

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

LEONARDO COSTA DE SOUZA

ESTRUTURAS FRACTAIS EM SISTEMAS
HAMILTONIANOS ABERTOS

CURITIBA

2024

LEONARDO COSTA DE SOUZA

ESTRUTURAS FRACTAIS EM SISTEMAS
HAMILTONIANOS ABERTOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, no Setor de Ciências Exatas, na Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

CURITIBA

2024

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

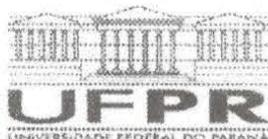
Souza, Leonardo Costa de
Estruturas fractais em sistemas Hamiltonianos abertos / Leonardo Costa
de Souza. – Curitiba, 2024.
1 recurso on-line : PDF.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências
Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física.

Orientador: Ricardo Luiz Viana

1. Física dos plasmas. 2. Sistemas hamiltonianos. I. Universidade Federal
do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Viana, Ricardo
Luiz. IV . Título.

Bibliotecário: Leticia Priscila Azevedo de Sousa CRB-9/2029



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO FÍSICA - 40001016020P4

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **LEONARDO COSTA DE SOUZA** intitulada: "Estruturas fractais em sistemas Hamiltonianos abertos", sob orientação do Prof. Dr. RICARDO LUIZ VIANA, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa. A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 23 de Fevereiro de 2024.

RICARDO LUIZ VIANA
Presidente da Banca Examinadora

EDSON DENIS LEONEL
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE EST. PAULISTA JÚLIO DE
MESQUITA FILHO)

MARCUS WERNER BEIMS
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

IBERÊ LUIZ CALDAS
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO)

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, professor Dr. Ricardo Luiz Viana por aceitar participar desse processo que foi o doutorado. Agradeço pelas orientações, pelo apoio e pelas lições que levarei para minha vida acadêmica.

Aos membros da banca de defesa professor Dr. Edson D. Leonel, professor Dr. Iberê L. Caldas e ao professor Dr. Marcus W. Beims.

Aos membros da banca, de qualificação pré-defesa professor Dr. Sergio R. Lopes e Professor Dr. Thiago de Lima Prado, que gentilmente aceitaram corrigir o trabalho uma segunda vez nesta pré-defesa de doutorado. Assim como ao professor Dr. Cristiano Woellner.

Agradeço aos colegas do grupo de pesquisa e aos colaboradores que me ajudarem a desenvolver esta pesquisa.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Paraná pela oportunidade de realizar o doutorado na instituição. Também agradeço a UFPR por toda estrutura que possibilitou esta pesquisa.

Agradeço ao CNPq pelo suporte financeiro que viabilizou esta pesquisa.

Finalmente agradeço a minha família, meus pais Madalena e Leonildo, por todo apoio e incentivo ao longo da minha vida. E a minha esposa Carlla por todo amor, companherismo e carinho.

Dedico este trabalho a minhas avós Enedina Ribas de Souza e Maria Inês da Costa.

“My life seemed to be a series of events and accidents. Yet when I look back I see a pattern.” Benoit B. Mandelbrot

RESUMO

Neste trabalho, estudamos a influência das estruturas fractais no escape de sistemas Hamiltonianos abertos, de interesse para a física de plasma. Utilizamos uma descrição Hamiltoniana que permite descrever o movimento das linhas de campo magnético via um mapa bidimensional chamado Tokamap. Se existem saídas posicionadas na região de linhas de campo caóticas, o sistema Hamiltoniano se torna aberto e podemos estudar as bacias de escape, ou seja, o conjunto de condições iniciais para as quais as linhas de campo escapam para uma dada saída. Investigamos quantitativamente as estruturas das bacias caracterizando sua fractalidade. Para isso calculamos a dimensão de incerteza, assim como investigamos a estrutura subjacente à dinâmica formada pelo emaranhamento homoclínico das variedades invariantes. Utilizamos o conceito de entropia de bacia e de fronteira para investigar a incerteza do estado final do sistema. Também mostramos como obter o expoente de incerteza a partir dessa entropia utilizando um mapa não-*twist* que descreve o movimento de partículas em fluxos incompressíveis no referencial de uma onda viajante (mapa de Weiss). Investigamos a dinâmica de partículas na borda de um tokamak causada por perturbações eletrostáticas. Para descrever essas perturbações, utilizamos um modelo de ondas de deriva proposto por Horton. Neste modelo, é necessário estabelecer alguns perfis de quantidades físicas, como campo elétrico, velocidade do plasma e perfil de segurança. Escolhemos valores baseados em experiências do tokamak *Chauffage Alfvén Brésilien* (TCABr) localizado na USP, em conjunto com parâmetros também do TCABr. Mostramos que o transporte é influenciado por estruturas fractais que exibem a propriedade Wada. Por fim terminamos com a apresentação da existência de uma estrutura hierárquica de ilhas ao redor de ilhas, onde as partículas sofrem o efeito *stickiness* utilizando um quantificador baseado em recorrência.

Palavras-chaves: plasmas. estruturas fractais. sela caótica. efeito *stickiness*.

ABSTRACT

In this work we study the existence of fractal structures in the escape of open Hamiltonian systems, with interest in plasma physics. We use a Hamiltonian description that allows us to describe the movement of magnetic field lines through a two-dimensional area preserving map called Tokamap. If there are exits positioned in the region of chaotic field lines, the Hamiltonian system becomes open and we can study the escape basins, i.e., the set of initial conditions for which the field lines escape to a given exit. These basins are fractal, we quantitatively investigate the fractal basins using the uncertainty dimension as well as investigating the structure underlying the dynamics formed by the invariant manifolds. We use the concept of basin and boundary entropy to investigate the uncertainty of the final state of the system, we show how to obtain the uncertainty exponent from this entropy using a non-*twist* map that describes the movement of particles in incompressible flows in the reference frame of a traveling wave, called the Weiss map. We investigated the dynamics of particles at the edge of a tokamak, caused by electrostatic fluctuations. To describe these disturbances we use a drift wave model proposed by Horton. In this model it is necessary to establish some profiles of physical quantities such as electric field, plasma velocity and safety profile. We chose values based on experiences from the *Tokamak Chauffage Alfvén Brésilien* TCABr located at USP, together with parameters also from TCABr. We show that transport is influenced by fractal structures that exhibit the Wada property. Moreover, we show the existence of a hierarchical structure of islands-around-islands where particles experience stickiness effect, using a recurrence-based quantifier.

Key-words: plasmas. fractal structures. chaotic saddle. stickiness effect.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Espaço de fase para três condições iniciais, de um mapa bidimensional. Em verde uma órbita regular, do tipo ilha, em vermelho uma curva invariante (<i>spanning</i>) e em preto uma órbita caótica.	20
Figura 2 – Representação de uma trajetória sobre a superfície de um toro, para um sistema Hamiltoniano integrável bidimensional.	24
Figura 3 – Figura esquemática de um toro racional, curva em azul e toros irracionais curvas vermelhas sem serem perturbados (figura a esquerda) e sob efeito de uma perturbação não nula $\epsilon \neq 0$ (figura a direita). Sob perturbação, os toros irracionais são apenas deformados enquanto o toro racional é destruído e substituído por pares pontos fixos hiperbólicos e elípticos, indicados pelas setas em \times e pelos círculos verdes, respectivamente . . .	26
Figura 4 – Figura esquemática representando o emaranhamento heteroclínico (a) e homoclínico (b), entre as variedades estável azul e instável vermelha. . .	27
Figura 5 – Esquema de um tokamak. Adaptado de 'iter.org'.	31
Figura 6 – Movimento de uma carga elétrica q , positiva, na presença de um campo magnético. Adaptado de 'euro-fusion.org'.	33
Figura 7 – Movimento de uma carga elétrica q , positiva, com deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Adaptado de [5]	34
Figura 8 – Em (a) Figura esquemática, mostrando a geometria básica de um tokamak. Em (b) Coordenadas em uma seção de superfície.	35
Figura 9 – Espaço de fase para $K = \pi/2$ (a), (b) π , (c) $3\pi/2$, (d) 2π . Com 100 condições iniciais randômicas, iteradas por $N = 10000$ tempos.	38
Figura 10 – Variedade estável em amarelo (a), variedade instável (b) em verde e em vermelho sela caótica, do tokamak. Para $K = 2.0\pi$ com $m = 30$, calculado com o método do regador.	40
Figura 11 – Bacias de escape para o tokamak com $K = \pi$ (a), (b) magnificação de (a) na região da fronteira entre as bacias, (c) $K = 3\pi/2$, (d) $K = 2\pi$. Com 1000×1000 condições iniciais uniformes. Os quadrados pretos representam as saídas, pontos roxos escapam pelo quadrado à direita, os laranjas pelo à esquerda, pontos brancos não escapam.	41
Figura 12 – Comprimentos de conexão para o tokamak com $K = \pi$ (a), (b) 1.2π , (c) $3\pi/2$, (d) 2π . Com 1000×1000 condições iniciais uniformes. Os quadrados pretos representam as saídas, a escala de cores representa quantas iterações são necessárias para uma condição inicial atingir uma saída.	42

Figura 13 – Figura esquemática exibindo acumulação de filamentos da bacia de escape na variedade estável de uma órbita periódica estável dentro da região caótica do mapa.	43
Figura 14 – Região do espaço de fase limitado pela fronteira de bacia Σ , curva que divide as duas bacias b e a	44
Figura 15 – Entropias da bacia S_b são mostradas pela curva em preto, S_{bb} pela curva em azul e fração ocupada pela curva em vermelho, para as duas saídas como na Figura 11. Em roxo é mostrado a fração ocupada pela bacia roxa, linha verde indica o valor $\ln 2$	49
Figura 16 – Espaço de fase para o sistema integrável (a) $k = 0,0$. Em (b) sistema perturbado com $k = 0,35$, (c) $k = 0,50$ e (d) $k = 0,65$. Com 100 condições iniciais randômicas, iteradas por $N = 10000$ tempos.	52
Figura 17 – Bacias de escape para o mapa de Weiss com (a) $k = 0,5$; (b) $k = 0,65$; (c) $k = 0,75$; e (d) $k = 0,85$. Com 10^6 condições iniciais, iteradas por $N = 10^6$ vezes. Os pontos azuis são os que escapam pela saída central e os verdes pela saída à direita. Quadrados pretos representam as saídas e pontos brancos são os que não escapam.	53
Figura 18 – Entropia de bacia em preto, entropia de fronteira de bacia em vermelho e em azul tempo médio de escape em função de k	54
Figura 19 – cálculo do expoente de incerteza utilizando a entropia de bacia, em (a) para $k = 0,55$ e em (b) $k = 0,65$	56
Figura 20 – Geometria de um Toroide de seção transversal circular, descrito por coordenadas locais polares.	58
Figura 21 – Perfil do campo elétrico (a) e seu cisalhamento (b).	61
Figura 22 – Perfil da velocidade paralela do plasma (a), medida experimental do TCABR que inspirou a escolha do perfil (b) retirada de [115].	61
Figura 23 – Perfil do fator de segurança.	62
Figura 24 – Espaço de fase para $\beta = 0,04$ (a), (b) $0,06$, (c) $0,080$ e (d) $0,1$. Com 2000 iterações e 100 condições iniciais randômicas.	63
Figura 25 – Bacias de escape com três saídas, representadas como as barras coloridas em $I = 1,0$, a bacia L corresponde aos pixels amarelos, C verdes e R azuis. Em que $\beta = 0,04$ (a), (b) $0,06$, (c) $0,08$, (d) $0,10$	64
Figura 26 – Tempo de escape em escala de cor para diferentes valores de $\beta = 0,04$ (a), (b) $0,06$, (c) $0,08$, (d) $0,10$, quando mais perto do vermelho, maior é o número de iterações necessárias para a partícula escapar.	65
Figura 27 – Em (a) ampliação do retângulo tracejado em Fig. 25(d). Em (b) magnificação mostrando a estrutura fina das bacias de escape.	65

Figura 28 – Em (a) Variedade estável (vermelho), (b) variedade instável (azul), (c) cruzamentos entre as variedades estável e instável e (d) sela caótica (preto), para $\beta = 0, 10$	67
Figura 29 – Em (a) entropia da bacia S_b curva em preto, entropia de fronteira S_{bb} curva em vermelho, linha azul denota o valor de $\ln 2$. Em (b) temos a variação da área ocupada por cada bacia em função de β as cores correspondem as cores das bacias em Fig. 25.	68
Figura 30 – Número de partículas que continua dentro da região S do espaço de fase, como função do tempo, para $\beta = 0, 08$. A linha vermelha é a eq. 6.17 e os pontos azuis a simulação numérica.	69
Figura 31 – Criação dos lagos de Wada, (a) ilha com lagos vermelho e verde envolta pelo mar azul, (b) criação do primeiro canal a partir do mar, (c) criação do canal vermelho, (d) criação do canal verde. Retirado de [39].	71
Figura 32 – Ampliação das bacias de escape com três saídas $\beta = 0, 1$, junto com trecho da variedade instável do mapa, em preto.	72
Figura 33 – (a) Estrutura de bacia da 25(d), com pontos classificados como conjunto G_1 (pontos interiores, em preto), pontos do conjunto G_2 (fronteira entre duas bacias, em vermelho), e pontos pertencentes ao conjunto G_3 (pontos de fronteira entre três bacias, em verde), após $q = 20$ refinamentos. (b) Valores das quantidades W_2 (azul) e W_3 (laranja) em função do passo de refinamento. (c) Histograma (em escala semilog) mostrando o número de pontos reclassificados, em função do passo de refinamento.	74
Figura 34 – Aproximações das variedades: (a) estável (b) e instável. Em azul é para o mapa sem colisões e em vermelho é para o mapa com colisões.	76
Figura 35 – Figura esquemática de cantor, onde uma órbita caótica fica presa. Figura adaptada de J. D. Szezech Jr [130].	78
Figura 36 – (a) Espaço de fase para três condições iniciais $(\Psi_0; I_0)$, órbita quase-periódica (vermelho) $(-0, 1; 0, 65)$, órbita caótica (preto) $(-0, 32; 0, 8)$, e uma órbita caótica que está aprisionado em torno de curvas KAM (azul) $(-0, 37; 0, 47)$, com $\beta = 0.08$ e iteradas por $N = 5 \times 10^4$. Gráficos de recorrência para as 1000 primeiras iterações das órbitas (b) quase-periódica, (c) caótica, e (d) aprisionada.	80
Figura 37 – (a) Distribuição de frequência do RTE calculado à tempo finito, para uma única órbita caótica, com $n = 200$ e $N = 10^{10}$, para o mapa de Horton com $\beta = 0, 08$. (b) os pontos do espaço de fase que geram os picos menores da distribuição em (a); (c) magnificação da região indicada por linhas tracejadas de (b).	82

Figura 38 – Em (a) gráfico em escala log–log, de $Q(\tau)$ para cada região de aprisionamento, com $N = 10^{10}$ e $n = 200$. As cores correspondem as cores da Fig. 37(a). Em (b) gráfico log–linear de $Q(\tau)$ para o maior pico da distribuição na Fig. 37(a). 83

SUMÁRIO

1	Introdução	14
2	Fundamentos de dinâmica	19
2.1	Sistemas dinâmicos	19
2.2	Sistemas Hamiltonianos	21
2.2.1	Notação simplética	22
2.2.2	Variáveis de ação e ângulo e sistemas integráveis	23
2.2.3	Sistemas quase integráveis	25
2.3	Curvas invariantes e sela caótica	27
3	Plasma e confinamento magnético toroidal	29
3.1	Definição de plasma	29
3.2	Confinamento magnético	30
3.3	Carga na presença de campos	32
3.3.1	Deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$	33
4	Modelo de linhas de campo magnético: Tokamap	35
4.1	Estrutura de linhas de campo em um tokamak	35
4.2	Variedades e sela caótica	39
4.3	Bacias de escape	40
4.4	Dimensão de incerteza	43
5	Entropia de bacia e de fronteira de bacia	47
5.1	Entropia da bacia e entropia da fronteira	47
5.2	O mapa de Weiss	50
5.3	Bacias de escape	52
6	Modelo de ondas eletrostáticas	57
6.1	Equações de movimento	57
6.2	Perfis das quantidades físicas e normalização	60
6.2.1	Propriedades do mapa	61
6.3	Bacias de escape fractais	62
6.4	Quantificadores da fractalidade	66
6.4.1	Variedades invariante e estrutura de bacia	66
6.4.2	Entropia de bacia e fronteira de bacia	67
6.4.3	Taxa de escape e dimensões	68
6.5	Propriedade Wada	71
6.6	O mapa com colisões	75
7	O efeito stickiness	77
7.1	O efeito <i>stickiness</i>	77

7.1.1	Gráficos de recorrência	79
7.1.2	Entropia de tempo de recorrência	80
Conclusões	87
Referências	88
Apêndices		99
A	Artigos publicados	100

Capítulo 1

Introdução

Todas as estrelas usam a fusão nuclear para gerar energia, tornando a ideia de tentar gerar energia através da fusão nuclear na Terra um caminho natural. Desde o final da Segunda Guerra Mundial, cientistas de todo o mundo têm trabalhado para tornar isso uma realidade. A fusão nuclear é uma solução sustentável para os desafios de energia da humanidade, pois tem o maior potencial de geração de energia das fontes conhecidas, há reservas de combustível praticamente infinitas e, comparada com outras fontes renováveis como a solar e a eólica, não apresenta os mesmos problemas quanto à intermitência temporal do fornecimento e armazenamento elétrico [1, 2]. No entanto, dado o atual nível de investimento, não devemos esperar que a fusão seja a principal fonte de energia, com baixa emissão de carbono, até o final do século [3]. A fusão pode ser a fonte de eletricidade mais utilizada em 2100 e ser a solução a longo prazo das mudanças climáticas [4].

Fusão nuclear é o processo em que dois núcleos atômicos leves se combinam para formar um núcleo mais pesado, liberando energia [5]. Este é o processo pelo qual as estrelas produzem energia, incluindo a estrela do nosso sistema solar, o Sol. Nesse processo, ocorre a fusão de átomos de hidrogênio para formar hélio, liberando uma considerável quantidade de energia. No Sol, ocorre o chamado ciclo próton-próton, a uma temperatura maior que $14 \times 10^6 K$. Nessas temperaturas, a matéria se encontra em um estado denominado plasma. Esse ciclo apresenta uma área de interação extremamente reduzida, o que inviabiliza sua aplicação tecnológica na Terra devido à sua seção de choque muito pequena. No Sol, por outro lado, a reação é possível graças às extremas condições de pressão e temperatura causadas pela sua força gravitacional [6]. Em um reator de fusão, serão utilizados isótopos do hidrogênio, em especial deutério e trítio (D T), que produzem uma partícula alfa e um nêutron. A seção de choque desses isótopos é relativamente alta, o que significa que a taxa de reação nuclear é mais favorável, resultando em uma maior probabilidade de ocorrência da fusão nuclear [7].

A ocorrência da fusão depende da superação da barreira energética de repulsão

coulombiana existente entre os núcleos. Além disso, para haver um ganho de energia, é necessário atingir um valor mínimo do produto triplo, que consiste no produto entre a densidade do plasma, a temperatura e o tempo em que a energia do plasma é confinada. Portanto, é necessário aquecê-lo e confiná-lo por um período [8]. Atualmente, existem duas propostas para fazer isso confinamento inercial, em que laser ou descargas elétricas são utilizadas para comprimir o combustível a uma altíssima densidade por bilionésimos de segundos [9]. A segunda forma é o confinamento magnético, em que campos magnéticos são utilizados para aquecer e armazenar o plasma. Algumas máquinas que fazem isso são tokamaks, stellarators, spheromaks, oblimaks, prolemaks e configurações de campo reverso (FRC) [10, 11, 12]. A mais proeminente delas é o tokamak: uma câmara de vácuo toroidal na qual campos magnéticos confinam o plasma. O ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) é a maior máquina deste tipo, ainda em construção. Ele é proposto para demonstrar a viabilidade da fusão nuclear para a geração de energia, e sua previsão de entrada em operação é 2025 [13]. Recentemente, o recorde de produção de energia por fusão foi demonstrado utilizando confinamento magnético no JET (Joint European Torus) [14]. Assim como um balanço positivo de energia, foi obtido no National Ignition Facility (NIF) que usa confinamento inercial [15]. Nesta tese, o foco é em confinamento magnético, como em tokamaks.

O confinamento em tokamaks é um fator limitante para a obtenção de energia da fusão de maneira efetiva. Por este motivo, modificações e novos procedimentos envolvendo o design de tokamaks estão em constante desenvolvimento. O confinamento é prejudicado pela interação do plasma com a parede do tokamak, que gera impurezas no plasma, que o resfriam e potencialmente podem causar disrupções que podem danificar a máquina. No ITER, por exemplo, o transporte de partículas pode gerar picos de calor de cerca de $5 - 10\text{MW/m}^2$ que danificariam a parede interna do tokamak [16]. Para mitigar esse problema, o conceito de divertor foi proposto para capturar ou divergir partículas energéticas escapando do plasma [17, 18, 19].

Divertores são placas metálicas posicionadas na fronteira do plasma, e as partículas podem ser desviadas por linhas de campo magnético conectando a região exterior do plasma e a parede. Entretanto, se os fluxos de partículas forem muito grandes, mesmo as placas podem ser destruídas. Por isso, linhas de campo magnético caóticas na interface plasma-parede foram propostas para uniformizar o escape de energia e partículas [20]. Estas linhas de campo magnético caóticas podem, por exemplo, ser geradas através da aplicação de campos externos, o que gera a destruição de superfícies de fluxo e resfria o plasma na interface, levando a um controle maior das interações plasma-parede [21, 22, 23]. O limitador magnético ergódico (EML) [20] é composto por um conjunto de fios externos localizados no tokamak. O EML induz a geração de um campo magnético que ressoa com os campos de equilíbrio do plasma, resultando na formação de ilhas magnéticas. Essas ilhas podem se sobrepor, levando à sua destruição e à criação de uma camada caótica na parede

do plasma. Essa camada, também conhecida como ergódica e estocástica, pode ser obtida de outra maneira: através das próprias ondas de deriva geradas no plasma, decorrentes de grandes gradientes na região da parede, em conjunto com campos elétricos externos [24].

Essa camada caótica facilita o transporte de partículas e linhas de campo na interface do plasma. O transporte em um tokamak é geralmente maior que o previsto pelo cálculo de colisões binárias em uma geometria toroidal. Este transporte anômalo é governado por processos de turbulência altamente não lineares, com múltiplos mecanismos. Devido a esta complexidade inerente, a compreensão do transporte em plasmas de fusão é considerada um "grande desafio científico"[25]. Um destes mecanismos é a chamada deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ gerada no plasma devido às flutuações eletrostáticas de baixa frequência (em relação à frequência de rotação do centro de guia das partículas ω_c) [26]. As flutuações eletrostáticas são responsáveis pelo transporte turbulento em plasmas [27]. Tal mecanismo é consoante às evidências experimentais em um plasma de baixa pressão [28].

Na situação puramente caótica, onde o teorema do limite central é válido [29], o processo de transporte é semelhante a uma caminhada randômica. Porém, no caso de um espaço de fase misto com trajetórias regulares e caóticas, o processo de transporte é mais complexo [30]. Há muitas possibilidades neste domínio, como: mar caótico, órbitas periódicas e regiões de grude (*stickiness*). E assim, o transporte em larga escala é possível [31].

A distribuição de energia e partículas é altamente não uniforme, seja ela gerada por ondas de deriva ou EML. Essa não uniformidade pode ser atribuída à estrutura geométrica subjacente às órbitas caóticas, chamada de emaranhamento homoclínico e heteroclínico, formado por um número infinito de interseções entre as variedades invariantes estável e instável de órbitas periódicas instáveis na região caótica [32, 33]. A variedade instável representa os canais de escape para as partículas em uma órbita caótica, e a sua geometria influencia a distribuição espacial de escape de partículas [34, 35]. Este mecanismo é capaz de explicar qualitativamente observações experimentais dos padrões de fluxo de energia depositada nas placas divertoras de um tokamak [36].

O escape gera uma estrutura complexa e intrincada, geralmente um fractal, termo cunhado em 1975 por Mandelbrot, do latim *fractus* [37], que significa "quebrado" ou "fraccionado". Fractais são objetos geométricos com dimensão não inteira, e ainda, que apresentam autossimilaridade estatística em diferentes escalas. Essas estruturas aparecem naturalmente em sistemas não lineares [38] de forma que os dois conceitos estão intimamente relacionados [39]. A análise da fractalidade é especialmente útil na obtenção de informação sobre a evolução de sistemas dinâmicos que modelam fenômenos físicos, pois fornece informações sobre as incertezas intrínsecas na predição do seu comportamento futuro.

Neste trabalho, exploramos as estruturas que surgem do escape em sistemas de interesse para a física de plasma. Utilizamos sistemas descritos por mapas simpléticos

bidimensionais que preservam a área do espaço de fase, ou seja, mapas de sistemas Hamiltonianos. Inicialmente, abordamos o chamado tokamap [40], um mapa que descreve as linhas de campo magnético, que representa alguns aspectos gerais da dinâmica global das linhas de campo em um tokamak. Em seguida, estudamos um mapa para a descrição de advecção passiva em um fluido incompressível sob a ação de uma perturbação na forma de deltas de Dirac [41]. Este mapa viola a chamada condição *twist*, o que gera uma relação não monotônica entre momento e velocidade no espaço de fase [42]. Por fim, estudamos um modelo de maior interesse físico que descreve a deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ causada por flutuações eletrostáticas na borda do plasma, como descrito por W. Horton [43]. Seguindo os passos do mesmo, deduzimos um mapa bidimensional que descreve as trajetórias das partículas do plasma sob a ação das flutuações e um campo elétrico aplicado. Utilizamos parâmetros e perfis reais para quantidades físicas, baseados em dados do tokamak TCABr localizado na USP [44].

Em sistema dissipativos, é encontrado um ou mais atratores \mathcal{A} , conjuntos invariantes fechados que obedecem as seguintes propriedades, qualquer trajetória que comece dentro deste conjunto permanece nele para qualquer instante de tempo; sendo \mathcal{U} um conjunto aberto que contenha o atrator e $\mathbf{x}(0)$ um ponto de \mathcal{U} , então, a distância de $\mathbf{x}(t)$ ao atrator tende à 0 com $t \rightarrow \infty$, o maior conjunto \mathcal{U} que satisfaz essa condição é chamado de bacia de atração; \mathcal{A} é mínimo, isso é, não existe um sub conjunto de \mathcal{A} que satisfaça as condições anteriores; e finalmente \mathcal{A} é estável [29, 45]. Em sistema Hamiltonianos não há atratores, logo não há bacia de atração, mas podemos definir de forma análoga uma bacia de escape. Uma bacia de escape s é o conjunto de condições iniciais que escapam de uma região determinada do espaço de fase pela saída associada à s [46]. O estudo das bacias de escape permite analisar o tempo que as partículas levam para escapar, partículas com grandes tempos de escape, possuem mais energia, pois passaram por mais interações (colisões com outras partículas) dentro do tokamak. A fronteira entre duas bacias de escape é geralmente fractal em sistemas caóticos [47]. Para quantificarmos a fractalidade desta, usamos o método da incerteza [48] para calcular a dimensão da fronteira. Utilizamos o método de Daza *et al.* [49] do cálculo de entropia de bacia e fronteira para quantificarmos o entrelaçamento das bacias. No caso três saídas, avaliamos a existência da propriedade de Wada [50], onde um ponto da fronteira de uma bacia também é ponto da fronteira das outras duas. Utilizando o chamado *grid-approach* [51] quantificamos o quanto do sistema é ou não Wada.

O espaço de fase de sistemas Hamiltonianos com poucos graus de liberdade é usualmente misto, ou seja, composto por órbitas caóticas, ilhas quase periódicas curvas invariantes. É possível que, ao redor de uma ilha de periodicidade, uma órbita caótica fique por um longo tempo, exibindo um comportamento similar ao quase periódico, até que retorna para a região caótica, esse é o chamado fenômeno de *stickiness* [52]. Este pode ser causado por uma estrutura hierárquica de ilhas ao redor de ilhas onde órbitas

caóticas ficam presas. Utilizando um quantificador de recorrência, mostramos que a deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ tem essa estrutura. Além disso, conseguimos distinguir as diferentes regiões de aprisionamento calculando a distribuição cumulativa para cada região.

A presença de estruturas fractais é de extrema relevância em sistemas Hamiltonianos abertos. Essas estruturas, com sua natureza intrincada e autossimilaridade em diferentes escalas, desempenham um papel fundamental ao explicar fenômenos como a não-uniformidade do escape e transporte caótico de partículas em plasmas confinados magneticamente. Assim, a análise de estruturas fractais torna-se crucial para elucidar os mecanismos subjacentes ao escape e transporte em sistemas dinâmicos abertos, objetivo da presente tese. Além disso, a presença de *stickiness*, um fenômeno relacionado às trajetórias caóticas, influencia significativamente o transporte de partículas, o seu estudo proporciona uma compreensão mais profunda das interações complexas entre o plasma e a parede do tokamak.

Esta tese está organizada em 7 capítulos. No capítulo 2 apresentamos conceitos básicos de sistemas Hamiltonianos como: variáveis ação-ângulo, teorema KAM e Poincaré-Birkhoff e variedades invariantes. No capítulo 3 introduzimos conceitos básicos da física de plasmas, quantidades físicas relevantes, geometria e princípios básicos de um tokamak. No capítulo 4, apresentamos o tokamak e os padrões de escape gerados, quantificando a fractalidade com a dimensão de incerteza. No capítulo 5 apresentamos o conceito de entropia de bacia e de fronteira de bacia, o aplicando para o tokamak e então mostramos como a entropia pode ser utilizada no cálculo da dimensão de incerteza utilizando o mapa de Weiss. No capítulo 6, apresentamos nossos resultados para o modelo das flutuações eletrostáticas para a deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, com três saídas, quantificando a propriedade Wada e verificamos o efeito de colisões sobre as estruturas fractais do sistema. No capítulo 7 encontra-se uma análise do grude (*stickiness*) na deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ utilizando um método baseado em entropia de recorrências. Por fim, temos nossas conclusões e no apêndice constam os artigos publicados decorrentes desta tese.

Capítulo 2

Sistemas dinâmicos

O objetivo deste capítulo é apresentar, de uma forma concisa, alguns conceitos e métodos básicos da Dinâmica Não-Linear e sistemas Hamiltonianos. É apresentado os sistemas Hamiltoniano integráveis e não integráveis, os teoremas KAM e Poincaré-Birkhoff, assim como as curvas invariantes, seu emaranhamento e a ferradura de Smale que leva a uma dinâmica caótica.

2.1 Sistemas dinâmicos

Um sistema dinâmico pode ser definido como a união de estados possíveis e regras matemáticas que determinam os estados futuros em função do estado atual [53]. A evolução do sistema é determinada de forma única a partir do estado inicial.

Sistemas dinâmicos são descritos por equações onde o tempo é uma variável independente. Dependendo do contexto, o tempo pode ser uma variável discreta, assumindo apenas valores inteiros, ou contínua, podendo ter qualquer valor real. No primeiro caso, teremos equações de diferenças finitas, enquanto no segundo, equações diferenciais ordinárias, neste caso chamamos o sistema de equações de fluxo.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \quad (2.1)$$

E ainda, quando o tempo é uma variável discreta chamamos esse sistema de equações de mapa

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_n), \quad (2.2)$$

neste caso, a variável temporal é nomeada iterada n , o estado \mathbf{x}_n é definido de forma única para uma dada condição inicial \mathbf{x}_0 . A função \mathbf{f} e o mapa \mathbf{M} são as regras do sistema dinâmico.

No caso das equações de evolução temporal (tanto no caso de mapas como de fluxos) forem lineares, é possível obter soluções gerais, para determinar o comportamento

futuro do sistema descrito de forma exata, em função do estado atual. Enquanto, no caso de equações não lineares, não existem soluções de forma fechada, em geral. Assim temos uma série de comportamentos tais como órbitas periódicas, quase periódicas, ciclos-limite, transientes e caos [54].

As soluções dos sistemas podem ser representadas graficamente em um espaço N dimensional, chamado de espaço de fase. Logo, as soluções de fluxos (2.1) e mapas (2.2) podem ser representadas como a evolução temporal de um ponto em um espaço N dimensional. A forma da órbita no espaço de fase nos traz a informação sobre o tipo de comportamento que o sistema apresenta. Na Figura 1 apresentamos alguns tipos possíveis de órbitas em um espaço de fase de um mapa bidimensional, em cores diferentes. Em verde, temos duas curvas fechadas distintas. A condição inicial (θ_0, ψ_0) gera uma trajetória que visita as 2 curvas em iterações sucessivas. Após completar um período, nesse caso 2, a trajetória retorna para a curva inicial. Sendo assim, todas as curvas são apenas uma solução. Esse tipo de órbita é referente a um movimento quase periódico e regular. Em vermelho, há uma curva no espaço de fase, que atravessa toda a direção θ . De modo geral, soluções que apresentam esta forma no espaço de fase, não apresentam apenas uma frequência, sendo muitas vezes um conjunto grande de frequências ou até mesmo frequências irracionais. Estas são soluções regulares e quase periódicas. Em preto, temos uma órbita que não apresenta movimento regular, preenchendo uma grande porção do espaço de fase. Não há formação de curvas ou curvas fechadas, caracterizando assim um comportamento irregular e aperiódico.

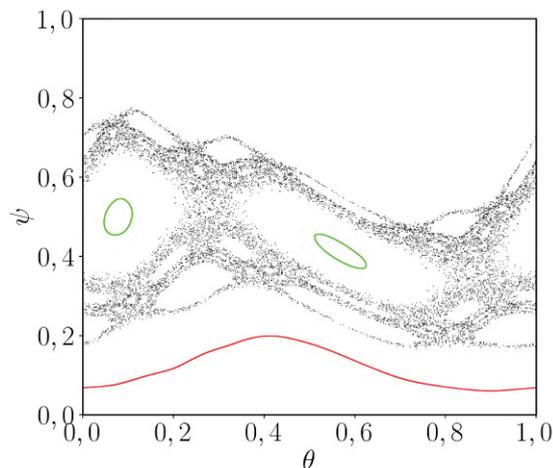


Figura 1 – Espaço de fase para três condições iniciais, de um mapa bidimensional. Em verde uma órbita regular, do tipo ilha, em vermelho uma curva invariante (*spanning*) e em preto uma órbita caótica.

Neste trabalho, o enfoque é em sistemas a tempo discreto (convencionalmente chamados de mapas). Em geral, mapas têm um custo computacional menor para os

cálculos, e na descrição de sistemas Hamiltonianos, não é necessário utilizar integradores simpléticos como seria necessário para o caso de um fluxo Hamiltoniano.

2.2 Sistemas Hamiltonianos

Sistemas Hamiltonianos são uma classe de sistemas dinâmicos que aparecem em uma série de problemas físicos, como, por exemplo, em sistemas sem dissipação, análise das linhas de campo magnético de um plasma confinado, movimento de corpos celestes, movimento de fluidos, mecânica quântica entre outros.

A dinâmica de um sistema Hamiltoniano é completamente especificada por uma única função $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, onde o estado é definido pela coordenada generalizada \mathbf{q} , momento conjugado \mathbf{p} , ambos com dimensão N , no instante de tempo t . A evolução temporal do estado é dada pelas equações de Hamilton [55],

$$\dot{q}_i = \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \dots, N). \quad (2.3)$$

As soluções de (2.3) formam a trajetória ou órbita (\mathbf{q}, \mathbf{p}) no espaço de fase de dimensão $2N$ e as variáveis (q_i, p_i) são chamadas variáveis canonicamente conjugadas. No caso em que H não depende explicitamente do tempo, $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ o sistema é dito autônomo. A função Hamiltoniana é identificada como a energia do sistema $H = T + U$, onde T é a energia cinética e U a energia potencial, relacionada a um potencial conservativo,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} = -\dot{p}_i \dot{q}_i + \dot{q}_i \dot{p}_i = 0. \quad (2.4)$$

De forma que a Hamiltoniana é uma constante de movimento. Constantes de movimentos são cruciais para a determinação da integrabilidade do sistema. Um sistema N dimensional é dito integrável quando há N constantes de movimento. Neste caso, o espaço de fase é composto apenas de comportamento periódico e quase periódico.

Uma função $f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ tem derivada temporal total igual a

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned}$$

O termo entre colchetes é chamado de colchetes ou parênteses de Poisson. Se f não depende explicitamente do tempo e comuta com a Hamiltoniana i.e. $\{H, f\} = 0$ então dizemos que f é uma constante de movimento.

Para um sistema integrável com N graus de liberdade e N constantes de movimento é possível definir uma transformação canônica de variáveis de um par canônico (\mathbf{q}, \mathbf{p}) para outro par canônico (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) , de forma que, a nova função Hamiltoniana $\bar{H}(\mathbf{p})$ dependa

explicitamente apenas do momento \mathbf{P} . Escolhendo \mathbf{P} como as N constantes de movimento, $P_i = f_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, a conexão entre as variáveis originais com as transformadas é dada pela função geradora $S(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ de segunda espécie [55]. As equações de movimento são escritas como,

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_i} = 0 \quad (2.5)$$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_i}. \quad (2.6)$$

2.2.1 Notação simplética

As equações de Hamilton podem apresentar a chamada estrutura simplética, que está por trás de diversas propriedades matemáticas dos sistemas Hamiltonianos. Para apresentar a estrutura simplética, é útil introduzir a notação " \mathbf{X} ", seja $\mathbf{X} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ um vetor $2N$ -dimensional, $\mathbf{X} = (q_1, q_2, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) = (X_1, \dots, X_N, \dots, X_{2N})$, definimos o vetor

$$\nabla H = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial X_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial X_{2N}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_N} \end{bmatrix} = \mathcal{D}H.$$

E ainda com a matriz simplética canônica de ordem $2N$,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{I}_N \\ -\mathbf{I}_N & \mathbf{0}_N \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

que é antisimétrica $\mathbf{M}^T = -\mathbf{M}$ e tem as propriedades $\mathbf{M}^2 = -\mathbf{I}_{2N}$ e $\det \mathbf{M} = 1$. Podemos escrever as equações de Hamilton como

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{M} \nabla H(\mathbf{X}) = \mathbf{M} \mathcal{D}H, \quad (2.8)$$

A transformação canônica de variáveis nesta notação $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_N) \rightarrow (Q_1, \dots, Q_N, P_1, \dots, P_N)$ consiste em uma transformação entre as componentes do vetor \mathbf{X} para um novo \mathbf{X}' , que leva a derivadas temporais

$$\dot{X}'_i = \sum_{j=1}^{2N} \frac{\partial X'_i}{\partial X_j} \dot{X}_j = \sum_{j=1}^{2N} J_{ij} \dot{X}_j,$$

em que temos a matriz Jacobiana,

$$J_{ij} = \frac{\partial X'_i}{\partial X_j}, \quad (2.9)$$

Temos $\dot{\mathbf{X}}' = \mathbf{J}\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{JMDH}$, é possível mostrar que

$$\mathbf{JMJ}^T = \mathbf{M}, \quad (2.10)$$

que indica que a transformação é canônica se a matriz Jacobiana correspondente for simplética. Considerando o divergente das equações de Hamilton temos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \dot{\mathbf{X}} &= \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_1} + \cdots + \frac{\partial \dot{q}_N}{\partial q_N} + \frac{\partial \dot{p}_1}{\partial p_1} + \cdots + \frac{\partial \dot{p}_N}{\partial p_N}, \\ &= \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial H}{\partial p_1} \right) + \cdots + \frac{\partial}{\partial q_N} \left(\frac{\partial H}{\partial p_N} \right) + \frac{\partial}{\partial p_1} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_1} \right) + \cdots + \frac{\partial}{\partial p_N} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_N} \right), \\ &= 0, \end{aligned}$$

logo, as equações de Hamilton são livres de divergências, de maneira que em sistemas Hamiltonianos não há atratores como em sistemas dissipativos. Esse é o chamado Teorema de Liouville, o volume do espaço de fase $2N$ -dimensional é um invariante canônico, i.e., ele é conservado.

O foco de estudo desta tese, são mapas bidimensionais, da forma,

$$p_{m+1} = f(p_m, q_m), \quad (2.11)$$

$$q_{m+1} = g(p_m, q_m), \quad (2.12)$$

onde m é um índice inteiro que denota a iterada. Este tipo de mapa preserva a área do espaço de fase quando o determinante da Jacobiana \mathbf{J} da transformação $(p_m, q_m \rightarrow (p_{m+1}, q_{m+1}))$ é unitário, i.e. $\det \mathbf{J} = 1$.

2.2.2 Variáveis de ação e ângulo e sistemas integráveis

Em diversos sistemas Hamiltonianos de interesse físico, uma ou mais variáveis têm uma dada periodicidade. Neste caso, é conveniente a utilização das variáveis de ação-ângulo, (\mathbf{I}, θ) , onde a ação é definida mediante uma integral de Poincaré-Cartan [56],

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_{\eta} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}, \quad (2.13)$$

onde η são curvas sobre um torus. E as variáveis ângulo dependem da função geratriz da transformação canônica $(p_i, q_i) \rightarrow (J_i, \theta_i)$ [57]. Neste caso, as equações de Hamilton (2.5) têm soluções dadas por

$$\mathbf{I}(t) = \mathbf{I}(0), \quad \theta(t) = \theta(0) + \omega(\mathbf{I})t, \quad (2.14)$$

onde $\omega(\mathbf{I})$ é o vetor de velocidade angular.

Um sistema Hamiltoniano com n graus de liberdade é dito integrável quando há n constantes de movimento independentes. Se o sistema é autônomo, H é uma constante de

movimento, e as outras devem ser obtidas de considerações físicas, como, por exemplo, por leis de conservação. O movimento de um sistema Hamiltoniano autônomo com n graus de liberdade se dá em uma superfície de energia $2n - 1$ dimensional, e cada nova constante de movimento existente reduz a dimensão desta superfície em 1. E ainda, para sistemas integráveis, a existência de n constantes de movimento independentes restringe a topologia desta superfície. Pelo teorema de Arnold-Liouville [58], a superfície de energia deve ser coberta por toros n -dimensionais. Um círculo é um toro unidimensional, enquanto a câmara de pneu é um toro bidimensional. As variáveis, ação ângulo são particularmente convenientes para o tratamento de sistemas integráveis em toros bidimensionais.

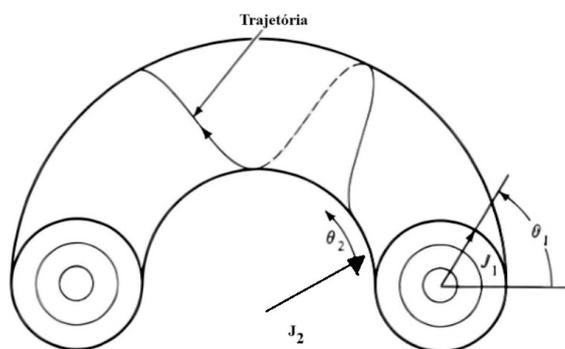


Figura 2 – Representação de uma trajetória sobre a superfície de um toro, para um sistema Hamiltoniano integrável bidimensional.

O movimento no espaço de fase é dado em um torus, como na Figura 2, para o caso com dois graus de liberdade. O toro é caracterizado pelas variáveis ângulo (θ_1, θ_2) com o primeiro sendo o ângulo dos círculos (poloidal) enquanto o segundo é o ângulo toroidal, e as variáveis ação (I_1, I_2) sendo o primeiro o raio dos círculos e o segundo o raio externo do torus. Tendo o movimento nas direções angulares, frequências angulares ω_1 e ω_2 , podemos definir o número de rotação

$$\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (2.15)$$

O valor deste fornece informações sobre o movimento do sistema. No caso em que $\alpha = r/s$ racional o movimento periódico, a trajetória fecha sobre si mesma após r revoluções em θ_1 e s em θ_2 , o toro é dito racional. No caso de α irracional, a trajetória jamais se fechará sobre si mesma, ela traça hélices sobre o toro e o preenche densamente. Na superfície de seção, um toro irracional tem como interseção um círculo completo e a solução é quase periódica.

2.2.3 Sistemas quase integráveis

Na grande maioria dos casos, não é possível encontrar N constantes de movimento para garantir a integrabilidade do sistema. Uma maneira de abordar esse problema é dada pela teoria perturbativa [59], onde supomos que o sistema seja descrito pela Hamiltoniana de um sistema integrável $H_0(\mathbf{I})$ acrescido de uma pequena perturbação H_1 , ou seja,

$$H(\theta, \mathbf{I}) = H_0(\mathbf{I}) + \epsilon H_1(\theta, \mathbf{I}), \quad (2.16)$$

onde $\epsilon \ll 1$ é um parâmetro que controla a perturbação, esse sistema é dito quase-integrável. Trataremos do caso com dois graus de liberdade, $n = 2$, o movimento do sistema integrável é em toros bidimensionais, estes podem ser racionais e irracionais.

Para toros irracionais, a perturbação é tratada com a teoria canônica de perturbação, cujo objetivo é encontrar uma transformação canônica $(I, \theta) \rightarrow (\bar{I}, \bar{\theta})$, tal que a nova Hamiltoniana seja $\bar{H} = \bar{H}(\bar{I})$. A função geratriz desta transformação em primeira ordem de ϵ é

$$S(I, \theta) = \sum_{j=1}^n \bar{I}_j \theta_j + \epsilon i \sum_m H_{1m}(\bar{I}) \left(\sum_{j=1}^n m \bar{\omega}_j(\bar{I}) \right)^{-1} \exp \left(i \sum_{j=1}^n m_j \theta_j \right), \quad (2.17)$$

em que $\omega_i = \frac{\partial H_0}{\partial I_i}$ são as frequências do sistema não perturbado, e i é o número imaginário. No caso em que essas frequências são comensuráveis, ou seja, se existem inteiros m_1, \dots, m_n , tal que

$$\sum_{j=1}^n m_j \omega_j = m_1 \omega_1 + \dots + m_n \omega_n = 0, \quad (2.18)$$

o que configura uma ressonância, então o denominador de (2.17) se anula e a série diverge. Este é o chamado problema dos *pequenos denominadores*, descrito por Poincaré em seu trabalho sobre N corpos [60].

Um tratamento para esse problema foi dado por A. Komogorov, V. Arnold e J. Moser [58], chamado de teorema KAM. As séries perturbativas (2.18) são substituídas por uma sequência de aproximações sucessivas que convergem de forma rápida, garantindo a existência de toros sobre os quais o movimento ocorre, para tempos infinitos. A prova deste teorema está fora do escopo desta tese, ela está contida em [58, 61], indicamos a seguir apenas as condições a serem satisfeitas para a validade do teorema [62]:

- A perturbação H_1 deve possuir um número M suficiente de derivadas contínuas;
- A perturbação deve ser pequena, ϵH_1 , descritas por funções suficientemente suaves;
- a razão entre as frequências não perturbadas ser suficientemente irracional, de modo que

$$\left| \alpha - \frac{r}{s} \right| > \frac{K(\epsilon)}{s^{5/2}},$$

em que $K(\epsilon)$ é uma constante que depende da amplitude da perturbação ϵ . Esta condição implica que os toros não perturbados irracionais em que α não é bem aproximado por irracionais sobrevivem à perturbação. Os toros bem aproximados por frações racionais são destruídos em sua maioria.

A evolução dos toros irracionais é fornecida pelo teorema KAM e os racionais são tratados pelo teorema de Poincaré-Birkhoff. Segundo este, os toros racionais são destruídos sob a ação de uma perturbação e seu lugar é ocupado por uma cadeia de pontos fixos elípticos e hiperbólicos que alternam entre si [63]. Para um toro $\alpha = r/s$ a perturbação irá destruí-lo, dando lugar a $2ks$ pontos fixos, com $k \in \mathbb{Z}$. Logo, há um número par de pontos fixos, metade são elípticos e a outra metade hiperbólicos.

Um ponto fixo é um ponto que a evolução temporal de uma condição inicial retorna nele mesmo. Pontos fixos podem ser classificados quanto à sua estabilidade. Um ponto fixo elíptico possui equilíbrio estável, ou seja, condições iniciais próximas geram soluções que orbitam ao redor deste ponto. Pontos fixos hiperbólicos têm equilíbrio instável. Nesse caso, há duas direções de estabilidade: uma direção onde as soluções se aproximam dele, dita direção estável, e uma direção na qual as soluções se afastam do ponto, dita instável [29].

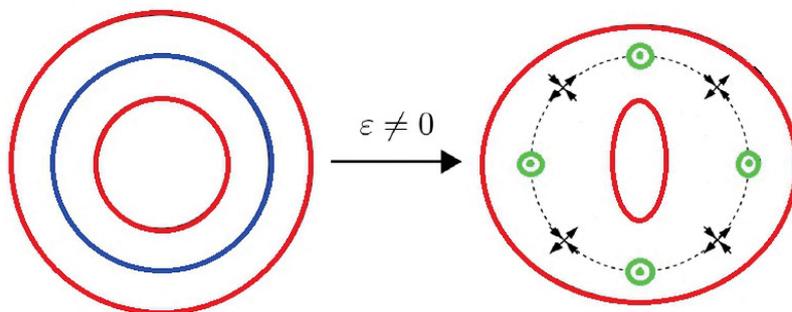


Figura 3 – Figura esquemática de um toro racional, curva em azul e toros irracionais curvas vermelhas sem serem perturbados (figura a esquerda) e sob efeito de uma perturbação não nula $\epsilon \neq 0$ (figura a direita). Sob perturbação, os toros irracionais são apenas deformados enquanto o toro racional é destruído e substituído por pares pontos fixos hiperbólicos e elípticos, indicados pelas setas em \times e pelos círculos verdes, respectivamente

Na figura 3, temos representado o efeito de perturbações sobre toros racionais e irracionais. Os toros em vermelho são irracionais (não sendo possível aproxima-los por racionais), eles sobrevivem à perturbação sendo apenas deformados. O toro em azul é racional, ele é destruído e substituído por oito pontos fixos, quatro elípticos, representados por círculos verdes, e quatro pontos hiperbólicos indicados pelas setas em \times em preto. As setas indicam as direções de estabilidade, as que se afastam do centro indicam a direção

instável e as que se aproximam indicam a direção estável.

Assim podemos entender o espaço de fase de um sistema quase integrável como formado de curvas KAM que resistem a perturbação, provenientes de toros irracionais, pontos fixos elípticos e hiperbólicos provenientes de toros racionais, novas curvas KAM em torno de pontos elípticos e regiões caóticas relacionado ao emaranhamento homoclínico. O comportamento caótico é caracterizado por aperiodicidade, irregularidade e alta sensibilidade às condições iniciais, o que leva a uma imprevisibilidade.

2.3 Curvas invariantes e sela caótica

As variedades estáveis e instáveis são curvas invariantes associadas aos pontos de sela de trajetórias periódicas. Em casos de baixa dimensionalidade, é possível visualizar a transição do comportamento periódico para o caótico, estudando como as variedades estáveis e instáveis em certos pontos de sela variam com um parâmetro. É possível definir as variedades estáveis e instáveis para um mapa \mathbf{f} e um estado de equilíbrio do mesmo. Seja \mathcal{W}^s a variedade estável de um estado de equilíbrio \mathbf{x}^* . \mathcal{W}^s é definida como o conjunto de pontos \mathbf{x} que tendem a \mathbf{x}^* , quando o sistema evolui na direção positiva do tempo, i.e., $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)| \rightarrow 0 \forall t \rightarrow \infty$. Quando iteramos o mapa para frente no tempo, a curva que se aproxima do ponto fixo é a variedade estável [45, 64].

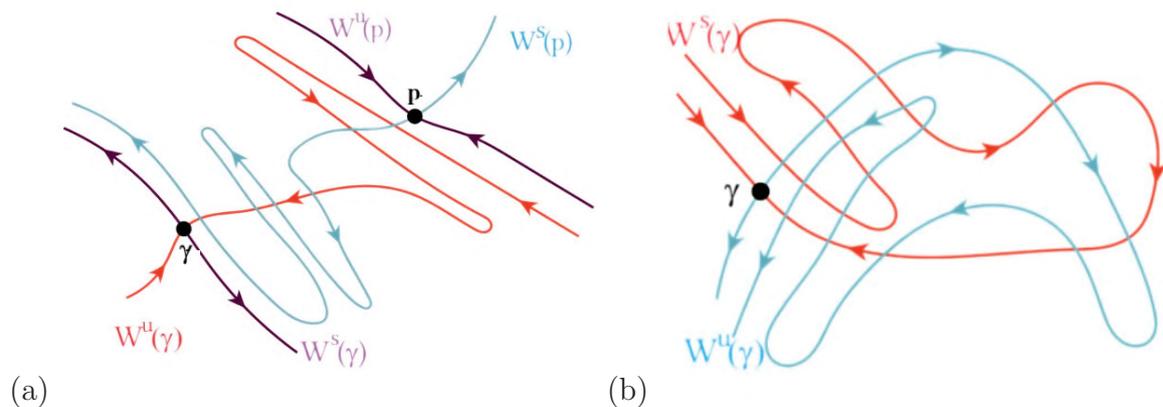


Figura 4 – Figura esquemática representando o emaranhamento heteroclínico (a) e homoclínico (b), entre as variedades estável azul e instável vermelha.

A variedade instável \mathcal{W}^u de um estado de equilíbrio \mathbf{x}^* é o conjunto de ponto \mathbf{x} que se aproximam do estado de equilíbrio quando o sistema evolui na direção negativa do tempo, ou seja, quando iteramos o mapa para trás no tempo a curva que se aproxima de \mathbf{x} é a variedade instável \mathcal{W}^u . As variedades estável e instável se cruzam transversalmente um número infinito de vezes, o que gera um conjunto infinito, mas enumerável de pontos de sela imersos na região caótica. O conjunto não atrativo formado por esses pontos é a chamada sela caótica [65]. Há dois tipos de cruzamentos entre as variedades estáveis e

instáveis: os cruzamentos heteroclínicos e homoclínicos. Os cruzamentos heteroclínicos ocorrem quando as variedades de dois pontos fixos diferentes se cruzam, Figura 4(a). E os homoclínicos, quando as variedades de um mesmo ponto fixo se cruzam [59] Figura 4(b). Nesta Figura podemos ver um ponto homoclínico p que pertence à curva instável e estável, de um ponto hiperbólico γ . Como o ponto pertence à ambas as curvas invariantes, a imagem do ponto também deve pertencer a ambas as curvas. Portanto, a existência de um único ponto homoclínico implica em um número infinito destes pontos, que se aproximam assintoticamente do ponto fixo, ao longo de suas curvas invariantes. Para que isso ocorra, dado que o volume do espaço de fase é constante, faz com que as curvas invariantes tenham um padrão complicado de cruzamentos.

A relação entre o emaranhado homoclínico e o comportamento caótico foi estabelecida por Smale, por meio de um conjunto Λ não atrativo denominado ferradura de Smale [66]. Uma discussão profunda sobre ela pode ser encontrada em [45], abaixo iremos enunciar algumas propriedades da ferradura:

- Λ contém um conjunto enumerável de órbitas periódicas, que possui períodos arbitrariamente grandes;
- Λ contém um conjunto não enumerável de órbitas não periódicas limitadas;
- Λ contém uma órbita densa (que preenche o espaço de fase).

Birkhoff e Smale demonstraram que cada ponto homoclínico é um ponto de acumulação para uma família com infinitas órbitas periódicas. Dado que há um número infinito de pontos homoclínicos, na vizinhança de cada um deles haverá um número infinito de pontos periódicos, ou seja, existe um inteiro l tal que a l -ésima aplicação do mapa tem uma ferradura Λ . Isso implica que uma órbita do mapa será caótica se a condição inicial estiver próxima de um emaranhamento homoclínico.

A sela caótica explica de forma qualitativa as estruturas das bacias de escape. A estrutura tem, localmente, propriedades topológicas similares às do conjunto Λ . A ferradura atua como base sobre o qual órbitas caóticas e periódicas estão organizadas. Em certo sentido, as ferraduras representam o esqueleto das bacias de escape. A sela caótica é um objeto fractal com uma alta complexibilidade, o que justifica a complexidade da dinâmica de problemas não lineares.

Capítulo 3

Plasmas e confinamento magnético

Neste capítulo, discutimos brevemente a definição de um plasma, os conceitos básicos de um tokamak e o movimento de uma carga sob a ação de campos eletromagnéticos que leva ao movimento de deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

3.1 Definição de plasma

O estado físico da matéria é definido pelas forças intermoleculares, se há energia térmica suficiente, ocorre uma transformação de um estado para outro. Fornecendo energia para um sólido, ele passará por uma transição de fase para um líquido e, fornecendo ainda mais energia, as ligações moleculares são quebradas e há a transição de fase para um gás. Se for fornecida ainda mais energia a este gás, os elétrons serão dissociados dos átomos, se tornando um gás ionizado formado por elétrons livres (carga $q_e = -e$, $e = 1,602 \times 10^{-19}C$), íons (carga $q_i = Ze$, onde Z é o número atômico) e partículas neutras. Este gás ionizado pode ser chamado de **plasma**, se ele apresentar comportamento coletivo e obedecer a um conjunto de critérios [5]. Em torno de 99% da matéria do universo se encontra nesse estado [7].

Nem todo gás ionizado pode ser considerado um plasma, para isso é necessário que o gás satisfaça certas condições, discutidas a seguir. Na ausência de perturbações externas, o plasma é macroscopicamente neutro. Isto significa que, em um volume de plasma que contenha inúmeras partículas, mas que seja pequeno quando comparado com os volumes característicos, onde ocorrem variações de temperatura, densidade e outros parâmetros macroscópicos, a resultante da carga elétrica é nula. A neutralidade macroscópica significa que a energia cinética, associada ao movimento térmico, é maior que a energia potencial resultante das forças de Coulomb entre as partículas. Desvios da neutralidade macroscópica podem ocorrer apenas dentro de distâncias em que há um balanço entre a energia térmica e a energia potencial. Esta distância é um comprimento característico do plasma chamado de comprimento de Debye, λ_D [7].

O comprimento de Debye é essencial para a descrição de um plasma. Ele fornece a distância em que o campo elétrico de uma única carga atua sobre outra. As cargas se movimentam de maneira a blindar-se de campos eletrostáticos dentro da distância de λ_D . Essa blindagem é uma consequência direta do movimento coletivo das partículas do plasma. O comprimento de Debye, λ_D , para elétrons é dado por

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{e^2 n_e}}, \quad (3.1)$$

onde ϵ_0 é permissividade elétrica do vácuo, k_B a constante de Boltzmann, T_e a temperatura dos elétrons e n_e é a densidade de número de elétrons. Este comprimento é o raio de uma esfera chamada esfera de Debye, onde a neutralidade é inválida, ou seja, há uma densidade de cargas não nula. Para um gás ionizado de comprimento físico L o primeiro critério para defini-lo como um plasma é $L \gg \lambda_D$. Como a blindagem é resultante do comportamento coletivo, é necessário que o número de elétrons dentro da esfera de Debye seja grande, o que define um segundo critério para plasma,

$$n_e \lambda_D \gg 1. \quad (3.2)$$

O primeiro critério já implica em neutralidade macroscópica, se for entendido que desvios da neutralidade só podem ocorrer em distâncias da ordem de λ_D . Porém, a neutralidade macroscópica é considerada como um terceiro critério

$$n_e = \sum_i n_i \quad (3.3)$$

O plasma, quando perturbado de sua condição de equilíbrio, age por meio do comportamento coletivo a restaurar sua condição inicial. O movimento coletivo é caracterizado por possuir uma frequência natural de oscilação chamada de frequência do plasma, dada por,

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e}}, \quad (3.4)$$

onde m_e é a massa de um elétron. Esta é a frequência natural de oscilação dos elétrons em relação aos íons. Esta frequência natural de oscilação constitui uma escala temporal que pode ser comparada com os mecanismos de dissipação que tendem a destruir o movimento coletivo, como colisões. É necessário que $\omega_p \gg \omega_{col}$, em que ω_{col} é a frequência de colisão das partículas. Esta equação é o quarto critério para a definição de um plasma [8]. Esses critérios devem ser satisfeitos para um gás ionizado ser considerado um plasma. Quando tratamos de plasmas de fusão, limitações adicionais são impostas, relacionadas à presença de um campo magnético [67].

3.2 Confinamento magnético

Em um reator de fusão nuclear, o combustível, usualmente isotopos de hidrogênio, H , é aquecido a uma alta temperatura, tornando esse gás de isótopos de H em um plasma.

E ainda mais energia deve ser fornecida para superar a barreira de repulsão Coulombiana entre os núcleos. Isto só ocorre se os elementos envolvidos estiverem em um plasma de alta temperatura e grande densidade por um tempo suficientemente longo. Quando uma alta temperatura é alcançada, a pressão cinética tende a fazer o plasma se expandir. Entretanto, o plasma não deve entrar em contato com as paredes do reator, o que causaria a recombinação de íons, assim perdendo plasma e possivelmente danificando a máquina [68].

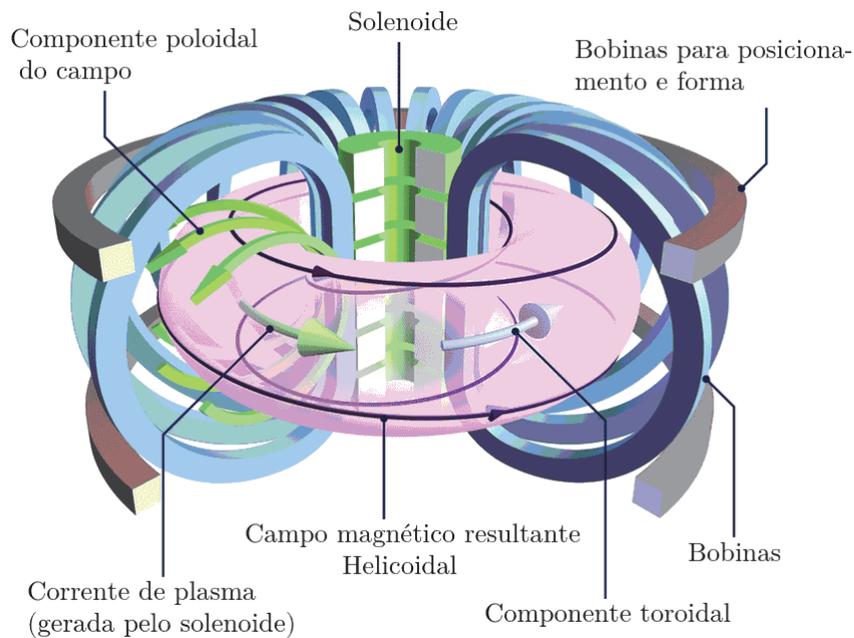


Figura 5 – Esquema de um tokamak. Adaptado de 'iter.org'.

Para contrabalançar a pressão e confinar o plasma, é possível utilizar um campo magnético intenso, considerando que o plasma é composto por partículas carregadas. Este é o chamado "confinamento magnético" e várias configurações utilizam esse tipo de confinamento, entre eles toroides compactos, como tokamaks esféricos, Spheromaks, oblimaks, prolemaks, etc [10, 69, 70]. O tokamak é hoje um dos mais promissores sistemas de confinamento. Consiste em uma câmara toroidal, vide Figura 5, onde uma corrente de plasma é formada pela ação indutiva de um transformador e confinada pela ação combinada de dois campos magnéticos. O campo toroidal B_ϕ , produzido por bobinas em volta da câmara, e o campo poloidal B_θ , produzido pela corrente de plasma, a combinação dos dois campos gera linhas de campo helicoidais, permitindo o confinamento do plasma. E ainda a câmara pode ser polarizada para melhorar o transporte de partículas.

Entretanto, para que o tokamak possa ser usado como um reator de fusão nuclear, existem vários problemas a serem resolvidos, como, por exemplo, a perda de partículas causada pelo transporte radial de partículas na borda do plasma [71]. O transporte de partículas através das linhas de campo magnético é ocasionado pelo aparecimento de

flutuações eletrostáticas causadas pelos grandes gradientes de pressão na coluna de plasma, estas flutuações se propagam na direção da deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, as derivas são flutuações eletrostáticas com frequência muito menor que a giro-frequência das partículas. Dessa forma, as partículas colidem com as paredes do tokamak, diminuindo a densidade do plasma e contaminando sua composição, dificultando assim a realização da fusão. Mesmo com os muitos trabalhos sobre o transporte de partículas em tokamaks, ainda não há uma teoria que explique todos os resultados experimentais. De maneira que, novos modelos dinâmicos são criados e analisados por meio de simulações numéricas para prever as melhores condições de confinamento e as possíveis instabilidades que o prejudicam [72].

A geometria adequada para tratar o plasma em um tokamak é por meio das coordenadas toroidais [73], porém o tratamento com essas coordenadas é complicado, então para facilitar a análise utilizaremos a aproximação de grande razão de aspecto [74], isso é, o raio maior do toroide $R \gg a$, onde a é o raio menor do mesmo. Dessa forma, temos um plasma de formato cilíndrico na direção $\hat{\mathbf{z}}$ com raio $0 < r \leq a$, ângulo toroidal $\Phi = z/R$ e ângulo poloidal θ [75]. Podemos definir a inclinação de uma linha de campo magnético em uma superfície $r = \text{const.}$ como sendo,

$$\mu = \frac{d\Phi}{d\theta}. \quad (3.5)$$

Logo, uma inclinação média será

$$q(r) = \frac{1}{2\pi} \int \mu d\theta, \quad (3.6)$$

esse é o chamado fator de segurança. O perfil dessa quantidade tem grande importância no confinamento magnético, sendo responsável pela criação de barreiras no transporte de partículas [43, 76]. Como da equação de linhas de força $\mathbf{B} \times d\mathbf{l} = 0$, onde $d\mathbf{l}$ é um elemento de comprimento, e o campo magnético pode ser escrito como uma combinação de um campo poloidal e toroidal $\mathbf{B} = B_\theta(r)\hat{\theta} + B_\Phi(r)\hat{\Phi}$, temos que, $\frac{d\Phi}{d\theta} = rB_\Phi/RB_\theta$. Desta forma, o fator de segurança fica,

$$q(r) = \frac{rB_\Phi}{RB_\theta}. \quad (3.7)$$

3.3 Carga na presença de campos

No confinamento magnético, as partículas carregadas sofrem influência de campos magnéticos, e então as partículas descrevem um movimento ao redor das linhas de campo, conforme a força de Lorentz [5, 77]. Em um campo magnético uniforme, $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$, a equação de movimento é

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (3.8)$$

logo, as equações de movimento ficam

$$\begin{aligned}\ddot{v}_x &= \frac{qB}{m}\dot{v}_x = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x, \\ \ddot{v}_y &= -\frac{qB}{m}\dot{v}_y = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y.\end{aligned}$$

Isso descreve um oscilador harmônico simples com frequência ciclotrônica $\omega_c = |q|B/m$, também chamada de frequência de Larmor. As soluções são da forma $v_{x,y} = v_{\perp} e^{\pm i\omega_c t + i\delta_{x,y}}$, onde v_{\perp} é a velocidade no plano perpendicular a \mathbf{B} , \pm denota se é um elétron ou íon e δ é uma fase. Se as partículas possuem inicialmente velocidade na direção das linhas, então o movimento será helicoidal ao redor das linhas, como na Figura 6. O movimento pode ser dividido em um movimento circular com raio de giro $r_L = v_{\perp}/\omega$, e um movimento linear do centro do giro, (centro guia) [5].

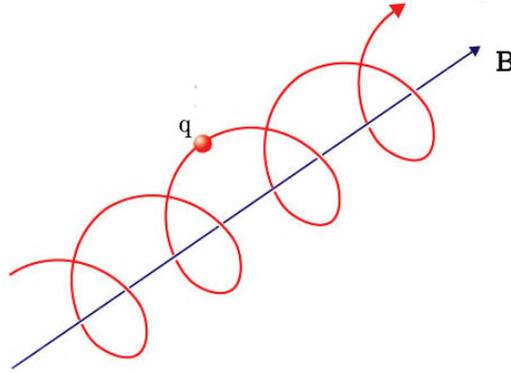


Figura 6 – Movimento de uma carga elétrica q , positiva, na presença de um campo magnético. Adaptado de 'euro-fusion.org'.

3.3.1 Deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$

Quando, além do campo magnético, temos também um campo elétrico \mathbf{E} , a equação de movimento a partir da força de Lorentz é modificada para

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (3.9)$$

Escolhemos \mathbf{E} no plano xz , então temos em componentes,

$$\begin{aligned}m \frac{dv_x}{dt} &= q(E_x + v_y B), \\ m \frac{dv_y}{dt} &= -qv_x B, \\ m \frac{dv_z}{dt} &= qE_z.\end{aligned}$$

Logo em $\hat{\mathbf{z}}$ temos um movimento com velocidade $v_z = qE_z t/m + v_{z0}$, onde v_{z0} é uma velocidade inicial e nas outras direções podemos reescrever as equações como

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\omega_c^2 v_x,$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(v_y + \frac{E_y}{B} \right) = -\omega_c^2 \left(v_y + \frac{E_y}{B} \right).$$

Esse é o mesmo caso da seção anterior, dado a troca $v_y \rightarrow v_y + E_x/B$. Então, o movimento é o mesmo de precessão ao redor das linhas de campo magnético, mas com uma deriva $\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}$ do centro de guia na direção de $\hat{\mathbf{y}}$. Para obter a velocidade de deriva, usamos a equação (3.9), em que tomamos a média sobre um período, fornece $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$, tomamos o produto vetorial com \mathbf{B} fornecendo

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = |\mathbf{B}|^2 \mathbf{v} - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}).$$

A componente transversal dessa fornece

$$\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}. \quad (3.10)$$

É importante notar que essa deriva é independente de q, m , logo íons e elétrons derivam no mesmo sentido com a mesma intensidade. A órbita tridimensional no espaço é uma hélice inclinada com passo variável, como representado na Figura 7. Em um tokamak,

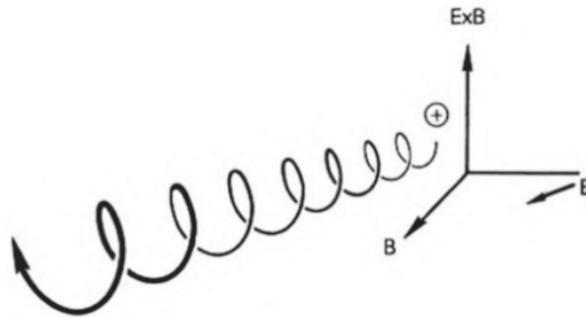


Figura 7 – Movimento de uma carga elétrica q , positiva, com deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Adaptado de [5]

essa deriva é vista experimentalmente como a principal causa do transporte radial de partículas na borda do plasma [26, 25]. Esse transporte está diretamente relacionado com o escape de partículas. Por exemplo, se uma órbita caótica conecta a região central do plasma até a parede do tokamak, todas as partículas com condições iniciais próximas irão eventualmente escapar e acertar a parede da máquina. Esse fenômeno pode ser utilizado para divergir as órbitas para posições específicas, onde são instaladas placas chamadas de divertores [78].

Capítulo 4

Modelo de linhas de campo magnético: Tokamak

4.1 Estrutura de linhas de campo em um tokamak

Como visto no capítulo anterior, o plasma em um tokamak é confinado por linhas de campo magnético helicoidais \mathbf{B} , formado por dois campos magnéticos principais: um toroidal \mathbf{B}_ζ criado por bobinas externas e um campo poloidal \mathbf{B}_θ gerado pelo plasma. As linhas de campo jazem sobre superfícies toroidais, chamadas de superfícies magnéticas. Uma superfície importante é o chamado eixo magnético, ela é uma superfície degenerada associada a um volume nulo [70]. Quantidades que se mantêm constantes sobre superfícies são chamadas quantidades de superfície ψ , são definidas como,

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \psi = 0. \quad (4.1)$$

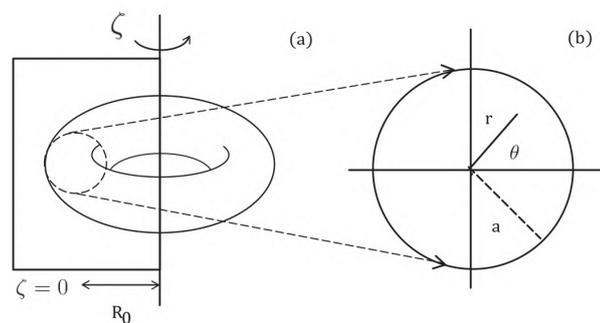


Figura 8 – Em (a) Figura esquemática, mostrando a geometria básica de um tokamak. Em (b) Coordenadas em uma seção de superfície.

Na figura 8 é representada a geometria básica de um tokamak a ser utilizado nesse capítulo. A distância entre o eixo magnético e o eixo de simetria vertical é denotada R_0 , também chamado de raio maior do tokamak, ζ denota o ângulo toroidal, medido ao

longo do torus. Assumimos que o vaso toroidal tem seção transversal circular com raio a , que pode ser descrita pelas coordenadas polares (r, θ) , com centro no eixo magnético. Sem perda de generalidade, consideramos que o ângulo poloidal é normalizado, tal que, $0 \leq \theta < 1$ e ainda, $\psi = (r/a)^2$. Portanto, utilizamos o sistema de coordenadas (ψ, θ, ζ) , conveniente para a descrição de linhas de campo [79]. O eixo magnético é localizado por $\psi = 0$ e a fronteira do plasma em $\psi = 1.0$.

As equações das linhas de campo magnético podem ser expressas na forma canônica,

$$\frac{d\psi}{d\zeta} = -\frac{\partial H_0}{\partial \theta}, \quad \frac{d\theta}{d\zeta} = \frac{\partial H_0}{\partial \psi},$$

onde H_0 é a função Hamiltoniana das linhas de campo, o ângulo toroidal faz o papel do tempo e (ψ, θ) é o par canônico. Na situação integrável, a Hamiltoniana depende apenas do momento conjugado ψ , neste caso as equações de Hamilton (2.3) ficam,

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \frac{\partial H_0}{\partial \psi} = \frac{1}{q(\psi)}, \quad (4.2)$$

$$\frac{d\psi}{d\zeta} = 0, \quad (4.3)$$

onde $q(\psi)$ é o fator de segurança (3.6). Neste caso, ψ é, na verdade, a coordenada ação, com θ sendo o ângulo conjugado. E ainda, como ψ é uma constante de movimento, parametrizada pela variável tempo ζ , o caso integrável consiste em torus, os quais podem ser racionais ou irracionais de acordo com $q(\psi)$.

Quando há uma perturbação, a Hamiltoniana é escrita como $H = H_0(\psi) + KH_1(\psi, \theta; \zeta)$, onde K é o parâmetro da perturbação. As equações de movimento correspondentes são

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \frac{1}{q(\psi)} + K \frac{\partial H_1}{\partial \psi},$$

$$\frac{d\psi}{d\zeta} = -\frac{\partial H_1}{\partial \theta}.$$

É possível obter um mapa de Poincaré tomando os valores de (ψ, θ) em intervalos fixos de ζ (tempo). Assumimos que essa amostragem é feita após uma volta completa no toroide. Então, (ψ_n, θ_n) é a n -ésima interseção das linhas de campo magnético com o plano $\zeta = \text{const}$.

Porque as coordenadas de cada interseção dependem unicamente das coordenadas de uma interseção anterior, é possível definir um mapa bidimensional, na forma

$$\psi_{n+1} = f(\psi_n, \theta_n),$$

$$\theta_{n+1} = g(\psi_n, \theta_n),$$

onde as funções g e f são relacionadas ao Hamiltoniano, e devem satisfazer algumas condições de consistência física.

Esse mapa representa uma transformação canônica, do tipo $(\psi_n, \theta_n) \rightarrow (\psi_{n+1}, \theta_{n+1})$, que corresponde a uma função geratriz de segunda ordem [55], que pode ser escrita como

$$\mathcal{F}(\psi_{n+1}, \theta_n) = \psi_{n+1}\theta_n + \mathcal{F}_0(\psi_{n+1}) + K\mathcal{F}_1(\psi_{n+1}, \theta_n), \quad (4.4)$$

em que o primeiro termo gera a transformação identidade, o segundo é relacionado ao Hamiltoniano de equilíbrio e o terceiro à perturbação, respectivamente.

As equações para essa transformação canônica são

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \psi_{n+1}} = \theta_n + \frac{d\mathcal{F}_0}{d\psi_{n+1}} + K \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \psi_{n+1}}, \\ \psi_n &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \theta_n} = \psi_{n+1} + K \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \theta_n}. \end{aligned}$$

No caso sem perturbação, $K = 0$, temos $\psi_n = \psi_{n+1}$ e $\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{d\mathcal{F}_0}{d\psi_{n+1}}$, que quando comparado com as eqs. (4.2)-(4.3), fornece $\frac{d\mathcal{F}_0}{d\psi_{n+1}} = \frac{1}{q(\psi_{n+1})}$. Definindo as funções $h(\psi_{n+1}, \theta_n) = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \theta}$ e $j(\psi_{n+1}, \theta_n) = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \psi_{n+1}}$, tal que o mapa pode ser escrito como,

$$\begin{aligned} \psi_{n+1} &= \psi_n + Kh(\psi_{n+1}, \theta_n), \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \frac{1}{q(\psi_{n+1})} + Kj(\psi_{n+1}, \theta_n). \end{aligned}$$

O mapa precisa satisfazer a condição $\psi_n \leq 0$, para qualquer n , inclusive $n = 0$, devido à definição $\psi = (r/a)^2$. Balescu e coautores [40] propôs um mapa que satisfaz essa condição e pode ser colocado na forma acima,

$$\psi_{n+1} = \psi_n - \frac{K}{2\pi} \frac{\psi_{n+1}}{1 + \psi_{n+1}} \text{sen}(2\pi\theta_n), \quad (4.5)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{q(\psi_{n+1})} + \frac{K}{(2\pi)^2} \frac{\cos(2\pi\theta_n)}{1 + \psi_{n+1}} \pmod{1}. \quad (4.6)$$

A equação 4.5 é não linear para um dado par canônico, com duas soluções possíveis. Escolhemos à raiz positiva para preservar a unicidade de solução, no caso

$$\psi_{n+1} = \frac{1}{2} \left[P(\psi_n, \theta_n) + \sqrt{[P(\psi_n, \theta_n)]^2 + 4\psi_n} \right], \quad (4.7)$$

com

$$P(\psi_n, \theta_n) = \psi_n - 1 - \frac{K}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n). \quad (4.8)$$

Como esse mapa é uma transformação canônica ele preserva a área no espaço de fase, ou seja, obedece ao teorema de Liouville [80]. Essa condição é satisfeita se

$$\frac{\partial h}{\partial \psi_{n+1}} + \frac{\partial j}{\partial \theta_n} = 0, \quad (4.9)$$

é respeitada.

Balescu *et al* estudaram o caso que o perfil de segurança é dado por

$$q(\psi) = \frac{4q_0}{(2 - \psi)(2 - 2\psi + \psi^2)}, \quad (4.10)$$

onde q_0 é o valor do fator de segurança no eixo magnético, aqui escolhido $q_0 = 1.0$. Esse perfil é modelado com base em perfis parabólicos para a densidade e temperatura do plasma, os quais são coerentes com descargas Ôhmicas [81]. O mapa resultante é conhecido como Tokamap.

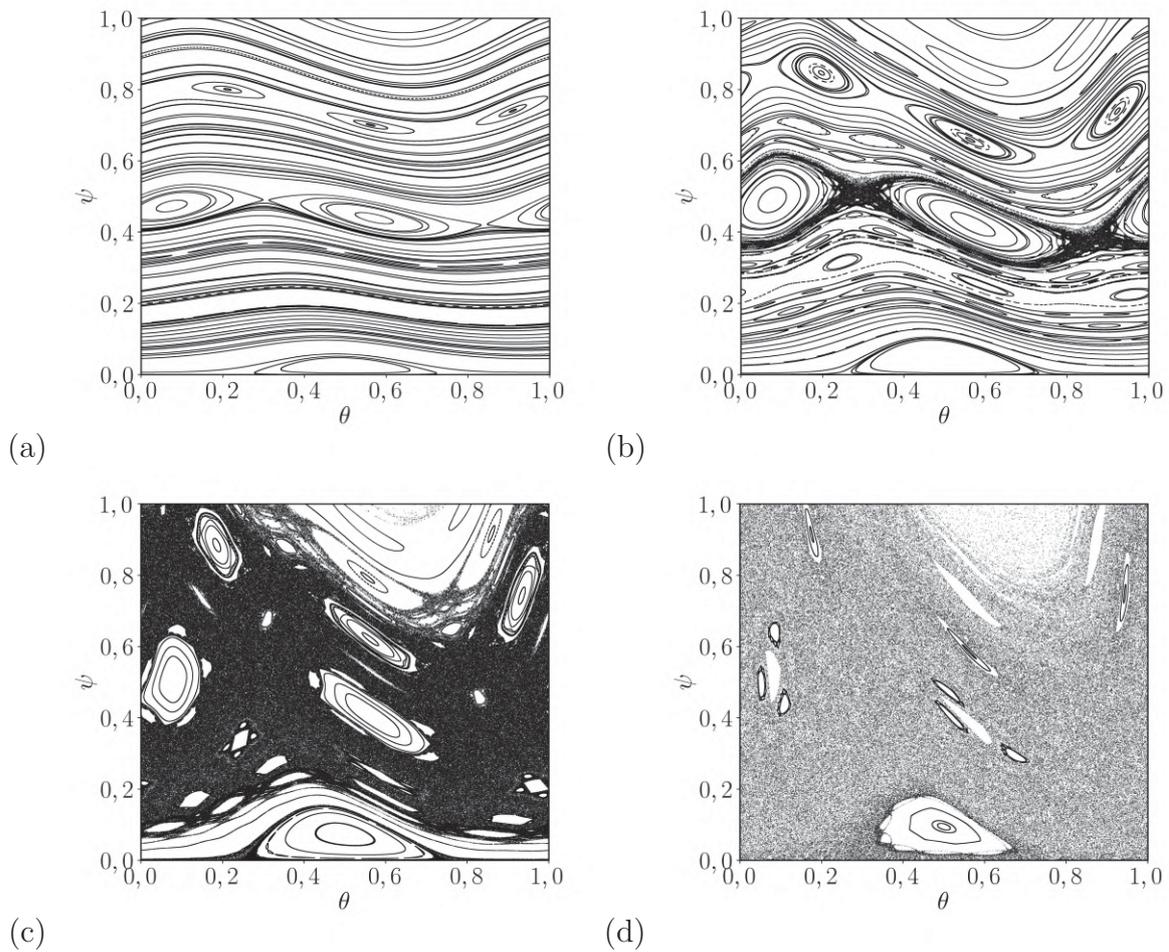


Figura 9 – Espaço de fase para $K = \pi/2$ (a), (b) π , (c) $3\pi/2$, (d) 2π . Com 100 condições iniciais randômicas, iteradas por $N = 10000$ tempos.

Na Figura 9 é exibido o espaço de fase do tokamap (4.6)-(4.7), para diferentes valores do parâmetro de perturbação K . Fisicamente isso é possível aumentando a corrente nos fios externos ao vaso do tokamak ou aumentando um determinado campo de erro causado por algum desalinhamento de correntes externas [82].

Para K baixo temos curvas invariantes com algum nível de distorção, e cadeias de ilhas quase periódicas 9(a). De acordo com o teorema KAM essas curvas invariantes

correspondem a torus irracionais do sistema não perturbado, e as ilhas surgem devido à destruição dos torus racionais, de acordo com o teorema de Poincaré-Birkhoff. A distorção das curvas KAM aumenta com a perturbação Fig. 9(b). As intersecções homoclínicas na vizinhança das separatrizes das ilhas são responsáveis pelo surgimento de uma camada caótica, porém a difusão das linhas de campo é limitada pelas curvas invariantes. A camada caótica aumenta ocupando quase todo o espaço de fase, exceto na vizinhança do eixo magnético e algumas ilhas remanescentes 9(c). Um novo aumento de K faz com que o espaço de fase seja composto de ilhas e uma grande região caótica (chamado de mar caótico) Fig. 9(d).

A palavra caos se aplica para a estrutura de linhas de campo magnético de maneira particular: como o campo magnético é estático, consideramos a dinâmica em um sentido Lagrangiano como sendo parametrizada pela coordenada toroidal, que cumpre o papel de tempo. Logo, caos nas linhas de campo magnético significa que duas condições iniciais escolhidas no mar caótico, geraram linhas de campo que se separam em uma taxa exponencial, que pode ser interpretada como o máximo expoente de Lyapunov [83].

4.2 Variedades e sela caótica

A sela caótica é um conjunto invariante não atrativo que governa a dinâmica caótica no tokamap. Para obter as variedades, optamos pelo método do regador [84] que, apesar de não ser exato, fornece uma boa aproximação das curvas invariantes. O método consiste em delimitar o espaço de fase por valores mínimo e máximo de ψ e θ e dividimos essa região em uma malha fina de condições iniciais que são então iteradas m vezes e verificamos se para cada condição inicial a trajetória escapou dessa região estabelecida pelos valores mínimos e máximos. A aproximação da variedade estável é obtida das condições iniciais que continuam dentro da região, a variedade instável das trajetórias após m interações. E ainda, é possível obter a sela caótica das trajetórias na iteração $m/2$. O número de interações necessárias é obtido por tentativa e erro.

Na Figura 10, temos as variedades estáveis, instáveis e a sela caótica para $K = 2\pi$ utilizando $m = 30$ interações e uma rede de 1000×1000 condições iniciais. A variedade estável, Figura 10(a) e a instável Figura 10(b), possuem uma estrutura complexa e intrincada, o cruzamento de ambas gera a sela caótica, Figura 10(c) é a estrutura subjacente ao comportamento caótico do sistema, suas propriedades topológicas são similares a ferradura de Smale [85]. As fronteiras entre os diferentes comportamentos dinâmicos são criadas pelas variedades [86].

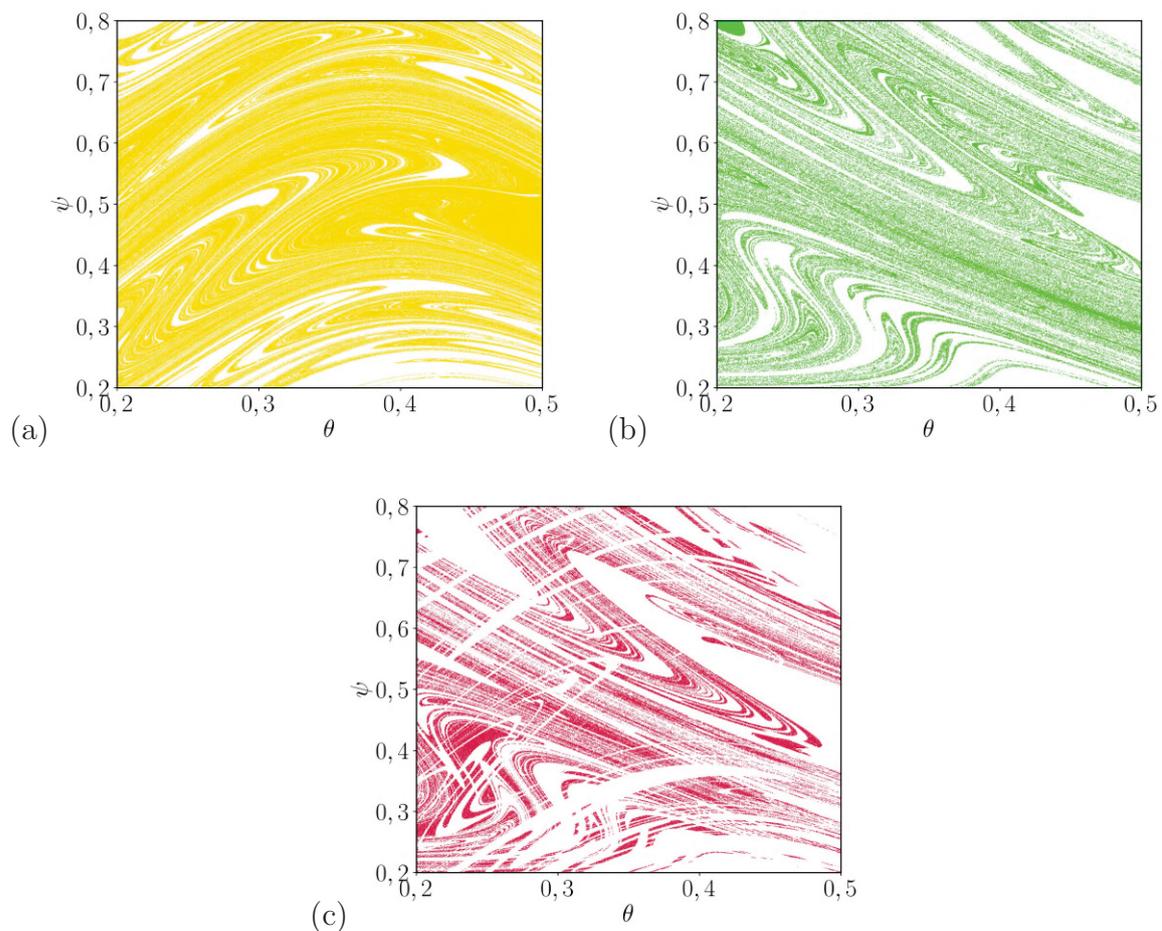


Figura 10 – Variedade estável em amarelo (a), variedade instável (b) em verde e em vermelho sela caótica, do tokamak. Para $K = 2.0\pi$ com $m = 30$, calculado com o método do regador.

4.3 Bacias de escape

Como discutido no capítulo anterior, um sistema Hamiltoniano é livre de divergência, não possui atratores, porém a dinâmica pode ser aberta considerando posições no espaço de fase por onde as partículas podem escapar. Em um sistema Hamiltoniano aberto, a órbita passa algum tempo em uma região fechada chamada região de espalhamento, após cruzar uma das saídas e finalmente escapando da região de interesse [87]. As órbitas que pertencem à sela caótica continuam dentro da região de espalhamento, exceto se uma das saídas seja colocada sobre a sela caótica. Podemos definir bacias de escape como o conjunto de condições iniciais que levam a uma saída. Definimos saídas no espaço de fase de maneira arbitrária, pois, como mostrado por [88, 89], é possível quantificar os casos em sistemas multidimensionais.

No caso do tokamak, as saídas representam placas de divertores utilizados para mitigar as interações plasma parede. A posição dessas placas depende do formato do tokamak, e é um grande problema tecnológico tratado individualmente para cada máquina

[90]. Nosso objetivo não é necessariamente propor um modelo físico de divertores, mas sim estudar as estruturas que emergem devido ao comportamento caótico. Portanto, selecionamos saídas de forma mais conveniente.

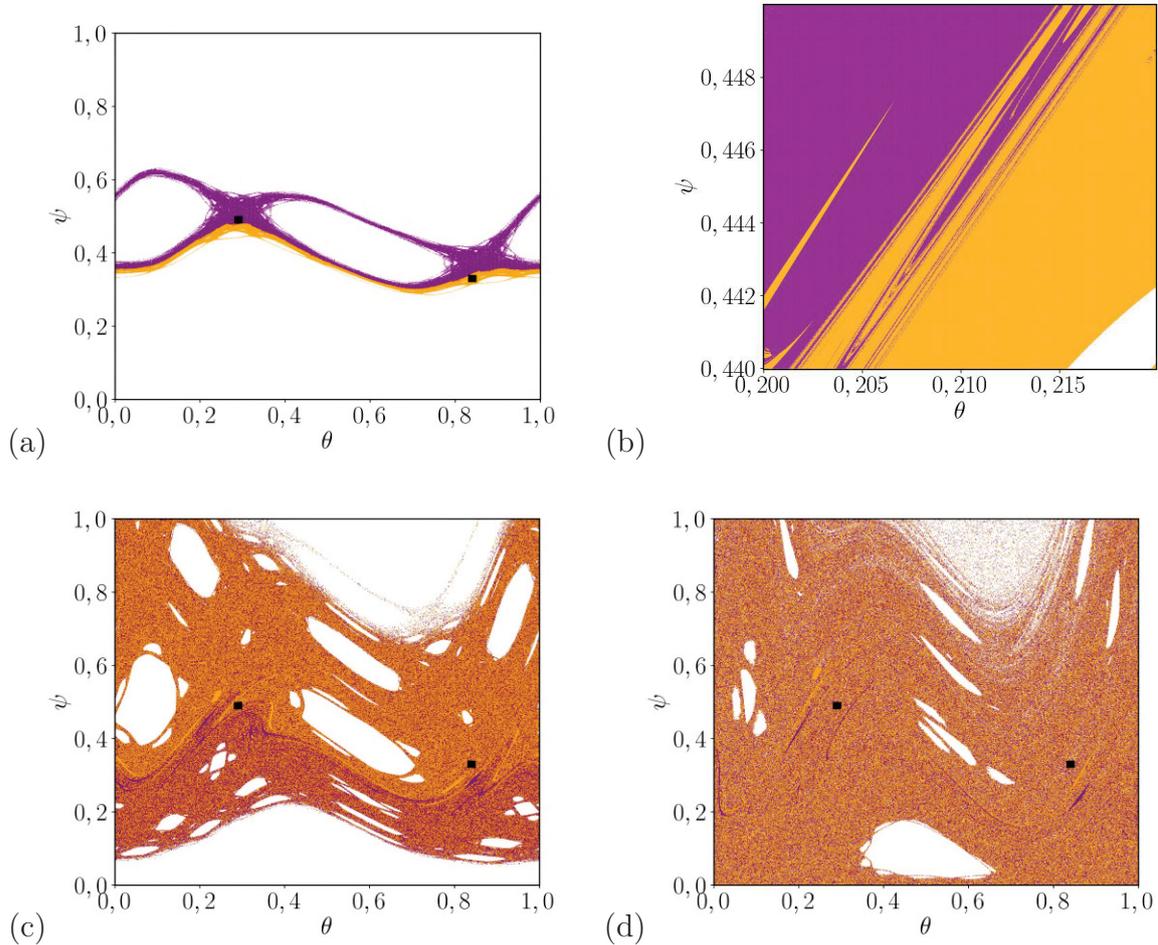


Figura 11 – Bacias de escape para o tokamap com $K = \pi$ (a), (b) magnificação de (a) na região da fronteira entre as bacias, (c) $K = 3\pi/2$, (d) $K = 2\pi$. Com 1000×1000 condições iniciais uniformes. Os quadrados pretos representam as saídas, pontos roxos escapam pelo quadrado à direita, os laranjas pelo à esquerda, pontos brancos não escapam.

Consideramos duas saídas quadradas denotadas por R e L localizadas à direita e à esquerda da linha $\theta = 0.5$, respectivamente. Se as saídas são posicionadas dentro de ilhas, não teremos um comportamento interessante, portanto escolhemos as saídas na região caótica, próxima às separatrizes das ilhas, onde há órbitas caóticas mesmo para K baixo. Na Figura 11, temos as bacias de escape onde os pontos roxos correspondem à saída R e os laranjas à saída L , os pontos brancos são aqueles que não escapam dentro do nosso tempo de iteração máximo 10000. Na Figura 11(a) temos as bacias aparentemente bem definidas, porém uma magnificação das bacias revela um comportamento intrincado, Figura 11(b). Com uma estrutura *finger-like* da bacia R em meio à bacia L . Nas Figuras 11(c) e (d) temos uma grande mistura das bacias, porém ainda há a presença das estruturas

finger-like.

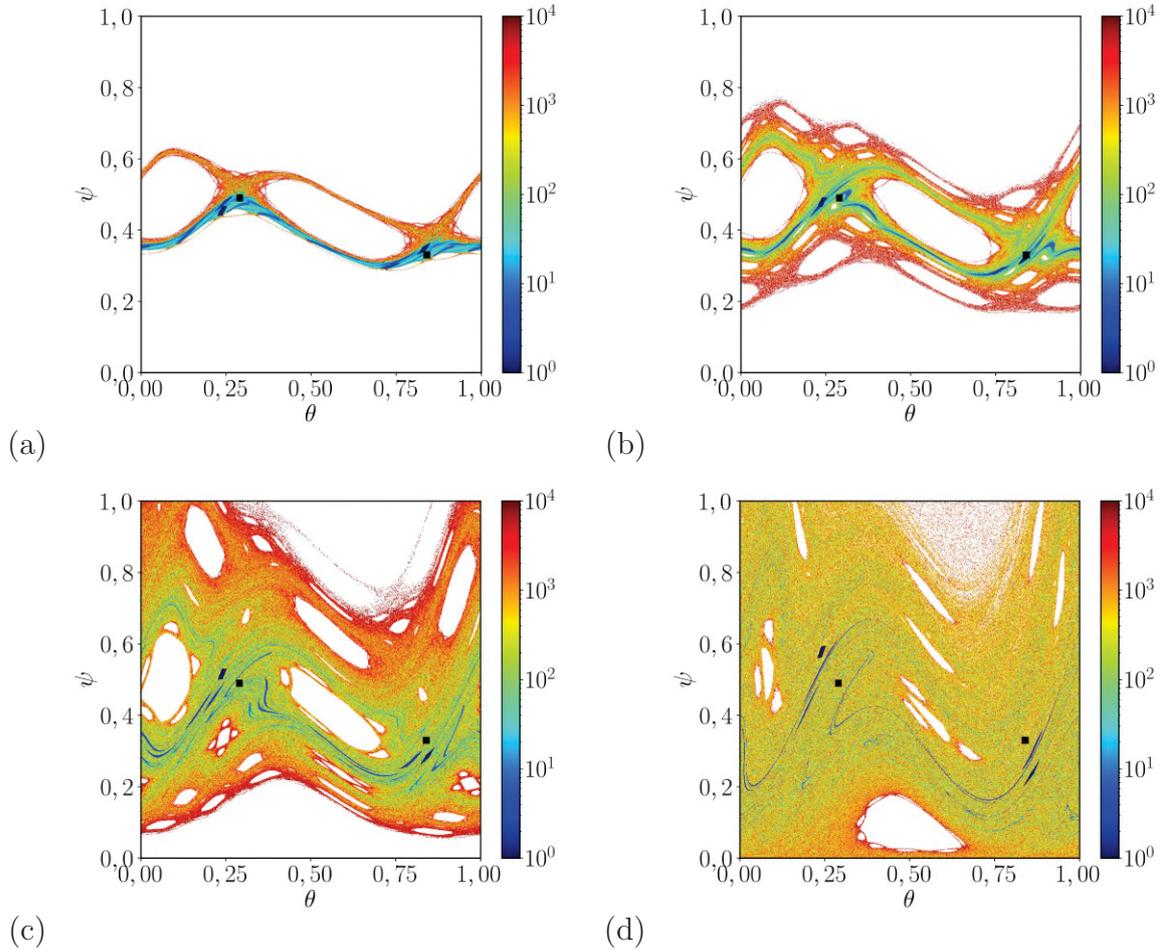


Figura 12 – Comprimentos de conexão para o tokamak com $K = \pi$ (a), (b) 1.2π , (c) $3\pi/2$, (d) 2π . Com 1000×1000 condições iniciais uniformes. Os quadrados pretos representam as saídas, a escala de cores representa quantas iterações são necessárias para uma condição inicial atingir uma saída.

Essa mistura das bacias tem consequências observáveis em plasmas. Na Figura 12, temos o "tempo" de escape das condições iniciais, isto é, o número de iterações que uma determinada órbita necessita para escapar por uma das duas saídas. Como aqui temos uma descrição de linhas de campo, o tempo de escape é usualmente chamado de comprimento de conexão, pois está sendo medido o comprimento de uma linha do campo magnético da sua posição inicial até sair da região de interesse do tokamak [91].

Próximo às ilhas, Figuras 12(c) e (d) vemos que o comprimento de conexão é maior, consequência do fenômeno de *stickiness* nessas regiões. Há regiões com pequenos comprimentos de conexão que indicam canais de escape, formados pela variedade instável. Comparando 11(a) e 12(a) vemos que as órbitas atingem a saída L rapidamente, devido à presença de vários canais de escape nesta parte do espaço de fase.

Essas estruturas *finger-like* aparecem devido ao comportamento dinâmico da órbita

caótica. A fronteira S entre as bacias de L e R é o fechamento da variedade instável de uma órbita periódica instável dentro da região caótica. Na Figura 13 representamos essa situação de maneira esquemática, seja P um ponto de sela (órbita periódica instável) de uma órbita caótica do tokamak aqui denotado por \mathbf{F} , sendo $\mathcal{W}^s(P)$ e $\mathcal{W}^u(P)$ as variedades estável e instável, respectivamente gerados por P . E ainda, com o segmento de fronteira entre as bacias S interceptando a variedade instável \mathcal{W}^u . As iteradas para trás no tempo desse segmento, $\mathbf{f}^{-1}(S)$, $\mathbf{f}^{-2}(S)$, se tornam cada vez mais finas e alongadas, se acumulando na variedade estável $\mathcal{W}^s(P)$, gerando as estruturas *finger-like*. Isto se deve por conta da interseção entre S e $\mathcal{W}^u(P)$ converge para a órbita instável P a uma taxa dada pelo autovalor correspondente do mapa tangente [65].

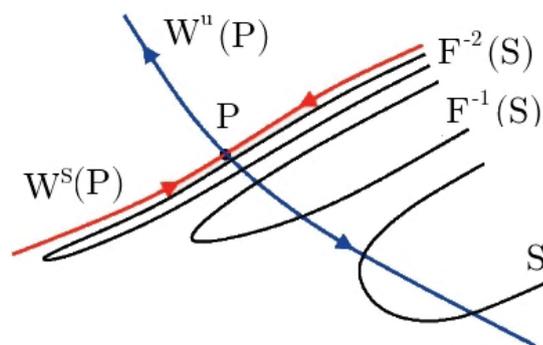


Figura 13 – Figura esquemática exibindo acumulação de filamentos da bacia de escape na variedade estável de uma órbita periódica estável dentro da região caótica do mapa.

Em primeira aproximação, as partículas do plasma com carga, elétrons e íons giram ao redor das linhas de campo. Portanto, grandes comprimentos de conexão são relacionados a partículas que dão várias voltas na direção toroidal antes de saírem do tokamak. Estas partículas colidem umas com as outras, de maneira que elas serão altamente energéticas, sendo responsáveis por parte substancial das deposições de energia nos divertores [92].

As estruturas *finger-like* são similares às estruturas de deposição de energia em placas de divertores. Jakubowski *et al* [93] mediu a potência depositada no tokamak DIII-D com perturbações magnéticas ressonantes utilizadas para suprimir os chamados modos de borda em plasmas no modo H (alto confinamento) [94]. A complicada estrutura de deposição de energia é atribuída à situação demonstrada nas Figuras 11 e 12. A mistura de comprimentos de conexão grandes e pequenos são responsáveis pelas estruturas *finger-like* observadas nos padrões de deposição [95, 35].

4.4 Dimensão de incerteza

O tokamak tem bacias de escape com alto teor de mistura e estas são interligadas em escalas arbitrariamente pequenas, o que só é possível se as bacias e sua fronteira forem

fractais. Uma forma de quantificarmos a complexidade das fronteiras da bacia de escape, é medindo a dimensão fractal das fronteiras, curva que separa as bacias de escape. Para determinar a dimensão fractal das fronteiras, utilizamos o método da incerteza [47].

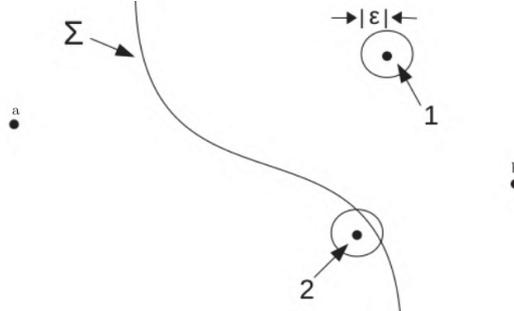


Figura 14 – Região do espaço de fase limitado pela fronteira de bacia Σ , curva que divide as duas bacias b e a.

A determinação de uma condição inicial no espaço de fase $\mathbf{x}_0 = (\theta_0, \psi_0)$ carrega uma incerteza, numérica ou experimental. Esta incerteza pode ser representada por um círculo de incerteza de raio ε centrado na posição inicial, como mostra a Figura 14. Se o círculo está totalmente dentro da região de uma saída, como o círculo 1 está na saída B na figura, a condição inicial é dita ε -certa, pois qualquer ponto no círculo irá escapar pela mesma saída. Porém, o círculo 2 intercepta a fronteira entre as bacias de escape, denotada por Σ , logo, há pontos dentro deste círculo que escapam por A e outros que escapam por B , portanto, a condição inicial é ε -incerta. Definimos a fração incerta f como o número de condições iniciais ε -incertas dividido pelo número total de condições iniciais.

Se Σ é uma curva suave, então as condições iniciais ε -incertas estarão dentro de uma faixa de largura 2ε em ambos os lados da fronteira. Dessa maneira, a fração incerta é proporcional a ε . Se a fronteira de bacia for fractal, então a fração incerta depende do raio de incerteza da forma de uma lei de potência, [64, 48],

$$f(\varepsilon) \sim \varepsilon^\alpha, \quad (4.11)$$

onde α é o chamado expoente de incerteza, definindo entre 0 fractalidade total e 1 curva suave. Este permite estimar a dimensão fractal da fronteira de bacia. Seja D a dimensão do espaço de fase ($D = 2$, para nosso mapa bidimensional),

$$\alpha = D - d, \quad (4.12)$$

A dimensão fractal (também chamado dimensão de Hausdorff-Besicovitch) é definida como,

$$d = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln 1/\delta}, \quad (4.13)$$

onde N é o número mínimo de caixas (hiper-cubos de dimensão D) de lado ε necessário para cobrir todo o espaço de fase, logo [64],

$$N(\delta) \sim \delta^{-d}, \quad (4.14)$$

para $\delta \rightarrow 0$. Fazendo o raio de incerteza igual ao tamanho da caixa, o volume da região incerta do espaço de fase é da ordem do volume total $N(\varepsilon)$ de todos os cubos com tamanho ε que cobrem a fronteira. Como o volume desses cubos que cobrem a fronteira é ε^D , o volume incerteza é $\varepsilon^D N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{D-d}$. Assim, a fração de condições iniciais incertas é

$$\alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln f(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \quad (4.15)$$

Para bacias com fronteiras suaves o expoente de incerteza é $\alpha = 1$, agora se $0 < \alpha < 1$ então $1 < d < 2$, caracteriza uma fronteira de bacia fractal. Logo, o algoritmo que utilizamos consiste em dividir em uma malha de condições iniciais. Para cada uma das condições consideramos outras duas condições aleatórias, separados por um raio fixo ε . Verificamos por qual saídas as duas novas condições escaparam se uma delas tiver o estado final diferente da condição inicial, esta é considerada incerta. A partir disso, contamos, entre as diversas condições iniciais, o número de incertas, de onde é obtido f , a fração de condições incertas para o raio de incerteza ε . Repetimos, o mesmo processo para diferentes valores de ε , e calculamos o erro de f fazendo o procedimento 10 vezes para o mesmo ε . Em um gráfico log – log da fração incerta f em função do raio de incerteza ε , o coeficiente angular da melhor reta que se ajusta aos pontos, é o próprio expoente de incerteza α .

Os resultados da dimensão de incerteza para vários valores de K são mostrados na Tabela 4.4, onde foram utilizadas 10^5 condições iniciais randômicas iteradas por 10^5 . Se uma condição inicial não escapa nesse tempo, ela é removida do cálculo. Devido a isso, algum erro numérico é esperado, mas assumimos que o número de órbitas que escapam para tempos maiores é pequeno. O expoente de incerteza e por sua vez a dimensão de incerteza variam pouco com a perturbação K e é muito próxima da dimensão do espaço de fase 2 o que indica que a fronteira é fractal extremo, se aproximando de uma curva de preenchimento de área, semelhante às curvas de Hilbert ou Peano [96]. O baixo valor para o expoente de incerteza indica que as aberturas no sistema o tornam praticamente indeterminado. Esse é um efeito do tamanho das saídas, Aguirre e Sanjuán[97] encontraram que a imprevisibilidade aumenta conforme o tamanho da saída diminui. Isto leva a um indeterminismo total, que é uma propriedade geral de sistemas Hamiltonianos abertos.

K	α	d	erro global
3,5	0,00037	1,9996	0,0006
4,0	0,00015	1,9998	0,0002
4,5	0,00031	1,9997	0,0007
5,0	0,00034	1,9997	0,0007
5,5	0,00045	1,9995	0,0009
2π	0,00078	1,9992	0,0010

A natureza fractal da fronteira da bacia representa uma significativa limitação na determinação do estado final do sistema. Como observado, a dimensão de incerteza

é $d = 1,99$. Se um esforço considerável for empreendido para reduzir a incerteza pela metade, nesse caso, a fração incerta resultante se torna,

$$f(\varepsilon') \sim \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha f(\varepsilon) \approx 0,9931f(\varepsilon), \quad (4.16)$$

que representa um decréscimo de menos de 1% na incerteza do estado final. Portanto, mesmo com um esforço experimental ou computacional considerável para reduzir a incerteza da condição inicial, isso terá um impacto mínimo na incerteza do estado final.

Como apresentado, a dimensão de incerteza varia muito pouco com a perturbação K , de maneira que somente a informação de dimensão é insuficiente para caracterizarmos qual efeito a perturbação tem sobre as estruturas fractais. Isto significa que novos conceitos são necessários para essa caracterização, como, por exemplo, os conceitos de entropia de bacia e entropia de fronteira de bacia, a serem discutidos no próximo capítulo [49].

Capítulo 5

Entropia de bacia e de fronteira de bacia

Neste capítulo são apresentadas as entropias de bacia e de fronteira de bacia, que permitem caracterizar a incerteza devido à fractalidade. Aplicamos esses conceitos ao escape de linhas de campo magnético descrito pelo tokamak, discutido no capítulo anterior. E, além disso, apresentamos o mapa de Weiss, um modelo paradigma do movimento advectivo em um fluido bidimensional incompressível, que se assemelha ao mapa padrão não-*twist*, mostrando como o expoente de incerteza pode ser obtido através da entropia de bacia.

5.1 Entropia da bacia e entropia da fronteira

Buscando quantificar o grau de incerteza devido à fractalidade de fronteira da bacia de escape, aplicamos o cálculo para entropia da bacia, desenvolvido por Daza *et al* [49]. O método consiste em dividir uma região Ω do espaço de fase em uma malha de caixas com comprimento lateral ε , caracterizada pela presença de N_A saídas. Cada ponto da grade corresponde a uma condição inicial que irá escapar por uma dada saída, de modo que iremos atribuir cores de 1 a N_A às saídas. E finalmente, é calculada a entropia da bacia por meio da entropia informacional para este conjunto de caixas.

A cada cor j em uma caixa i associamos uma probabilidade p_{ij} , dado que as trajetórias dentro das caixas são estatisticamente independentes. A entropia informacional (Gibbs) da i -ésima caixa S_i é calculada com [98],

$$S_i = - \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} \log p_{ij}, \quad (5.1)$$

onde m_i é o número de cores dentro da caixa em questão. A entropia total da malha de caixas S que cobrem uma região do espaço de fase é obtida somando a entropia das caixas

individuais que formam a malha, ou seja,

$$S = \sum_{i=1}^N S_i = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} \log p_{ij}. \quad (5.2)$$

O número de caixas N aumenta com a redução de ε , isso causa um aumento da entropia. Logo, para evitar esse efeito, definimos a entropia de bacia S_b relacionada com a entropia total e relativa ao número total de caixas,

$$S_b = \frac{S}{N}, \quad (5.3)$$

Essa quantidade está relacionada ao grau de incerteza da bacia. Quando há apenas uma única saída de escape a entropia da bacia é nula, o que significa que não há incerteza, mas quando temos N_A saídas de escape e elas são equiprováveis, a entropia assume seu valor máximo $S_b = \log N_A$, de modo a caracterizar uma estrutura de bacia de escape completamente randomizada com N_A saídas equiprováveis.

Nosso interesse é determinar se a fronteira entre as bacias é ou não fractal, para isso podemos adaptar este cálculo da entropia de bacia, considerando apenas o número de caixas N_b que contêm mais de uma cor,

$$S_{bb} = \frac{S}{N_b}. \quad (5.4)$$

Dada inúmeras caixas nas fronteiras das bacias, a fronteira será fractal se,

$$S_{bb} > \ln 2. \quad (5.5)$$

Esta é uma condição suficiente, mas não necessária, ou seja, dada a sua observação, podemos afirmar que a fronteira é fractal; no entanto, pode haver casos em que as fronteiras são fractais com $S_{bb} < \ln 2$. Além disso, para que o critério apresentado seja válido, é necessário que existam pelo menos duas bacias; se uma delas ocupar uma proporção muito grande do espaço de fase, o critério pode não ser cumprido [49].

Vamos considerar as duas saídas de escape do tokamap, conforme discutido no capítulo anterior, e excluimos as condições iniciais que não escapam após um período de iteração. Seja n_j o número de pontos na caixa correspondente à saída j . Para cada caixa que cobre uma região do espaço de fase, obtemos,

$$p_i = \frac{n_i}{n_1 + n_2}, \quad (5.6)$$

dessa forma, a entropia para uma caixa i é

$$S_i = -p_1 \log_2 p_1 - p_2 \log_2 p_2. \quad (5.7)$$

Com isso, obtemos a entropia total somando sobre todas as caixas, e a entropia de bacia utilizando 5.3. A entropia de fronteira de bacia é obtida de forma similar, mas retiramos dos cálculos as caixas em que $p_1 = 0$ ou $p_2 = 0$, isso é, consideramos apenas as caixas que tenham ao menos uma fronteira em seu interior, N_b . Na Figura 15, mostramos a variação da entropia de bacia S_b e da fronteira de bacia S_{bb} em função da perturbação K . Utilizando uma resolução de 1000×1000 caixas de lado, $\varepsilon = 5$, logo com 25 condições iniciais por caixa. Além disso, é exibido a fração ocupada \mathcal{A} i.e. a área do espaço de fase que uma das bacias ocupa, no caso escolhemos a bacia roxa das Figuras 11. Em geral, ambas as entropias seguem o padrão de variação de \mathcal{A} . A fração ocupada é uma estimativa da estabilidade da bacia, quanto maior o seu valor, mais estável é a bacia.

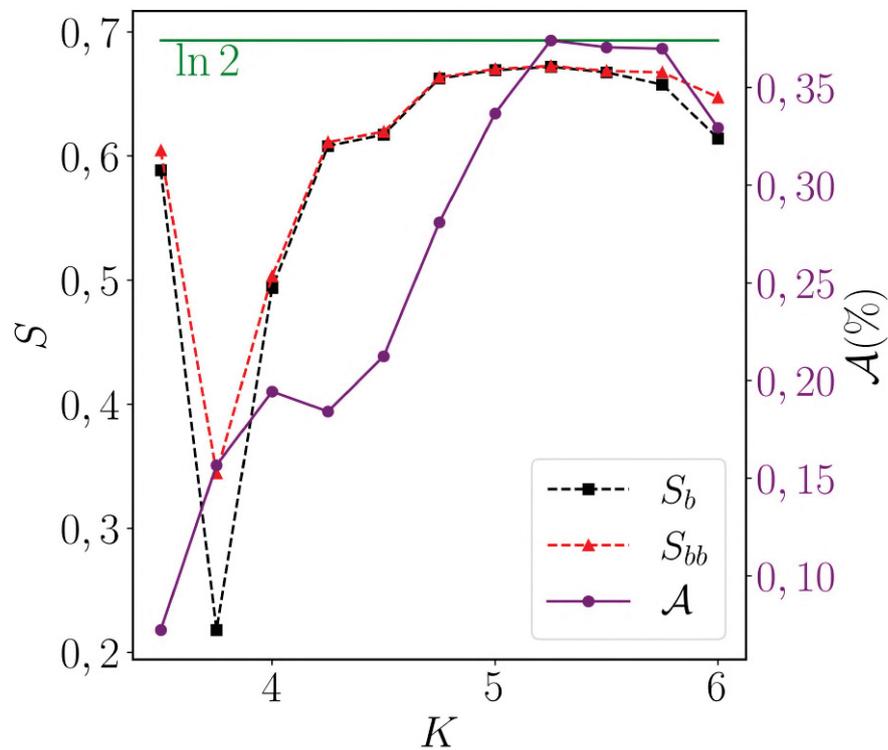


Figura 15 – Entropias da bacia S_b são mostradas pela curva em preto, S_{bb} pela curva em azul e fração ocupada pela curva em vermelho, para as duas saídas como na Figura 11. Em roxo é mostrado a fração ocupada pela bacia roxa, linha verde indica o valor $\ln 2$.

Para $K = 3,5$ ambas as entropias de bacia e de fronteira têm valores similares, em torno de 0,6, o que já indica um considerável grau de mistura entre as bacias de escape, seguido por uma queda que leva a baixos valores de entropia. A fração de área ocupada aumenta devido à destruição de torus KAM e a consequente expansão da região caótica. Após temos um aumento das entropias com K até se aproximarem de um platô. Essa tendência não é observada com a dimensão de incerteza, dado que os valores são muito

próximos (Tabela 4.4). Para $K > 4,75$ as entropias saturam, próximos do valor de entropia máximo $\ln 2$, o que representa uma alta complexidade nas estruturas de bacia. Notamos que $S_{bb} \leq S_b$, o que é esperado dado que o número de caixas que contém fronteiras é menor que o número total de caixas.

Uma consequência prática da fractalidade das bacias de escape é que deposição das linhas de campo com a parede do tokamak é não uniforme, sendo uma distribuição fractal de posições chamada de pegadas magnéticas [99]. O conhecimento das pegadas magnéticas pode fornecer pistas sobre a real distribuição de partículas na parede em um experimento.

5.2 O mapa de Weiss

Ondas viajantes são uma característica comum de muitos fluidos, incluindo na atmosfera [100], oceano [101] e fluidos de laboratório [102]. O mapa de Weiss [41] é um modelo paradigma do movimento advectivo em um fluido bidimensional incompressível no referencial se movendo com uma onda e perturbado por impulsos periódicos.

É bem conhecido que na mecânica de fluidos um fluido bidimensional incompressível e não viscoso pode ser descrito por uma função de fluxo $\Gamma(\theta, I, t)$, onde (θ, I) são as coordenadas cartesianas no plano de movimentos [103]. Partículas passivas são advectadas por esse fluido, seguido às equações de movimento,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \Gamma}{\partial I}, \quad (5.8)$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta}, \quad (5.9)$$

onde os efeitos de difusão molecular foram desprezados. Enquanto a difusão produz alguns efeitos adicionais, porém na maior parte eles são pequenos e podem ser ignorados [41]. A forma das equações idêntica à (2.3) dado que (θ, I) seja a coordenada e momento conjugado, respectivamente e com Γ fazendo o papel de Hamiltoniano.

Considerando uma onda viajante se propagando na direção θ , tal que o plano (θ, I) é um cilindro. No referencial, se movendo com a onda, o fluido bidimensional em um cilindro é independente do tempo e, portanto, representa um sistema dinâmico integrável com um grau de liberdade. Esse sistema contém partículas presas e livres, separadas por uma trajetória homoclínica que emana de uma periódica instável [104]. A dependência temporal explícita aparece como uma sequência de impulsos, dados por um pente de Dirac.

Um modelo de função fluxo que exibi esse comportamento é

$$\Gamma(\theta, I, t) = \Gamma_0(I) + \Gamma_1(\theta, I, t), \quad (5.10)$$

$$\Gamma_0(I) = \frac{I^3}{3} - I, \quad \Gamma_1(\theta, I, t) = \cos \left[\theta \left(1 - k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right) \right], \quad (5.11)$$

onde k representa a intensidade e T o período dos impulsos externos. No caso integrável ($\Gamma_1 = 0$), o sistema tem pontos fixos estáveis em $(\theta, I) = (0, 1)$ e $(\pi, -1)$, em que ao redor temos partículas presas. Partículas livres são separadas deles por trajetórias homoclínicas emanando dos pontos fixos instáveis em $(\theta, I) = (0, -1)$ e $(\pi, 1)$, vide Figura 16(a).

As equações de movimento para o sistema perturbado $\Gamma_1 \neq 0$ são as seguintes:

$$\frac{d\theta}{dt} = I^2 - 1, \quad (5.12)$$

$$\frac{dI}{dt} = \text{sen } \theta - k \text{sen } \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (5.13)$$

Podemos definir um mapa para esse sistema, definindo as variáveis discretas $\theta_n = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \theta(t = nT + \epsilon)$ e $I_n = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(t = nT + \epsilon)$. Integrando as equações de movimento sobre um período, resulta no mapa de Weiss,

$$\theta_{n+1} = \theta_n + T(I_{n+1}^2 - 1), \quad (5.14)$$

$$I_{n+1} = I_n - k \text{sen } \theta_n. \quad (5.15)$$

O mapa de Weiss se assemelha ao mapa padrão não-*twist*, um mapa que descreve de maneira simplificada o transporte caótico em um fluxo de cisalhamento nas ondas de Rossby [105].

Para reduzir o número de parâmetros, fazemos $T = k$. Na Figura 16(b) – (d) temos o espaço de fase para o sistema perturbado, para diferentes valores do parâmetro k . Como o movimento é em um cilindro, fazemos a troca de variáveis $x \rightarrow \theta$ como ângulo e $y \rightarrow I$ como a variável ação, tomamos o $\text{mod } 2\pi$ na variável ângulo. A condição *twist* $\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j} \neq 0$ é violada, pois,

$$\frac{d\theta_{n+1}}{dI_{n+1}} = 2kI_{n+1} \neq 0 \quad \text{para } I = 0,$$

A violação da condição de *twist* acarreta em novos fenômenos observados no sistema, tais como a coexistência de soluções periódicas gêmeas com o mesmo período e número de rotação, colisão e reconexão de soluções quase regulares, e não monotonicidade no perfil do número de rotação [105]. Além disso, o teorema KAM não é aplicável em todo o espaço de fase. Um comportamento distintivo de mapas não-*twist* é a presença de uma barreira robusta conhecida como barreira *shearless*, que corresponde a um máximo local no perfil de frequência do mapa. Essa barreira atua como um obstáculo significativo ao transporte global de órbitas caóticas. No contexto de plasmas confinados, a barreira *shearless* reduz o transporte caótico, resultando em um melhor confinamento [107].

Para valores relativamente baixos de k , como mostrado na Figura 16(b), observamos órbitas quase periódicas em todo o espaço de fase e curvas invariantes em torno das ilhas.

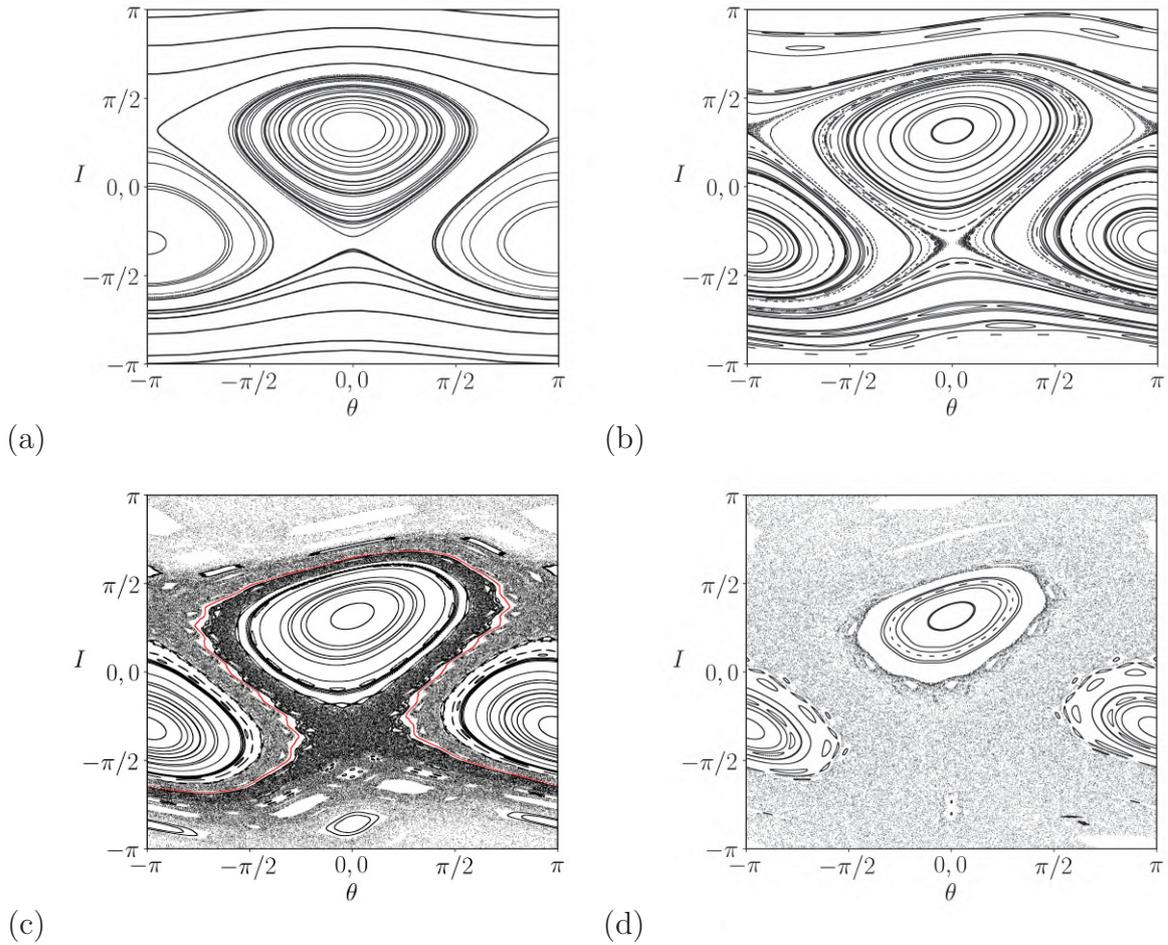


Figura 16 – Espaço de fase para o sistema integrável (a) $k = 0,0$. Em (b) sistema perturbado com $k = 0,35$, (c) $k = 0,50$ e (d) $k = 0,65$. Com 100 condições iniciais randômicas, iteradas por $N = 10000$ tempos.

Devido ao perfil de frequência não monotônico, ocorre a degenerescência, onde duas órbitas apresentam o mesmo número de rotações [106]. Órbitas caóticas surgem próximo às separatrizes das ilhas. Na Figura 16(c), a curva vermelha claramente separa as regiões caóticas próximas às separatrizes, ela é a curva shearless. O aumento da perturbação leva à quebra da barreira shearless, conforme mostrado em 16(d), e à mistura das regiões caóticas, que passam a ocupar uma fração maior do espaço de fase.

5.3 Bacias de escape

A dinâmica do mapa de Weiss pode ser aberta como no capítulo anterior, determinando posições no espaço de fase por onde as partículas podem escapar. Se as saídas são colocadas em regiões com órbitas regulares, as bacias são relativamente simples. Por outro lado, se as saídas são colocadas em regiões com órbitas caóticas, as bacias de escape são fractais, com uma fronteira de bacia também fractal. Isso decorre das características da

sela caótica. Assim, contemplamos duas saídas quadradas com lados de comprimento 0.4, posicionadas no centro dos pontos $(0.0, -1.1)$ e $(\pi - 0.1, 1.0)$, próximas das separatrizes das ilhas. Dessa forma, ocorrerá o escape mesmo para valores baixos do parâmetro de perturbação. Denotamos as bacias como \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 , respectivamente.

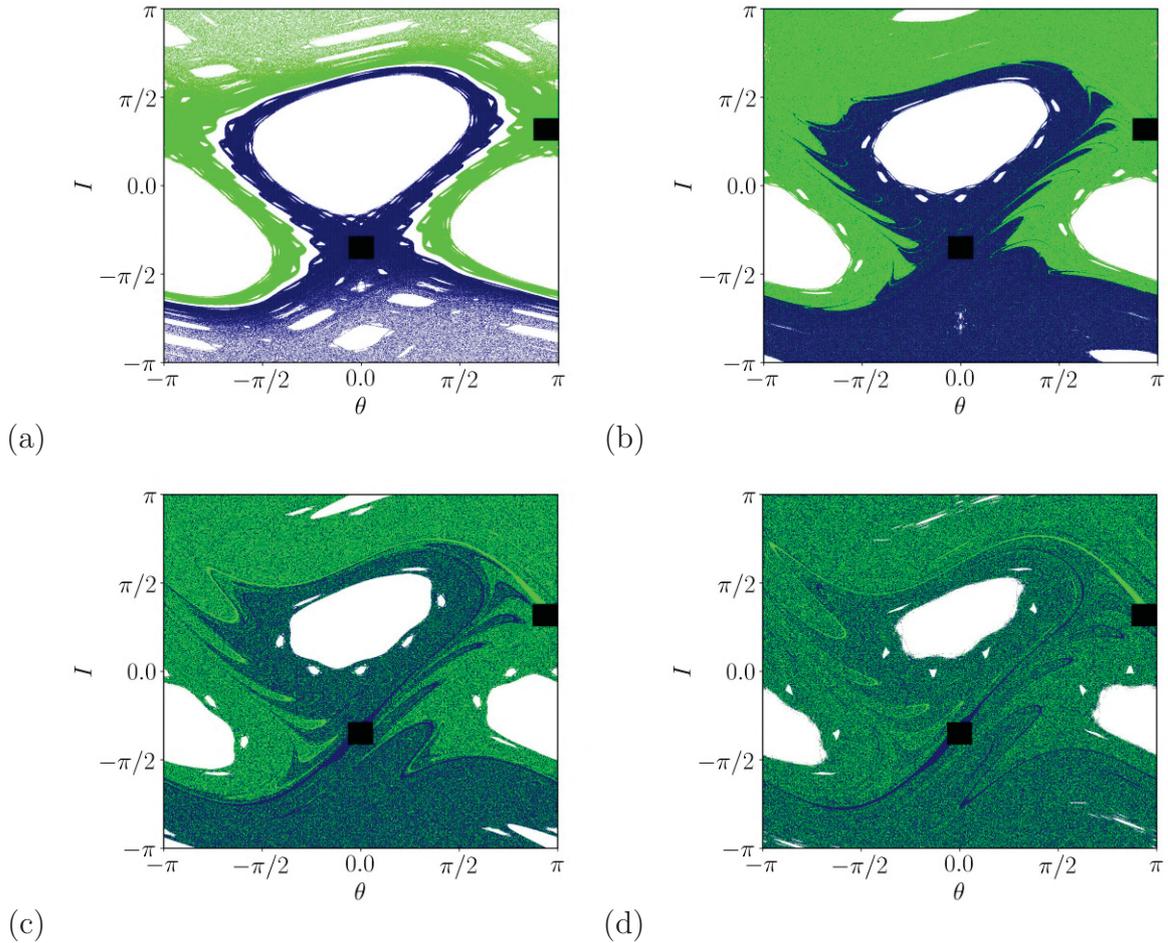


Figura 17 – Bacias de escape para o mapa de Weiss com (a) $k = 0,5$; (b) $k = 0,65$; (c) $k = 0,75$; e (d) $k = 0,85$. Com 10^6 condições iniciais, iteradas por $N = 10^6$ vezes. Os pontos azuis são os que escapam pela saída central e os verdes pela saída à direita. Quadrados pretos representam as saídas e pontos brancos são os que não escapam.

Na Fig. 17, é mostrado as bacias de escape para diferentes valores do parâmetro k , os pixels azuis correspondem as condições iniciais que pertencem a \mathcal{B}_1 e os verdes que escapam por \mathcal{B}_2 , os pixels brancos correspondem a condições iniciais que não escapam dentro do tempo limite de nossa simulação, no caso 10^5 . Estes pontos estão presos dentro de ilhas, ou suas órbitas não atingem as saídas pela existência de barreiras de transporte (curvas invariantes). No caso $k = 0.5$, Figura 17(a) as saídas são separadas por essas curvas invariantes, logo, não há nenhuma mistura, com o aumento da perturbação 17(b) ocorre a quebra dessas curvas e as duas bacias são conectadas, porém, ainda há uma baixa mistura, condições iniciais próximas à ilha central tendem a escapar pela saída de \mathcal{B}_1 enquanto as

condições próximas aos pontos $\theta = \pm\pi$ pertencem à \mathcal{B}_2 . Um novo aumento da perturbação, 17(c) causa uma mistura maior entre as bacias. E para grandes perturbações 17(d) temos uma mistura completa, com uma estrutura fractal formada pelas bacias em fina escala.

Para quantificarmos a fractalidade, medimos a entropia de bacia e a entropia de fronteira de bacia. Os resultados das entropias em função do parâmetro k são exibidos na Figura 18, em conjunto com o tempo médio de escape \bar{t} . Onde foi considerada uma rede de caixas, tal que cada caixa tenha 25 condições iniciais, valor esse que produz os melhores resultados [49].

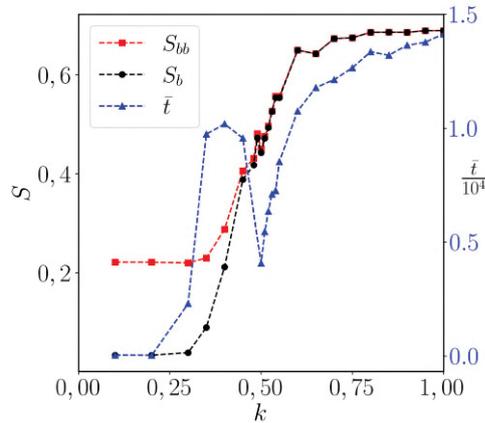


Figura 18 – Entropia de bacia em preto, entropia de fronteira de bacia em vermelho e em azul tempo médio de escape em função de k .

A entropia fica próxima de seu valor máximo $\ln N_A = \ln 2$ para valores de k onde a curva shearless já foi destruída, o que significa que há uma grande incerteza do estado final do sistema, causada pelas estruturas fractais presentes. É possível observar que o tempo de escape médio segue o mesmo perfil da entropia, mas de maneira não monotônica, com um máximo em $k \sim 0,4$ que decresce bruscamente para valores de k onde ocorre a quebra da barreira shearless, isso se deve provavelmente ao efeito de aprisionamento na região onde havia curvas invariantes, mas agora há cadeias de ilhas.

De um ponto de vista computacional, as bacias de escape são discretizadas em pixels de mesmo tamanho, tal que em cada caixa de tamanho lateral ε há N_p^2 pixels. Para uma dada caixa i , a probabilidade $p_{i,1}$ assume um valor do seguinte conjunto discreto,

$$p_{i,1} \in \left[0, \frac{1}{N_p^2}, \frac{2}{N_p^2}, \dots, 1 - \frac{1}{N_p^2}, 1 \right]. \quad (5.16)$$

Notamos que as caixas que $p_{i,1} = 0$ ou 1 não contribuem para o cálculo de S_b , pois $S_i = 0$ neste caso. O que resta são as contribuições das caixas com fronteiras de bacia, ou seja, as caixas que contêm pixels de ambas as bacias. Portanto, os valores de

probabilidades possíveis para as N_b caixas restantes são dados por

$$p_m = \frac{m}{N_p^2}, \quad (m = 1, 2, \dots, N_p^2 - 1). \quad (5.17)$$

Considerando que uma fração q_m de caixas N_b tem uma probabilidade de bacia dada por (5.17), a entropia de bacia (5.3) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} S_b &= -\frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N_p^2-1} q_m N_b S_m \\ &= -\frac{N_b}{N} \sum_{m=1}^{N_p^2-1} q_m S_m = -C \frac{N_b}{N}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde C é uma constante que depende da distribuição da quantidade q_m . Para bacias fractais, o qual é o caso estudado aqui, os valores de q_m são concentrados em torno de um valor médio com uma distribuição Gaussiana.

Sejam d_b e d_f as dimensões de contagem de caixas [108] das bacias de escape e da fronteira correspondente, respectivamente. Considerando necessário um número N de caixas com comprimento lateral ϵ na região do espaço de fase Ω , temos $N \sim \tilde{N}\epsilon^{-d}$ para um ϵ suficientemente pequeno, onde \tilde{N} é uma constante. Da mesma maneira, como é necessário N_b caixas para cobrir a fronteira, temos $N_b \sim \tilde{N}_b\epsilon^{-D}$, onde \tilde{N}_b é outra constante e ϵ é pequeno novamente. Substituindo essas expressões na equação (5.18), obtemos uma relação entre a entropia de bacia e a dimensão de contagem de caixas da bacia e sua fronteira correspondente:

$$S_b = -C \frac{\tilde{N}_b}{\tilde{N}} \epsilon^{d-D}. \quad (5.19)$$

Como discutido no capítulo anterior, para cada condição inicial existe uma certa incerteza, que podemos representar como um disco de raio ϵ centrado na condição inicial. Se esse disco não intercepta a fronteira de bacia, todos os pontos convergem para o mesmo escape e a condição inicial é ϵ -certa. Caso contrário, se o disco intercepta a fronteira, dizemos que a condição é ϵ -incerta, vide Figura 14. A fração de discos incertos ϵ -incertos escala com a incerteza α como uma lei de potência: $f(\epsilon) \sim \epsilon^\alpha$, onde $\alpha = d_b - d_f$ é o expoente de incerteza. Com isso, a eq. (5.19) fica

$$\ln S_b(\epsilon) = \alpha \ln \epsilon + \ln \left(\frac{\tilde{N}_b}{\tilde{N}} C \right). \quad (5.20)$$

Utilizando essa relação linear, é possível estimar o expoente de incerteza α para as bacias de escape utilizando os valores de entropia de bacia.

Aplicamos esse procedimento ao mapa de Weiss (5.14)-(5.15). Calculamos a entropia de bacia utilizando (5.3) para diferentes valores do comprimento lateral da caixa ϵ . Com

o ajuste dos mínimos quadrados podemos obter $\alpha = 0,079 \pm 0,004$ para $k = 0,55$ e $\alpha = 0,049 \pm 0,003$ para $k = 0,65$. Na Figura 19 exibimos esse resultado, o erro é devido ao ajuste numérico. O decréscimo do expoente de incerteza indica que há um aumento da complexabilidade da estrutura de bacia, e seu baixo valor indica que a previsibilidade do sistema quase nula.

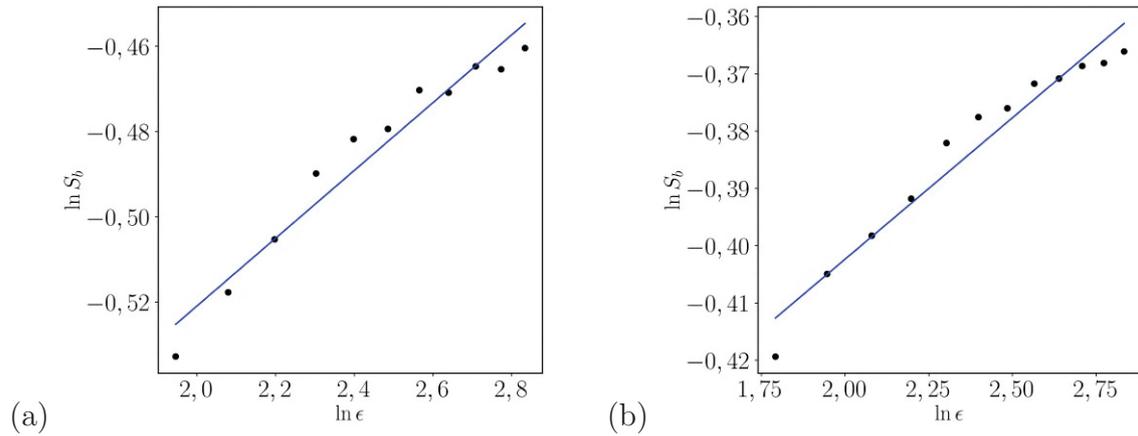


Figura 19 – cálculo do expoente de incerteza utilizando a entropia de bacia, em (a) para $k = 0,55$ e em (b) $k = 0,65$.

Capítulo 6

Modelo de ondas eletrostáticas

Neste capítulo é apresentado um modelo de ondas de deriva em um tokamak, baseado no trabalho [43], e ainda, discutimos os perfis de quantidades físicas a serem utilizadas, como o campo elétrico radial, fator de segurança e a velocidade do plasma na direção do campo magnético. Apresentamos os resultados das nossas simulações computacionais para as bacias de escape do modelo de Horton, com três saídas, quantificamos essa utilizando as entropias de bacia e fronteira de bacia, mostramos a relação das estruturas fractais com a sela caótica e suas variedades invariantes, quantificamos as dimensões de incerteza e informação dessas estruturas. Por fim, mostramos que o caso de três ou mais bacias pode produzir um fractal extremo que possui a chamada propriedade de Wada. Utilizamos um modelo fenomenológico para estudar os efeitos de colisões sobre as estruturas fractais.

6.1 Equações de movimento

Em plasmas confinados magneticamente, a presença de impurezas é inevitável, tendo um grande impacto no confinamento. Na fronteira do plasma, a presença delas ajuda na distribuição da perda de energia, impedindo que partículas altamente energéticas acertem a parede da máquina. Enquanto no centro do plasma, a sua presença pode levar a disrupções e perda de confinamento. Portanto, poder prever o comportamento de impurezas é necessário. Flutuações eletrostáticas são diretamente relacionadas com o transporte caótico que leva ao escape de partículas na fronteira do plasma. Na aproximação de centro de guia, o movimento de deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ se torna um problema de advecção passiva que pode ser descrito por um sistema Hamiltoniano de baixa dimensão [43].

Nos limitamos ao transporte anômalo de impurezas, tão diluídas que sua presença não altera o campo elétrico, O problema se torna análogo à descrição Lagrangiana de partículas passivas advectadas devido a uma função de fluxo, para um fluido incompressível, como o mapa de Weiss discutido no capítulo anterior. Com essas suposições do movimento de deriva, $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ é um modelo exato para o transporte anômalo [109].

O escape de partículas na fronteira do plasma é um problema diretamente relacionado ao transporte caótico perpendicular ao campo magnético. Este transporte surge em modelos $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, mesmo em configurações espaciais regulares do campo elétrico, dado que o Hamiltoniano seja não autônomo. Isso leva a um padrão intrincado de advecção. Esse movimento caótico se torna uma fonte não colisional de difusão perpendicular ao campo magnético, gerando resultados muitas ordens de magnitude maior que o transporte neoclássico [110, 111, 112].

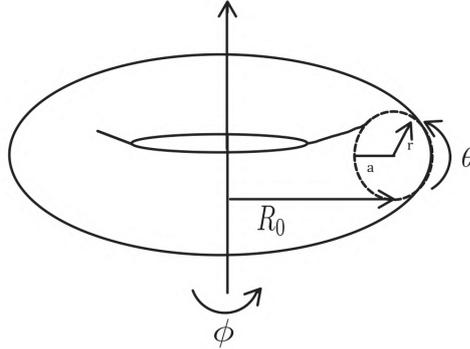


Figura 20 – Geometria de um Toroide de seção transversal circular, descrito por coordenadas locais polares.

Na Figura 20, representamos de forma esquemática o sistema de coordenadas considerado, onde a denota o raio menor do plasma e R_0 o raio maior. As partículas são descritas pelas coordenadas (r, θ, ϕ) , onde r é medido a partir do eixo magnético, θ é o ângulo poloidal e ϕ o ângulo toroidal. Assumimos a aproximação de grande razão de aspecto $a/R_0 \ll 1$, tal que o campo magnético de equilíbrio é $\mathbf{B} = (0, B_\theta(r), B_\phi)$, onde B_θ e B_ϕ são as componentes poloidal e toroidal do campo magnético, respectivamente.

Consideramos, dois campos elétricos, um externo na direção radial, gerado por eletrodos na parede do tokamak $\bar{E}_r(r)\hat{\mathbf{r}}$, e um relacionado as flutuações eletrostáticas $-\nabla\Phi(r, \theta, \phi; t)$, onde Φ é o potencial elétrico das instabilidades de deriva [43].

As trajetórias das partículas são descritas pelo movimento do centro de guia dado pela equação,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = v_{\parallel} \frac{\mathbf{B}}{B} + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad (6.1)$$

onde $\mathbf{x} = (r, \theta, \Phi)$. Em componentes 6.1 essa fica,

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{rB} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \theta}, \quad (6.2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_{\parallel} B_\theta}{rB} - \frac{E_r}{rB} + \frac{1}{rB} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (6.3)$$

$$r \sin \theta \frac{d\Phi}{dt} = \frac{v_{\parallel} B_\Phi}{B}, \quad (6.4)$$

Para a parte de flutuação utilizamos o espectro de ondas de deriva

$$\tilde{\phi} = \sum_{m,n,l} \phi_{ml} \cos(m\theta - l\Phi - n\omega_0 t), \quad (6.5)$$

onde ϕ_{ml} é a amplitude das ondas e ω_0 a frequência fundamental do espectro. Os modos espaciais poloidal e toroidal são definidos, respectivamente, pelos índices m e l , e o modo temporal pelo índice n . Podemos reescrever 6.5 como

$$\tilde{\phi} = \sum_{m,n,l} \phi_{ml} [\text{sen}(m\theta - l\phi) \text{sen}(n\omega_0 t) + \cos(m\theta - l\phi) \cos(n\omega_0 t)]. \quad (6.6)$$

Neste modelo temos que a perturbação atua como saltos impulsivos em r nos instantes de tempo $t_n = 2\pi n/\omega_0$. Estes saltos implicam que a cada tempo de correlação τ_c as partículas sofrem um novo impulso $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Assumimos que um modo M e L domina para finitos modos n . Assim podemos usar as relações [113]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(n\omega_0 t) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega_0 t - 2\pi n), \quad (6.7)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sen}(n\omega_0 t) = 0, \quad (6.8)$$

logo,

$$\tilde{\phi} = 2\pi\phi_{ML} \cos(M\theta - L\Phi) \sum_n \delta(\omega_0 t - 2\pi n).$$

Finalmente, utilizando aproximação usual em tokamaks de grande razão de aspecto: $B \approx B_\Phi \gg B_\theta$, assim como uma transformação de variáveis para as coordenadas, ação-ângulo, $I = (r/a)^2$ e $\psi = M\theta - L\Phi$, respectivamente, onde a é o raio menor da coluna de plasma, de forma que $I = 1, 0$ representa a fronteira da coluna de plasma com a parede do tokamak. Nestas variáveis, as equações do centro de guia ficam,

$$\frac{dI}{dt} = \frac{4\pi M\phi_{ML}}{a^2 B} \text{sen} \psi \sum_n \delta(\omega_0 t - 2\pi n), \quad (6.9)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{v_{\parallel}}{qR}(M - qL) + \frac{ME_r}{a\sqrt{I}}, \quad (6.10)$$

onde q é o fator de segurança (escolhemos $q = q(I)$) e R é o raio maior da coluna de plasma. Para obtermos um mapa, integramos estas equações sobre o tempo de um impulso da função delta, definindo $I_{n+1}, \Psi_{n+1} = \psi_{n+1}/(2\pi)$ como as variáveis ação-ângulo logo após o pulso e $I_n, \Psi_n = \psi_n/(2\pi)$ antes do impulso, obtemos,

$$I_{n+1} = I_n + \beta \text{sen}(2\pi\Psi_n), \quad (6.11)$$

$$\Psi_{n+1} = \Psi_n + \alpha v_{\parallel}(I_{n+1}) \left(\frac{M}{q(I_{n+1})} + L \right) - \gamma \frac{E_r(I_{n+1})}{\sqrt{I_{n+1}}}, \quad (6.12)$$

q_1	5.0	e_3	4.13	M	15
q_2	-6.3	v_1	-9.867	L	6
q_3	6.3	v_2	17.47	ω_0	16.36
e_1	10.7	v_3	10.1	α	1.83×10^{-2}
e_2	-15.8	v_4	-9.00	γ	-9.16×10^{-1}

Tabela 1 – Valores normalizados dos parâmetros utilizados.

onde definimos as quantidades $\alpha = 1/(\omega_0 R_0)$, $\beta = 4\pi M \phi_{ML}/(a^2 B \omega_0)$ e $\gamma = -M/(a B \omega_0)$.

Para resolver estas equações, devemos fornecer os perfis do fator de segurança, campo elétrico radial, velocidade paralela e campo magnético, além dos parâmetros raio menor, raio maior, frequência angular, modos dominantes e amplitude do potencial eletrostático, representado por β .

6.2 Perfis das quantidades físicas e normalização

Para as simulações numéricas, escolhemos os parâmetros do tokamak TCABR, localizado no Instituto de Física da Universidade de São Paulo. Os perfis e constantes de máquina, são normalizados os comprimentos pelo raio menor, $a = 0,18\text{m}$, intensidade do campo magnético pelo componente toroidal do campo no eixo $B_0 = 1,1\text{T}$. Campo elétrico externo é normalizado com respeito ao seu valor na fronteira, E_0 , tal que a velocidade é normalizada com o fator $v_0 = E_0/B_0$ e para o tempo usamos o fator $t_0 = a/v_0$. Finalmente, a amplitude do potencial eletrostático é normalizada com $\phi_0 = aE_0$.

O perfil do campo elétrico é escolhido de forma a ser não monotônico, dado por

$$E_r = e_1 I + e_2 \sqrt{I} + e_3, \quad (6.13)$$

onde os valores normalizados podem ser encontrados na tabela 1. Este perfil é visto como um fator no desenvolvimento de barreiras no transporte de partículas, o que permite prender as trajetórias caóticas dentro do plasma [114, 76]. Este perfil é representado na Figura 21, junto com o perfil de cisalhamento do campo calculado por $S_E = \frac{r}{E_r} \frac{dE_r}{dr}$.

Para velocidade paralela escolhemos um perfil não uniforme com cisalhamento na borda do plasma, dado por,

$$v_{\parallel} = v_1 + v_2 \tanh(v_3 I - v_4). \quad (6.14)$$

Essa velocidade é obtida através da ordem de grandeza e inversão de sinais da velocidade toroidal observadas por medidas experimentais na borda do plasma no tokamak TCABR, localizado na USP de acordo com [115] e segue a linha de outros trabalhos na área [116]. Na Figura 22 temos este perfil e a medida experimental da velocidade do plasma.

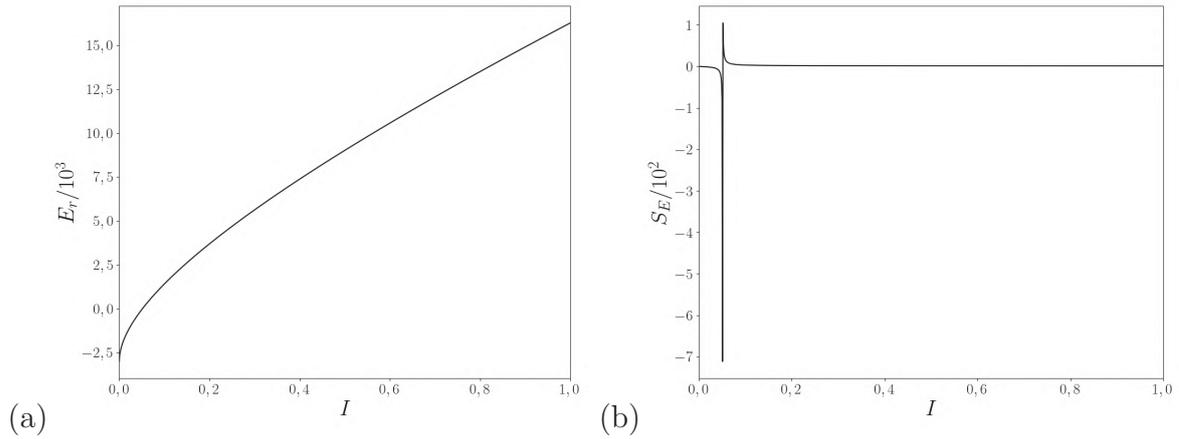


Figura 21 – Perfil do campo elétrico (a) e seu cisalhamento (b).

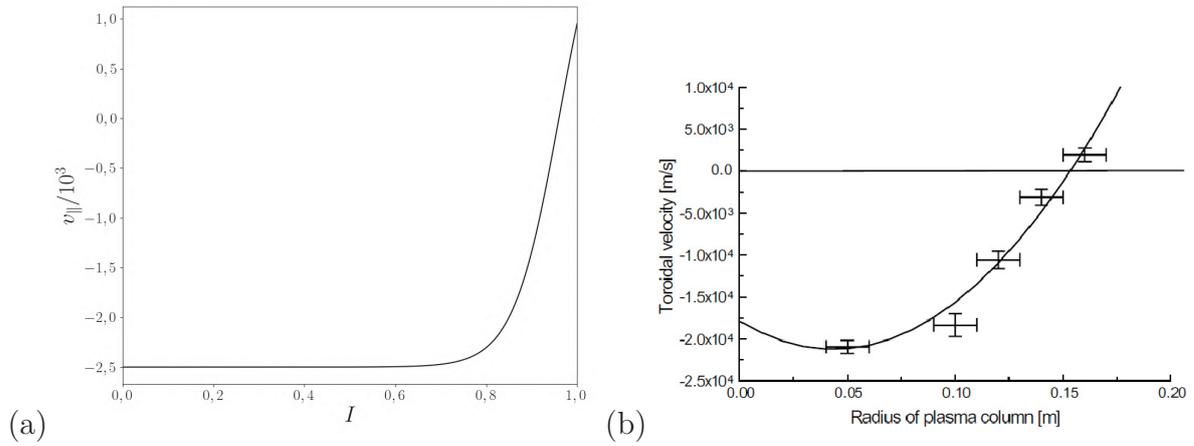


Figura 22 – Perfil da velocidade paralela do plasma (a), medida experimental do TCABR que inspirou a escolha do perfil (b) retirada de [115].

Escolhemos um perfil para o fator de segurança que seja não monotônico, apresentando cisalhamento, isso pode ser feito combinando o perfil da corrente de plasma e métodos de aquecimento auxiliares locais [8]. Este tipo de perfil geral configurações de plasma estáveis dado que $q > 1$ em todo espaço [117, 118]. Dessa maneira escolhemos,

$$q = q_1 + q_2 I^2 + q_3 I^3, \quad (6.15)$$

representada na Figura 23.

6.2.1 Propriedades do mapa

O mapa que deduzimos é simplético como esperado, pois pode ser deduzido a partir do formalismo Hamiltoniano [59]. Para mostrar que o mapa é simplético, calculamos o determinante da matriz jacobina do mapa,

$$J_n = \begin{vmatrix} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \Psi_n} \\ \frac{\partial \Psi_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial \Psi_{n+1}}{\partial \Psi_n} \end{vmatrix} = 1, \quad (6.16)$$

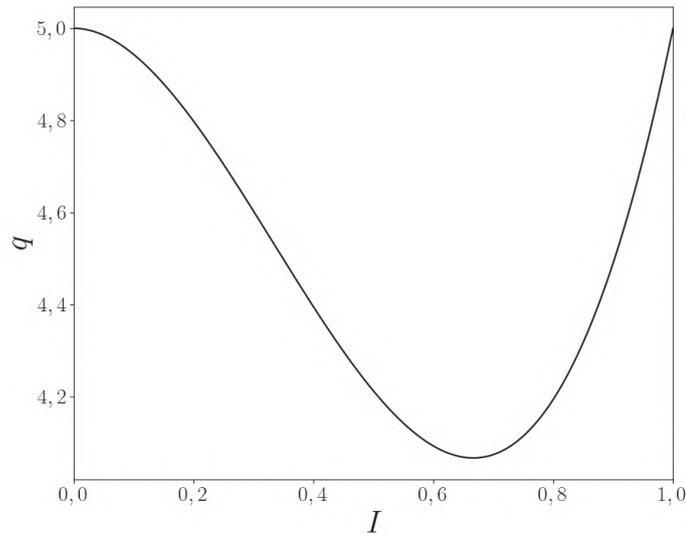


Figura 23 – Perfil do fator de segurança.

ou seja, $\det J_n = 1$, condição necessária para o mapa ser simplético.

Na Figura 24 é exibido o espaço de fase para o modelo de Horton (6.11)-(6.12) com os perfis e parâmetros do TCABR. Quando β o espaço de fase é composto apenas de órbitas regulares. Quando a perturbação é acionada, à o surgimento de trajetórias caóticas próximas a parede do plasma. O aumento da amplitude das flutuações causa o aumento da região caótica e a quebra de algumas curvas invariantes próximas ao centro da coluna de plasma.

6.3 Bacias de escape fractais

Nosso foco de estudo são partículas de teste, isto é, cargas que são advectadas de maneira passiva pelo fluxo de deriva. A razão disso é que dessa maneira não é necessário fazer uma descrição autoconsistente em que as ondas atuam sobre as partículas, mas as partículas também agem nas ondas [119]. Porém, é esperado que o comportamento das partículas passivas seja similar ao de partículas do plasma. As partículas advectadas podem escapar da coluna de plasma atingindo alguma superfície, como as placas divertores, utilizadas para mitigar a interação plasma parede por meio da exaustão de partículas que escapam ao longo de uma órbita caótica perto de uma separatriz. Transformamos o nosso sistema (6.11)-(6.12) em um sistema Hamiltoniano aberto, considerando que as partículas são capazes de escapar por uma ou mais saídas no espaço de fase (I, Ψ) . Consideramos três possíveis saídas localizadas na parede do plasma: $L : -0,5 \leq \Psi < -1/6$, $C : -1/6 \leq \Psi < 1/6$ e $R : 1/6 \leq \Psi \leq 0,5$. Calculamos as bacias de escape com o mesmo procedimento descrito utilizando uma grade de 1000×1000

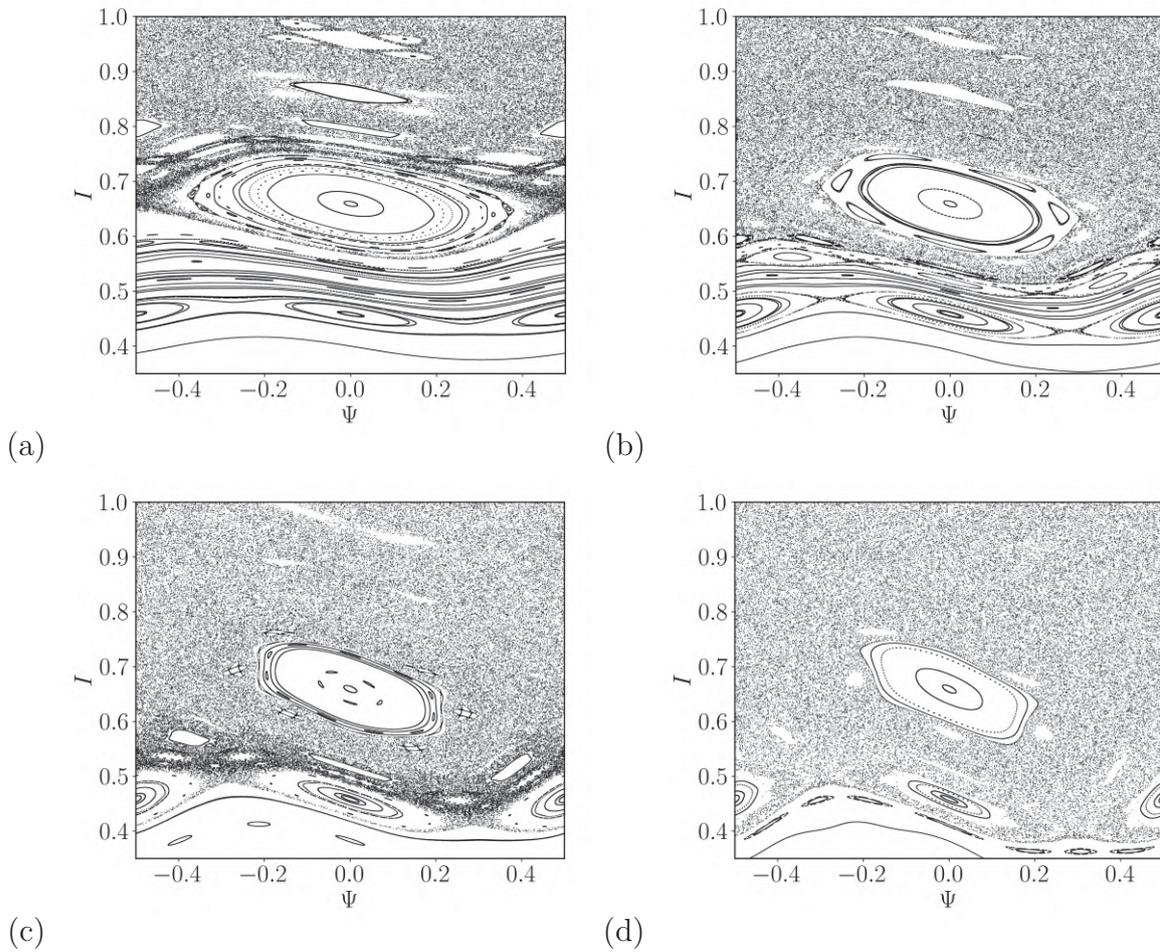


Figura 24 – Espaço de fase para $\beta = 0,04$ (a), (b) $0,06$, (c) $0,080$ e (d) $0,1$. Com 2000 iterações e 100 condições iniciais randômicas.

condições iniciais distribuídas de maneira uniforme, iteradas por $N = 10^6$. Na Figura 25 apresentamos os resultados.

As bacias de escape são altamente conectadas, exibindo as estruturas *finger-like* como no tokamak, mas essas são mais concentradas na região da parede do plasma. E ainda a bacia amarela L é significativamente maior que as saídas verde e azul, com azul sendo a menor, para todos os valores das perturbações considerados, indicando um escape preferencial para a região de Ψ negativo. O aumento de β leva a um aumento da região caótica, logo as bacias são maiores e ainda, os filamentos *finger-like* aumentam de comprimento, sendo mais finos e mais alongados.

Cada condição inicial (Ψ_0, I_0) foi iterada (dentro do limite de iterações) até a colisão com uma das saídas. Calculamos, então, o número de iterações no mapa necessárias para que as partículas escapem do tokamak. Isso permite obter o tempo de escape. Associamos uma escala de cor para o número de iterações, na Figura 26 mostramos o tempo de escape. Vemos regiões azul-escuro próximas às saídas, o que é esperado que as partículas nesta região escapem rapidamente com poucas interações, e que em volta das ilhas temos regiões

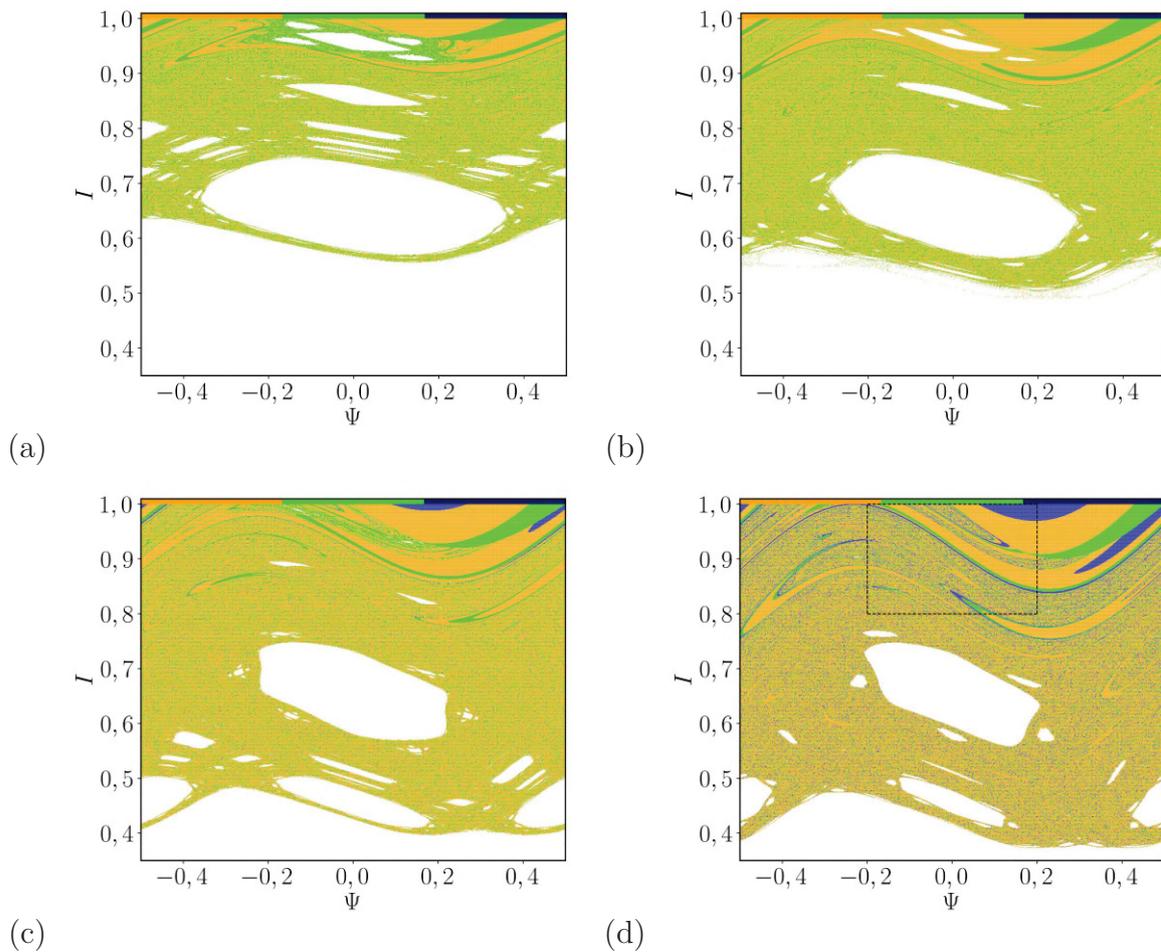


Figura 25 – Bacias de escape com três saídas, representadas como as barras coloridas em $I = 1, 0$, a bacia L corresponde aos pixels amarelos, C verdes e R azuis. Em que $\beta = 0,04$ (a), (b) $0,06$, (c) $0,08$, (d) $0,10$.

vermelhas, o que indica que as partículas ficam aprisionadas nestas regiões, sinalizando a existência de stickiness. As regiões vermelhas podem ser associadas as partículas com alta energia, pois passaram por um grande número de colisões até escaparem. O aumento de β diminui a região em vermelho 26 (c) e (d), ou seja, as partículas conseguem escapar com maior facilidade. Além disso, as várias estruturas em azul-escuro, baixo tempo de escape, são os canais de escape, condições iniciais próximas a essas estruturas são advectadas para a parede rapidamente, essas estruturas se relacionam com as variedades invariantes, correspondendo a variedade instável da sela caótica.

Na Figura 27(a) mostramos sucessivas magnificações das bacias de escape, onde é possível notar a existência das três bacias de escape, mesmo em pequena escala, o que indica que as bacias são fractais. Uma consequência da fronteira fractal é a dificuldade em fazer previsões sobre o sistema, como, por exemplo, por qual saída uma partícula escapa, mesmo que uma condição inicial em um sistema determinístico tenha uma órbita única, a fractalidade introduz uma grande dificuldade em afirmar algo sobre a evolução do sistema,

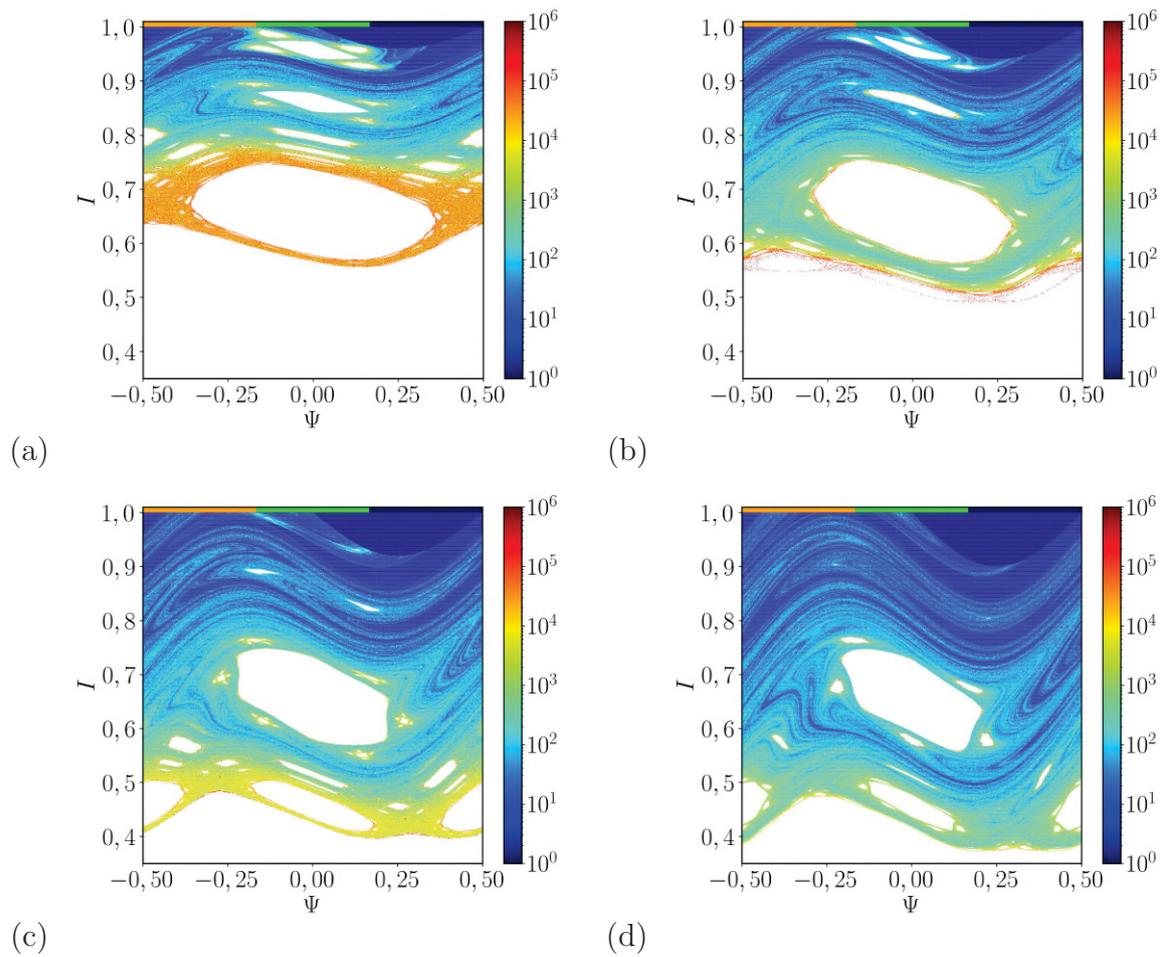


Figura 26 – Tempo de escape em escala de cor para diferentes valores de $\beta = 0,04$ (a), (b) $0,06$, (c) $0,08$, (d) $0,10$, quando mais perto do vermelho, maior é o número de iterações necessárias para a partícula escapar.

dados uma pequena incerteza na condição inicial [39].

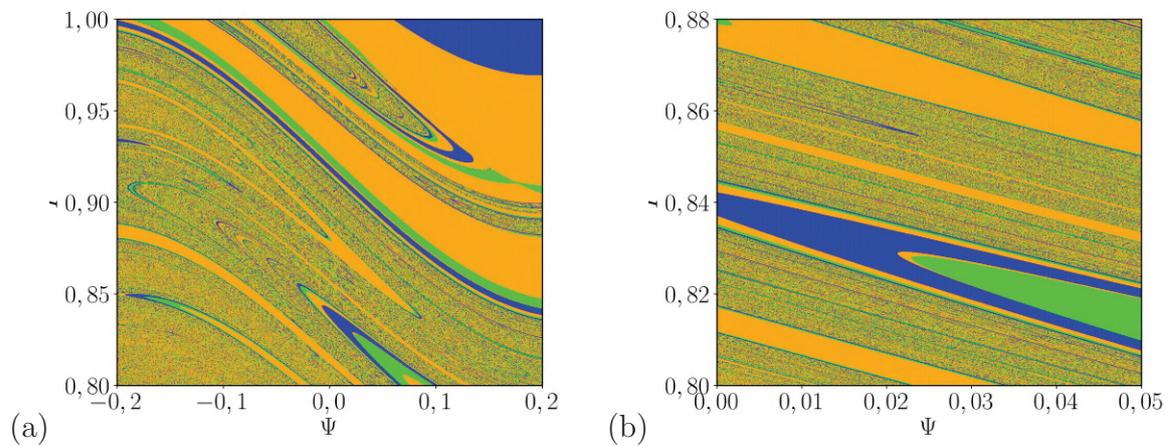


Figura 27 – Em (a) ampliação do retângulo tracejado em Fig. 25(d). Em (b) magnificação mostrando a estrutura fina das bacias de escape.

6.4 Quantificadores da fractalidade

6.4.1 Variedades invariante e estrutura de bacia

As variedades estáveis e instáveis são curvas invariantes associadas aos pontos de sela de trajetórias periódicas. No contexto deste trabalho, as variedades ajudam a entender um pouco mais as estruturas das órbitas caóticas presentes nas bacias de saídas, pois são as variedades as responsáveis pelo aparecimento de fronteiras que separam comportamentos dinâmicos distintos no espaço e fase [86].

Como regra geral, qualquer partícula com condições iniciais na região caótica irá vagar de forma errática até eventualmente colidir com a parede $I = 1, 0$. Entretanto, existem órbitas que não escapam mesmo na região caótica, para condições iniciais muito especiais. Um exemplo são as órbitas periódicas instáveis no mar caótico. Em geral, todas as órbitas que não escapam são instáveis e a união de todas elas forma um conjunto semelhante ao conjunto de Cantor com medida de Lebesgue nula [45].

O conjunto de órbitas que não escapam influencia o movimento das partículas em sua vizinhança: uma condição inicial típica gera uma órbita que segue de perto uma órbita periódica instável, e então ocorre um "salto" para a vizinhança de outra órbita periódica e então um novo salto para outra órbita e assim por diante. Esse movimento entre órbitas periódicas gera o movimento caótico das partículas.

Assim como o tokamak estudado nos capítulos anteriores, optamos novamente pelo método do regador [84] para o cálculo das variedades do modelo de Horton (6.11)-(6.12). Na Figura 28 temos as variedades estáveis, instáveis e a sela caótica para $\beta = 0, 1$ utilizando $n = 10$ interações. É possível notar em 28(c) que a variedade instável e a estável se cruzam infinitamente, ou seja, há um emaranhamento que ocupa boa parte do espaço de fase. E ainda, a existência da sela caótica (d) sugere que as bacias de escape são fractais [65].

A natureza e propriedade das bacias de escape podem ser compreendidas a partir da estrutura da região caótica do espaço de fase, que é governada pela estrutura das variedades invariantes. As estrias apresentadas nas variedades 28(a) – (b) explicam a característica de *finger-like* que caracteriza as bacias de escape, surgindo pelo mesmo mecanismo de deposição de trajetórias na variedade instável, discutido no caso do tokamak. Comparando as Figura 25(d) e 28(a) é aparente que a variedade estável traça a fronteira entre as bacias. E ainda a forma da variedade instável 28(b), ajuda a entender a assimetria entre as bacias. A variedade instável intercepta a parede do tokamak nas regiões das saídas L e C , enquanto na região entre $0, 3 \leq \Psi \leq 0, 5$ a poucas curvas que tocam a parede. O esqueleto da órbita caótica é a sela caótica 28(d), formada pelos cruzamentos homoclínicos e heteroclínicos entre as variedades estáveis e instáveis. Condições iniciais na sela permanecem nela, exceto se uma parte da sela intercepte uma saída.

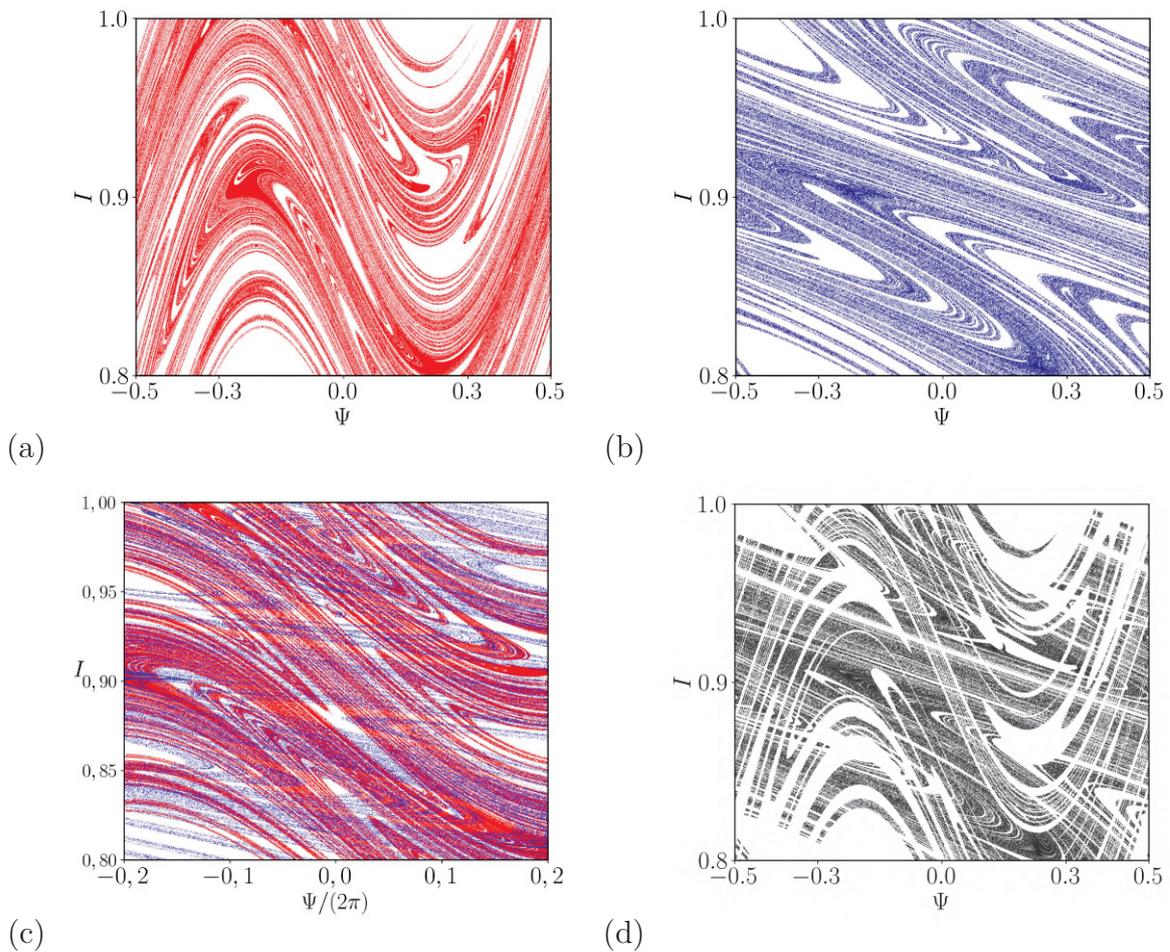


Figura 28 – Em (a) Variedade estável (vermelho), (b) variedade instável (azul), (c) cruzamentos entre as variedades estável e instável e (d) sela caótica (preto), para $\beta = 0, 10$.

6.4.2 Entropia de bacia e fronteira de bacia

A quantificação da fractalidade é feita com o uso da entropia de bacia e fronteira de bacia, considerando as três saídas na parede do tokamak. Na Figura 29(a) mostramos a variação da entropia de bacia S_b e da fronteira de bacia S_{bb} em função da amplitude da perturbação β . Utilizando uma resolução de 1000×1000 caixas de lado 5. Observamos que para baixo, β a entropia apresenta um leve crescimento, com variação, após $\beta = 0,09$ ambas as entropias ultrapassam o critério $\ln 2$, e aumentam até um platô. Como $S_{bb} > \ln 2$ podemos afirmar que o escape de partículas devido à deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ é de fato fractal para alguns valores da perturbação.

A fração ocupada é área do espaço de fase que uma das bacias ocupa, sendo uma medida da estabilidade da bacia. Quando maior a bacia, mais estável ela é à perturbações externas [120]. Na Figura 25(b) é exibido a área ocupada pelas três bacias em função de β . Para $\beta < 0,09$ a área da bacia R (azul) é zero, explicando a razão de que S_b e S_{bb} são menores que $\ln 2$ nesta região, após isso a bacia R passa ocupar uma área maior em que

temos o decréscimo da área de L . A bacia C , verde, possui pouca variação.

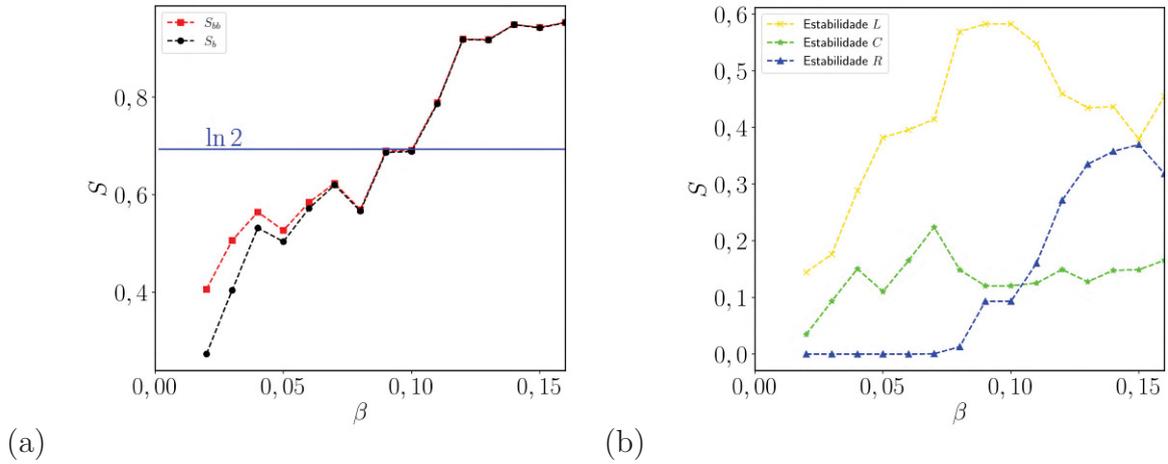


Figura 29 – Em (a) entropia da bacia S_b curva em preto, entropia de fronteira S_{bb} curva em vermelho, linha azul denota o valor de $\ln 2$. Em (b) temos a variação da área ocupada por cada bacia em função de β as cores correspondem as cores das bacias em Fig. 25.

6.4.3 Taxa de escape e dimensões

Além da dimensão, caracterizamos a fractalidade das bacias de escape com a dimensão de incerteza utilizando o algoritmo introduzido por MacDonald *et al* [48], descrito anteriormente. Utilizamos 10^6 condições iniciais randômicas na região caótica no espaço de fase (I_0, Ψ_0) iteradas por 10^6 tempos para calcular a fração de condições iniciais incertas $f(\varepsilon)$. Se a condição inicial não escapa no tempo máximo, ela é removida da simulação. Para cada valor de ε repetimos o cálculo da fração incerta, o erro local é o desvio padrão desse resultado. Usamos dez valores de ε , no caso, 10^k ($1 \leq k \leq 10$), para fazer o diagrama $\log f(\varepsilon) \times \varepsilon$, a dimensão de incerteza é determinada pelo ajuste de mínimos quadrados. O erro global é a média do erro local para cada ε . Nossos resultados para a dimensão de incerteza d são exibidos na tabela 2

β	d	erro global
0,04	1,9996	0,0006
0,06	1,9998	0,0002
0,08	1,9972	0,0007
0,10	1,9897	0,0007
0,12	1,9781	0,0009

Tabela 2 – Resultado para a dimensão de informação (d), como função do parâmetro de perturbação β .

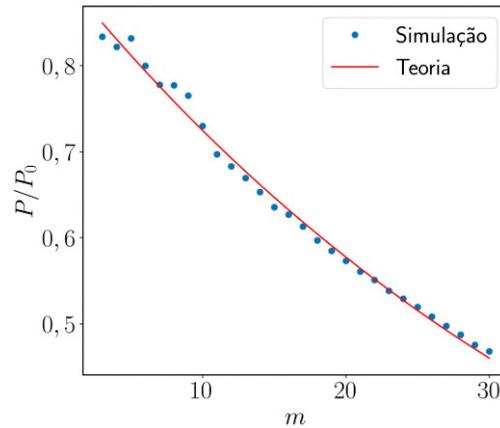


Figura 30 – Número de partículas que continua dentro da região S do espaço de fase, como função do tempo, para $\beta = 0,08$. A linha vermelha é a eq. 6.17 e os pontos azuis a simulação numérica.

O escape de partículas causado por derivas na parede de um tokamak é fractal, com dimensão próxima à dimensão do espaço de fase 2, o que significa que as bacias são extremamente interconectadas, com uma alta taxa de mistura se aproximando de um sistema não determinístico. Com o aumento da perturbação β há uma leve tendência de decréscimo da dimensão de incerteza, atribuímos a isso aos padrões formados na região de $I \leq 0.8$ nas bacias, como pode ser visto em 25(d).

A dinâmica da região caótica é governada pela união de órbitas que não escapam, a sela caótica. Para cada condição inicial (I_0, Ψ_0) há um tempo de escape diferente τ , que é o tempo necessário para a órbita atingir uma saída na parede do tokamak $I = 1,0$. Devido a presença da sela caótica, esse tempo de escape é altamente dependente da condição inicial, então é esperado uma distribuição estatística exponencial

$$P(\tau) = P_0 \exp(-\kappa\tau), \quad (6.17)$$

onde P_0 é a constante de normalização e $\kappa = 1/\langle\tau\rangle$ é a chamada taxa de escape, onde $\langle\tau\rangle$ é o tempo médio de escape. É possível determinar κ utilizando o método do regador para calcular as variedades, calculando o número de condições iniciais que continua em uma região caótica predeterminada S para diferentes valores de iteração. Na Figura 6.4.3 é exibido o número de partículas em S , $0,5 \leq \Psi \leq 0,5$ e $0,8 \leq I \leq 1,0$ em função do número de iterações. O decaimento segue a eq. 6.17 com $\kappa = 0,0227$.

É possível obter uma relação entre o tempo médio de escape e o expoente de Lyapunov médio da sela caótica, através da dimensão de informação [45]. Para obter essa expressão, cobrimos a variedade instável com caixas de tamanho lateral ϵ , os pontos na caixa são condições iniciais e supomos que esse seja um número grande. A união de todas essas caixas forma uma figura plana de área S . Após τ iterações do mapa, um número de

β	κ	λ_{max}	D_1
0.06	0.0092 ± 0.0003	0.50 ± 0.09	1.98
0.08	0.0227 ± 0.0004	0.53 ± 0.07	1.96
0.10	0.0412 ± 0.0008	0.60 ± 0.07	1.93
0.12	0.065 ± 0.001	0.64 ± 0.08	1.90

Tabela 3 – Resultados da taxa de escape (κ), expoente de Lyapunov máximo (λ_{max}) e dimensão de informação (d_1) respectivamente, em função do parâmetro de perturbação β .

partículas irá escapar, atingindo a parede $I = 1, 0$. Portanto, a área ocupada por partículas que não escapam S' é menor por um fator $\exp(-\kappa/\tau)$.

Essa nova área S' é um contorno fechado que encolheu na direção da variedade estável e esticou na direção da variedade instável. Utilizando a definição de contagem de caixas, cobrimos essa nova área com caixas de tamanho lateral $\epsilon' = \epsilon \exp(-\lambda\tau)$, onde $-\lambda$ é a média do expoente de Lyapunov negativo de órbitas que escapam. Essa nova cobertura de caixas é típica com respeito à medida natural da sela caótica. Logo, estamos lidando com a dimensão de informação d_1 das variedades invariantes, que leva em conta a maioria da medida das órbitas que não escapam pertencentes à sela caótica. Isto é, ela leva em conta a região da sela caótica onde as órbitas passam mais tempo. Devido a isso, o número de caixas necessárias para cobrir S' escala como $N(\epsilon) \sim \epsilon^{-D_1}$. Em geral, como d_1 mede a dimensão de um subconjunto da sela caótica, sua dimensão é levemente menor $d_1 \leq d$, i.e., a dimensão fractal D_0 das variedades invariantes é o limite superior da dimensão de informação d_1 . Multiplicando o número de caixas pela área de cada caixa, a área total é $S \sim N(\epsilon)\epsilon^2 \sim \epsilon^{2-D_1}$. Após τ iterações do mapa, temos

$$(\epsilon e^{-\lambda\tau})^{2-d_1} \sim \epsilon^{2-d_1} e^{-\kappa\tau}, \quad (6.18)$$

resultando em

$$d_1 = 2 - \frac{\kappa}{\lambda}. \quad (6.19)$$

Outra caracterização possível de ser obtida com λ e a taxa de escape é a entropia topológica K_0 [64]. Seja $L(t)$ o perímetro de uma região fechada que contém muitas partículas em seu interior. Esse comprimento aumenta com o tempo de acordo com $e^{K_0 t}$, onde t é o número de iterações do mapa. K_0 é o limite superior da entropia métrica $K_1 = \lambda_{max} - \kappa$. Para um sistema fechado, $\kappa = 0$ e $K_0 \leq K_1 = \lambda > 0$.

Na Tabela 3 é exibido os resultados para a dimensão de informação, calculados, com a eq. (6.19), para vários valores do parâmetro β . Comparando d_1 e d vemos que a relação $d \geq d_1$ se mantém para todos os valores, como esperado, além disso, ambas as dimensões são muito próximas.

6.5 Propriedade Wada

O caso com três bacias possui propriedades interessantes, como a propriedade Wada. Em que os pontos da fronteira dividem não apenas duas bacias, mas sim três. Uma bacia \mathcal{B} satisfaz a propriedade de Wada se para qualquer condição inicial que esta na fronteira de uma bacia também é presente na fronteira de outras duas bacias simultaneamente. A vizinhança de ponto P na fronteira de bacia Wada tem uma intersecção não nula com pelo menos outras três bacias diferentes [39]. Sistemas que apresentam a propriedade de Wada são ainda mais complicados de fazer previsões. Se uma trajetória esta próxima de qualquer ponto da fronteira, nada pode ser dito sobre seu futuro, pois a condição inicial pode pertencer a qualquer uma das três bacias.

Uma forma de explicar o surgimento de regiões com a propriedade de Wada é usando a explicação de [121] de *lagos de Wada*, visto na Figura 31. Temos no tempo inicial (a) uma ilha com dois lagos vermelho e verde em volta de um mar em azul, de $t = 0$ a $t = 1/2$, um canal é cavado do oceano de forma que toda a ilha esteja no máximo a 1 km da água do oceano (b). De $1/2$ a $3/4$, outro canal é cavado a partir do lago vermelho de forma que qualquer pedaço da ilha esteja a meio km de distância da água deste lago. Um terceiro canal é cavado em $t = 3/4$ a $t = 7/8$ a partir do lago, de forma que a distância máxima de um ponto da ilha à água verde seja de no máximo $1/4$ km (c). Finalmente, o primeiro canal é expandido para ficar a uma distância de $1/8$ km no tempo, $t = 7/8$ à $t = 15/16$ (d). Esse processo continua até $t = 1$ onde a terra Ω da ilha que resta é a fronteira entre os canais, e cada ponto dela é um ponto de fronteira entre o oceano e os lagos, sendo assim pontos Wada [39].

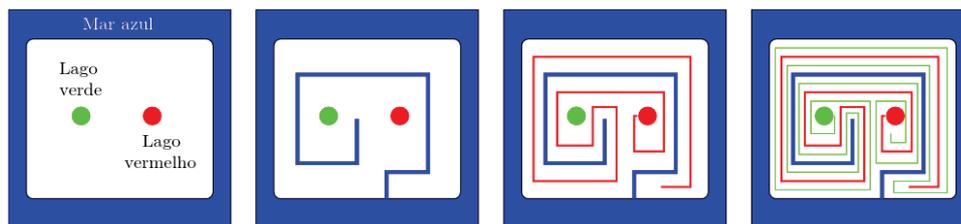


Figura 31 – Criação dos lagos de Wada, (a) ilha com lagos vermelho e verde envolta pelo mar azul, (b) criação do primeiro canal a partir do mar, (c) criação do canal vermelho, (d) criação do canal verde. Retirado de [39].

Na Figura 27(a) com a magnificação das bacias, é possível observar a existência das três bacias, mesmo em escalas pequenas, o que indica que as bacias são Wada, isso constitui um método intuitivo para a classificação. Para identificar os pontos Wada com mais rigor, usamos a principal condição definida em [122, 50]: a variedade instável da sela caótica deve cruzar as três bacias a partir de uma célula caótica, essa é uma condição necessária, mas não suficiente para a propriedade Wada existir. De forma que essa condição verifica Wada apenas localmente, na Figura 32 utilizamos esse procedimento. A propriedade Wada

não está presente totalmente na bacia de escape, uma vez que a fronteira é fractal apenas nos pontos que tendem assintoticamente à borda das saídas.

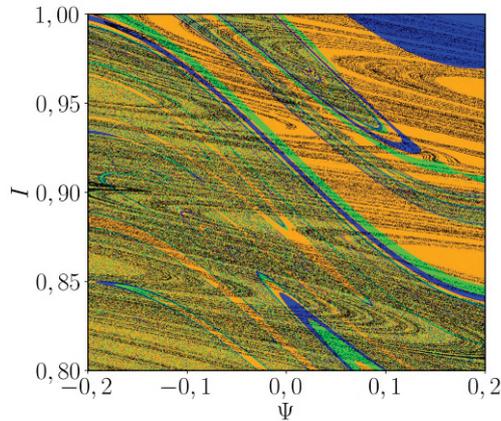


Figura 32 – Ampliação das bacias de escape com três saídas $\beta = 0, 1$, junto com trecho da variedade instável do mapa, em preto.

Para uma melhor quantificação dos pontos que têm a propriedade Wada, utilizamos o método desenvolvido por Daza *et al.* [51], chamado de *grid-approach*. Este método apresenta vantagens sobre a técnica de [50], pois não precisa de um grande conhecimento do sistema dinâmico para obter as variedades, e ainda permite quantificar quanto do espaço de fase é ou não Wada.

Seja Ω uma região fechada do espaço de fase (principalmente na região caótica próxima à parede do tokamak) contendo $N_A \geq 3$ saídas, e dado que possamos denotar como \mathcal{B}_j , $j = 1, 2, \dots, N_A$, as correspondentes bacias de escape. Utilizando uma malha retangular fina, a região Ω é dividida em um conjunto de caixas não sobrepostas b_1, b_2, \dots, b_k . Iteramos cada ponto (I, Ψ) de Ω para descobrirmos por qual saída a partícula escapa, determinando assim sua bacia de escape \mathcal{B}_j .

Definimos, $C(I, \Psi) = j$ se $j \in \mathcal{B}_j$ e $C(I, \Psi) = 0$ e (I, Ψ) não está em nenhum dos conjuntos, o valor de C pode ser entendido como a cor da caixa. Para qualquer caixa retangular, definimos $C(b) = C(I, \Psi)$, onde (I, Ψ) é o ponto no centro da caixa. Definimos também $P(b_j)$ como a coleção de caixas da malha com b_j e todas as caixas que tenham pelo menos um ponto em comum com b_j . No caso bidimensional, $P(b_j)$ é uma coleção 3×3 de caixas com b_j como caixa central. O número de $C(b_j)$ diferentes (cores) em $P(b_j)$ para cada b_j em $M(b_j)$. Dado que $M(b_j) \neq 1, N_A$ para um dado b_j , tomamos as duas caixas mais próximas, em $P(b_j)$, com cores diferentes, e traçamos um segmento de reta que os liga, calculando a cor do ponto médio desta reta. Se a cor do ponto médio é tal que nós temos todas as cores possíveis dentro de $P(b_j)$, então $M(b_j) = N_A$ e o procedimento para. Caso contrário, escolhemos pontos intermediários no segmento de reta e repetimos o procedimento até $M(b_j) = N_A$, ou o número de refinamentos atingir um valor especificado.

Tendo determinado os valores de $M(b_j)$ para todos os pontos da malha, determinamos o conjunto G_m das caixas originais, tais que $M(b_j) = m$, para um dado inteiro m . Que assume os valores $m = 1$, se tivermos o conjunto G_1 de pontos no interior a j -ésima bacia de escape. De maneira análoga, o conjunto G_2 contendo os pontos que separam duas bacias de escape, i.e., quando há duas cores no conjunto $C(b_j)$ esses são pontos de fronteira. E ainda o conjunto G_3 consistindo em pontos que separam três ou mais bacias, ou seja, o conjunto G_3 contém os pontos que satisfazem a propriedade Wada.

Como o procedimento envolve um número de refinamento, seja G_m^q o conjunto G_m obtido no q -ésimo passo do procedimento. Esperamos que, conforme $q \rightarrow \infty$ a sequência convirja para um valor final de G_m , tal que calculamos a seguinte quantidade

$$W_m = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(G_m^q)}{\sum_{j=2}^{N_A} \mathcal{N}(G_j^q)}, \quad (m = 2, 3, \dots, N_A), \quad (6.20)$$

onde $\mathcal{N}(G_j^q)$ é o número de pontos no conjunto G_j no q -ésimo passo.

No caso em que $W_m = 0$, o sistema tem, quase, nenhuma caixa pertencente à fronteira entre m bacias de escape. Se $W_m = 1$, então, quase todas as caixas pertencem a uma fronteira comum às m bacias de escape. O sistema possui a propriedade Wada se $W_{N_A} = 1$, dado que é sempre possível encontrar qualquer cor arbitrariamente próxima à fronteira entre duas outras cores. O sistema é dito parcialmente Wada se $0 < W_m < 1$, com $m \geq 3$.

No caso estudado, temos três bacias de escape, logo, $N_A = 3$. Calculamos W_2 e W_3 em função do número de passos do refinamento q , calculando as cores em pontos médios das caixas adjacentes, isto é

$$W_2 = \frac{\mathcal{N}(G_2)}{\mathcal{N}(G_2) + \mathcal{N}(G_3)}, \quad (6.21)$$

$$W_3 = \frac{\mathcal{N}(G_3)}{\mathcal{N}(G_2) + \mathcal{N}(G_3)}. \quad (6.22)$$

Checamos, para cada q -ésimo passo do procedimento, se os pontos de G_2 podem ou não pertencer a G_3 testando $2(q - 2)$ condições iniciais que são intermediárias entre a caixa central e uma caixa vizinha com cor diferente. Se alguma dessas condições iniciais apresentar a cor que falta, a caixa central é reclassificada como G_3 .

Nosso resultado, após 20 passos de refinamento, é exibido na Figura 33(a), onde os pontos classificados como G_1 são pintados de preto, G_2 de vermelho e G_3 de verde. Observamos a predominância de pontos Wada, pertencentes ao conjunto G_3 , de acordo com a estrutura complexa de bacias da Fig. 25. Curiosamente, o número de pontos interiores é relativamente pequeno, assim como os que pertencem a duas bacias. Isto sugere que a propriedade Wada é válida em grande escala no modelo de Horton.

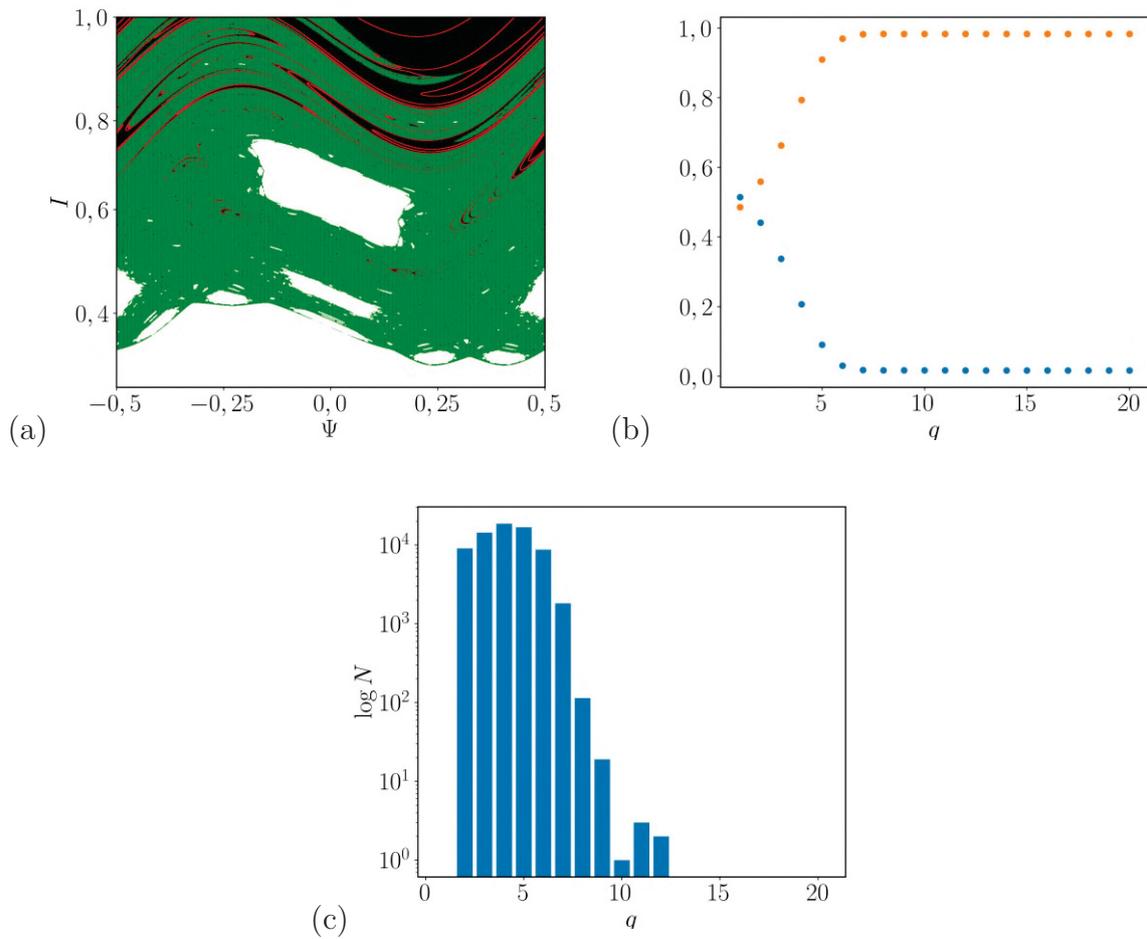


Figura 33 – (a) Estrutura de bacia da 25(d), com pontos classificados como conjunto G_1 (pontos interiores, em preto), pontos do conjunto G_2 (fronteira entre duas bacias, em vermelho), e pontos pertencentes ao conjunto G_3 (pontos de fronteira entre três bacias, em verde), após $q = 20$ refinamentos. (b) Valores das quantidades W_2 (azul) e W_3 (laranja) em função do passo de refinamento. (c) Histograma (em escala semilog) mostrando o número de pontos reclassificados, em função do passo de refinamento.

Os valores de W_2 e W_3 são exibidos na Figura 33(b) como função de q . Observamos uma rápida convergência $q = 4$ refinamento, levando à $W_2 \approx 0,018$ e $W_3 \approx 0,982$. Portanto, as bacias de escape são parcialmente Wada, mas, como cerca de 98% dos pontos de fronteira são pontos Wada, o sistema é aproximadamente Wada para $\beta = 0,1$. A rápida convergência pode ser vista na Figura 33(c), que mostra o histograma para o número de pontos inicialmente classificados como pertencentes ao conjunto G_2 , mas foram reclassificados para o conjunto G_3 à cada passo do refinamento, após um grande número de avaliações das quantidades W_2 e W_3 . Vemos que a convergência é obtida após $q = 6$ passos, e o número de pontos reclassificados decai exponencialmente a zero, conforme q aumenta.

6.6 O mapa com colisões

No modelo teórico que utilizamos para descrever o movimento das partículas, foram negligenciadas as interações mútuas entre as partículas via colisões, assim como outros processos de interação das partículas com o plasma. O que constitui uma aproximação válida se a frequência de colisões é baixa. Entretanto, em casos onde essa aproximação é inválida, algum efeito colisional deve ser considerado. Como nossa descrição é limitada à dinâmica de uma seção de Poincaré, um tratamento detalhado de colisões não é possível. Não podemos utilizar funções de espalhamento para uma dada seção de choque, por exemplo. Portanto, consideramos um modelo fenomenológico em que os efeitos essenciais de colisões são implementados como perturbações randômicas na posição da partícula na seção de superfície de Poincaré [123].

Pertubações randômicas no movimento das partículas podem levar ao escape de partículas inicialmente presas [124, 125]. Entretanto, em problemas de espalhamento, o ruído pode ampliar o aprisionamento de partículas [126]. Para entender o efeito de colisões no escape de partículas advectadas por flutuações eletrostáticas, consideramos um modelo de ruídos simples, em que introduzimos uma componente randômica ao nosso mapa $\mathbf{M}(\mathbf{v}_n)$. O efeito de colisões é incluído adicionando, um deslocamento de tamanho ρ com uma probabilidade P de ocorrer,

$$\rho = \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{v}_n) + \mathbf{C}^P(\rho), \quad (6.23)$$

onde $C_I^P = \rho \sin(\Gamma)$ e $C_\Psi^P = \rho \cos(\Gamma)$, P é a probabilidade de colisão para uma dada função de distribuição e Γ é o ângulo. Para cada condição inicial e a cada instante de tempo n , um novo valor de Γ é gerado no intervalo $-\pi \leq \Gamma \leq \pi$. Com isso, o mapa é não-autônomo e depende do instante do tempo (valor de n). A inclusão de ruído faz com que o mapa deixe de ser conservativo, o que significa que a área no espaço de fase não será mais preservada. Na Figura 34, são exibidas as variedades estáveis (a) e instável (b) para o mapa com colisões e sem, utilizando $P = 1$ e $\rho = 10^{-3}$, calculadas utilizando o método do regador com uma rede de 1000×1000 condições iniciais e $m = 10$ iterações. No mapa colisional, as partículas não traçam a variedade instável, mas sim dispersam em volta dela. A estrutura fractal é destruída com a presença de colisões.

O principal efeito das colisões, em termos do espaço de partículas, é o desfoque das variedades estável e instável. No lugar de um conjunto de filamentos que se assemelha ao conjunto de Cantor, o que temos é uma distribuição de pontos ao redor de onde havia os filamentos.

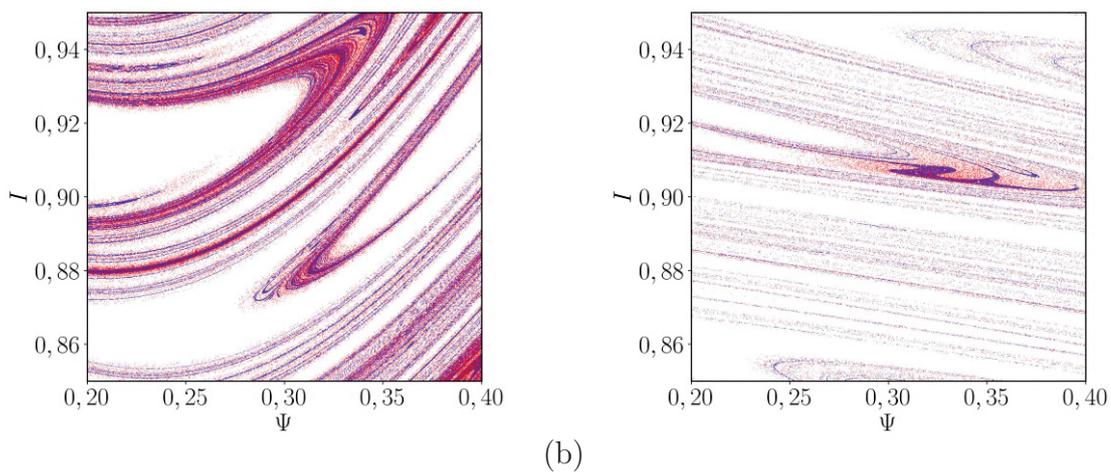


Figura 34 – Aproximações das variedades: (a) estável (b) e instável. Em azul é para o mapa sem colisões e em vermelho é para o mapa com colisões.

Capítulo 7

O efeito *stickiness*

Neste capítulo, discutimos o efeito *stickiness*, no qual órbitas caóticas ficam presas no entorno de ilhas KAM por longos períodos, exibindo comportamento quasi-periódico, até eventualmente escapar para a região caótica do espaço de fase. Utilizamos um método baseado em análise de recorrência para identificar o efeito *stickiness* e como ele permite determinar uma estrutura de ilhas ao redor de ilhas onde as órbitas ficam presas.

7.1 O efeito *stickiness*

Sistemas Hamiltonianos podem exibir comportamento intermitente, onde uma órbita alterna entre movimento regular e caótico. O movimento regular se manifesta na forma de um aprisionamento temporário de órbitas caóticas ao redor de ilhas KAM. Esse comportamento é gerado por *quase armadilhas dinâmicas*, imersas no mar caótico, que prendem as órbitas ao redor de curvas KAM até que as órbitas eventualmente escapem e retornem à região caótica do espaço de fase. Esse efeito é conhecido como *stickiness* [127, 52].

Podemos definir o efeito *stickiness* como o fenômeno em que uma trajetória caótica é atraída para uma dada região do espaço de fase e permanece nela por um longo período de tempo, até que escape de volta para a região caótica. Esse fenômeno resulta em uma mudança no transporte de partículas no espaço de fase. Nas regiões onde comportamento regular e caótico coexistem, há estruturas conhecidas como *cantori* [128, 129]. Eles são conjuntos invariantes que consistem em infinitos pontos, que não formam uma linha contínua no espaço de fase. Na Figura 35 é mostrado, de maneira esquemática, um conjunto de cantori e como uma órbita fica presa entre eles. Os cantorus se formam quando uma curva KAM é quebrada. No lugar dela, sobra uma curva com uma infinidade de lacunas, nas quais trajetórias caóticas entram e ficam presas até encontrarem uma dessas lacunas para escapar.

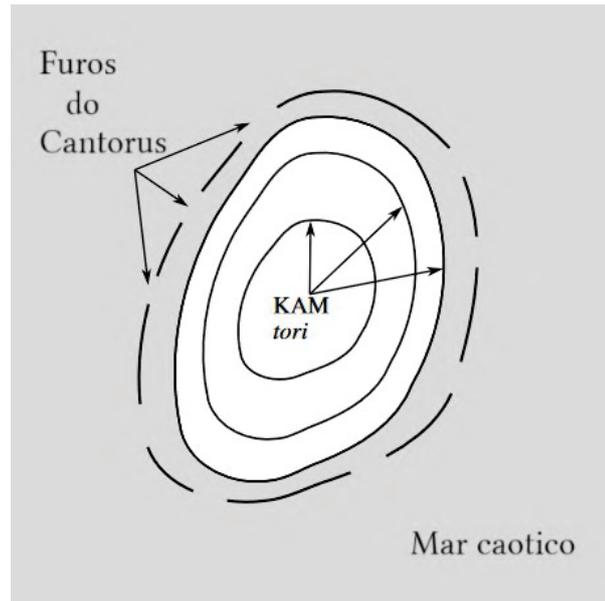


Figura 35 – Figura esquemática de cantorus, onde uma órbita caótica fica presa. Figura adaptada de J. D. Szezech Jr [130].

Há diferentes tipos de aprisionamento, mencionamos aqui o aprisionamento devido a uma estrutura de ilhas hierárquicas, quase armadilhas de rede caótica e quase armadilhas de camada caótica [129, 131]. Ao redor de ilhas ressonantes, há ilhas menores e ao redor dessas, há ilhas ainda menores. Isso se repete em escalas arbitrariamente pequenas, gerando uma estrutura hierárquica de ilhas ao redor de ilhas. O efeito *stickiness* ocorre quando uma órbita caótica se aproxima da vizinhança de uma ilha KAM e fica presa dentro dos cantorus, podendo ir para um nível mais interno da estrutura de ilhas ao redor de outras ilhas de menor ressonância. As quase armadilhas de rede caóticas possuem uma topologia similar à de ilhas hierárquicas, porém elas são criadas quando o sistema passa por uma bifurcação que leva à criação de uma cadeia de ilhas separada da sua ilha base, as chamadas quase armadilhas de rede caótica. Por fim, as quase armadilhas de camada caótica ocorrem quando as ilhas sofrem bifurcações. Uma ilha imersa na região caótica com um ponto elíptico passa por uma bifurcação devido ao aumento do parâmetro de controle, criando dois pontos elípticos adicionais. As separatrizes são destruídas, surgindo uma camada caótica em seu lugar. Eventualmente, essa camada se conecta com a região caótica do espaço de fase, e a quase armadilha de camada caótica surge na junção dessa conexão. A trajetória é presa devido ao fato da camada ser pequena [132].

O aprisionamento interfere com o cálculo com tempos longos, como o necessário para obter os expoentes de Lyapunov. Portanto, a caracterização quantitativa do comportamento de aprisionamento é necessária para avaliar a extensão de tal influência no transporte e médias de quantidades dinâmicas. Uma possível caracterização é através da distribuição de expoentes de Lyapunov, calculados a tempo finito $P(\lambda_n)$, esses são calculados sobre n janelas de uma única órbita caótica. Desta maneira, o expoente não depende da condição

inicial, diferente de sua versão a tempo infinito, $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(I_0, \Psi_0)$. A distribuição apresenta dois picos, um centrado em λ , um segundo pico é causado pelo comportamento de *stickiness* [133]. Existem outras abordagens para a detecção de *stickiness*, utilizando o número de rotação [134], e a determinação de regiões não hiperbólicas ao redor das ilhas [135]. E ainda há abordagens baseadas em gráficos de recorrência [136, 137]. Nos focamos em um destes métodos, proposto por Sales *et al* [138] aplicado ao modelo de ondas de deriva de Horton, com os parâmetros do TCABR (6.11)-(6.12).

7.1.1 Gráficos de recorrência

Gráficos de recorrência (RP, *recurrence plots*) [139], são representações gráficas das recorrências de uma série temporal. Dado uma trajetória \mathbf{x}_i $i = 1, 2, \dots, N$ podemos definir a matriz de recorrência como

$$R_{ij} = \mathcal{H}(\varepsilon - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|), \quad (7.1)$$

onde \mathcal{H} é a função de Heaviside, e $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$ é a distância espacial entre dois estados, calculados com uma norma adequada. E ainda, ε , é um pequeno intervalo. A matriz é composta de 0 e 1, dado o uso da função de Heaviside, tal que RP são como gráficos de contorno com dois níveis: recorrente 1 ou não 0. Dois estados são recorrentes no instante $t = i$ quando eles são próximos em uma dada distância ε para um estado diferente no tempo $t = j$, isto é $\mathbf{x}_i \approx \mathbf{x}_j$. Estados recorrentes são representados por pontos coloridos no gráfico, exibindo várias estruturas diagonais, dependendo da dinâmica do sistema.

A escolha do intervalo ε deve ser feita com cuidado, pois seu valor influencia os resultados: se ε é grande, muitas recorrências são encontradas e não há precisão nas estatísticas do RP. Por outro lado, se ε é muito pequeno, não é registrado muitas recorrências, logo temos estatísticas precisas, mas potencialmente sem significância. Uma possibilidade é considerar o valor ε que maximiza uma quantidade chamada entropia de microestados [140, 141]. Aqui consideramos que ε corresponde à 10% do desvio padrão σ da série temporal, considerando a norma máxima no calculado de σ .

Na figura 36(a) é apresentado o espaço de fase para o modelo de Horton (6.11)-(6.12), para três condições iniciais, junto com os gráficos de recorrência destas condições para $\beta = 0,08$. Para uma órbita quasi-periódica, 36(b), o gráfico de recorrência consiste em linhas diagonais ininterruptas, enquanto a órbita caótica 36(c) exibe linhas diagonais pequenas e pontos espalhados. A órbita com *stickiness* 36(d) apresenta alguma regularidade, como no caso quasi-periódico, porém há regiões que se assemelham com o caso caótico.

É possível distinguir as diferentes soluções de um sistema não linear, contando os tempos de retorno de uma órbita. O tempo de retorno é o tempo necessário para a órbita retornar a uma dada vizinhança de um ponto da órbita. Uma órbita periódica possui apenas um tempo de retorno, com período igual ao tempo de retorno. O teorema de

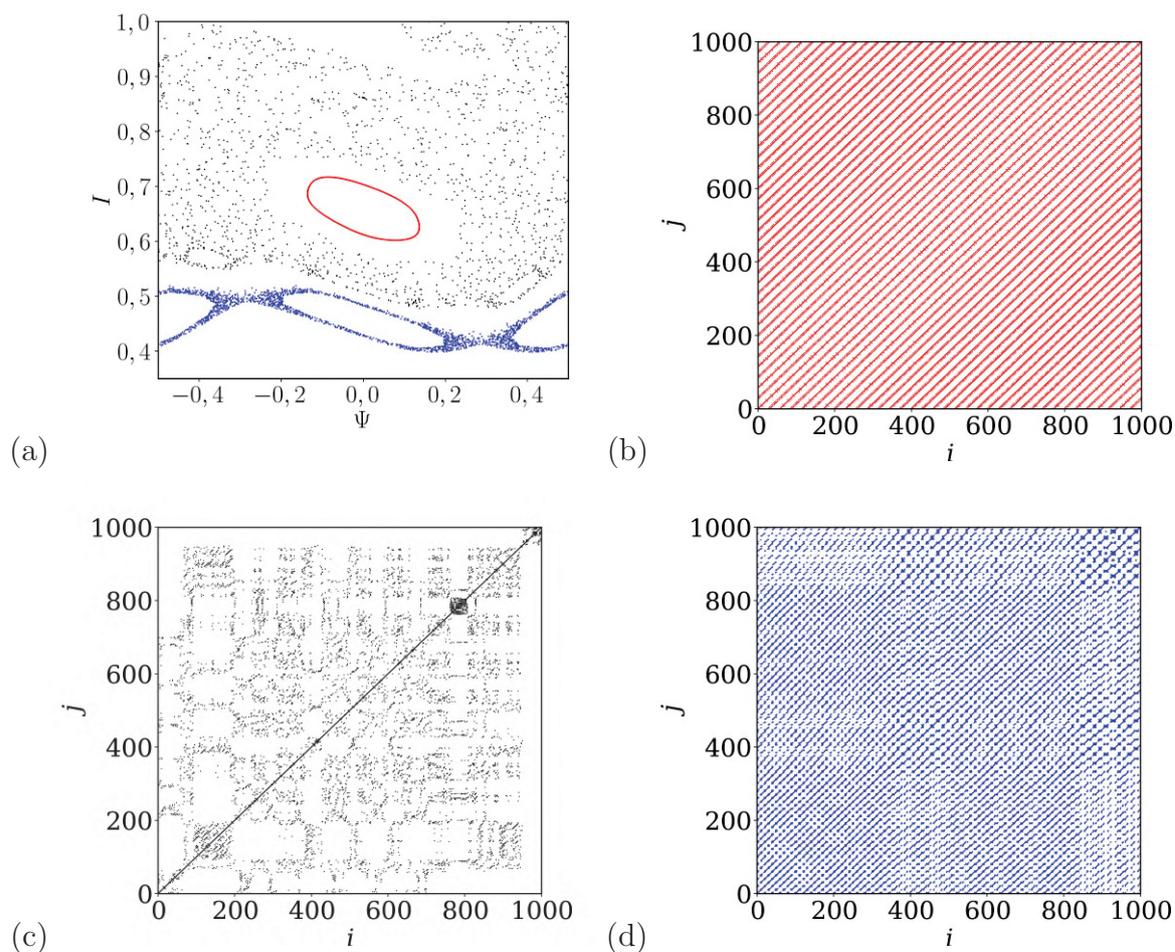


Figura 36 – (a) Espaço de fase para três condições iniciais $(\Psi_0; I_0)$, órbita quasi-periódica (vermelho) $(-0, 1; 0, 65)$, órbita caótica (preto) $(-0, 32; 0, 8)$, e uma órbita caótica que está aprisionado em torno de curvas KAM (azul) $(-0, 37; 0, 47)$, com $\beta = 0.08$ e iteradas por $N = 5 \times 10^4$. Gráficos de recorrência para as 1000 primeiras iterações das órbitas (b) quasi-periódica, (c) caótica, e (d) aprisionada.

Slater [142, 143, 144] afirma que órbitas quasi-periódicas possuem três tempos de retorno diferentes, com o terceiro sendo a soma dos outros dois. Uma órbita caótica possui mais de três tempos de retorno. Os tempos de retorno podem ser obtidos definindo uma região de recorrência e contando quanto tempo é necessário para uma órbita retornar a essa região. Outra maneira é utilizando os gráficos de recorrência, como na próxima seção.

7.1.2 Entropia de tempo de recorrência

A distância vertical entre linhas de um gráfico de recorrência corresponde a uma estimativa dos diferentes tempos de retorno da órbita [137]. A distribuição estatística das linhas verticais brancas pode ser usada para distinguir as órbitas. Considerando o número

total de linhas verticais brancas de comprimento ν , dado pelo histograma

$$P_w(\nu) = \sum_{i,j=1}^N R_{ij} R_{ij+\nu} \prod_{k=0}^{\nu-1} (1 - R_{ij+k}). \quad (7.2)$$

Seja N_w o número total de segmentos de linhas verticais brancas. Então, a probabilidade de uma linha vertical branca de comprimento ν é $p_w(\nu) = P_w(\nu)/N_w$. Portanto, é possível definir a entropia de tempo de recorrência (RTE) como a entropia de Shannon

$$\text{RTE} = - \sum_{\nu=\nu_{min}}^{\nu_{max}} p_w(\nu) \ln p_w(\nu), \quad (7.3)$$

onde ν_{min} e ν_{max} são os comprimentos da mais curta e mais longa linha branca vertical, respectivamente. Consideramos, ao longo desta tese, $\nu_{min} = 1$. O RTE para uma órbita periódica é zero, dado que tem apenas um tempo de retorno. Uma órbita quasi-periódica tem um baixo valor de RTE, enquanto órbitas caóticas têm grandes valores de RTE. Portanto, órbitas caóticas que experienciam *stickiness* têm valores intermediários de RTE.

Para estudar os efeitos de aprisionamento em regiões do espaço de fase, seguimos a evolução de uma única órbita, inicialmente no mar caótico, por um longo tempo N . A trajetória irá visitar toda a região do mar caótico e ficará eventualmente presa em regiões de *stickiness*, onde permanecerá por longos períodos até escapar para o mar caótico. Portanto, as transições de diferentes regimes podem ser melhor estudadas considerando valores de RTE a tempo finito. Calculamos o RTE à tempo finito para uma única órbita caótica em janelas de tamanho n , onde, $n \ll N$, $\{RTE^i(n)\}_{i=1,2,\dots,M}$, com $M = N/n$ e definindo a distribuição de probabilidade do RTE à tempo finito, $P(\text{RTE}(n))$. O histograma de frequência do $RTE^i(n)$ para $N = 10^{10}$ e $n = 200$ é exibido na Figura 37(a). Observamos um comportamento multimodal, que pode ser atribuído a uma estrutura hierárquica de ilhas ao redor de ilhas que permeia o espaço de fase. Quando a órbita não está presa, ela está no mar caótico com um alto valor de RTE que corresponde ao maior pico da distribuição. As regiões dos menores picos são identificadas na Figura 37(b) – (c), onde monitoramos a série temporal $RTE(200)$ e fizemos o gráfico do espaço de fase com diferentes cores para os diferentes intervalos de RTE.

O efeito *stickiness* é um fenômeno intermitente, uma órbita presa eventualmente irá para o mar caótico. Porém, antes que isso ocorra, a órbita visita diferentes regiões de aprisionamento de acordo com uma estrutura de ilhas ao redor de ilhas, que podem ser descritas pelo histograma de frequência do RTE a tempo finito. O escape de uma região de aprisionamento para o mar caótico ocorre através de canais de escape que são, na verdade, as variedades invariantes, na Figura 37(b) – (c) [135].

O tempo que uma órbita aprisionada passa na vizinhança de uma ilha é chamado tempo de aprisionamento, e como a órbita fica presa em diferentes ilhas tempos uma sequência de tempos de aprisionamento $\{t_1, t_2, \dots, t_{N_t}\}$, onde N_t é a quantidade total de

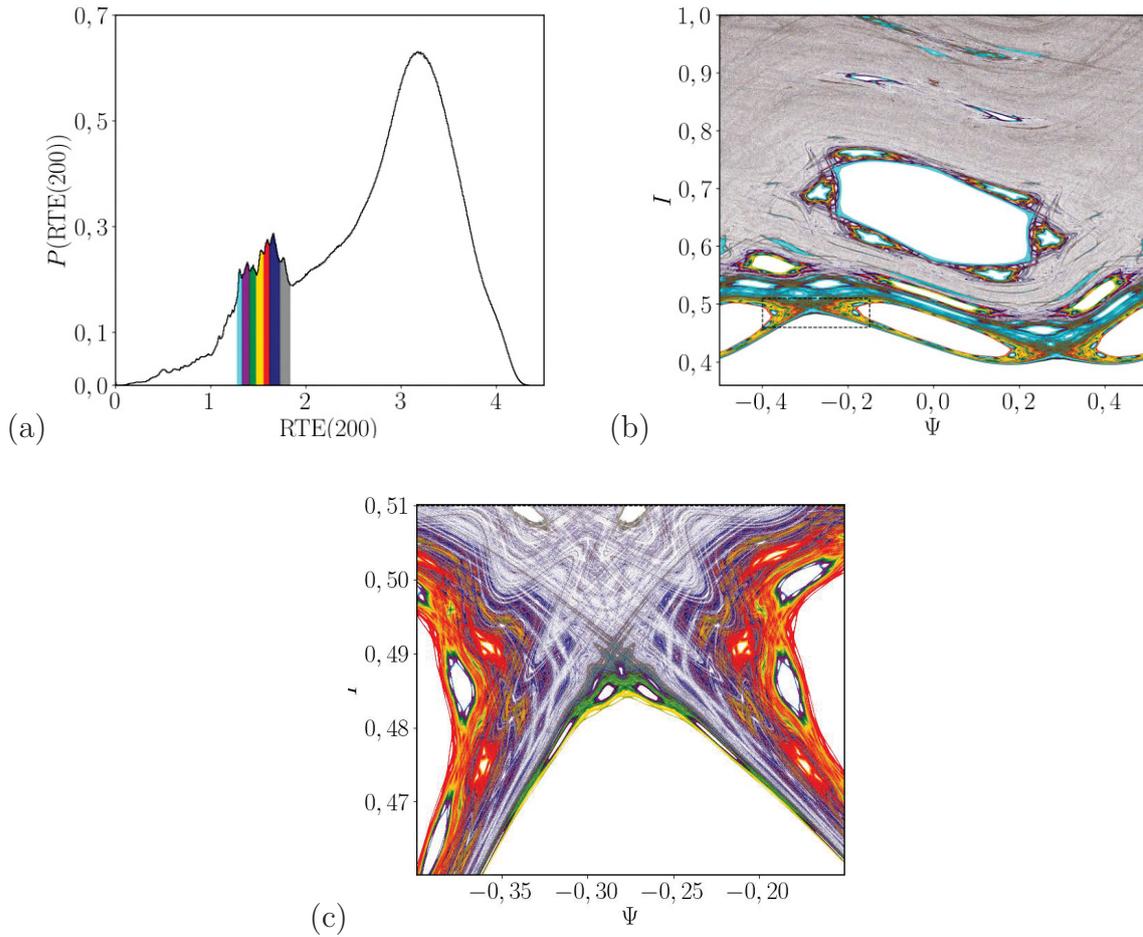


Figura 37 – (a) Distribuição de frequência do RTE calculado à tempo finito, para uma única órbita caótica, com $n = 200$ e $N = 10^{10}$, para o mapa de Horton com $\beta = 0,08$. (b) os pontos do espaço de fase que geram os picos menores da distribuição em (a); (c) magnificação da região indicada por linhas tracejadas de (b).

tempos de aprisionamentos, podemos definir $P(t)$ como a distribuição de probabilidade de tempos de aprisionamento. Considerando agora apenas os tempos de aprisionamentos maiores que um dado valor $t > \tau$ podemos definir a chamada distribuição cumulativa,

$$Q(\tau) = \sum_{t > \tau} P(t) = \frac{N_\tau}{N_t}. \quad (7.4)$$

É esperado que a distribuição cumulativa decaia com τ de maneira exponencial para órbita caótica, enquanto para sistemas Hamiltonianos quase-integráveis, que exibem *stickiness*, decaia como uma lei de potência [145, 146]. Na Figura 38 são exibidos os resultados da distribuição cumulativa em função de τ para $RTE(200)$ com uma série temporal muito longa $N = 10^{10}$ de uma órbita caótica. Diferentes cores representam diferentes regiões de aprisionamento, correspondendo à Figura 37(a). Há uma tendência geral de um decaimento em forma de lei de potência. Temos decaimento exponencial

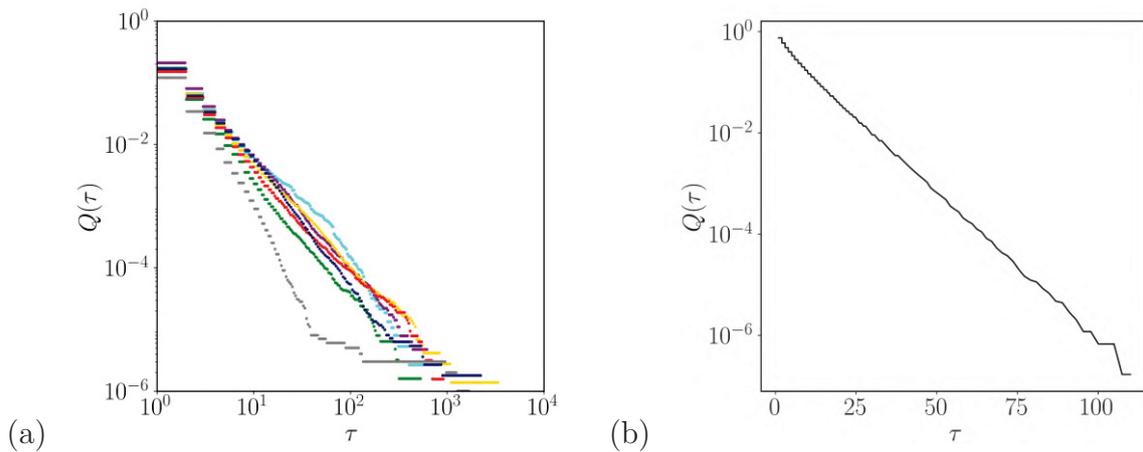


Figura 38 – Em (a) gráfico em escala log–log, de $Q(\tau)$ para cada região de aprisionamento, com $N = 10^{10}$ e $n = 200$. As cores correspondem as cores da Fig. 37(a). Em (b) gráfico log–linear de $Q(\tau)$ para o maior pico da distribuição na Fig. 37(a).

com caudas longas, característico de sistemas com *stickiness*. Para o maior pico da distribuição 37(a), correspondente à região caótica, temos um decaimento exponencial 38(b), correspondendo à região hiperbólica do espaço de fase.

A entropia de tempo de recorrência é um método poderoso que possibilita diferenciar os níveis hierárquicos da estrutura de ilhas ao redor de ilhas dentro da região caótica. Além disso, é possível identificar uma série de tempos de aprisionamento para cada nível, obtendo informações sobre a distribuição cumulativa da hiperbolicidade do espaço de fase.

Conclusões

O comportamento caótico de plasmas é um fenômeno complexo que tem sido estudado há décadas. Recentemente, esse comportamento foi reconhecido como uma parte importante no confinamento magnético de plasmas para fusão nuclear. A existência de uma camada caótica na interface plasma-parede do tokamak é crucial para a compreensão dos padrões complexos de escape de energia e partículas. A compreensão aprofundada desse fenômeno torna-se imperativa para a otimização do confinamento magnético. A investigação e o entendimento das dinâmicas de escape fractal de partículas em tokamaks representam não apenas um desafio científico, mas também um caminho crucial para alcançar a viabilidade prática e sustentável da fusão como fonte de energia.

O comportamento das partículas do plasma ou mesmo das linhas de campo magnético pode ser descrito por complicados modelos de teoria cinética que tentam incluir todos os fatores de interesse físico. No entanto, essa abordagem é computacionalmente custosa, e os modelos hiperrealistas podem esconder comportamentos essenciais do problema, que podem ser melhor descritos por modelos simples. Uma maneira de descrever o plasma confinado magneticamente é utilizando a dinâmica Hamiltoniana. A dinâmica Hamiltoniana permite o uso de resultados poderosos da teoria Hamiltoniana, para interpretar os resultados e caracterizar os regimes dinâmicos observados em experimentos e simulações computacionais. Na presente tese, utilizamos modelos Hamiltonianos com poucos graus de liberdade para estudar o plasma confinado, analisando as estruturas associadas ao escape e a não uniformidade do caos.

Um modelo para descrever as linhas de campo magnético é o Tokamap, um mapa bidimensional que preserva a área do espaço de fase, o qual é capaz de exibir algumas características de situações mais complicadas. Utilizamos o Tokamap para investigar o escape de linhas de campo por saídas no meio da região caótica. As bacias de escape e suas fronteiras formam um padrão complexo e intrincado. Esta complexidade é diretamente associada à incerteza do estado final do sistema: se as bacias de escape são muito misturadas, se torna praticamente impossível prever por qual saída uma dada condição inicial irá evoluir. A fractalidade das bacias e fronteira foram quantificadas com a dimensão de

incerteza. Os resultados numéricos mostram que a dimensão é próxima da dimensão do espaço de fase para um grande intervalo de valores da perturbação do mapa, indicando um alto grau de fractalidade. Isto significa que, mesmo com um aumento da precisão da determinação da condição inicial, tem pouco efeito na previsão do estado futuro.

Outros quantificadores, extremamente úteis, são a entropia de bacia e a de fronteira de bacia introduzida por Sanjuán e colaboradores. Estas quantidades podem variar de zero, quando não há incerteza do estado final, e um valor máximo $\log N_A$, com N_A sendo o número de saídas. No último caso, as bacias são tão misturadas que, para uma condição inicial, escolhida de forma randômica, a probabilidade de escapar por qualquer saída é a mesma, ou seja, equiprovável. Os resultados mostram que ambas as entropias aumentam com o crescimento da perturbação do mapa, e, com o aumento da região caótica, as entropias ficam próximas ao valor máximo e apresentam uma leve queda próximo ao valor máximo da perturbação.

Introduzimos o mapa de Weiss, que descreve o movimento de ondas viajantes em um fluido incompressível. Este mapa viola a condição twist, possuindo uma barreira shearless que impede o transporte. Definindo saídas em cada lado da barreira, mostramos que o tempo médio de escape aumenta após a destruição da barreira, assim como as entropias de bacia e de fronteira. Mostramos que este mapa tem fronteiras de bacia fractais, onde apresentamos uma maneira de estimar o expoente de incerteza da fronteira a partir da entropia de bacia.

Investigamos o escape caótico de partículas utilizando um mapa que preserva a área do espaço de fase para o movimento de deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, causado por flutuações eletrostáticas em um tokamak, utilizando perfis e parâmetros realistas do tokamak TCABr (IFUSP). Nos concentramos na dinâmica das partículas, identificando os conjuntos de condições iniciais que escapam por diferentes saídas localizadas na fronteira do tokamak. Estas saídas podem ser interpretadas como placas de divertor, utilizadas para reduzir o fluxo de partículas e energia em partes sensíveis da parede da máquina. Devido à estrutura subjacente das órbitas caóticas, as bacias de escape e suas fronteiras possuem características fractais, que foram identificadas e quantificadas quanto à incerteza do estado final.

Dividimos a parede entre o plasma e o tokamak em três saídas, permitindo que partículas na região caótica do espaço de fase escapem. As bacias de escape e suas fronteiras exibem propriedades fractais, apresentando inúmeros filamentos derivados da interseção de segmentos da fronteira da bacia com a variedade estável de uma órbita periódica instável dentro da região caótica. Este fenômeno foi verificado por meio do cálculo numérico das variedades invariantes. A variedade estável é o fechamento da fronteira da bacia, explicando sua natureza fractal. Além disso, a sela caótica, um conjunto caótico não atrativo presente em sistemas conservativos e dissipativos, pode ser interpretada como o esqueleto do comportamento não periódico. Em sistemas conservativos, as selas caóticas estão ligadas

à dinâmica de escape, e observações experimentais confirmam sua existência. Qualquer condição inicial próxima à sela caótica seguirá a variedade instável até atingir a parede do tokamak, constituindo os canais de escape para as partículas. Devido à semelhança da sela caótica com um fractal do conjunto de Cantor, a natureza fractal do escape da deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ apresenta propriedades similares. Essa característica é de potencial relevância para o design de dispositivos que buscam diminuir ou controlar as interações plasma-parede, como os divertores ou limitadores.

A incerteza do estado final foi quantificada com a entropia de bacia e a de fronteira de bacia. Ambas as entropias assumem valores maiores que o critério $\ln 2$, ou seja, são fractais, para valores específicos da amplitude de perturbação. Além disso, calculamos as dimensões de incerteza e a dimensão de informação mediante uma relação entre o expoente de Lyapunov máximo e o tempo médio de escape. As dimensões possuem valores $\sim 1,9$ altos, o que indica uma alta fractalidade e, portanto, uma grande incerteza em relação ao estado final do sistema. Salientamos que esse tipo de incerteza é completamente diferente da interpretação usual dada às órbitas caóticas. A incerteza do estado final é devido à fractalidade da fronteira das bacias de escape.

Uma propriedade topológica não trivial de bacias fractais é a propriedade Wada. Para o caso de três ou mais saídas, se qualquer ponto vizinho à fronteira possui pontos das três bacias, o sistema é dito possuir a propriedade Wada. Uma maneira qualitativa de investigar a existência da propriedade é checando se a variedade instável de uma órbita periódica instável na região caótica cruza todas as bacias, o que verificamos numericamente. Uma maneira quantitativa de determinar o quanto do espaço de fase possui a propriedade Wada é empregar o grid-approach. Utilizando sucessivos refinamentos, obtemos que, para um dado valor da amplitude de flutuação, 98% dos pontos de fronteira separam três bacias, logo possuindo Wada, de forma que o sistema não é totalmente Wada, mas está muito próximo disto. A consequência física da propriedade Wada é essencialmente a mesma da natureza fractal das bacias de escape e suas fronteiras.

Investigamos a influência de colisões sobre as estruturas fractais do espaço de fase de partículas, adicionando um termo colisional ao mapa de Horton para flutuações eletrostáticas, assumindo que as colisões podem ser modeladas como um ruído. Com este procedimento, encontramos que as colisões degradam as estruturas fractais, causando uma dispersão de partículas no entorno das variedades invariantes.

Utilizando o conceito de entropia de tempo de recorrência (RTE), nossa análise revela a presença do efeito *stickiness* no sistema e o quantifica. Este fenômeno implica que órbitas caóticas se tornam temporariamente presas na vizinhança de ilhas de periodicidade, até eventualmente retornarem à região caótica. A distribuição de RTE a tempo finito exhibe um padrão multimodal. Em que o maior pico corresponde ao mar caótico, e os picos menores correspondem a níveis distintos de uma estrutura hierárquica de ilhas ao

redor de ilhas. Consequentemente, é possível distinguir os diferentes níveis inerentes a esta estrutura complexa. E ainda, foi possível calcular a distribuição cumulativa de tempos de aprisionamento relacionados com cada nível hierárquico. Os picos pequenos exibem uma distribuição cumulativa na forma de lei de potência com caudas longas, característico do efeito *stickiness*. Enquanto, o pico maior, região hiperbólica, exhibe um decaimento exponencial.

Nossos resultados, mesmo que obtidos mapas simples, são úteis para o problema geral da incerteza do estado final de plasmas complexos. Mesmo para não linearidades fracas ou moderadas, a existência de uma sela caótica com uma estrutura fractal é suficiente para produzir bacias de escape complicadas, tornando praticamente impossível fazer previsões sobre a evolução do sistema quanto ao escape.

Referências

- [1] J. D. Jenkins, Jesse, M. Luke, and S. Thernstrom. Getting to zero carbon emissions in the electric power sector. *Joule* **2**(12), (2018): 2498-2510.
- [2] M. S. Ziegler, et al. Storage requirements and costs of shaping renewable energy toward grid decarbonization. *Joule*, **3**(9), (2019): 2134-2153.
- [3] J. Parisi and J, Ball. The Future Of Fusion Energy. *World Scientific Publishing Europe*, 2019.
- [4] T.E.G. Nicholas, T. P. Davis, F. Federici, J. Leland, B.S. Patel, C. Vincent and S. H. Ward. Re-examining the role of nuclear fusion in a renewables-based energy mix. *Energy Policy*, **149**, (2021): 112043.
- [5] F.F. Chen. Introduction to plasma physics and controlled fusion, *New York: Plenum Press*, 1984.
- [6] J. P. Goedbloed, and S. Poedets. Principles of magnetohydrodynamics: with applications to laboratory and astrophysical plasmas, *Cambridge University Press*, 2004.
- [7] J. A. Bittencourt, Fundamentals of plasma physics. *New York: Springer Science & Business Media*, 2013.
- [8] Freidberg, J. P., Plasma physics and fusion energy, *Cambridge University Press*, 2008.
- [9] Betti, R., and O. A. Hurricane. Inertial-confinement fusion with lasers. *Nature Physics* **12**(5) (2016): 435-448.
- [10] J.P. Ribe, Fusion reactor systems, *Reviews of Modern Physics*, **47**(1), (1975): 7.
- [11] L.C. Steinhauer. Review of field-reversed configurations. *Physics of Plasmas* **18**(7), (2011): 070501.
- [12] G. K. Morikawa. Double-Toroidal Hydromagnetic-Equilibrium Configurations within a Perfectly Conducting Sphere. *The Physics of Fluids* **12**(8), (1969): 1648-1651.

- [13] K. Ikeda. Progress in the ITER physics basis, *Nuclear Fusion*, **47**(6), 2007.
- [14] E. Gibney, Reactor smashes energy record. *Nature Physics* **602**, (2022): 371.
- [15] Abu-Shawareb, *et al.* Lawson criterion for ignition exceeded in an inertial fusion experiment. *Physical Review Letters* **129**(7), (2022): 075001.
- [16] G. Federici, P. Andrew, P. Barabaschi, J. Brooks, R. Doerner, A. Geier, A. Herrmann, G. Janeschitz, K. Krieger, A. Kukushkin, and A. Loarte. Key ITER plasma edge and plasma-material interaction issues. *Journal of Nuclear Materials*, **313**, (2003): 11-22.
- [17] T. E. Evans, C. Chandre, X. Leoncini, and G. Zaslavsky, G. Chaos, Complexity and Transport: Theory and Applications: Proceedings of the CCT'07, *Marseille, France, World Scientific*, 2008.
- [18] E. Bertolini, G. Celentano, J. R. Last, J. Tait, A. Tesini, A., G. D. Mut, C. D'Urzo, L. Ghirlanda, A. Laurenti, A. Maragliano, and A. Veardo, *IEEE Transactions on Magnetics*, **28**(1), (1992): 275-278.
- [19] B. Lipschultz, B. LaBombard, J. L. Terry. C. Boswell, and I. H. Hutchinson, *Fusion Science and Technology* **51**, (2007): 369.
- [20] F. Karger, and K. Lackner, *Physics Letters A*, **61**(6), (1977): 385-387.
- [21] D. E. Post and R. Behrisch, Introduction to the Physics of Plasma-Wall Interactions in Controlled Fusion, *New York: Plenum Press* 1986.
- [22] W. Horton and S. Benkadda, ITER Physics, *World Scientific, Singapore*, 2015.
- [23] T. J. Martin and J. B. Taylor, Ergodic behaviour in a magnetic limiter, *Plasma Physics and Control Fusion* **26**, (1984): 321.
- [24] E. C. da Silva, I. L. Caldas, and R. L. Viana, Ergodic magnetic limiter for the TCABR, *Brazilian Journal of Physics* **32**, (2002): 39.
- [25] E.J. Doyle, *et al.* Plasma confinement and transport, *Nuclear Fusion* **47**, 2007.
- [26] W. Horton. Nonlinear drift waves in magnetized plasma. *Physics Reports*, **192**, (1990): 1-3.
- [27] R. Balescu. Aspects of Anomalous Transport in Plasmas, *CRC Press, Boca Raton, Florida*, 2005.
- [28] B. Scott. The character of transport caused by $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift turbulence, *Physics of Plasmas* **10**, (2003): 963-976.

- [29] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. CRC Press 2nd Ed., 2018
- [30] Mandal D., Y. Elskens, X. Leoncini, N. Lemoine, and F. Doveil. Sticky islands in stochastic webs and anomalous chaotic cross-field particle transport by $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ electron drift instability, *Chaos, Solitons & Fractals* **145**, (2021): 110810.
- [31] G. M. Zaslavsky, *The physics of chaos in hamiltonian systems*, Imperial College Press, London 2nd ed., 2007.
- [32] R. L. Viana, A. C. Mathias, F. A. Marcus, T. Kroetz, and I. L. Caldas. Fractal boundaries in chaotic hamiltonian systems, *Journal of Physics: Conference Series*, **911**, (2017): 012002.
- [33] E. C. da Silva, I. L. Caldas, R. L. Viana, and M. A. Sanjuán. Escape patterns, magnetic footprints, and homoclinic tangles due to ergodic magnetic limiters. *Physics of Plasmas* **9**, (2002): 4917–4928.
- [34] J. C. Sommerer, H. C. Ku, and H. E. Gilreath, *Physics Review Letters* **77**(25), (1996): 5055.
- [35] T.E. Evans, R.K.W. Roeder, J.A. Carter, B. I. and Rapoport, B.I. Homoclinic tangles, bifurcations and edge stochasticity in diverted tokamaks. *Contributions to Plasma Physics*, **44**(1-3), (2004): 235-240.
- [36] A. Wingen, M. Jakubowski, K. H. Spatschek, S. S. Abdullaev, K. H. Finken, M. Lehnen, and TEXTOR team, Traces of stable and unstable manifolds in heat flux patterns. *Physics of Plasmas* **14**(4), (2007): 042502.
- [37] B. Mandelbrot B. *The fractal geometry of nature*, WH freeman, New York, 1982.
- [38] L. Pietronero and E. Tosatti E. *Fractals in physics*, Elsevier, North Holland, 1986.
- [39] J. Aguirre R. L. Viana, M. A. F. Sanjuan M. A. F. Fractal structures in nonlinear dynamics, *Reviews of Modern Physics*, **81**, (2009): 333..
- [40] R. Balescu, M. Vlad, F. Spineanu. Tokamap: A Hamiltonian twist map for magnetic field lines in a toroidal geometry, *Physics Review E* **58**, (1998): 951.
- [41] J. B. Weiss. Transport and mixing in traveling waves. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* **3**(5) (1991): 1379-1384.
- [42] P. J. Morrison, Magnetic field lines, Hamiltonian dynamics, and nontwist systems, *Physics of Plasmas* **7**, (2000): 2279.

- [43] Horton, W., H. Park, Jae-Min Kwon, D. Strozzi, P. J. Morrison, and Duk-In Choi, Drift wave test particle transport in reversed shear profile, *Physics of Plasmas* **5**(11) (1998): 3910-3917.
- [44] I. C. Nascimento, Y. K. Kuznetsov, J. H. Severo, A. M. Fonseca, A. Elfimov A, V. Bellintani, M. Machida, M. V. A. P. Heller, R. M. O. Galvão, E. K. Sanada, and J. I. Elizondo. Plasma confinement using biased electrode in the TCABR tokamak, *Nuclear Fusion* **45**(8), (2005): 796.
- [45] E. Ott, Chaos in Dynamical Systems, *Cambridge University Press*, 2002.
- [46] A. C., Mathias, R. L. Viana, T. Kroetz, and I. L. Caldas. Fractal structures in the chaotic motion of charged particles in a magnetized plasma under the influence of drift waves, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **469**, (2017): 681-694.
- [47] C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke. Chaos, Strange Attractors, and Fractal Basin Boundaries in Nonlinear Dynamics, *Science*, *238*(4827) (1987): 632-638.
- [48] S. W. McDonald, C. Grebogi, E. Ott and J. A. Yorke, J.A. Fractal basin boundaries, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **17**(2), (1985): 125-153.
- [49] A. Daza, A. Wagemakers, B. Georgeot, D. Guéry-Odelin, and M. A. F. Sanjuán. Basin entropy: a new tool to analyze uncertainty in dynamical systems. *Scientific Reports* **6**(1), (2016): 3141
- [50] H. E. Nusse, H. E and J. A. Yorke. Wada basin boundaries and basin cells. *Physica D: Nonlinear Phenomena* **90**(3) (1996): 242-261.
- [51] A. Daza, A. Wagemakers, M. A. F. Sanjuán, and J. A. Yorke. Testing for basins of Wada. *Scientific Reports* **5**(1), (2015): 16579.
- [52] G. Contopoulos and M. Harsoula. Stickiness in chaos. *International Journal of Bifurcation and Chaos* **18**(10) (2008): 2929-2949.
- [53] K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke. Chaos: An Introduction to Dynamical Systems *Springer, New York* (1996)
- [54] R. L. Viana, Introdução à Dinâmica Não-Linear e Caos, Notas de aula não-publicadas (Curitiba, 2021).
- [55] H. Goldstein, C. Charles and J. Safko. Classical mechanics *Pearson* (2002).
- [56] A. Deriglazov. Integral Invariants. In: Classical Mechanics, *Springer, Berlin* 2010.
- [57] J. V. José, E. J. Saletan. Classical Dynamics: A Contemporary Approach. *Cambridge University Press*, 1998.

- [58] V. I. Arnold, Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica *Ed. Mir, Moscou*, 1987.
- [59] Lichtenberg A. J., Lieberman M. A., Regular and chaotic dynamics *Springer Science & Business Media*, 2013.
- [60] H. Poincaré, Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, Tome III (Gauthier-Villars, Paris, 1899).
- [61] J. Moser, Stable and Random Motions in Dynamical Systems (*Princiton University Press, Princeton*), 1973.
- [62] M. V. Berry, Regular and Irregular Motion, *AIP Conference Proceedings* **46**(16) (1978).
- [63] A. M. O. de Almeida. Sistemas Hamiltonianos: caos e quantização. *Editores da UNICAMP, Campinas* 2nd Ed. (1991).
- [64] N. Fiedler-Ferrara and C. P. C. Prado. Caos: uma introdução, *Edgard Blucher, São Paulo*, 1994.
- [65] A. Péntek, Z. Toroczkai, T. Tél, C. Grebogi and J. A. Yorke. Fractal boundaries in open hydrodynamical flows: Signatures of chaotic saddles. *Physical Review E* **51**(5), (1995): 4076.
- [66] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American mathematical Society* **73**(6) (1967): 747-817.
- [67] J. P. Freidberg. Ideal MHD, *Cambridge university press*, 2014.
- [68] J. P. Freidberg. Ideal magnetohydrodynamic theory of magnetic fusion systems, *Reviews of Modern Physics*, **54**(3), (1982): 801.
- [69] Jarboe T. R., Review of spheromak research, *Plasma Physics and Controlled Fusion* **36**(6), p. 945, 1994.
- [70] L. C. Souza and R. L. Viana. Anisotropic MHD equilibria in symmetric systems. *Physics of Plasmas*, **26**(4), 2019.
- [71] C. Hidalgo, M. A. Pedrosa, B. Gonçalves. Fluctuations, sheared radial electric fields and transport interplay in fusion plasmas, *New Journal of Physics*, **4**, (2002): 51.
- [72] C. Hidalgo. On the nature of transport in fusion plasmas, *Astrophysics and Space Science*, **292**, (2004): 681-690.
- [73] P. M. Morse, H. Feshbach. Methods of Theoretical Physics, *McGraw-Hill*, Part II, 1953.

- [74] W. D. D'haeseleer, W. N. Hitchon, J. D. Callen, et al. Flux coordinates and magnetic field structure: a guide to a fundamental tool of plasma theory, *Springer Science & Business Media*, 2012.
- [75] J. S. E. Portela, I. L. Caldas and R. L. Viana. Tokamak magnetic field lines described by simple maps, *European Physics Journal: Special Topics*, **165**, (2008): 195-210.
- [76] K. C. Rosalem, M. Roberto and I. L. Caldas. Influence of the electric and magnetic shears on tokamak transport, *Nuclear Fusion*, **54**(6), (2014): 064001.
- [77] K. Wiesenmann. A short introduction to plasma physics, *arXiv preprint arXiv:1404.0509*, 2014.
- [78] J. G. Cordey, R. J. Goldston and R.R. Parker. Progress toward a tokamak fusion reactor. *Physics Today* **45**(1), (1992): 22-30.
- [79] R. L. Viana. Chaotic magnetic field lines in a Tokamak with resonant helical windings. *Chaos, Solitons & Fractals* **11**(5) (2000): 765-778.
- [80] S. Thornton and J. Marion. Dinâmica clássica de partículas e sistemas, *Cengage Learning*, 2011.
- [81] B. Weyssow, J. H. Misguish and R. Balescu. Chaotic diffusion across a magnetic island due to a single low-frequency electrostatic wave, *Plasma Physisc Controlled Fusion* **33**(7), 1991: 763-793.
- [82] R. P. Freis, C. W. Hartman, F. M. Hamzeh, and A. J. Lichtenberg. Magnetic-island formation and destruction in a levitron. *Nuclear Fusion* **13**(4), (1973): 533.
- [83] N. N. Filonenko, R. Z. Sagdeev, and G. M. Zaslavsky. Destruction of magnetic surfaces by magnetic field irregularities: Part II. *Nuclear Fusion* **7**(4), (1967): 253
- [84] Y. C. Lai and T. Tél. Transient Chaos: Complex Dynamics on Finite Time Scales, *Springer Science & Business Media*, 2011.
- [85] S. Wiggins, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, *Springer, New York*, 2003.
- [86] M. A. F. Sanjuán, T. Horita and K. Aihara. Opening a closed Hamiltonian map. *Chaos* **13**(1) (2003): 17-24.
- [87] S. Bleher, C. Grebogi, and E. Ott. Bifurcation to chaotic scattering. *Physica D: Nonlinear Phenomena* **46**(1) (1990): 87-121.
- [88] A. E. Motter, and P. S. Letelier. A fractal method for chaos in conservative closed systems of several dimensions. *arXiv preprint arXiv:0101021* (2001).

- [89] A. E. Motter and P. S. Letelier. Arbitrariness in Defining Fractal Basins: Relations Between Open and Closed Systems. *Regular and Chaotic Dynamics* **6**(2)(2001): 215-226.
- [90] T. Kroetz, M. Roberto, I. L. Caldas, R. L. Viana, P. J. Morrison and P. Abbamonte. Integrable maps with non-trivial topology: application to divertor configurations. *Nuclear fusion* **50**(3), (2010): 034003.
- [91] M. W. Jakubowski, O. Schmitz, S. S. Abdullaev, S. Brezinsek, K. H. Finken, A. Krämer-Flecken, M. Lehnen, U. Samm, K. H. Spatschek, B. Unterberg and R. C. Wolf. Change of the magnetic-field topology by an ergodic divertor and the effect on the plasma structure and transport. *Physical Review Letters* **96**(3), (2006): 035004.
- [92] M. W. Jakubowski, S. S. Abdullaev, K. H. Finken and Textor Team. Modelling of the magnetic field structures and first measurements of heat fluxes for TEXTOR-DED operation. *Nuclear Fusion*, **44**(6), (2004): S1
- [93] M. W. Jakubowski, T. E. Evans, M. E. Fenstermacher, M. Groth, C. J. Lasnier, A. W. Leonard, O. Schmitz, J. G. Watkins, T. Eich, W. Fundamenski and R. A. Moyer. Overview of the results on divertor heat loads in RMP controlled H-mode plasmas on DIII-D, *Nuclear Fusion* **49**(9), (2009): 095013.
- [94] M. Keilhacker. H-mode confinement in tokamaks. *Plasma Physics and Controlled Fusion* **29**(10A), (1987): 1401.
- [95] Abdullaev, S.S., Finken, K.H., Jakubowski, M., and Lehnen, M. (2006), Mappings of stochastic field lines in poloidal divertor tokamaks. *Nuclear Fusion* **46**(4), S113.
- [96] N. J. Rose. Hilbert-type space-filling curves. *North Carolina State University, Chicago* (2001).
- [97] J. Aguirre and M. A. F. Sanjuán. Limit of small exits in open Hamiltonian systems. *Physical Review E* **67**(5), (2003): 056201.
- [98] S. R. A. Salinas. Introdução à física estatística, *edUSP, São Paulo*, 1999.
- [99] E. C. Silva, I. L. Caldas and R. L. Viana. Field line diffusion and loss in a tokamak with an ergodic magnetic limiter. *Physics of Plasmas* **8**(6) (2001): 2855-2865.
- [100] J. T. Houghton. The physics of atmospheres. *Cambridge University Press*, 2002.
- [101] P. H. LeBlond and L. A. Mysak, *Waves in the Ocean Elsevier, North-Holland, New York*, 1980.
- [102] R. W. Walden, P. Kolodner, A. Passner and C. M. Surko. A front-tracking method for the computations of multiphase flow. *Physics Review Letters* **55** (1985): 496-499.

- [103] H. Aref. Integrable, chaotic, and turbulent vortex motion in two-dimensional flows. *Annual Review of Fluid Mechanics* **15**(1), (1983): 345-389.
- [104] R. T. Pierrehumbert. Large-scale horizontal mixing in planetary atmospheres. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* **3**(5) (1991): 1250-1260.
- [105] D. del-Castillo-Negrete and P. J. Morrison. Chaotic transport by Rossby waves in shear flow. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* **5**(4) (1993): 948-965.
- [106] F. G. Souza, G. C. Grime and Iberê L. Caldas. Standard twist and non-twist maps. *Revista Brasileira de Ensino de Física* **45** (2023): e20220333.
- [107] R. L. Viana, I. L. Caldas, J. D. Szezech Jr, A. M. Batista, C. V. Abud, A. B. Schelin, M. Mugnaine, M. S. Santos, B. B. Leal, B. Bartoloni, A. C. Mathias, J. V. Gomes and P. J. Morrison. Transport barriers in symplectic maps. *Brazilian Journal of Physics* **51**, (2021): 899-909.
- [108] Y. T. Lau, J. M. Finn and E. Ott. Fractal dimension in nonhyperbolic chaotic scattering. *Physical Review Letters* **66**(8), (1991): 978.
- [109] G. Ciraolo, F. Briolle, C. Chandre, E. Floriani, R. Lima, M. Vittot, M. Pettini, C. Figarella, and P. Ghendrih, *Physical Review E* **69**(5), (2004): 056213.
- [110] D. Mandal, Y. Elskens, N. Lemoine and F. Doveil. Cross-field chaotic transport of electrons by $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ electron drift instability in Hall thruster. *Physics of Plasmas* **27**(3) (2020).
- [111] M. Pettini, A. Vulpiani, J.H. Misguich, M. De Leener, J. Orban, and R. Balescu. Chaotic diffusion across a magnetic field in a model of electrostatic turbulent plasma. *Physical Review A* **38**(1), (1988): 344.
- [112] E. Amato, M. Pettini, and M. Salvati. Non-collisional cross-field diffusion of relativistic electrons. *Astronomy & Astrophysics* **402**(3), (2003): 819-826.
- [113] E. Butkov E. Física Matemática, *Guanabara Dois, Rio de Janeiro*, 1983.
- [114] F. A. Marcus, M. Roberto, I. L. Caldas, K. C. Rosalem and Y. Elskens Influence of the radial electric field on the shearless transport barriers in tokamaks. *Physics of Plasmas*, **26**(2), 2019.
- [115] J. H. F. Severo, I. C. Nascimento, V. S. Tsypin and R. M. O. Galvão. Plasma residual rotation in the TCABR tokamak. *Nuclear Fusion*, **43**(10), (2003): 1047.
- [116] K. C. Rosalem, M. Roberto and I. L. Caldas. Drift-wave transport in the velocity shear layer. *Physics of Plasmas* **23**(7), (2016).

- [117] S. Chance, C. Kessel, S. C. Jardin. The Mercier criterion in reversed-shear tokamak plasmas, *Plasma Physics and Controlled Fusion*, **41**(11), (1999): 1379.
- [118] K. C. Shaing, A. Y. Aydemir, W. A. Houlberg and M. C. Zarnstorff. Theory of Enhanced Reversed Shear Mode in Tokamaks, *Physical Review Letters*, **80**(24), (1998): 5353.
- [119] Y. Elskens and D. F. Escande. Microscopic dynamics of plasmas and chaos. *CRC Press*, 2019.
- [120] P. J. Menck, J. Heitzig, N. Marwan and J. Kurths. How basin stability complements the linear-stability paradigm. *Nature Physics* **9**(2) (2013): 89-92.
- [121] J. G. Hocking and S. Y. Gail. Topology. *Courier Corporation*, 1988.
- [122] J. Kennedy and J. A. Yorke. Basins of wada. *Physica D: Nonlinear Phenomena* **51**(1-3), (1991): 213-225.
- [123] T. Tél, G. Károlyi, Á. Péntek, I. Scheuring, Z. Toroczkai, C. Grebogi, and J. Kadtke. Chaotic advection, diffusion, and reactions in open flows. *Chaos* **10**(1), (2000): 89-98.
- [124] J. M. Seoane, L. Huang, M.A.F. Sanjuán and Y.C. Lai, Effect of noise on chaotic scattering. *Physical Review E* **79**(4), (2009): 047202
- [125] C.S. Rodrigues, A.P.S. de Moura, C. Grebogi. Random fluctuation leads to forbidden escape of particles. *Physical Review E* **82**(2), (2010): 026211
- [126] E.G. Altmann and A. Endler. Noise-enhanced trapping in chaotic scattering. *Physical Review Letters* **105**(24), (2010): 244102.
- [127] G. Contopoulos. The particle resonance in spiral galaxies. Nonlinear effects. *Astrophysical Journal* **181**, (1973): 657-684.
- [128] G. Zaslavsky. Hamiltonian chaos and fractional dynamics. *Oxford University Press, USA*, 2005.
- [129] C. Efthymiopoulos, G. Contopoulos, and N. Voglis. Cantori, islands and asymptotic curve in the stickiness region. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **73**(1-4), (1999): 221–230.
- [130] J. D. Szezech Jr. A transição do regime de caos para caos espaço-temporal em modelos de interações de ondas. *Acervo Teses, UFPR*, 2008
- [131] G. Zaslavsky. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. *Physics Reports* **371**, (2002): 461–580.

- [132] G. Zaslavsky, Dynamical traps, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **168**, (2002):292-304.
- [133] J. D. Szezech Jr, S. R. Lopes and R. L. Viana. Finite-time Lyapunov spectrum for chaotic orbits of non-integrable Hamiltonian systems. *Physics Letters A* **335**(5-6), (2005): 394-401.
- [134] M. S. Santos, M. Mugnaine, J. D. Szezech Jr., A. M. Batista, I. L. Caldas, and R. L. Viana, Using rotation number to detect sticky orbits in Hamiltonian systems, *Chaos* **29** (2019): 043125.
- [135] T. S. Krüger, P. P. Galuzio, T. L. Prado, R. L. Viana, J. D. Szezech Jr and S. R. Lopes. Mechanism for stickiness suppression during extreme events in Hamiltonian systems. *Physical Review E* **91**(6), (2015): 062903.
- [136] M. S. Palmero, I. L. Caldas and I. M. Sokolov. Finite-time recurrence analysis of chaotic trajectories in Hamiltonian systems. *Chaos* **32**(11), (2022): 113144.
- [137] Y. Zou, M. Thiel, M. C. Romano and J. Kurths. Characterization of stickiness by means of recurrence. *Chaos* **17**(4), (2007): 043101.
- [138] M. R. Sales, M. Mugnaine, J. D. Szezech Jr, R. L. Viana, I. L. Caldas, N. Marwan and J. Kurths; Stickiness and recurrence plots: An entropy-based approach. *Chaos* **33**(3), (2023): 033140.
- [139] J. P. Eckmann, S. O. Kamphorst and D. Ruelle. Recurrence plots of dynamical systems. *World Scientific Series on Nonlinear Science Series A* **16**, (1995): 441-446.
- [140] G. Corso, T. L. Prado, G. Z. S. Lima, J. Kurths and S. R. Lopes. Quantifying entropy using recurrence matrix microstates. *Chaos* **28**(8), (2018): 083108.
- [141] S. R. Lopes, T. L. Prado, G. Corso, G. Z. S. Lima and J. Kurths. Parameter-free quantification of stochastic and chaotic signals. *Chaos, Solitons & Fractals* **133**, (2020): 109616.
- [142] N. B. Slater, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. **46**(4), 525-534. *Cambridge University Press*, 1950
- [143] N. B. Slater, Noel B. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **63**(4), 1115-1123. *Cambridge University Press*, 1967.
- [144] D. H. Mayer. On the distribution of recurrence times in nonlinear systems. *Letters in Mathematical Physics* **16**, (1988): 139-143.
- [145] G. Cristadoro and R. Ketzmerick. Universality of algebraic decays in Hamiltonian systems. *Physical Review Letters* **100**(18), (2008): 184101.

-
- [146] J. D. Meiss and E. Ott. Markov tree model of transport in area-preserving maps. *Physica D: Nonlinear Phenomena* **20**(2-3), (1986): 387-402.
- [147] L. C. Souza, A. C. Mathias, I. L. Caldas, Y. Elskens and R. L. Viana. Fractal and Wada escape basins in the chaotic particle drift motion in tokamaks with electrostatic fluctuations. *Chaos* **33**, (2023): 083132.
- [148] L. C. Souza, M. R. Sales, M. Mugnaine, J. D. Szezech Jr., I. L. Caldas, and R. L. Viana, Chaotic escape of impurities and sticky orbits in toroidal plasmas. *Physical Review E* **109** (2024): 015202.
- [149] L. C. Souza, A. C. Mathias, P. Haerter and R. L. Viana. Basin Entropy and Shearless Barrier Breakup in Open Non-Twist Hamiltonian Systems. *Entropy* **25**, (2023): 1142.
- [150] A. C. Mathias, L. C. de Souza, A. B. Schelin, I. L. Caldas, and R. L. Viana. Fractal escape basins for magnetic field lines in fusion devices, *Journal of Applied Nonlinear Dynamics* **12**(4), (2023): 723-738.
- [151] P. Haerter, L. C. de Souza, A. C. Mathias, R. L. Viana and I. L. Caldas. Basin entropy and Wada property in the magnetic field line escape in toroidal plasmas with reversed shear. *International Journal of Bifurcations and Chaos* **33**(9), (2023): 2330022.

Apêndices

APÊNDICE A

Artigos publicados

Os resultados sobre as bacias de escape no modelo de Horton foram publicados na revista Chaos [147]. Os resultados sobre *stickiness* no modelo de Horton utilizando o RTE foram publicado na revista Physical Review E [148]. Os resultados sobre o mapa de Weiss foram publicados na revista: Entropy [149]. Os resultados sobre o Tokamap foram publicados na revista: Journal of Applied Nonlinear Dynamics [150]. E ainda aplicamos os métodos apresentados nesta tese no RevTokamap [151], que gerou uma publicação no International Journal of Bifurcations and Chaos.

Chaos

ARTICLE

pubs.aip.org/aip/cha

Fractal and Wada escape basins in the chaotic particle drift motion in tokamaks with electrostatic fluctuations

Cite as: Chaos **33**, 083132 (2023); doi: 10.1063/5.0147679
 Submitted: 24 February 2023 · Accepted: 26 July 2023 ·
 Published Online: 14 August 2023



L. C. Souza,^{1,a} A. C. Mathias,¹ I. L. Caldas,² Y. Elskens,³ and R. L. Viana^{1,2}

AFFILIATIONS

¹Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Curitiba PR 81531-990, Brazil

²Departamento de Física Aplicada, Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo SP 05315-970, Brazil

³Aix-Marseille Université, PIIM, UMR 7345 CNRS case 322 campus Saint-Jérôme, F-13397 Marseille, France

^aAuthor to whom correspondence should be addressed: leonardo@fisica.ufpr.br

PHYSICAL REVIEW E **109**, 015202 (2024)

Chaotic escape of impurities and sticky orbits in toroidal plasmas

L. C. Souza,^{1,*} M. R. Sales,² M. Mugnaine,³ J. D. Szezech, Jr.,² I. L. Caldas,³ and R. L. Viana^{1,3}

¹Universidade Federal do Paraná, Departamento de Física, Curitiba, PR 81531-990, Brazil

²Universidade Estadual de Ponta Grossa, Programa de Pós-Graduação em Ciências, Ponta Grossa, PR 84030-900, Brazil

³Universidade de São Paulo, Instituto de Física, São Paulo, SP 05315-970, Brazil

(Received 12 September 2023; accepted 1 December 2023; published 5 January 2024)

We investigate chaotic impurity transport in toroidal fusion plasmas (tokamaks) from the point of view of passive advection of charged particles due to $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift motion. We use realistic tokamak profiles for electric and magnetic fields as well as toroidal rotation effects, and consider also the effects of electrostatic fluctuations due to drift instabilities on particle motion. A time-dependent one degree-of-freedom Hamiltonian system is obtained and numerically investigated through a symplectic map in a Poincaré surface of section. We show that the chaotic transport in the outer plasma region is influenced by fractal structures that are described in topological and metric point of views. Moreover, the existence of a hierarchical structure of islands-around-islands, where the particles experience the stickiness effect, is demonstrated using a recurrence-based approach.

DOI: 10.1103/PhysRevE.109.015202



Article

Basin Entropy and Shearless Barrier Breakup in Open Non-Twist Hamiltonian Systems

Leonardo C. Souza, Amanda C. Mathias , Pedro Haerter and Ricardo L. Viana *

Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Curitiba 81531-990, PR, Brazil; leonardo.ucoz@gmail.com (L.C.S.); amaandafisica@gmail.com (A.C.M.); pedrohaerter.095@gmail.com (P.H.)
* Corresponding: viana@fisica.ufpr.br

Journal of Applied Nonlinear Dynamics 12(4) (2023) 725-740



Fractal Escape Basins for Magnetic Field Lines in Fusion Plasma Devices

Amanda C. Mathias¹, Leonardo C. de Souza¹, Adriane R. Schelin², Iberê L. Caldas³, Ricardo L. Viana^{1,3,†}

¹ Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, 81531-990, Curitiba, Paraná, Brazil
² Departamento de Física, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brazil
³ Instituto de Física, Universidade de São Paulo, 81531-990, Curitiba, Paraná, Brazil

Submission Info	Abstract
<p>Communicated by Christos Volos Received 14 March 2022 Accepted 8 August 2022 Available online 1 October 2023</p>	<p>Plasma confinement in fusion devices like Tokamaks depends on the existence of closed magnetic field lines with toroidal geometry. The magnetic field line structure in toroidal plasma devices is a Hamiltonian system, where the role of time is played by an ignorable coordinate. Nonsymmetrical perturbations lead to a nonintegrable Hamiltonian system that can exhibit area-filling chaotic orbits. If exits are suitably positioned on a chaotic magnetic field line region, the Hamiltonian system becomes open and one is interested to know the corresponding escape basins, i.e., the sets of initial conditions for which the corresponding field lines escape through a given exit. From general mathematical arguments, it can be shown that these escape basins are fractal. In this paper, we investigate quantitatively fractal escape basins in the magnetic field line structure in Tokamaks described by an area-preserving map proposed by Balescu et al. using the uncertainty dimension to characterize the fractal structure of the magnetic field lines. We also use the concept of basin entropy in order to quantify the final state uncertainty, a relevant issue that arises when fractal basins are involved.</p> <p>©2023 L&H Scientific Publishing, LLC. All rights reserved.</p>
<p>Keywords Escape basins Magnetic field lines Fractal structures Tokamaks Basin entropy</p>	



International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 33, No. 9 (2023) 2330022 (12 pages)
© World Scientific Publishing Company
DOI: [10.1142/S0218127423300227](https://doi.org/10.1142/S0218127423300227)

Basin Entropy and Wada Property of Magnetic Field Line Escape in Toroidal Plasmas with Reversed Shear

P. Haerter*, L. C. de Souza, A. C. Mathias and R. L. Viana
*Department of Physics, Federal University Paraná,
81531-990 Curitiba, Paraná, Brazil*
*haerter@fisica.ufpr.br

I. L. Caldas
*Institute of Physics, University of São Paulo,
05315-970 São Paulo, São Paulo, Brazil*

Received February 24, 2023; Revised June 5, 2023