]:

$$W_\mu^3(x) = \sin \theta_W A_\mu(x) + \cos \theta_W Z_\mu(x) \quad e \quad B_\mu(x) = \cos \theta_W A_\mu(x) - \sin \theta_W Z_\mu(x), \quad (5.43)$$

em que $A_\mu(x)$ representa o campo eletromagnético, enquanto $Z_\mu(x)$ é o campo associado ao bóson Z^0 . Essas redefinições permitem que apenas os campos $W_\mu^1(x)$, $W_\mu^2(x)$ e $Z_\mu(x)$ acoplem-se ao campo de Higgs. Através dessa interação, os bósons W^\pm e Z^0 , associados a esses campos, adquirem massa, enquanto o fóton permanece sendo não massivo.

Dessa forma, após as rotações sofridas pelos campos $W_\mu^3(x)$ e $B_\mu(x)$, a Eq. (5.42) se torna:

$$\begin{aligned} (D^\mu \varphi)^\dagger (D_\mu \varphi) &= \frac{1}{2} \partial^\mu \chi \partial_\mu \chi + \frac{g^2}{4} \left(\eta + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \right)^2 (W^{1\mu} W_\mu^1 + W^{2\mu} W_\mu^2) \\ &+ \frac{\bar{g}^2}{4} \left(\eta + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \right)^2 Z^\mu Z_\mu, \end{aligned} \quad (5.44)$$

na qual identificamos os termos de massa para os campos de calibre $W_\mu^1(x)$, $W_\mu^2(x)$, associados aos bósons W^\pm :

$$M_W = \frac{g\eta}{\sqrt{2}} \quad (5.45)$$

assim como um termo de massa para o campo $Z_\mu(x)$, associado ao bóson Z^0 ,

$$M_Z = \frac{\bar{g}\eta}{\sqrt{2}}. \quad (5.46)$$

As massas dessas partículas estão relacionadas através do ângulo de Weinberg:

$$\frac{M_W}{M_Z} = \cos \theta_W. \quad (5.47)$$

Para que possamos obter a descrição completa da teoria após o processo de quebra espontânea de simetria, precisamos também avaliar o potencial $V(\varphi^\dagger \varphi)$ em termos do campo $\varphi(x)$ expandido ao redor do estado de vácuo (Eq. (5.34)). Dessa forma, substituímos esse campo no potencial expresso pela Eq. (5.30):

$$V(\chi) = \frac{\lambda^2}{2} \left(2\eta^2 \chi^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} \eta \chi^3 + \frac{\chi^4}{4} \right), \quad (5.48)$$

no qual identificamos um termo de massa para o bóson de Higgs da forma:

$$M_H = \sqrt{2}\lambda\eta, \quad (5.49)$$

que, assim como as massas dos bósons W^\pm e Z^0 , é proporcional ao valor esperado de vácuo do campo $\varphi(x)$, expresso pelo parâmetro η .

Por último, devido às redefinições dos campos $W_\mu^3(x)$ e $B_\mu(x)$, os termos que descrevem a dinâmica dos campos de calibre passam a ser escritos da forma:

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^1 W^{1\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^2 W^{2\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4}A_{\mu\nu} A^{\mu\nu}, \quad (5.50)$$

na qual substituímos a Eq. (5.43) nas definições dos tensores de força destes campos (Eq. (4.70)).

Dessa maneira, após a quebra espontânea da simetria $SU(2) \times U(1)$, a Lagrangiana do setor escalar de Higgs assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{h,g} = & \frac{1}{2}\partial^\mu\chi\partial_\mu\chi + \frac{g^2}{4}\left(\eta + \frac{\chi}{\sqrt{2}}\right)^2 (W^{1\mu}W_\mu^1 + W^{2\mu}W_\mu^2) \\ & + \frac{\bar{g}^2}{4}\left(\eta + \frac{\chi}{\sqrt{2}}\right)^2 Z^\mu Z_\mu - \frac{\lambda^2}{2}\left(2\eta^2\chi^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}\eta\chi^3 + \frac{\chi^4}{4}\right) \\ & - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^1 W^{1\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^2 W^{2\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

É importante destacar que embora essa Lagrangiana exiba termos de massa para os bósons de calibre, a teoria eletrofraca ainda permanece sendo renormalizável, conforme comentamos anteriormente.

6 Modelo BSM

Neste capítulo, apresentaremos nossos desenvolvimentos para a construção de um modelo BSM para o setor escalar de Higgs. Nossa construção baseia-se na introdução de uma nova correção quântica de um laço (proporcional à primeira ordem de \hbar) ao setor de Higgs. Essa correção quântica, ainda não considerada pelo Modelo Padrão na previsão da massa do bóson W^\pm , origina-se na medida funcional da integral de caminho de Feynman.

Na Seção 6.1, apresentaremos como a correção quântica com origem na medida funcional foi obtida e introduzida ao setor escalar de Higgs. Na Seção 6.2, calcularemos as massas das partículas desse setor, isto é, dos bósons W^\pm , Z^0 e de Higgs, através da ação efetiva, a qual inclui a nova correção quântica. Por fim, na Seção 6.3, adicionaremos ao nosso modelo as correções quânticas de um laço já consideradas pelo Modelo Padrão na previsão da massa do bóson W^\pm . Ao longo desse capítulo, apresentaremos os fatores de \hbar explicitamente, para que as correções quânticas introduzidas ao setor escalar de Higgs possam ser identificadas facilmente.

6.1 Correção quântica: medida funcional

Conforme vimos na Seção 2.2, a medida funcional da integral de caminho é definida da seguinte forma:

$$\mathcal{D}\varphi = A \prod_{\alpha, x} d\varphi^\alpha(x), \quad (6.1)$$

com A sendo um parâmetro constante. Essa expressão denota o produto das integrais realizadas sobre todas as configurações assumidas por cada campo $\varphi^\alpha(x)$ presente em uma teoria. No entanto, esse é apenas um caso particular de uma definição mais geral [28, 62]:

$$\mathcal{D}\varphi = \prod_i d\varphi^i \sqrt{\text{Det } G_{ij}}, \quad (6.2)$$

em que o índice i , expresso na notação de DeWitt [62], compreende o índice discreto α , assim como a coordenada contínua x , de forma que $d\varphi^i = d\varphi^\alpha(x)$.

A medida funcional, definida pela Eq. (6.2), garante que o funcional gerador $Z[J]$ de uma teoria mantenha-se invariante sob quaisquer redefinições dos campos φ^i . Isso é assegurado pelo termo $\sqrt{\text{Det } G_{ij}}$, que cancela os Jacobianos que surgem através de tais redefinições. O objeto G_{ij} , presente nesse termo, é definido como a métrica do espaço de configuração dos campos. Esse espaço, por sua vez, pode ser compreendido como aquele em que os campos de uma teoria formam os eixos de coordenadas, de modo bastante similar ao espaço de configuração definido em mecânica clássica. Entretanto, nesse caso, para cada ponto do espaço-tempo, os campos que determinam os eixos assumem uma configuração

distinta, conforme ilustrado pela Figura 6. Desse modo, o espaço de configuração dos campos exibe dimensão infinita, diferente do que ocorre em mecânica clássica. A métrica G_{ij} define, então, qualquer medida geométrica neste espaço.

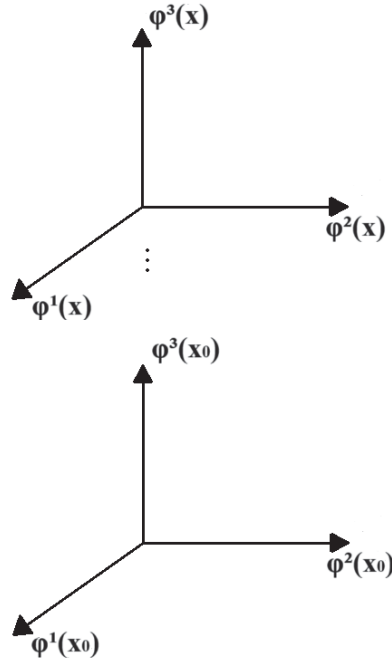


Figura 6 – Exemplo de um espaço de configuração para uma teoria composta por três campos.

No caso particular de uma métrica trivial, isto é $G_{ij} = \mathbb{1}$, o termo $\sqrt{\text{Det } G_{ij}}$ é igual a um, e a medida funcional é simplesmente expressa pela Eq. (6.1). No entanto, de modo geral, esse termo gera contribuições não triviais à integral de caminho, que podem ser interpretadas como correções quânticas de um laço à ação clássica de uma teoria. Para que a correção quântica resultante não viole a localidade exibida pelas teorias quânticas de campos, a métrica G_{ij} é definida como:

$$G_{ij} = G_{IJ}(\varphi^i)\delta(x - x'), \quad (6.3)$$

na qual a matriz $G_{IJ}(\varphi^i)$, expressa como um funcional dos campos que compõem o espaço de configuração, é obtida por aspectos de simetria.

Para que a contribuição gerada pela medida funcional surja como uma correção quântica de um laço à ação clássica de uma teoria, partimos da definição do funcional gerador (Eq. (2.58)), considerando a medida funcional expressa pela Eq. (6.2):

$$Z[J] = \prod_i \int d\varphi^i \sqrt{\text{Det } G_{ij}} e^{\frac{i}{\hbar}(S[\varphi^i] + J_i \varphi^i)}, \quad (6.4)$$

em que $J_i \varphi^i = \int d^4x J_\alpha(x) \varphi^\alpha(x)$, na notação de DeWitt. O termo $\sqrt{\text{Det } G_{ij}}$, pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\sqrt{\text{Det } G_{ij}} = e^{\frac{1}{2} \ln \text{Det } G_{ij}}, \quad (6.5)$$

obtida através da seguinte propriedade da função logarítmica:

$$e^{\ln(x)} = x. \quad (6.6)$$

Desse modo, o funcional gerador passa a ser expresso como:

$$Z[J] = \prod_i \int d\varphi^i e^{\frac{i}{\hbar} (S_{eff} + J_i \varphi^i)}, \quad (6.7)$$

com

$$S_{eff} = S[\varphi^i] - \frac{i\hbar}{2} \ln \text{Det } G_{ij}. \quad (6.8)$$

Utilizando a relação $\text{Det } \ln = \text{Tr } \ln$, a ação S_{eff} passa a ser dada por:

$$\begin{aligned} S_{eff} &= S[\varphi^i] - \frac{i\hbar}{2} \text{Tr } \ln G_{ij} \\ &= S[\varphi^i] - \frac{i\hbar}{2} \delta(0) \int d^4x \text{tr } \ln G_{IJ}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

em que utilizamos a definição de G_{ij} (Eq. (6.3)) e tomamos seu traço funcional Tr . Nessa equação, tr denota o traço matricial de G_{IJ} . Com esse resultado, podemos concluir que o termo $\sqrt{\text{Det } G_{ij}}$ de fato contribui com uma correção quântica de um laço à ação clássica, uma vez que dá origem a um termo proporcional à \hbar .

Para que possamos obter a forma da contribuição gerada pela medida funcional e introduzi-la como uma correção quântica de um laço ao setor escalar de Higgs, é necessário que a métrica G_{IJ} seja construída para esse caso. Na Seção 4.4, vimos que a Lagrangiana do setor escalar de Higgs compreende os campos de calibre $B_\mu(x)$ e $W_\mu^a(x)$, com $a = 1, 2, 3$, além do dubleto de Higgs $\varphi(x)$, os quais, então, constituem o espaço de configuração desta teoria. Dessa forma, a métrica desse espaço deve ser construída como um funcional desses campos. Além disso, vimos que o setor escalar de Higgs exibe simetria de calibre com base no grupo $SU(2) \times U(1)$. Assim, G_{IJ} também deve ser construída de modo a preservar essa simetria. Ademais, para que a localidade da teoria não seja violada, não incluímos termos de derivadas dos campos nessa construção.

A partir dessas considerações, concluímos não ser possível incluir os campos de calibre $B_\mu(x)$ e $W_\mu^a(x)$ na estrutura de G_{IJ} , visto que funções que não incluem suas derivadas, como lineares, quadráticas, etc., violam a simetria de calibre $SU(2) \times U(1)$. Desse modo, construímos a métrica apenas como um funcional do dubleto de Higgs. Ademais, esse campo pôde ser introduzido na estrutura de G_{IJ} somente em sua forma escalar, a qual é invariante sob as transformações de calibre do grupo de simetria em questão.

Sendo assim, com base em nossas ponderações, o determinante da métrica para o setor escalar de Higgs, assume a seguinte forma:

$$\text{Det } G_{IJ} = A + B \frac{\varphi(x)^\dagger \varphi(x)}{\Lambda^2}, \quad (6.10)$$

sendo A e B constantes adimensionais, enquanto Λ é uma constante de escala, com dimensão de massa, que garante a dimensão correta de $\text{Det } G_{IJ}$. A partir desse resultado e da construção expressa nas Eqs. (6.4) - (6.9), obtemos a seguinte ação efetiva para o setor escalar de Higgs:

$$S_{eff} = S_{higgs} - 2i\gamma\hbar \int d^4x \text{tr} \ln \left(A + B \frac{\varphi(x)^\dagger \varphi(x)}{\Lambda^2} \right), \quad (6.11)$$

na qual γ é um outro parâmetro livre com dimensão de massa elevada à quarta potência (M^4). Nessa expressão, S_{higgs} denota a ação clássica:

$$S_{higgs} = \int d^4x \mathcal{L}_{h,g}, \quad (6.12)$$

em que a Lagrangiana do setor escalar de Higgs $\mathcal{L}_{h,g}$ é expressa pela Eq. (4.78).

Na Eq. (6.12) podemos observar que a contribuição advinda da medida funcional se comporta como uma correção quântica imaginária. Isso implica que a ação efetiva do setor escalar de Higgs é complexa, o que gera algumas dificuldades com relação ao cálculo das massas das partículas dessa teoria. Essas complicações incluem, por exemplo, o surgimento de divergências na massa do bóson de Higgs. Por esse motivo, trataremos nosso problema no espaço Euclidiano. Para isso, realizamos uma rotação de Wick na integral de caminho definida no espaço de Minkowski (Eq. (2.58)) e só então introduzimos a contribuição gerada pela medida funcional. Essa rotação é realizada através das seguintes continuações analíticas ao plano complexo:

$$x^0 \rightarrow -ix^0 \quad \text{e} \quad \vec{x} \rightarrow \vec{x}_E. \quad (6.13)$$

Dessa forma, a integral funcional no espaço Euclidiano é expressa como:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi e^{\frac{1}{\hbar}(-S[\varphi] + J_i \varphi^i)}, \quad (6.14)$$

de modo que as contribuições geradas pela medida funcional deixam de receber o fator i ao serem introduzidas na integral de caminho.

Dessa maneira, no espaço Euclidiano, a ação efetiva para o setor escalar de Higgs assume a seguinte forma:

$$S_{eff} = S_{higgs} - 2\gamma\hbar \int d^4x_E \text{tr} \ln \left(A + B \frac{\varphi(x)^\dagger \varphi(x)}{\Lambda^2} \right), \quad (6.15)$$

a qual é completamente real. É importante ressaltar que essa ação continua invariante sob as transformações de calibre de grupo $SU(2) \times U(1)$, visto que construímos a métrica G_{IJ} a fim de que essa simetria fosse preservada.

6.2 Massas dos bósons do setor escalar de Higgs

Nesta seção, calcularemos as massas dos bósons de Higgs, W^\pm e Z^0 , através do processo de quebra espontânea de simetria, utilizando a ação efetiva que obtivemos na Seção 6.1:

$$S_{eff} = \int d^4x_E \left[(D^\mu \varphi)^\dagger (D_\mu \varphi) - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - V(\varphi^\dagger \varphi) - 2\hbar\gamma \operatorname{tr} \ln \left(A + B \frac{\varphi^\dagger \varphi}{\Lambda^2} \right) \right], \quad (6.16)$$

sendo que utilizamos a Lagrangiana do setor escalar de Higgs dada pela Eq. (4.78).

Uma vez que a correção quântica introduzida na teoria não depende de derivadas do campo $\varphi(x)$, podemos interpretá-la como uma correção ao potencial $V(\varphi^\dagger \varphi)$, expresso pela Eq. (4.77). Dessa forma, definimos o seguinte potencial efetivo:

$$V_{eff} = \frac{\lambda^2}{2} (\varphi^\dagger \varphi - \eta^2)^2 + 2\gamma\hbar \operatorname{tr} \ln \left(A + B \frac{\varphi^\dagger \varphi}{\Lambda^2} \right) \quad (6.17)$$

$$V_{eff} = \frac{\lambda^2}{2} (\varphi^\dagger \varphi - \eta^2)^2 + 2\hbar\gamma \ln(A) + 2\hbar\gamma \ln \left(1 + C \varphi^\dagger \varphi \right),$$

com a constante $C = \frac{B}{A\Lambda^2}$ tendo dimensão de um sobre massa ao quadrado (M^{-2}). Nessa equação, utilizamos que o traço matricial tr é trivial ao ser calculado sobre termos escalares. A forma desse potencial, com valores arbitrários para os parâmetros livres C e γ , está ilustrada na Figura 7.

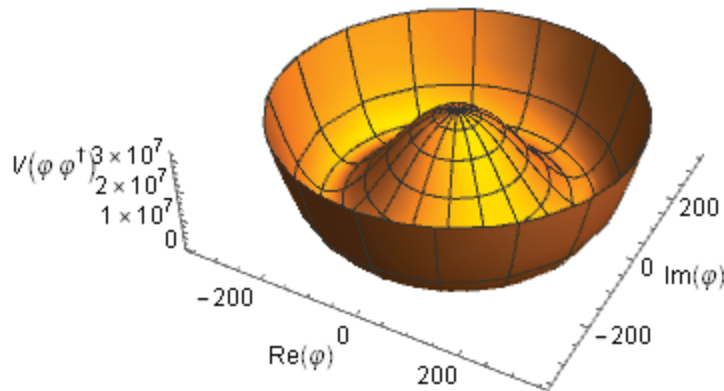


Figura 7 – Potencial efetivo do setor escalar de Higgs. Consideramos os valores arbitrários $\eta = \Lambda = 246$, $\lambda = 0,13$ e $A = B = \gamma = 1$.

Na Seção 5.3, vimos que o potencial $V(\varphi^\dagger \varphi)$ atribui um valor esperado de vácuo não nulo ao dubleto de Higgs, caracterizando uma família de estados fundamentais. A partir da escolha de um desses estados, em torno do qual a teoria é perturbada, a simetria $SU(2) \times U(1)$ é quebrada espontaneamente. Como consequência, os bósons W^\pm e Z^0

adquirem massa, enquanto o fóton permanece sendo não massivo. Embora tenhamos alterado a forma de $V(\varphi^\dagger\varphi)$ através da introdução da correção quântica, o potencial efetivo $V_{eff}(\varphi^\dagger\varphi)$ também atribui um valor esperado de vácuo não nulo ao dubleto de Higgs, de modo que a quebra espontânea de simetria ocorre de maneira análoga. Assim como anteriormente, o valor esperado de vácuo de $\varphi(x)$ é obtido através da minimização do potencial, nesse caso, do potencial efetivo expresso pela Eq. (6.17):

$$\frac{dV_{eff}(\varphi^\dagger\varphi)}{d(\varphi^\dagger\varphi)} = \lambda(\varphi^\dagger\varphi - \eta^2) + \frac{2\hbar\gamma C}{1 + C\varphi^\dagger\varphi} = 0, \quad (6.18)$$

de modo que os mínimos são:

$$\varphi^\dagger\varphi = \frac{C\eta^2 - 1 \pm \sqrt{(1 + C\eta^2)^2 - \frac{8\hbar\gamma C^2}{\lambda^2}}}{2C}. \quad (6.19)$$

Quando desconsideramos a correção quântica, tomando o limite $\hbar \rightarrow 0$, os mínimos de $V_{eff}(\varphi^\dagger\varphi)$ devem retornar ao resultado que obtivemos na Seção 5.3, quando consideramos o setor escalar de Higgs clássico. Dessa forma, tomando o limite $\hbar \rightarrow 0$ na Eq. (6.19), obtemos:

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \varphi^\dagger\varphi = \frac{C\eta^2 - 1 \pm (1 + C\eta^2)}{2C}, \quad (6.20)$$

a qual retorna ao caso clássico, $\varphi^\dagger\varphi = \eta^2$, somente quando adotamos o sinal positivo. Assim, a configuração válida de $\varphi^\dagger\varphi$ que minimiza o potencial efetivo é:

$$\varphi^\dagger\varphi = \frac{C\eta^2 - 1 + \sqrt{(1 + C\eta^2)^2 - \frac{8\hbar\gamma C^2}{\lambda^2}}}{2C}. \quad (6.21)$$

Dessa forma, qualquer dubleto de Higgs que satisfaça essa equação constitui um estado de vácuo no nosso modelo BSM do setor escalar de Higgs.

Conforme vimos na Seção 5.3, três dos quatro graus de liberdade do dubleto de Higgs podem ser eliminados devido à liberdade de calibre, de forma que esse campo passa a ser expresso como:

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}, \quad (6.22)$$

com $\varphi_2(x)$ sendo um campo escalar real. Desse modo, podemos expandir o campo $\varphi(x)$ em torno de um estado de vácuo, caracterizado pela Eq. (6.21):

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_0 + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (6.23)$$

com $\chi(x)$ sendo um campo escalar real (campo de Higgs), enquanto φ_0 é definido por:

$$\varphi_0 \equiv \sqrt{\frac{C\eta^2 - 1 + \sqrt{(1 + C\eta^2)^2 - \frac{8\hbar\gamma C^2}{\lambda^2}}}{2C}}. \quad (6.24)$$

Dessa maneira, a Lagrangiana do modelo BSM do setor escalar de Higgs, que inclui a correção quântica com origem na medida funcional, pode ser expressa em termos de $\varphi(x)$ (Eq. (6.23)). Isso nos permite estudar as características dessa teoria após a quebra espontânea da simetria $SU(2) \times U(1)$. Vimos anteriormente, que após esse processo os bósons W^\pm e Z^0 adquirem massas proporcionais ao valor esperado de vácuo do dubleto de Higgs, obtido através da minimização do potencial. Ainda que tenhamos modificado a ação do setor escalar de Higgs, o processo de geração das massas dos bósons W^\pm e Z^0 ocorre da mesma forma, com a diferença de que essas massas se tornam proporcionais ao novo valor esperado de vácuo φ_0 . Visto que os cálculos das massas dos bósons W^\pm e Z^0 são exatamente análogos ao caso que descrevemos na Seção 5.3, nos restringiremos a apresentar apenas os resultados obtidos:

$$M_W = \frac{g\varphi_0}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad M_Z = \frac{\bar{g}\varphi_0}{\sqrt{2}}, \quad (6.25)$$

com φ_0 dado pela Eq. (6.24). Podemos observar que essas massas preservam a relação com o ângulo de Weinberg, expressa pela Eq. (5.47), uma vez que mantém a mesma forma daquelas obtidas para o caso clássico (Eqs. (5.45) e (5.46)).

Ao desconsiderarmos a correção quântica, as novas massas dos bósons W^\pm e Z^0 devem retornar aos casos clássicos. Dessa forma, tomando o limite $\hbar \rightarrow 0$ nas massas expressas pela Eq. (6.25), obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{\hbar \rightarrow 0} M_{W(Z)} &= \frac{g(\bar{g})}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{C\eta^2 - 1 + (1 + C\eta^2)}{2C}} \\ &= \frac{g(\bar{g})}{\sqrt{2}} \eta, \end{aligned} \quad (6.26)$$

que é o resultado encontrado na Seção 5.3, quando consideramos o setor escalar de Higgs sem correções quânticas.

É importante notar que os parâmetros livres C e γ , introduzidos na teoria através da correção quântica, foram definidos com dimensões que mantém a ação efetiva S_{eff} adimensional. Isso também garante que as massas das partículas exibam a dimensão correta. Consideramos que os parâmetros C e γ apresentam dimensões de potências de massa M^{-2} e M^4 , respectivamente. Além disso, sabemos que os parâmetros g, \bar{g} e η , definidos no setor escalar de Higgs, apresentam as dimensões M^0, M^0 e M , respectivamente. Dessa forma, podemos concluir que as expressões da Eq. (6.25) exibem a dimensão correta.

Na Seção 5.3, obtivemos a massa do bóson de Higgs avaliando o potencial $V(\varphi^\dagger\varphi)$ em termos do dubleto $\varphi(x)$ expandido ao redor do estado de vácuo. Analogamente, podemos obter a nova massa do bóson de Higgs substituindo o campo $\varphi(x)$, expresso pela Eq. (6.23), no potencial efetivo $V_{eff}(\varphi^\dagger\varphi)$. Entretanto, antes dessa substituição, é necessário que a função logarítmica que surge nesse potencial seja expandida em série de Taylor. Isso porque

os termos de massa são sempre quadráticos nos campos. Assim, para que possamos obter as contribuições da correção quântica à massa dessa partícula, o termo de correção deve ser expresso como um polinômio. Dessa forma, expandindo a função logarítmica de $V_{eff}(\varphi^\dagger\varphi)$ em torno do vácuo φ_0 , até segunda ordem em $\varphi^\dagger\varphi$, obtemos:

$$V_{eff}(\varphi^\dagger\varphi) = \frac{\lambda^2}{2}(\varphi^\dagger\varphi - \eta^2)^2 + 2\hbar\gamma \ln(A) + 2\hbar\gamma \ln(1 + C\varphi_0^2) + 2\hbar\gamma \left[\frac{C}{1 + C\varphi_0^2}(\varphi^\dagger\varphi - \varphi_0^2) - \frac{C^2}{2(1 + C\varphi_0)^2}(\varphi^\dagger\varphi - \varphi_0^2)^2 \right]. \quad (6.27)$$

Com a expansão do potencial $V_{eff}(\varphi^\dagger\varphi)$ podemos, então, avaliá-lo em termos do campo $\varphi(x)$ expresso pela Eq. (6.23). Com isso, o potencial efetivo assume a forma:

$$\begin{aligned} V_{eff}(\chi) &= \frac{\lambda^2}{2} \left[\left(\varphi_0 + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \right)^2 - \eta^2 \right]^2 + 2\hbar\gamma \ln(A) + 2\hbar\gamma \ln(1 + C\varphi_0^2) \\ &\quad + \frac{2\hbar\gamma C}{1 + C\varphi_0^2} \left[\left(\varphi_0 + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \right)^2 - \varphi_0^2 \right] - \frac{\hbar\gamma C^2}{(1 + C\varphi_0^2)^2} \left[\left(\varphi_0 + \frac{\chi}{\sqrt{2}} \right)^2 - \varphi_0^2 \right]^2 \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \left(\varphi_0^4 + \frac{\chi^4}{4} + \eta^4 + \frac{4}{\sqrt{2}}\varphi_0^3\chi - 2\varphi_0^2\eta^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}\varphi_0\chi^3 - \frac{4}{\sqrt{2}}\eta^2\varphi_0\chi \right) \\ &\quad + 2\hbar\gamma \ln(A) + 2\hbar\gamma \ln(1 + C\varphi_0^2) \\ &\quad + \frac{4\hbar\gamma C\varphi_0\chi}{\sqrt{2}(1 + C\varphi_0^2)} - \frac{\hbar\gamma C^2}{(1 + C\varphi_0^2)^2} \left(\frac{\chi^4}{4} + \frac{2}{\sqrt{2}}\varphi_0\chi^3 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[3\lambda^2\varphi_0^2 - \lambda^2\eta^2 + \frac{2\hbar\gamma C}{(1 + C\varphi_0^2)} - \frac{4\hbar\gamma C^2\varphi_0^2}{(1 + C\varphi_0^2)^2} \right] \chi^2, \end{aligned} \quad (6.28)$$

no qual podemos identificar a massa do bóson de Higgs como:

$$M_H = \sqrt{3\lambda^2\varphi_0^2 - \lambda^2\eta^2 + \frac{2\hbar\gamma C}{(1 + C\varphi_0^2)} - \frac{4\hbar\gamma C^2\varphi_0^2}{(1 + C\varphi_0^2)^2}}. \quad (6.29)$$

Assim como as massas dos bósons mediadores, a massa do bóson de Higgs retorna ao caso clássico, expresso pela Eq. (5.49), quando desconsideramos a correção quântica tomando o limite $\hbar \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\hbar \rightarrow 0} M_H &= \sqrt{3\lambda^2 \left(\frac{C\eta^2 - 1 \pm (1 + C\eta^2)}{2C} \right) - \lambda^2\eta^2} \\ &= \sqrt{2}\lambda\eta. \end{aligned} \quad (6.30)$$

6.3 Correção quântica: diagramas de Feynman

Ao longo deste capítulo, introduzimos uma nova correção quântica de um laço ao setor escalar de Higgs, a qual ainda não é considerada pelo Modelo Padrão. Nessa seção

incluiremos em nosso modelo BSM, as correções quânticas associadas aos diagramas de Feynman de um laço, já consideradas pelo Modelo Padrão na previsão da massa do bóson W^\pm . Nos restringiremos a calcular essas correções apenas para as massas dos bósons W^\pm e Z^0 , visto que nosso interesse principal é a massa do bóson W^\pm , a qual está associada à massa do bóson Z^0 através do ângulo de Weinberg.

As correções de um laço, com origem nos diagramas de Feynman, serão obtidas por meio da ação efetiva discutida no Capítulo 3. Naquele caso, vimos que através do método de campo de *background*, um campo quântico $\varphi(x)$ pôde ser expresso em termos de uma expansão ao redor do campo médio $\varphi_c(x)$ (Eq. (3.19)). Associada à essa expansão, a ação efetiva $\Gamma[\varphi_c]$ pôde ser escrita como:

$$\Gamma[\varphi_c] = S[\varphi_c] + \hbar S^{(1)}[\varphi_c] + \mathcal{O}(\hbar^2), \quad (6.31)$$

na qual a ação $S^{(1)}[\varphi_c]$ inclui todas as correções quânticas de um laço associadas aos diagramas de Feynman. De modo geral, a solução dessa expansão é expressa da seguinte forma [63]:

$$\Gamma[\varphi_c] = S[\varphi_c] - \frac{\hbar}{2} \text{Tr} \ln \left(\frac{\delta^2 S[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x)\delta\varphi_c(y)} \right) + \mathcal{O}(\hbar^2), \quad (6.32)$$

que assume diferentes formas dependendo da ação clássica $S[\varphi_c]$ da teoria.

Uma vez que estamos interessados em obter as correções quânticas de um laço às massas dos bósons de calibre W^\pm e Z^0 , consideramos a seguinte ação clássica:

$$\begin{aligned} S[W_\mu^a, B_\mu] = & \int d^4x - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^1 W^{1\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^2 W^{2\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^3 W^{3\mu\nu} \\ & - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_W^2 (W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) \\ & + \frac{1}{2} m_Z^2 (W_\mu^3 \cos \theta_W - B_\mu \sin \theta_W) (W^{3\mu} \cos \theta_W - B^\mu \sin \theta_W), \end{aligned} \quad (6.33)$$

a qual inclui a Lagrangiana de calibre (Eq. (4.69)), que descreve a dinâmica dos campos de calibre do setor escalar de Higgs, e os termos de massa dos bósons W^\pm e Z^0 , obtidos após a quebra espontânea de simetria. As massas m_W e m_Z são expressas pela Eq. (6.25) e, portanto, já incluem a correção quântica com origem na medida funcional.

Para o caso de uma teoria de calibre, cuja ação clássica é expressa pela Eq. (6.33),

a expansão de um laço da ação efetiva é expressa como [63–65]:

$$\begin{aligned}
\Gamma[W_\mu^a, B_\mu] = & \\
& \int d^4x \left[W_{\mu\nu}^1 \left(-\frac{1}{4} + \alpha\hbar\beta \left(\frac{-\partial^\sigma \partial_\sigma}{m^2} \right) \right) W^{1\mu\nu} + W_{\mu\nu}^2 \left(-\frac{1}{4} + \alpha\hbar\beta \left(\frac{-\partial^\sigma \partial_\sigma}{m^2} \right) \right) W^{2\mu\nu} \right. \\
& + W_{\mu\nu}^3 \left(-\frac{1}{4} + \alpha\hbar\beta \left(\frac{-\partial^\sigma \partial_\sigma}{m^2} \right) \right) W^{3\mu\nu} + B_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{4} + \alpha\hbar\beta \left(\frac{-\partial^\sigma \partial_\sigma}{m^2} \right) \right) B^{\mu\nu} \\
& + \frac{1}{4} g^2 \varphi_0^2 (W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) \\
& \left. + \frac{1}{4} \bar{g}^2 \varphi_0^2 (W_\mu^3 \cos \theta_W - B_\mu \sin \theta_W) (W^{3\mu} \cos \theta_W - B^\mu \sin \theta_W) \right], \tag{6.34}
\end{aligned}$$

em que o fator de forma $\beta \left(\frac{-\partial^\sigma \partial_\sigma}{m^2} \right)$ computa todas as correções quânticas com origem nos diagramas de um laço. O parâmetro α assume um valor que depende do número e dos tipos de campos presentes na teoria. Entretanto, para o nosso modelo BSM, optamos por considerar α como um parâmetro livre, a fim de que, eventualmente, outros campos possam ser introduzidos ao modelo.

A partir dessa ação efetiva, podemos obter as correções de um laço para as massas dos bósons W^\pm e Z^0 , identificando-as como os polos dos propagadores de seus respectivos campos. Esses polos podem ser identificados de forma direta quando $\Gamma[W_\mu^a, B_\mu]$ é expressa no espaço dos momentos. Nesse caso, a ação efetiva assume a seguinte forma¹:

$$\begin{aligned}
\Gamma[W_\mu^a, B_\mu] = & \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \times \\
& - W_\nu^1(k) \left\{ \eta^{\mu\nu} \left[\left(1 - 4\alpha\hbar\beta \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right) k^2 - m_W^2 \right] - \left(1 - 4\alpha\hbar\beta \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right) k^\mu k^\nu \right\} W_\mu^1(-k) \\
& - W_\nu^2(k) \left\{ \eta^{\mu\nu} \left[\left(1 - 4\alpha\hbar\beta \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right) k^2 - m_W^2 \right] - \left(1 - 4\alpha\hbar\beta \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right) k^\mu k^\nu \right\} W_\mu^2(-k) \\
& - Z_\nu^0(k) \left\{ \eta^{\mu\nu} \left[\left(1 - 4\alpha\hbar\beta \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right) k^2 - m_Z^2 \right] - \left(1 - 4\alpha\hbar\beta \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right) k^\mu k^\nu \right\} Z_\mu^0(-k) \\
& - A_\nu(k) \left[\eta^{\mu\nu} \left(1 - 4\alpha\hbar\beta \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right) k^2 - \left(1 - 4\alpha\hbar\beta \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right) k^\mu k^\nu \right] A_\mu(-k), \tag{6.35}
\end{aligned}$$

na qual os campos de calibre $W_\mu^3(x)$ e $B_\mu(x)$ foram redefinidos em termos dos campos do bóson Z^0 e do fóton, conforme visto na Seção 4.4.

Na ação efetiva expressa pela Eq. (6.35), os polos dos propagadores dos bósons

¹ Os detalhes desse cálculo são apresentados no Apêndice B

W^\pm e Z^0 podem ser identificados, respectivamente, como:

$$\left(1 - 4\alpha\hbar\beta\left(\frac{k^2}{m_W^2}\right)\right)k^2 - m_W^2 = 0 \quad \text{e} \quad \left(1 - 4\alpha\hbar\beta\left(\frac{k^2}{m_Z^2}\right)\right)k^2 - m_Z^2 = 0, \quad (6.36)$$

em que avaliamos a massa m^2 do fator de forma em m_W^2 e m_Z^2 .

Ao tomarmos $k^2 = M^2$, na Eq. (6.36), obtemos as massas físicas M_W^2 e M_Z^2 dos bósons W^\pm e Z^0 , respectivamente:

$$M_W^2 = m_W^2 + 4\alpha\hbar\beta\left(\frac{M_W^2}{m_W^2}\right)M_W^2 \quad \text{e} \quad M_Z^2 = m_Z^2 + 4\alpha\hbar\beta\left(\frac{M_Z^2}{m_Z^2}\right)M_Z^2. \quad (6.37)$$

Nessa equação, o fator de forma também é avaliado nas massas físicas M_W^2 e M_Z^2 . Entretanto, visto que essas massas já incluem correções quânticas, podemos avaliar β somente em m_W^2 e m_Z^2 , a fim de que correções quânticas de ordens mais altas em \hbar não sejam introduzidas. Assim, podemos expressar as massas dos bósons mediadores como:

$$M_W^2 = m_W^2 \left(1 + 4\alpha\hbar\beta\left(\frac{m_W^2}{m_W^2}\right)\right) \quad \text{e} \quad M_Z^2 = m_Z^2 \left(1 + 4\alpha\hbar\beta\left(\frac{m_Z^2}{m_Z^2}\right)\right). \quad (6.38)$$

Dessa forma, para obtermos a correção quântica para as massas dos bósons de calibre, é necessário que o fator de forma $\beta(1)$ seja calculado. Para uma teoria de calibre, esse fator assume a seguinte forma [66]:

$$\beta_\Omega(\mu) = \frac{1}{12} - \frac{1}{2} \int_0^1 ds \left[\frac{1}{\mu} + s(1-s) \right] \ln [1 + \mu s(1-s)], \quad (6.39)$$

que para $\mu = 1$, resulta em:

$$\beta_\Omega(1) = -7.8 \times 10^{-3}. \quad (6.40)$$

Substituindo o valor assumido pelo fator de forma $\beta(1)$ nas expressões para as massas dos bósons W^\pm e Z^0 (Eq. (6.38)), obtemos:

$$M_W^2 = m_W^2(1 - 3.12 \times 10^{-3}\alpha\hbar) \quad \text{e} \quad M_Z^2 = m_Z^2(1 - 3.12 \times 10^{-3}\alpha\hbar), \quad (6.41)$$

as quais incluem todas as correções quânticas de um laço com origem nos diagramas de Feynman, além da correção quântica com origem na medida funcional, introduzida em m_W^2 e m_Z^2 .

Dessa forma, as massas dos bósons W^\pm , Z^0 e de Higgs, obtidas através do nosso modelo BSM, são expressas por²:

$$M_W = \frac{g\varphi_0}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - 3.12 \times 10^{-3}\alpha}, \quad M_Z = \frac{\bar{g}\varphi_0}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - 3.12 \times 10^{-3}\alpha} \quad (6.42)$$

$$\text{e} \quad M_H = \sqrt{3\lambda^2\varphi_0^2 - \lambda^2\eta^2 + \frac{2\gamma C}{(1 + C\varphi_0^2)} - \frac{4\gamma C^2\varphi_0^2}{(1 + C\varphi_0^2)^2}},$$

² Nessas expressões, retomamos a unidade natural $\hbar = 1$, adotada neste trabalho.

com φ_0 dado pela Eq. (6.24). A massa do bóson de Higgs M_H inclui a correção quântica com origem na medida funcional. Enquanto isso, as massas dos bósons W^\pm e Z^0 também incluem a correção quântica associada aos diagramas de um laço, além daquela devido à medida funcional. Todas as massas retornam às expressões obtidas no setor escalar de Higgs do Modelo Padrão (Eqs. (5.45), (5.46) e (5.49)), quando desconsideramos as correções quânticas tomando o limite $\hbar \rightarrow 0$.

As massas dos bósons de Higgs, W^\pm e Z^0 , obtidas em nosso modelo BSM dependem dos novos parâmetros livres C e γ , introduzidos na teoria através da correção quântica com origem na medida funcional. Além disso, as massas dos bósons W^\pm e Z^0 dependem também do parâmetro α , inserido no modelo através da correção quântica com origem nos diagramas de Feynman de um laço. Esses parâmetros livres não são observados no Modelo Padrão e podem ser utilizados para que a massa do bóson W^\pm seja ajustada em acordo com a observação realizada pelo CDF II, ou em acordo com a previsão do Modelo Padrão, corroborada pelo LHC. Para isso, valores numéricos para C , γ e α , podem ser obtidos através de dados experimentais.

7 Conclusões

Neste trabalho, exploramos os aspectos não triviais do formalismo de Feynman na construção de um modelo BSM para o setor escalar de Higgs da teoria eletrofraca. A forma não trivial assumida pela medida funcional da integral de caminho permitiu que uma nova correção quântica fosse introduzida ao setor de Higgs. Com isso, novos parâmetros livres, ainda não observados no Modelo Padrão, foram introduzidos à teoria.

A modificação sofrida pela ação clássica do setor escalar de Higgs, devido à introdução da correção quântica, induziu uma mudança nas massas dos bósons de Higgs, W^\pm e Z^0 , as quais passaram a depender dos novos parâmetros livres incluídos na teoria. O ajuste numérico desses parâmetros pode permitir que a massa do bóson W^\pm assumo o valor reportado CDF II, de 80,433 GeV, ou mantenha-se em acordo com o Modelo Padrão, conforme a análise realizada pelo LHC. Ao mesmo tempo, esse ajuste pode preservar as previsões do Modelo Padrão para as massas dos bósons de Higgs e Z^0 , visto que, até então, nenhuma observação experimental exibiu desvios em relação a essas previsões.

Devido à forma similar exibida pelas massas dos bósons W^\pm e Z^0 , encontramos alguns desafios na obtenção dos valores numéricos para os novos parâmetros livres γ , C e α . Não obtivemos soluções para esses parâmetros através do sistema de equações composto pelas massas dos bósons de Higgs, W^\pm e Z^0 . Dessa forma, investigamos outra possível forma de se obter valores numéricos para esses parâmetros. Nesse caso, exploramos a relação entre as massas dos bósons W^\pm e Z^0 com o ângulo de Weinberg θ_W . Entretanto, o valor experimental obtido para esse ângulo inclui correções quânticas que também deveriam ser introduzidas à θ_W teoricamente, para que valores numéricos para os parâmetros livres pudessem ser obtidos.

Desse modo, para a extensão deste trabalho, sugerimos que correções quânticas de um laço também sejam introduzidas ao ângulo de Weinberg. Com isso, valores numéricos para os novos parâmetros inseridos ao setor escalar de Higgs poderão ser obtidos. Dessa forma, o ajuste desses parâmetros pode ser utilizado para que a massa do bóson W^\pm assumo o valor reportado pelo CDF II, enquanto as massas dos bósons de Higgs e Z^0 mantenham-se em acordo com as previsões realizadas pelo Modelo Padrão. Similarmente, esse ajuste também pode ser utilizado para que as massas de todas essas partículas permaneçam em acordo com o Modelo Padrão, visto que a análise dos dados experimentais realizada pelo LHC corrobora as previsões dessa teoria.

Referências

- [1] ZEE, A. *Quantum field theory in a nutshell*. Princeton University Press, 2010.
- [2] DAS, A. *Field Theory: A Path Integral Approach*. World Scientific Publishing, 2019.
- [3] MAGGIORE, M. *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. Oxford University Press, 2005.
- [4] GRIFFITHS, D. *Introduction to Elementary Particles*. John Wiley Sons, 1987.
- [5] HIGGS, P. Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons. *Physical Review Letters*, 13:508–509, 1964.
- [6] WEINBERG, S. A Model of Leptons. *Physical Review Letters*, 19:1264–1266, 1967.
- [7] SALAM, A.; WARD, J. C. Electromagnetic and weak interactions. *Physics Letters*, 13:168–171, 1964.
- [8] 'T HOOFT, G. Renormalization of massless Yang-Mills fields. *Nuclear Physics B*, 33:173–199, 1971.
- [9] HAN, M. Y.; NAMBU, Y. Three-Triplet Model with Double $SU(3)$ Symmetry. *Physical Review*, 139, 1965.
- [10] GLASHOW, S. L. Partial-symmetries of weak interactions. *Nuclear Physics*, 22:579–588, 1961.
- [11] ATWOOD, W. B. *et al.* Search for parity violation in deep-inelastic scattering of polarized electrons by unpolarized deuterons. *Physical Review D*, 18:2223–2226, 1978.
- [12] AUBERT, J. J. *et al.* Experimental Observation of a Heavy Particle J . *Physical Review Letters*, 33:1404–1406, 1974.
- [13] BÖHM, M.; DENNER, A.; JOOS, H. *Gauge Theories of the Strong and Electroweak Interaction*. Springer, 2001.
- [14] KANE, G. The Dawn of Physics beyond the Standard Model. *Scientific American*, 288:68–75, 2003.
- [15] FAYET, P. Supersymmetry and weak, electromagnetic and strong interactions. *Nuclear Physics B*, 64:159–162, 1976.
- [16] GEORGI, H.; GLASHOW, S. L. Unity of all elementary-particle forces. *Physical Review Letters*, 32:438–441, 1974.

- [17] LINDNER, M. *et al.* A call for new physics: The muon anomalous magnetic moment and lepton flavor violation. *Physics Reports*, 731:1–82, 2018.
- [18] AOYAMA, T. *et al.* The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model. *Physics Reports*, 877:1–166, 2020.
- [19] TIESINGA, E. *et al.* CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2018. *Reviews of Modern Physics*, 93, 2021.
- [20] CDF Collaboration *et al.* High-precision measurement of the W boson mass with the CDF II detector. *Science*, 376:170–176, 2022.
- [21] ATLAS Collaboration *et al.* Measurement of the W-boson mass in pp collisions at $\sqrt{s} = 7\text{TeV}$ with the ATLAS detector. *The European Physical Journal C*, 78:110–171, 2018.
- [22] ATLAS Collaboration. Improved W boson Mass Measurement using 7 TeV Proton-Proton Collisions with the ATLAS Detector. *DESY Publications Database*, 2023.
- [23] YANG, Jin-Min; ZHANG, Y. Low energy SUSY confronted with new measurements of W-boson mass and muon $g - 2$. *Science Bulletin*, 67:1430–1436, 2022.
- [24] DE BLAS, J. *et al.* Impact of the Recent Measurements of the Top-Quark and W-Boson Masses on Electroweak Precision Fits. *Physical Review Letters*, 129, 2022.
- [25] BAHL, H. *et al.* New physics effects on the W-boson mass from a doublet extension of the SM Higgs sector. *Physics Letters B*, 833, 2022.
- [26] ALTARELLI, G.; GRÜNEWALD, M. W. Precision electroweak tests of the Standard Model. *Physics Reports*, 403-404:189–201, 2004.
- [27] ERLER, J.; SCHOTT, M. Electroweak precision tests of the Standard Model after the discovery of the Higgs boson. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 106:68–119, 2019.
- [28] TOMS, D. J. Functional measure for quantum field theory in curved spacetime. *Physical Review D*, 35:3796–3803, 1987.
- [29] MOTTOLA, E. Functional integration over geometries. *Journal of Mathematical Physics*, 36:2470–2511, 1995.
- [30] KUNTZ, I.; DA ROCHA, R. Transport coefficients in AdS/CFT and quantum gravity corrections due to a functional measure. *Nuclear Physics B*, 993, 2023.
- [31] SREDNICKI, M. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2006.
- [32] SHANKAR, R. *Principals of Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 1994.

-
- [33] SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [34] DIRAC, P. A. M. A new notation for quantum mechanics. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 35:416–418, 1939.
- [35] CAMPBELL, J. E. On a Law of Combination of Operators bearing on the Theory of Continuous Transformation Groups. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 28:381–390, 1896.
- [36] BAKER, H. F. Further Applications of Matrix Notation to Integration Problems. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 34:347–360, 1901.
- [37] FEYNMAN, R. P. Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics. *Reviews of Modern Physics*, 20:367–387, 1948.
- [38] UMEZAWA, H. Methods of Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics: New Perspectives, Extensions and Applications. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 80:26–39, 1984.
- [39] HERRERO, C. P.; REMÍREZ, R. Path-integral simulation of solids. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 26, 2014.
- [40] MCCOY, B. M. The Connection between statistical mechanics and quantum field theory. *Proceedings of: 7th Physics Summer School on Statistical Mechanics and Field Theory*, 1994.
- [41] KLEIN, O. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik*, 37:895–906, 1926.
- [42] GORDON, W. Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie. *Zeitschrift für Physik*, 40:117–133, 1926.
- [43] DIRAC, P. A. M. The quantum Theory of the Electron. *Proceedings of the Royal Society A*, 117:610–624, 1928.
- [44] EINSTEIN, A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*, 322:891–921, 1905. Tradução: BARKER, G. J.; PERRETT, W. On the Electrodynamics of Moving Bodies, 1923.
- [45] PAULI, W. Exclusion Principle and Quantum Mechanics. *Nobel lecture*, 1946.
- [46] ANDERSON, C. D. The Positive Electron. *Physical Review*, 43:491–494, 1933.
- [47] SCHWARTZ, M. D. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2014.

- [48] PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An Introduction to Quantum Field Theory*. CRC Press, 2018.
- [49] ZINN-JUSTIN, J. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. Oxford University Press, 2002.
- [50] JONA-LASINIO, G. Relativistic field theories with symmetry-breaking solutions. *Nuovo cimento*, 34:1790–1795, 1964.
- [51] DEWITT, B. S. Quantum Theory of Gravity. II. The Manifestly Covariant Theory. *Physical Review*, 162:1195–1239, 1967.
- [52] WICK, G. C. Properties of Bethe-Salpeter Wave Functions. *Physical Review*, 96:1124–1134, 1954.
- [53] NASTASE, H. *Classical field theory*. Cambridge University Press, 2019.
- [54] ZEE, A. *Group theory in a nutshell for Physicists*. Princeton University Press, 2016.
- [55] NOETHER, E. Invariante variationsprobleme . *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1918. Tradução: TAVEL, M. A. Invariant variation problem. *Transport Theory and Statistical Mechanics*, 1971.
- [56] YANG, C. N.; MILLS R. L. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Physical Review*, 96:191–194, 1954.
- [57] GELL-MANN, M. The interpretation of the new particles as displaced charge multiplets. *Nuovo Cimento*, 4:848–866, 1956.
- [58] NAKANO, T.; NISHIJIMA, K. Charge Independence for V-particles. *Progress of Theoretical Physics*, 10:581–582, 1953.
- [59] HASERT, F. J. *et al.* Search for elastic muon-neutrino electron scattering. *Physics Letters B*, 46:121–124, 1973.
- [60] GOLDSTONE, J. Field theories with Superconductor solutions. *Nuovo Cimento*, 19:154–164, 1961.
- [61] GOLDSTONE, J.; SALAM, A.; WEINBERG, S. Broken Symmetries. *Physical Review*, 127:965–970, 1962.
- [62] DEWITT, B. *Relativity, Groups and Topology II*. Elsevier Science Publishers, 1984.
- [63] VILKOVISKY, G. A. The unique effective action in quantum field theory. *Nuclear Physics B*, 234:125–137, 1984.

-
- [64] KUNTZ, I. Quantum corrections to the gravitational backreaction. *The European Physical Journal C*, 78, 2018.
- [65] DONOGHUE, J. F.; EL-MENOUFI, B. K. QED trace anomaly, non-local Lagrangians and quantum Equivalence Principle violations. *Journal of High Energy Physics*, 2015, 2015.
- [66] AVRAMIDI, I. G. The Heat kernel approach for calculating the effective action in quantum field theory and quantum gravity. *arXiv preprint hep-th/9509077*, 1995.

APÊNDICE A – Integral Gaussiana

A integral Gaussiana

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{2\pi} e^{-i\delta t \frac{p_1^2}{2m}} e^{ip_1(q_2 - q_1)}, \quad (\text{A.1})$$

pode ser reescrita completando-se o quadrado:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{2\pi} e^{-i\delta t \frac{p_1^2}{2m}} e^{ip_1(q_2 - q_1)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{2\pi} e^{\frac{-i\delta t}{2m} \left[\left(p_1 - \frac{m(q_2 - q_1)}{\delta t} \right)^2 - \left(\frac{m(q_2 - q_1)}{\delta t} \right)^2 \right]}. \quad (\text{A.2})$$

Para que possamos resolver a integral em p_1 , fazemos a seguinte mudança na variável de integração:

$$p_1 \rightarrow x_1 = p_1 - \frac{m(q_2 - q_1)}{\delta t}, \quad (\text{A.3})$$

de forma que a integral expressa pela Eq. A.2, assume a forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{2\pi} e^{\frac{-i\delta t}{2m} \left[\left(p_1 - \frac{m(q_2 - q_1)}{\delta t} \right)^2 - \left(\frac{m(q_2 - q_1)}{\delta t} \right)^2 \right]} = e^{\frac{i\delta}{2m} \left(\frac{m(q_2 - q_1)}{\delta t} \right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_1}{2\pi} e^{\frac{-i\delta t}{2m} x_1^2}. \quad (\text{A.4})$$

Em seguida, efetuamos uma nova mudança de variável, expressa por:

$$x_1 \rightarrow x = \frac{x_1}{2\pi}. \quad (\text{A.5})$$

Com isso, obtemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{2\pi} e^{\frac{-i\delta t}{2m} \left[\left(p_1 - \frac{m(q_2 - q_1)}{\delta t} \right)^2 - \left(\frac{m(q_2 - q_1)}{\delta t} \right)^2 \right]} = e^{\frac{i\delta}{2m} \left(\frac{m(q_2 - q_1)}{\delta t} \right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2}, \quad (\text{A.6})$$

na qual $a = \frac{2i\delta t \pi^2}{m}$.

Pra que a integral Gaussiana em x seja resolvida, calculamos seu quadrado e renomeamos uma das variáveis de integração de x para y :

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{-ax^2} e^{-ay^2} = 2\pi \int_0^{\infty} dr r e^{-ar^2}, \quad (\text{A.7})$$

em que reescrevemos a integral em coordenadas polares. A integral em r pode ser resolvida através da seguinte mudança de variável:

$$r \rightarrow u = ar^2. \quad (\text{A.8})$$

Assim, temos:

$$2\pi \int_0^{\infty} dr r e^{-ar^2} = \frac{\pi}{a} \int_0^{\infty} du e^{-u} = \frac{\pi}{a}. \quad (\text{A.9})$$

Ao substituírmos esse resultado na Eq. A.7, obtemos:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} \right)^2 = \frac{\pi}{a} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (\text{A.10})$$

Por fim, substituindo o resultado expresso pela Eq. A.10 na Eq. A.6, chegamos a seguinte solução para a integral Gaussiana:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{2\pi} e^{\frac{-i\delta t}{2m} \left[\left(p_1 - \frac{m(q_2 - q_1)}{\delta t} \right)^2 - \left(\frac{m(q_2 - q_1)}{\delta t} \right)^2 \right]} = e^{i\delta t(m/2) \left(\frac{q_2 - q_1}{\delta t} \right)^2} \left(\frac{-im}{2\pi\delta t} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.11})$$

na qual utilizamos que $a = \frac{2i\delta t\pi^2}{m}$.

APÊNDICE B – Ação efetiva no espaço dos momentos

No espaço das posições a ação efetiva exibe a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\Gamma[W_\mu^a, B_\mu] = & \\
& \int d^4x \left[W_{\mu\nu}^1 \left(-\frac{1}{4} + \alpha\hbar\beta \left(\frac{-\partial^\sigma \partial_\sigma}{m^2} \right) \right) W^{1\mu\nu} + W_{\mu\nu}^2 \left(-\frac{1}{4} + \alpha\hbar\beta \left(\frac{-\partial^\sigma \partial_\sigma}{m^2} \right) \right) W^{2\mu\nu} \right. \\
& + W_{\mu\nu}^3 \left(-\frac{1}{4} + \alpha\hbar\beta \left(\frac{-\partial^\sigma \partial_\sigma}{m^2} \right) \right) W^{3\mu\nu} + B_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{4} + \alpha\hbar\beta \left(\frac{-\partial^\sigma \partial_\sigma}{m^2} \right) \right) B^{\mu\nu} \\
& + \frac{1}{4} g^2 \varphi_0^2 (W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) \\
& \left. + \frac{1}{4} \bar{g}^2 \varphi_0^2 (W_\mu^3 \cos \theta_W - B_\mu \sin \theta_W) (W^{3\mu} \cos \theta_W - B^\mu \sin \theta_W) \right]. \tag{B.1}
\end{aligned}$$

Para que essa ação seja expressa no espaço dos momentos, reescreveremos cada um de seus termos através de transformadas de Fourier. Mostraremos os passos desse cálculo para um dos campos de calibre, $W_\mu^1(x)$, e então estenderemos o resultado aos demais. Dessa forma, partimos da seguinte equação:

$$\begin{aligned}
\Gamma[W_\mu^1] = & \int d^4x W_{\mu\nu}^1 \left(-\frac{1}{4} + \alpha\hbar\beta \left(\frac{-\partial^\sigma \partial_\sigma}{m^2} \right) \right) W^{1\mu\nu} + \frac{1}{4} g^2 \varphi_0^2 (W_\mu^1 W^{1\mu}) \\
= & \int d^4x -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^1 W^{1\mu\nu} + \alpha\hbar W_{\mu\nu}^1 \beta \left(\frac{-\partial^\sigma \partial_\sigma}{m^2} \right) W^{1\mu\nu} + \frac{1}{4} g^2 \varphi_0^2 (W_\mu^1 W^{1\mu}). \tag{B.2}
\end{aligned}$$

Para que a Eq. B.2 possa ser reescrita no espaço dos momentos, analisaremos seus termos separadamente. Desse modo, começamos pelo termo cinético do campo $W_\mu^1(x)$, o qual pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4} \int d^4x W_{\mu\nu}^1 W^{1\mu\nu} = & -\frac{1}{4} \int d^4x (\partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1 + g f^{1bc} W_\mu^b W_\nu^c) \\
& \times (\partial^\mu W^{1\nu} - \partial^\nu W^{1\mu} + g f^{1bc} W^{b\mu} W^{c\nu}) \\
= & -\frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu W_\nu^1 \partial^\mu W^{1\nu} - \partial_\mu W_\nu^1 \partial^\nu W^{1\mu}), \tag{B.3}
\end{aligned}$$

em que utilizamos a definição do tensor $W_{\mu\nu}^a(x)$ (Eq. 4.70), para $a = 1$, e desprezamos os termos de ordens maiores em $W_\mu^1(x)$.

A Eq. B.3 pode ser reescrita no espaço dos momentos por meio da transformada de Fourier do campo $W_\mu^1(x)$, definida como:

$$W_\mu^1(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} W_\mu^1(k). \quad (\text{B.4})$$

Com isso, a Eq. B.3 passa a ser expressa por:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \int d^4x W_{\mu\nu}^1 W^{1\mu\nu} &= -\frac{1}{2} \int d^4x \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \partial_\mu \left(e^{-ikx} W_\nu^1(k) \right) \partial^\mu \left(e^{-ik'x} W^{1\nu}(k') \right) \\ &\quad - \partial_\mu \left(e^{-ikx} W_\nu^1(k) \right) \partial^\nu \left(e^{-ik'x} W^{1\mu}(k') \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} e^{-ix(k'+k)} \\ &\quad \times \left(-k_\mu W_\nu^1(k) k'^\mu W^{1\nu}(k') + k_\mu W_\nu^1(k) k'^\nu W^{1\mu}(k') \right), \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

na qual podemos identificar a função exponencial como uma delta de Dirac:

$$\int d^4x e^{ikx} = (2\pi)^4 \delta^4(k). \quad (\text{B.6})$$

Desse modo, utilizando a definição da distribuição delta de Dirac na Eq. B.5, obtemos o termo cinético para o campo $W_\mu^1(x)$ no espaço dos momentos:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \int d^4x W_{\mu\nu}^1 W^{1\mu\nu} &= -\frac{1}{2} \int d^4x \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k'+k) \\ &\quad \times \left(-k_\mu W_\nu^1(k) k'^\mu W^{1\nu}(k') + k_\mu W_\nu^1(k) k'^\nu W^{1\mu}(k') \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} k_\mu W_\nu^1(k) k^\mu W^{1\nu}(-k) - k_\mu W_\nu^1(k) k^\nu W^{1\mu}(-k) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} W_\nu^1(k) k^\mu k^\nu W_\mu^1(-k) - W_\nu^1(k) k_\mu k^\mu \eta^{\mu\nu} W_\mu^1(-k), \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

sendo que utilizamos a propriedade de filtragem da delta de Dirac.

Seguindo o mesmo processo, podemos reescrever o termo de correção quântica no

espaço dos momentos:

$$\begin{aligned}
& \alpha \hbar \int d^4x W_{\mu\nu}^1 \beta \left(\frac{-\partial^\sigma \partial_\sigma}{m^2} \right) W^{1\mu\nu} \\
&= \alpha \hbar \int d^4x \left(\partial_\mu W_\nu^1(x) - \partial_\nu W_\mu^1(x) + g f^{1bc} W_\mu^b(x) W_\nu^c(x) \right) \beta \left(\frac{-\partial^\sigma \partial_\sigma}{m^2} \right) \\
&\quad \times \beta \left(\frac{-\partial^\sigma \partial_\sigma}{m^2} \right) \left(\partial^\mu W^{1\nu}(x) - \partial^\nu W^{1\mu}(x) + g f^{1bc} W^{b\mu}(x) W^{c\nu}(x) \right) \quad (\text{B.8}) \\
&= \alpha \hbar \int d^4x \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \left(\partial_\mu W_\nu^1(k) - \partial_\nu W_\mu^1(k) + g f^{1bc} W_\mu^b(k) W_\nu^c(k) \right) e^{-ikx} \\
&\quad \times \beta \left(\frac{-\partial^\sigma \partial_\sigma}{m^2} \right) \left(\partial^\mu W^{1\nu}(k') - \partial^\nu W^{1\mu}(k') + g f^{1bc} W^{b\mu}(k') W^{c\nu}(k') \right) e^{-ik'x},
\end{aligned}$$

em que utilizamos a definição do tensor $W_{\mu\nu}^a(x)$ (Eq. 4.70) para $a = 1$, além da transformada de Fourier do campo $W_\mu^1(x)$, dada pela Eq. B.4.

Ao atuarmos as derivadas na Eq. B.8, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \alpha \hbar \int d^4x W_{\mu\nu}^1 \beta \left(\frac{-\partial^\sigma \partial_\sigma}{m^2} \right) W^{1\mu\nu} \\
&= \alpha \hbar \int d^4x \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} (-i) \left(k_\mu W_\nu^1(k) - k_\nu W_\mu^1(k) + g f^{1bc} W_\mu^b(k) W_\nu^c(k) \right) \\
&\quad \times \beta \left(\frac{k'_\sigma k'^\sigma}{m^2} \right) (-i) \left(k'^\mu W^{1\nu}(k') - k'^\nu W^{1\mu}(k') + g f^{1bc} W^{b\mu}(k') W^{c\nu}(k') \right) e^{-ix(k+k')} \quad (\text{B.9}) \\
&= -\alpha \hbar \int d^4x \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \beta \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \left(k_\mu W_\nu^1(k) - k_\nu W_\mu^1(k) + g f^{1bc} W_\mu^b(k) W_\nu^c(k) \right) \\
&\quad \times \left(-k^\mu W^{1\nu}(-k) + k^\nu W^{1\mu}(-k) + g f^{1bc} W^{b\mu}(-k) W^{c\nu}(-k) \right) \\
&= -2\alpha \hbar \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \beta \left(\frac{k^2}{m^2} \right) W_\nu^a(k) (-k^2 \eta^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu) W_\mu^a(-k),
\end{aligned}$$

na qual a definição da delta de Dirac (B.6), assim como sua propriedade de filtragem, foram utilizadas. Os termos de ordens maiores no campo $W_\mu^1(k)$ foram desprezados, assim como realizado na Eq. B.3.

De maneira análoga, o termo de massa do campo $W_\mu^1(x)$ pode ser escrito no espaço

dos momentos, de seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}g^2\eta^2 \int d^4x W_\mu^1 W^{1\mu} &= \frac{1}{2}g^2\varphi_0^2 \int d^4x \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} e^{-ix(k'+k)} W_\mu^1(k) W^{1\mu}(k') \\
&= \frac{1}{2}g^2\varphi_0^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} W_\mu^1(k) W^{1\mu}(-k) \\
&= \frac{1}{2}m_W^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \eta^{\mu\nu} W_\nu^1(k) W_\mu^1(-k),
\end{aligned} \tag{B.10}$$

obtida através da Eq. B.4.

Desse modo, com todos os termos da Eq. B.2 expressos no espaço dos momentos, a ação $\Gamma[W_\mu^1]$ passa a ser dada por:

$$\begin{aligned}
\Gamma[W_\mu^1] &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \left(W_\nu^a(k) k^\mu k^\nu W_\mu^a(-k) - W_\nu^a(k) k_\mu k^\mu \eta^{\mu\nu} W_\mu^a(-k) \right) \\
&\quad - 2\alpha\hbar\beta \left(\frac{k^2}{m^2} \right) W_\nu^a(k) (-k^2 \eta^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu) W_\mu^a(-k) \\
&\quad + \left(\frac{1}{4}g^2\varphi_0^2 \right) \eta^{\mu\nu} W_\nu^1(k) W_\mu^1(-k) \\
&= -\frac{1}{2} \int \frac{dk^4}{(2\pi)^4} W_\nu^1(k) \left[\eta^{\mu\nu} \left[\left(1 - 4\alpha\hbar\beta \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right) k^2 - \frac{g^2\varphi_0^2}{2} \right] \right. \\
&\quad \left. - \left(1 - 4\alpha\hbar\beta(-k^2) \right) k^\mu k^\nu \right] W_\mu^1(-k).
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Ao estendermos o resultado expresso pela Eq. B.11 aos demais campos de calibre, podemos escrever a ação efetiva $\Gamma[W_\mu^a, B_\mu]$ no espaço dos momentos como:

$$\begin{aligned}
\Gamma[W_\mu^a, B_\mu] &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \times \\
&\quad - \frac{1}{2} W_\nu^1(k) \left[\eta^{\mu\nu} \left[\left(1 - 4\alpha\hbar\beta \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right) k^2 - \frac{g^2\varphi_0^2}{2} \right] - \left(1 - 4\alpha\hbar\beta \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right) k^\mu k^\nu \right] W_\mu^1(-k) \\
&\quad - \frac{1}{2} W_\nu^2(k) \left[\eta^{\mu\nu} \left[\left(1 - 4\alpha\hbar\beta \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right) k^2 - \frac{g^2\varphi_0^2}{2} \right] - \left(1 - 4\alpha\hbar\beta \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right) k^\mu k^\nu \right] W_\mu^2(-k) \\
&\quad - \frac{1}{2} W_\nu^3(k) \left[\eta^{\mu\nu} \left(1 - 4\alpha\hbar\beta \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right) k^2 - \left(1 - 4\alpha\hbar\beta \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right) k^\mu k^\nu \right] W_\mu^3(-k) \\
&\quad - \frac{1}{2} B_\nu(k) \left[\eta^{\mu\nu} \left(1 - 4\alpha\hbar\beta \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right) k^2 - \left(1 - 4\alpha\hbar\beta(-k^2) \right) k^\mu k^\nu \right] B_\mu(-k) \\
&\quad + \frac{1}{4} \bar{g}^2 \varphi_0^2 \left(W_\mu^3(k) \cos \theta_W - B_\mu(k) \sin \theta_W \right) \left(W^{3\mu}(-k) \cos \theta_W - B^\mu(-k) \sin \theta_W \right).
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Para que essa ação também seja escrita em termos dos campos associados ao bóson Z^0 e ao fóton, utilizamos as redefinições dos campos $W_\mu^3(x)$ e $B_\mu(x)$, fornecidas pela Eq. 4.71. Com as redefinições dos campos de calibre, a ação efetiva $\Gamma[W_\mu^a, B_\mu]$ assume a seguinte forma, no espaço dos momentos:

$$\begin{aligned}
\Gamma[W_\mu^a, B_\mu] &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \times \\
&- W_\nu^1(k) \left\{ \eta^{\mu\nu} \left[\left(1 - 4\alpha\hbar\beta \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right) k^2 - \frac{g^2\varphi_0^2}{2} \right] - \left(1 - 4\alpha\hbar\beta \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right) k^\mu k^\nu \right\} W_\mu^1(-k) \\
&- W_\nu^2(k) \left\{ \eta^{\mu\nu} \left[\left(1 - 4\alpha\hbar\beta \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right) k^2 - \frac{g^2\varphi_0^2}{2} \right] - \left(1 - 4\alpha\hbar\beta \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right) k^\mu k^\nu \right\} W_\mu^2(-k) \\
&- Z_\nu^0(k) \left\{ \eta^{\mu\nu} \left[\left(1 - 4\alpha\hbar\beta \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right) k^2 - \frac{\bar{g}^2\varphi_0^2}{2} \right] - \left(1 - 4\alpha\hbar\beta \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right) k^\mu k^\nu \right\} Z_\mu^0(-k) \\
&- A_\nu(k) \left[\eta^{\mu\nu} \left(1 - 4\alpha\hbar\beta \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right) k^2 - \left(1 - 4\alpha\hbar\beta \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right) k^\mu k^\nu \right] A_\mu(-k).
\end{aligned} \tag{B.13}$$