

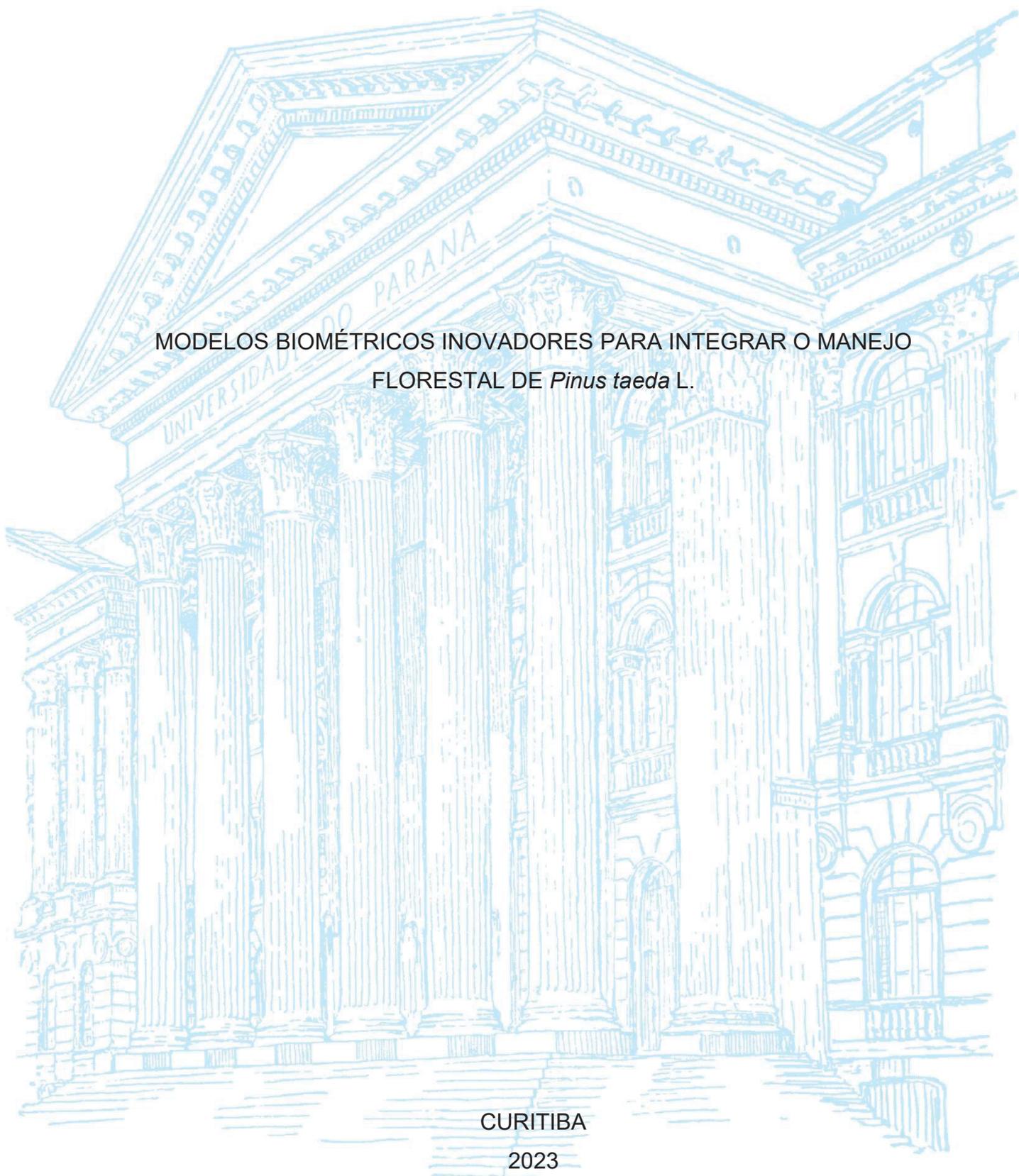
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

FLAVIO ROBERTO STEFANELLO

MODELOS BIOMÉTRICOS INOVADORES PARA INTEGRAR O MANEJO
FLORESTAL DE *Pinus taeda* L.

CURITIBA

2023



FLAVIO ROBERTO STEFANELLO

MODELOS BIOMÉTRICOS INOVADORES PARA INTEGRAR O MANEJO
FLORESTAL DE *Pinus taeda* L.

Tese apresentada ao curso de Pós-Graduação em Engenharia Florestal, Setor de Ciências Agrárias, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Engenharia Florestal.

Orientador: Prof. Dr. Sylvio Péllico Netto

Co-orientador: Prof. Dr. Alexandre Behling
Prof. Dr. Allan L. Pelissari

CURITIBA
2023

Ficha catalográfica elaborada pela
Biblioteca de Ciências Florestais e da Madeira - UFPR

Stefanello, Flavio Roberto

Modelos biométricos inovadores para integrar o manejo florestal de
Pinus taeda L. / Flavio Roberto Stefanello. - Curitiba, 2023.

1 recurso on-line : PDF.

Orientador: Prof. Dr. Sylvio Péllico Netto

Coorientadores: Prof. Dr. Alexandre Behling

Prof. Dr. Allan Libanio Pelissari

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de
Ciências Agrárias, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Florestal.
Defesa: Curitiba, 30/05/2023.

1. Florestas - Manejo. 2. *Pinus taeda*. 3. Modelos matemáticos.
4. Árvores - Medição - Modelos matemáticos. 5. Equações. I. Péllico
Netto, Sylvio. II. Behling, Alexandre. III. Pelissari, Allan Libanio.
IV. Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Agrárias. V. Título.

CDD – 634.9

CDU – 634.0.62



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIÊNCIAS AGRÁRIAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO ENGENHARIA
FLORESTAL - 40001016015P0

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA FLORESTAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Tese de Doutorado de **FLAVIO ROBERTO STEFANELLO** intitulada: **Modelos Biométricos Inovadores para Integrar o Manejo Florestal de *Pinus taeda* L.**, sob orientação do Prof. Dr. SYLVIO PÉLLICO NETTO, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua **APROVAÇÃO** no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 30 de maio de 2023.

Assinatura Eletrônica
06/06/2023 10:11:07.0
SYLVIO PÉLLICO NETTO
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
07/06/2023 18:25:57.0
JONATHAN WILLIAM TRAUTENMÜLLER
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
07/06/2023 05:04:35.0
JULIO EDUARDO ARCE
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
06/06/2023 15:55:06.0
HENRIQUE SOARES KOEHLER
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
06/06/2023 17:36:36.0
ANGELO AUGUSTO EBLING
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DA AMAZÔNIA)

BIOGRAFIA DO AUTOR

Flavio Roberto Stefanello, filho de Agenor José Stefanello (*In Memoriam*) e Maria Stefanello (*In Memoriam*), nasceu no município de Frederico Westphalen, no estado do Rio Grande do Sul, no dia 28 de julho de 1966. É o mais velho entre três filhos.

Iniciou os estudos no ano de 1971 no Grupo Escolar Afonso Pena, onde cursou o primário, no Colégio Estadual Cardeal Roncalli o ginásio, no Colégio Estadual José Cañellas o segundo grau, concluído em 1982, todos no mesmo município de Frederico Westphalen, Rio Grande do Sul.

Ingressou no curso de Engenharia Florestal da Universidade Federal de Santa Maria em 1983 e o concluiu no ano de 1987, estagiando na Madeireira Rio das Pedras, em Ponte Alta do Norte, em Santa Catarina.

No Ano de 1988 iniciou o programa de Mestrado em Engenharia Florestal na Universidade Federal do Paraná, na linha de pesquisa de Manejo Florestal, sob a orientação do Prof. Dr. Sylvio Péllico Netto, concluído em 1994 e intitulado “MAPEAMENTO DE SÍTIOS COM O USO DA AMOSTRAGEM SISTEMÁTICA”.

Em 1990 trabalhou na empresa SUAZANO DE PAPEL E CELULOSE. No ano de 1992 ingressou na empresa SADIA S.A. INDÚSTRIA E COMÉRCIO na cidade de Concórdia, Meio-Oeste Catarinense. Em 1997 iniciou trabalhos de consultoria florestal e prestação de serviços e criou a empresa **top fLOreStal**. Em 1998 iniciou a instalação e coleta de dados de Inventário Florestal Contínuo. No ano de 1999 trabalhou na criação de um software para processamento de Inventário Florestal Contínuo, que gera Banco de Dados das medições e suas variáveis dendrométricas. Em 2000 adquiriu um GPS Geodésico L1/L2 para levantamentos de áreas florestais e confecção de mapas. Em 2007 elaborou um Sistema de Crescimento e Produção para planejamento da produção. No ano de 2008 desenvolveu os Sistemas de Análise Econômica de Projetos Florestais e Planejamento e execução de Projetos Florestais. Em 2009 elaborou o Planejamento Florestal, usando Programação Linear. No ano de 2016 elaborou Projetos Florestais submetidos ao BNDES para captação de recursos e Projetos de Análise Econômica para Viabilidade de Investimentos. Em 2020 realizou levantamentos com Drone e processa dados para Fotointerpretação de áreas florestais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus de infinitos atributos de amor, inteligência e providência por nós, seus filhos.

Agradeço ao orientador e amigo, Prof. Dr. Sylvio Péllico Netto, pela confiança, persistência e por acreditar em nosso trabalho. Agradeço, também, pelas ideias e diretrizes fornecidas, inúmeras contribuições na execução deste trabalho, nas várias correções de escrita e as conversas durante o café, sempre edificantes e alegres.

Agradeço ao coorientador Prof. Dr. Alexandre Behling pela grata amizade e grande incentivador pessoal e profissional. Agradeço pelo seu interesse e atenção impecáveis para com a minha pessoa e pelo trabalho realizado neste programa. Sempre disposto e alegre, pronto para resolver o desafio que aparecesse. Grande e inesquecível amigo, muita gratidão.

Agradeço ao coorientador Prof. Dr. Allan Libanio Pelissari pela atenção e pelas inesquecíveis aulas de Mensuração Florestal junto ao querido Prof. Dr. Sebastião do Amaral Machado.

Agradeço a minha esposa Suzi pelo amor e dedicação incomensurável, pelo apoio logístico, seus lanchinhos, sua atenção e tudo com muito carinho. Te amo.

Agradeço aos amigos das Empresas Laminados AB Ltda., Geraldo Busato, Vimasa S.A. Industrial Madeireira, querido amigo Walter Reichert (*In Memoriam*) e Rubens Reichert.

Agradeço aos membros da banca examinadora pela disponibilidade, atenção e desejo de contribuir para a melhoria deste trabalho. Agradeço aos colegas Gabriel Orso pelas grandes e inúmeras contribuições para resolver problemas no R, ao Lucas Dalmolin Ciarnoschi pelo auxílio técnico e pelas caronas até a rodoviária sempre depois de umas cervejinhas. Agradeço ao querido amigo Antônio Pedro Fragoso Woycikiewicz pela amizade e conversas, ao Jorge Zea pela companhia e inúmeras caronas, ao amigo Hudson pelas aulas de pilotagem de Drones, ao Maurício e seus pães, a Mirella, Franciele, Clebson Cerqueira, Adriane, Kauana, Samuel, ao novo amigo João Paulo Sardo Madi pela sua disposição e auxílio nas confecções dos gráficos sobre GADA.

Agradecimento especial ao amigo Rubén Manso pelo pronto auxílio na resolução dos ajustes de modelos de crescimento de altura dominante – GADA. Abraço.

Agradeço aos meus pais. Meu pai Agenor José Stefanello (*In Memoriam*) e minha mãe Maria Stefanello (*In Memoriam*).

Agradecimento à CAPES pela bolsa concedida.

Grande abraço Be, filho amado.

Desfrutando a amizade das árvores:

Há três espécies de homens:
os vivos, os mortos e os que andam no mar.
(Platão)

Há três espécies de homens:
os vivos, os mortos e os que andam na floresta.
(Platão-Stefanello)

Oh Sol fecundo,
Que com teu carro brilhante
Abres e fecha o dia!...
Que surges sempre novo e sempre igual!
Que nunca possas ver
Algo maior do que o Brasil
E suas florestas.
Horácio/Stefanello

O caminho mais límpido para adentrar o universo é através de uma floresta selvagem. *John Muir.*

*“As coisas importantes jamais se encontram nos arquivos.” Goethe
...algumas no cafezinho.*

Gita

*Na batalha, na floresta, no precipício das montanhas
No grande mar escuro, em meio a lanças e flechas,
No sono, na confusão, nas profundezas da vergonha,
Defendem o homem os bons atos que ele praticou.*

RESUMO

Introdução – O *Pinus taeda* L. é a principal espécie das florestas plantadas no Meio-Oeste de Santa Catarina, constituindo-se em 70% do total da área e representa, junto com a agroindústria, os principais negócios do estado. O manejo florestal contribui para que estas florestas sejam conduzidas de forma a atingirem seus objetivos dentro dos princípios ecológicos, econômicos e de sustentabilidade. **Objetivo** – Apresentar melhorias inovadoras nos métodos biométricos para melhor descrever as variáveis quantitativas dos povoamentos florestais. Em primeiro lugar será abordada a classificação de sítio utilizando-se de uma técnica denominada de método das diferenças algébricas generalizadas (*Generalized Algebraic Difference Approach* – GADA), em segundo lugar será apresentado uma opção de distribuição diamétrica conhecida como Burr e promissora no setor florestal e, por fim, será tratado do afilamento das árvores com a técnica desenvolvida por Preußner. **Métodos** – Procedimentos analíticos do método GADA: modelagem da altura dominante em função da idade utilizando-se dados de Inventário Florestal Contínuo (IFC) para ajustes de equações de modelos não lineares e equações dinâmicas para gerar as curvas de índice de sítio e compará-las com o método da curva guia. Função densidade de probabilidade (*fdp*) de Burr: ajuste de dados de 9 remedições bianuais de um povoamento florestal de *Pinus taeda* L. manejado para serraria ao longo de sua rotação. Afilamento das árvores: teste dos modelos de Preußner, Kozak 2004, Max-Burkhardt e polinômio de 5º grau de Schöpfer para determinar a forma das arvores, volumes totais e de sortimento no período de rotação do povoamento florestal. Parcelas permanentes foram utilizadas para a aplicação do método GADA usando-se o modelo básico de Chapman-Richards para generalizar a estimativa de altura dominante e resultou em diminuição do erro padrão da estimativa ($S_{yx\%}$) da ordem de mais de 50% e aumento de R^2_{ajust} de 0,95 para 0,99. A distribuição diamétrica utilizada foi a de Burr Tipo XII com três coeficientes, com a qual as frequências diamétricas do número de árvores por hectare foram agrupadas em classes de 2 cm e suas respectivas curvas geradas para as idades de 6 a 24 anos. As estimativas de afilamento, utilizando-se os modelos de Kozak 2004 e de Preußner, apresentaram maior eficiência com estimativas muito próximas umas das outras e alternando-se no decorrer da idade com melhor precisão e acuracidade. Os modelos foram ajustados nas idades de 5, 10, 15 e 20 anos. Kozak 2004 e Schöpfer são modelos não segmentados e Preußner e Max-Burkhardt são segmentados. A metodologia de Preußner utiliza quatro parábolas independentes e de fácil integração por seção para se obter o afilamento e os volumes, enquanto para o de Max-Burkhardt e para os demais modelos ajustados a integração é um processo mais complexo e necessita recursos computacionais. **Conclusão** – Os métodos se mostraram adequados, eficientes, acurados e precisos para: (i) estimar alturas dominantes e classificar sítio: método de GADA; (ii) determinar as *fdp* das árvores.ha⁻¹: Burr Tipo XII e; (iii) modelar forma e calcular volumes totais e de sortimento: Kozak 2004 e Preußner. A novidade e a característica destacável nas funções de Preußner são sua flexibilidade, simples cálculos de volume e facilidade para interpretar o significado de seus coeficientes.

Palavras Chave: *Pinus taeda* L.; Manejo florestal; Metodologia GADA; *fdp* de Burr; Funções de Preußner.

ABSTRACT

Introduction – *Pinus taeda* L. is the main species of planted forests in the Midwest of Santa Catarina, constituting 70% of the total area and representing, along with agribusiness, the main businesses of the state. Forest management contributes to ensuring that these forests are managed in a way that achieves their objectives within ecological, economic, and sustainability principles. *Objective* – To present innovative improvements in biometric methods to better describe quantitative variables of forest stands. Firstly, the site classification using a technique called Generalized Algebraic Difference Approach (GADA) will be addressed. Secondly, an option of diameter distribution known as Burr and promising in the forestry sector will be presented. Finally, the tapering of trees will be treated with the technique developed by Preußner. *Methods* – Analytical procedures of the GADA method: modeling dominant height as a function of age using Continuous Forest Inventory (CFI) data to fit nonlinear models' equations and dynamic equations to generate site index curves and compare them to the guide curve method. Burr probability density function (*pdf*): fitting data from 9 biannual measurements of a sawmill-managed *Pinus taeda* L. forest stand throughout its rotation. Tree tapering: testing Preußner, Kozak 2004, Max-Burkhardt and Schöpfer's 5th degree polynomial models to determine tree shape, total and assortment volumes during the rotation period of the forest stand. Permanent plots were used for the application of the GADA method using the basic Chapman-Richards model to generalize the dominant height estimate, resulting in a more than 50% reduction in the standard error of the estimate ($S_{yx\%}$) and an increase in R^2_{adj} from 0.95 to 0.99. The diameter distribution used was the Burr Type XII distribution with three coefficients, in which the diameter frequencies of the number of trees per hectare were grouped into 2 cm classes and their respective curves generated for ages 6 to 24 years. Taper estimates using the Kozak 2004 and Preußner models showed higher efficiency with very close estimates to each other and alternating with age as to the best precision and accuracy. The models were adjusted at ages 5, 10, 15, and 20 years. Kozak 2004 and Schöpfer are unsegmented models, and Preußner and Max-Burkhardt are segmented. Preußner's methodology uses four independent and easily integrable parabolas per section to obtain taper and volumes, while for Max-Burkhardt and other fitted models, integration is a more complex process that requires computational resources. *Conclusion* – The methods were suitable, efficient, accurate, and precise for: (i) estimating dominant heights and site classification: GADA method; (ii) determining the probability density functions (*pdf*) of trees.ha⁻¹: Burr Type XII; and (iii) modeling shape and calculating total and assortment volumes: Kozak 2004 and Preußner. The novelty and outstanding characteristic of Preußner's functions are their flexibility, simple volume calculations and ease of interpreting the meaning of their coefficients.

Keywords: *Pinus taeda* L.; Forest management; GADA methodology; Burr *pdf*; Preußner functions.

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 2

FIGURA 2.1 – MAPA DAS REGIÕES DE SANTA CATARINA COM OS PLANTIOS DE <i>Pinus</i> E <i>Eucalyptus</i> E LOCALIZAÇÃO DAS FLORESTAS OBJETO DE ESTUDO.....	46
FIGURA 2.2 – MODELOS AJUSTADOS E SUAS CURVAS GUIAS	50
FIGURA 2.3 – CURVAS GUIAS DOS MODELOS AJUSTADOS COM DADOS ATÉ 30 ANOS.....	51
FIGURA 2.4 – RESÍDUOS PERCENTUAIS DO AJUSTE DA ALTURA DOMINANTE.....	51
FIGURA 2.5 – RESÍDUOS PERCENTUAIS DO AJUSTE DA ALTURA DOMINANTE NO PERÍODO DE ROTAÇÃO	52
FIGURA 2.6 – RESÍDUOS PADRONIZADOS DO AJUSTE DOS MODELOS DA ALTURA DOMINANTE	52
FIGURA 2.7 – GRÁFICO DE RESÍDUOS DO MODELO DE CHAPMAN-RICHARDS PARA ESTIMATIVA DE h_d	53
FIGURA 2.8 – CLASSIFICAÇÃO DE ÍNDICE DE SÍTIO PELO MÉTODO DA CURVA GUIA UTILIZANDO O MODELO DE CHAPMAN-RICHARDS PARA ESTIMATIVA DE h_d E IDADE DE REFERÊNCIA DE 16 ANOS.....	53
FIGURA 2.9 – CURVAS DE ÍNDICE DE SÍTIO PELO MÉTODO DA CURVA GUIA, UTILIZANDO DADOS SELECIONADOS E O MODELO DE CHAPMAN-RICHARDS PARA ESTIMATIVA DE h_d E IDADE DE REFERÊNCIA DE 16 ANOS.....	56
FIGURA 2.10 – CURVAS DE ÍNDICE DE SÍTIO PELO MÉTODO DA CURVA GUIA E GADA MODELO III UTILIZANDO O MODELO BÁSICO DE CHAPMAN-RICHARDS PARA ESTIMATIVA DE h_d E IDADE DE REFERÊNCIA DE 16 ANOS DAS 903 PARCELAS.....	57
FIGURA 2.11 – CLASSES DE ÍNDICE DE SÍTIO E AS CURVAS DAS 903 PARCELAS PELO MÉTODO ADA MODELO I UTILIZANDO O MODELO BÁSICO DE CHAPMAN-RICHARDS PARA	

ESTIMATIVA DE h_d E IDADE DE REFERÊNCIA DE 16 ANOS.	57
FIGURA 2.12 – CLASSES DE ÍNDICE DE SÍTIO E AS CURVAS DAS 903 PARCELAS PELO MÉTODO GADA MODELO III UTILIZANDO O MODELO BÁSICO DE CHAPMAN-RICHARDS PARA ESTIMATIVA DE h_d E IDADE DE REFERÊNCIA DE 16 ANOS.	58

CAPÍTULO 3

FIGURA 3.1 – ÁREA DE REFLORESTAMENTO OBJETO DESTE ESTUDO.	66
FIGURA 3.2 – CURVAS DE DISTRIBUIÇÃO DIAMÉTRICA DE FREQUÊNCIA DA f_{dp} BURR AJUSTADAS PARA AS NOVE REMEDIÇÕES DO INVENTÁRIO FLORESTAL CONTÍNUO	70
FIGURA 3.3 – CURVAS f_{dp} DE DIÂMETRO JUNTAMENTE COM OS VALORES OBSERVADOS PARA AS NOVE AMOSTRAGENS DO IFC....	71
FIGURA 3.4 – GRÁFICOS DE TENDÊNCIA DO PARÂMETRO shape 1 (sh1) COM VARIÁVEIS DENDROMÉTRICAS.....	71
FIGURA 3.5 – GRÁFICOS DE TENDÊNCIA DO PARÂMETRO shape 2 (sh2) COM VARIÁVEIS DENDROMÉTRICAS.....	72
FIGURA 3.6 – GRÁFICOS DE TENDÊNCIA DO PARÂMETRO rate (rt) COM VARIÁVEIS DENDROMÉTRICAS	72
FIGURA 3.7 – CURVAS f_{dp} DE BURR AJUSTADAS E SEPARADAS A PARTIR DA IDADE DE 16 ANOS	75
FIGURA 3.8 – CURVAS f_{dp} DE BURR AJUSTADAS SIMULADAS EM TRÊS OCASIÕES, M_1 É ASSIMÉTRICA POSITIVA, M_2 É ASSIMÉTRICA NEGATIVA E M_3 TENDE A NORMALIDADE ..	76

CAPÍTULO 4

FIGURA 4.1 – RESÍDUOS ABSOLUTOS DA ESTIMATIVA DE DIÂMETRO PARA O MODELO DE KOZAK.....	114
FIGURA 4.2 – RESÍDUOS RELATIVOS PARA A ESTIMATIVA DE DIÂMETRO PARA O MODELO DE KOZAK.....	114

FIGURA 4.3 – DIÂMETROS OBSERVADOS E ESTIMADOS PARA O MODELO DE KOZAK.....	115
FIGURA 4.4 – RESÍDUOS ABSOLUTOS DA ESTIMATIVA DO VOLUME TOTAL PARA O MODELO DE KOZAK.....	115
FIGURA 4.5 – RESÍDUOS RELATIVOS DA ESTIMATIVA DO VOLUME TOTAL PARA O MODELO DE KOZAK.....	116
FIGURA 4.6 – VOLUMES TOTAIS OBSERVADOS E ESTIMADOS PARA O MODELO DE KOZAK.	116
FIGURA 4.7 – RESÍDUOS ABSOLUTOS DA ESTIMATIVA DE DIÂMETRO PARA O MODELO DE SCHÖPFER.	117
FIGURA 4.8 – RESÍDUOS RELATIVOS PARA A ESTIMATIVA DE DIÂMETRO PARA O MODELO DE SCHÖPFER.	117
FIGURA 4.9 – DIÂMETROS OBSERVADOS E ESTIMADOS PARA O MODELO DE SCHÖPFER.	118
FIGURA 4.10 – RESÍDUOS ABSOLUTOS DA ESTIMATIVA DO VOLUME TOTAL PARA O MODELO DE SCHÖPFER.....	118
FIGURA 4.11 – RESÍDUOS RELATIVOS DA ESTIMATIVA DO VOLUME TOTAL PARA O MODELO DE SCHÖPFER.	119
FIGURA 4.12 – VOLUMES TOTAIS OBSERVADOS E ESTIMADOS PARA O MODELO DE SCHÖPFER.....	119
FIGURA 4.13 – CURVAS DOS PERFIS DE FUSTE ESTIMADOS NAS IDADES PARA O MODELO DE SCHÖPFER.	120
FIGURA 4.14 – RESÍDUOS ABSOLUTOS DA ESTIMATIVA DE DIÂMETRO PARA O MODELO DE MAX-BURKHART.	120
FIGURA 4.15 – RESÍDUOS RELATIVOS PARA A ESTIMATIVA DE DIÂMETRO PARA O MODELO DE MAX-BURKHART.	121
FIGURA 4.16 – DIÂMETROS OBSERVADOS E ESTIMADOS PARA O MODELO DE MAX-BURKHART.....	121
FIGURA 4.17 – RESÍDUOS ABSOLUTOS DA ESTIMATIVA DO VOLUME TOTAL PARA O MODELO DE MAX-BURKHART.....	122
FIGURA 4.18 – RESÍDUOS RELATIVOS DA ESTIMATIVA DO VOLUME TOTAL PARA O MODELO DE MAX-BURKHART.	122
FIGURA 4.19 – VOLUMES TOTAIS OBSERVADOS E ESTIMADOS PARA O MODELO DE MAX-BURKHART.....	123

FIGURA 4.20 – CURVAS DOS PERFIS DE FUSTE ESTIMADOS NAS IDADES PARA O MODELO DE MAX-BURKHART.	123
FIGURA 4.21 – RESÍDUOS ABSOLUTOS DA ESTIMATIVA DE DIÂMETRO PARA O MODELO DE PREUßNER.	124
FIGURA 4.22 – RESÍDUOS RELATIVOS PARA A ESTIMATIVA DE DIÂMETRO PARA O MODELO DE PREUßNER.	124
FIGURA 4.23 – DIÂMETROS OBSERVADOS E ESTIMADOS PARA O MODELO DE PREUßNER.	125
FIGURA 4.24 – RESÍDUOS ABSOLUTOS DA ESTIMATIVA DO VOLUME TOTAL PARA O MODELO DE PREUßNER.	125
FIGURA 4.25 – RESÍDUOS RELATIVOS DA ESTIMATIVA DO VOLUME TOTAL PARA O MODELO DE PREUßNER.	126
FIGURA 4.26 – VOLUMES TOTAIS OBSERVADOS E ESTIMADOS PARA O MODELO DE PREUßNER.	126
FIGURA 4.27 – CURVAS DE FORMA DOS QUOCIENTES OBSERVADOS A_x E ESTIMADOS B_x PARA O MODELO DE PREUßNER DE QUATRO AGRUPAMENTOS DE IDADE: ÁRVORES COM ATÉ 5 ANOS, DE 5 A 10, 10 A 15 E DE 15 A 20 ANOS DE <i>Pinus taeda</i> L. DO MEIO-OESTE CATARINENSE.	127
FIGURA 4.28 – CURVAS DOS PERFIS DAS ÁRVORES DO AJUSTE DAS FUNÇÕES DE PREUßNER POR IDADE.	127
FIGURA 4.29 – CURVAS DOS PERFIS DAS ÁRVORES DO AJUSTE DAS FUNÇÕES DE PREUßNER EM COMPARAÇÃO COM O MODELO DE SCHÖPFER POR IDADE.	128
FIGURA 4.30 – VARIAÇÃO DOS VALORES DE w DOS PERFIS DAS ÁRVORES DO AJUSTE DAS FUNÇÕES DE PREUßNER POR IDADE.	128
FIGURA 4.31 – RELAÇÃO ENTRE OS COEFICIENTES w E b COM AS CURVAS DOS PERFIS DAS ÁRVORES DO AJUSTE DAS FUNÇÕES DE PREUßNER.	129

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 2

TABELA 2.1 – MODELOS MATEMÁTICOS SELECIONADOS PARA A MODELAGEM DE ALTURA DOMINANTE (m) EM FUNÇÃO DA IDADE (anos).....	49
TABELA 2.2 – DIMENSÕES DA FAIXA DOS DADOS PARA O AJUSTE DOS MODELOS.....	49
TABELA 2.3 – ESTATÍSTICAS DE AVALIAÇÃO DO AJUSTE DOS MODELOS MATEMÁTICOS DE ESTIMATIVAS DE ALTURA DOMINANTE.....	58

CAPÍTULO 3

TABELA 3.1 – PARÂMETROS ESTIMADOS DAS NOVE MEDIÇÕES BIANUAIS.....	68
TABELA 3.2 – FREQUÊNCIAS OBSERVADAS E ESTIMADAS DE ÁRVORES.ha ⁻¹ COM INTERVALO DE CLASSE DE DIÂMETRO DE 2 cm.....	69

CAPÍTULO 4

TABELA 4.1 – ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS PARA DIÂMETRO À ALTURA DO PEITO (d), ALTURA (h) E VOLUME TOTAL (v).....	94
TABELA 4.2 – COEFICIENTES DE AJUSTE DOS MODELOS PARA IDADE 5.....	130
TABELA 4.3 – ESTATÍSTICAS DE AJUSTE DOS MODELOS PARA IDADE 5 E VOLUME TOTAL DA ÁRVORE.....	130
TABELA 4.4 – COEFICIENTES DE AJUSTE DOS MODELOS PARA IDADE 10.....	130
TABELA 4.5 – ESTATÍSTICAS DE AJUSTE DOS MODELOS PARA IDADE 10 E VOLUME TOTAL DA ÁRVORE.....	130
TABELA 4.6 – COEFICIENTES DE AJUSTE DOS MODELOS PARA IDADE 15.....	131

TABELA 4.7 – ESTATÍSTICAS DE AJUSTE DOS MODELOS PARA IDADE 15 E VOLUME TOTAL DA ÁRVORE.....	131
TABELA 4.8 – COEFICIENTES DE AJUSTE DOS MODELOS PARA IDADE 20.	131
TABELA 4.9 – ESTATÍSTICAS DE AJUSTE DOS MODELOS PARA IDADE 20 E VOLUME TOTAL DA ÁRVORE.....	131
TABELA 4.10 – VOLUME COMERCIAL OBSERVADO E ESTIMADO (%) PARA QUATRO DIÂMETROS MÍNIMOS ATÉ O TOPO E ALTURA DE 2,48 m.	132
TABELA 4.11 – ESTATÍSTICAS PARA AVALIAR AS FUNÇÕES DE KOZAK E PREUßNER PARA O VOLUME COMERCIAL.....	132

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1. INTRODUÇÃO GERAL

1.1	PANORAMA FLORESTAL.....	19
1.2	O PORQUÊ DO ESTUDO.....	20
1.2.1	Considerações Técnicas.....	21
1.3	OBJETIVOS.....	22
1.3.1	Objetivo Principal.....	22
1.3.2	Objetivos Específicos.....	22
1.3.3	Roteiro da Tese.....	22
1.4	Índice de Sítio e Metodologia GADA.....	23
1.5	Distribuição Diamétrica de Burr.....	25
1.6	Funções de Preußner para estimar volumes de <i>Pinus taeda</i> L.....	27
	REFERÊNCIAS.....	30

CAPÍTULO 2 – CURVAS DE ÍNDICE DE SÍTIO PELO MÉTODO DA DIFERENÇA ALGÉBRICA GENERALIZADA – GADA EM FLORESTAS PLANTADAS DE *Pinus taeda* L. NO MEIO-OESTE DE SANTA CATARINA

	RESUMO.....	33
	ABSTRACT.....	34
2.1	INTRODUÇÃO.....	35
2.2	OBJETIVOS.....	36
2.2.1	Objetivo geral.....	36
2.2.2	Objetivos específicos.....	36
2.3	REVISÃO DE LITERATURA	37
2.3.1	Crescimento em altura.....	37
2.3.2	Classificação de sítio.....	38
2.3.3	Índice de sítio.....	39
2.3.4	Construção das curvas de índice de sítio	39
2.3.5	Método matemático de construção das curvas de índice de sítio.....	40
2.3.6	Método da diferença algébrica – ADA.....	42
2.3.7	Método da diferença algébrica generalizada – GADA.....	42
2.3.8	Acuracidade e estabilidade das curvas de índice de sítio.....	44
2.3.9	Idade índice.....	45

2.3.10	Tipos de dados para construção das curvas de índice de sítio.....	45
2.3.11	Aplicação prática da classificação de índice de sítio.....	45
2.4	MATERIAIS E MÉTODOS.....	45
2.4.1	Localização da área de estudo.....	45
2.4.2	Caracterização da área.....	46
2.4.3	Origem dos dados.....	47
2.4.4	Informações coletadas.....	48
2.4.5	Distribuição dos dados.....	48
2.4.6	Modelos usados no ajuste da altura dominante.....	48
2.4.7	Índice de sítio.....	48
2.5	RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	49
2.5.1	Resumo dos dados utilizados.....	49
2.5.2	Seleção do modelo de altura dominante em função da idade.....	50
2.5.3	Coeficientes do Modelo de Chapman-Richards.....	52
2.5.4	Coeficientes da formulação das Equações Algébricas Generalizadas – GADA.....	54
2.5.5	Particularidades do processo GADA.....	55
2.6	CONCLUSÕES.....	59
	REFERÊNCIAS	60

CAPÍTULO 3. FUNÇÃO DE BURR APLICADA PARA DESCREVER A DISTRIBUIÇÃO DIAMÉTRICA EM UM POVOAMENTO DE *Pinus taeda* L. NO SUL DO BRASIL

	RESUMO	63
	ABSTRACT	63
3.1	INTRODUÇÃO.....	64
3.2	MATERIAIS E MÉTODOS.....	65
3.2.1	Caracterização da área de estudo.....	65
3.2.2	Fonte dos dados.....	67
3.2.3	Ajuste da curva de distribuição de Burr.....	67
3.3	RESULTADOS.....	68
3.3.1	Estimativas de parâmetros e coeficientes.....	68
3.3.2	Frequências observadas e estimadas da distribuição ajustada com diâmetros.....	69

3.3.3	Curvas de distribuição de diâmetro.....	69
3.3.4	Correlações entre os parâmetros da <i>fdp</i> Burr e variáveis do povoamento florestal.....	70
3.4	DISCUSSÃO.....	73
3.4.1	Correlação entre os parâmetros de distribuição do Tipo XII de Burr e as variáveis dendrométricas.....	73
3.5	CONCLUSÕES.....	77
	REFERÊNCIAS	78

CAPÍTULO 4. FUNÇÕES DE PREUßNER PARA ESTIMAÇÃO DE VOLUMES DE *Pinus taeda* L. NA REGIÃO SUL DO BRASIL

	RESUMO	80
	ABSTRACT	81
4.1	INTRODUÇÃO.....	82
4.1.1	Modelos não segmentados.....	84
4.1.2	Modelos segmentados.....	85
4.2	MATERIAIS E MÉTODOS.....	88
4.2.1	Caracterização da área de estudo.....	88
4.2.2	Origem dos dados.....	88
4.2.3	Ajuste da curva de afilamento de Preußner e sua aplicação.....	89
4.2.4	Ajuste dos modelos de afilamento propostos por Schöpfer, Kozak e Max-Burkhart.....	89
4.2.5	Ajuste e aplicação do modelo de Schöpfer (polinômio de 5º grau).....	90
4.2.6	Ajuste e aplicação da curva de afilamento de Kozak.....	91
4.2.7	Ajuste e aplicação da curva de afilamento de Max-Burkhart.....	91
4.2.8	Avaliação e comparação das funções de afilamento de Preußner com o Polinômio de 5º Grau de Schöpfer e os modelos de Kozak e Max-Burkhart.....	92
4.3	RESULTADOS.....	93
4.3.1	Estatísticas descritivas.....	93
4.3.2	Ajuste dos modelos de afilamento propostos por Schöpfer, Kozak e Max-Burkhart.....	94
4.3.3	Funções de Preußner.....	96

4.4	DISCUSSÃO.....	97
4.5	CONCLUSÕES.....	101
	REFERÊNCIAS.....	102
	GRÁFICOS.....	114
	TABELAS.....	130
	APÊNDICE 1 – PASSOS PARA AJUSTAR AS FUNÇÕES DE PREUßNER EM DIFERENTES IDADES.....	134
	APÊNDICE 2 – EXEMPLO PARA OBTENÇÃO DO VOLUME DE ÁRVORES USANDO A FUNÇÃO DE PREUßNER.....	139

CAPÍTULO 1. INTRODUÇÃO GERAL

1.1 PANORAMA FLORESTAL

A Nação Brasileira detém extensa área territorial, da qual 58,5% do seu território é coberto por florestas, 98% de florestas naturais e 2% de florestas plantadas (ACR, 2022). Nacionalmente, as florestas plantadas até o ano de 2021 atingiram a extensão de 9,88 milhões de hectares (ACR, 2022) mas, provavelmente, já tenha ultrapassado os 10 milhões até o momento. No estado de Santa Catarina, o segundo maior detentor de florestas plantadas do gênero *Pinus* (713 mil ha) e sexto lugar no gênero *Eucalyptus* (316 mil ha), a área florestal plantada é de 1,03 milhões de hectares. A matéria prima do *Pinus* continua sendo a principal fonte para as indústrias madeireira e de papel e celulose, destacando-se como a segunda *commodity* do estado depois da agroindústria e maior exportador de madeira serrada do país (SECRETARIA DE AGRICULTURA/SC 2021). Esta pesquisa tem como foco as florestas plantadas de *Pinus taeda* L., que atendem à demanda de matéria prima e de produtos de madeira da cadeia produtiva florestal catarinense.

O manejo de uma floresta plantada, para que seja bem sucedida, demanda aprofundados conhecimentos sobre sua estrutura ao longo do tempo de rotação. Este conhecimento começa a acontecer com os levantamentos amostrais do Inventário Florestal Contínuo (IFC), que são basicamente a instalação de uma estrutura amostral com parcelas permanentes, que serão remedidas em intervalos de tempo no decorrer da vida das árvores. Nesta estrutura, diâmetros, alturas, formas e tamanho das árvores são coletados em diferentes idades, por meio da cubagem das árvores, para se detectar as suas respectivas variações de grandeza, sendo finalmente tabuladas em classes diamétricas. Estas informações compõem uma coleção de dados temporais, que possibilita análises de afilamento, forma, distribuição das árvores por classes diamétricas e avaliação da capacidade do local. Os dados provenientes da cubagem permitem ajustar os modelos de afilamento e as equações de volume, que de maneira integrada possibilitam quantificar as porções do fuste, os sortimentos e avaliar a floresta em termos de valores monetários. As parcelas permanentes, unidades amostrais remedidas no tempo, permitem quantificar o

número de árvores com respectivos diâmetros e alturas e classificá-las em tamanhos, classes diamétricas, gerando os volumes de estoque por idade. Também, permitem a análise de densidade do povoamento florestal, que viabiliza a estruturação do seu manejo, dos desbastes, possibilitando a remoção de árvores em tempo e quantidades adequadas, visando otimização da produção florestal.

O principal objetivo desta pesquisa é apresentar métodos alternativos, com certo ineditismo e pouco usuais na área florestal brasileira, para quantificação das árvores: (a) Determinar índices de sítio, aplicando-se os modelos anamórficos e polimórficos em povoamentos de *Pinus taeda* L., em região subtropical, com especial destaque na aplicação do método das equações de diferenças algébricas generalizadas (GADA); (b) Ajustar distribuições diamétricas, utilizando as de Burr e de Weibull e; (c) Ajustar modelos de afilamento, utilizando as funções de Preußner, Kozak, e Max e Burkhart.

1.2 O PORQUÊ DO ESTUDO

As principais razões para o desenvolvimento deste trabalho é conhecer com mais precisão e acuracidade o tamanho das árvores, quais as frequências destes tamanhos e a qualidade de local que os gera para expressar a quantificação final do povoamento florestal.

Outra razão importantíssima para esta pesquisa é a aplicação e avaliação de métodos que já são consagrados em países desenvolvidos e em outros de tradição florestal. O afilamento é bastante estudado, porém neste país o modelo de Schöpfer, mais conhecido como polinômio de 5º grau de Schöpfer (1966), é o mais conhecido e mais utilizado pelos pesquisadores brasileiros. Neste trabalho estamos introduzindo o modelo de Preußner e comparando-o com o mais recente e eficiente modelo de Kozak 02 (KOZAK, 2004). As distribuições diamétricas aplicadas em povoamentos florestais são as de Johnson SB e a de Weibull, porém será introduzida neste trabalho a distribuição de Burr, que não se tem referências de sua aplicação na área florestal, podendo gerar resultados iguais ou melhores que os obtidos com a distribuição de Weibull. Outro motivo deste estudo é a aplicação do método de equações de diferenças algébricas generalizadas (GADA, do inglês “generalized algebraic difference approach”) desenvolvido no ano 2000 (CIESZEWSKI e BAILEY, 2000) e, até o momento,

aplicado em apenas dois trabalhos apresentados por pesquisadores brasileiros (SOUZA, 2022; MARINHESKI FILHO, 2023), configurando-se um vazio de mais de 20 anos na introdução destes avanços científicos qualitativos em métodos biométricos. A desatualização acontece com os processos de afilamento nas florestas plantadas e, também, nas naturais, mas o mais preocupante é o pouco conhecimento e uso da distribuição de Burr para melhor avaliar a estrutura diamétrica das florestas plantadas, em especial em dados da espécie *Pinus taeda* L.

O pesquisador e Prof. Dr. Sylvio Péllico Netto, no ano de 2023, submeteu um artigo propondo uma nova distribuição probabilística com cinco parâmetros, que poderá alavancar ainda mais o nível de excelência na aplicação em distribuições diamétricas para as florestas plantadas no sul do Brasil.

1.2.1 Considerações Técnicas

No contexto da atividade florestal do estado de Santa Catarina, considerando-se a importância dos métodos usados no manejo e a sua viabilização, apresentamos as questões e particularidades específicas do trabalho de pesquisa propondo contribuir para melhor esclarecimento desta realidade com as seguintes questões:

- Que formas as árvores apresentam no decorrer da rotação?
- Quais são os modelos mais precisos e acurados para descrever o afilamento das árvores?
- Que fatores influenciam a forma das árvores?
- A forma das árvores ao longo da rotação propicia maior valor à floresta?
- A distribuição de Burr é adequada para uso florestal?
- A distribuição de Burr apresenta qualidade de ajuste equivalente ao conseguido com a distribuição de Weibull?
- Como estimar os parâmetros das distribuições de Burr e de Weibull?
- Como determinar a capacidade produtiva de locais?
- Que tratamento deve-se dar à variável que melhor capta o efeito produtivo do local?
- Por que determinar a classificação do índice de sítio e quais são as suas vantagens para a avaliação da produtividade dos povoamentos florestais?

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo Principal

O objetivo principal desta tese é aplicar métodos no espaço temporal que contribuam para a geração de estimativas confiáveis da classificação de sítios, das distribuições diamétricas, de forma e de sortimento volumétrico dos fustes para dar suporte qualitativo à elaboração dos planos de manejo florestal em povoamentos com *Pinus taeda* L. no Meio-Oeste Catarinense.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Ajustar modelos de afilamento;
- Ajustar modelos de distribuição diamétrica;
- Ajustar modelos de índice de sítio e;
- Estudar e analisar os modelos ajustados para que propiciem ganhos de precisão, acuracidade e confiabilidade de estimativas em várias idades do período de rotação de florestas plantadas de *Pinus taeda* L. no Meio-Oeste Catarinense.

1.3.3 Roteiro da Tese

O tratamento destinado aos dados, o processamento e as análises dos assuntos seguiram a ordem de três capítulos, organizados e delineados da seguinte forma: Capítulo 1 - Introdução Geral; Capítulo 2 - Índice de Sítio com enfoque na metodologia GADA; Capítulo 3 - Distribuição Diamétrica de Burr e; Capítulo 4 - Funções de Preußner.

1.4 Índice de Sítio e Metodologia GADA

Os métodos mais usados na área florestal para classificação de sítio são os diretos, ou seja, aqueles baseados nos efeitos da capacidade produtiva para permitir quantificar o crescimento das árvores de um povoamento florestal em um determinado local, por meio das medições regulares temporais de suas variáveis dendrométricas.

A qualidade do local, o índice de sítio, geralmente é determinado para uma espécie em particular, sendo que o sítio é a segunda variável em importância na modelagem depois da idade, vindo a seguir a variável densidade.

A altura dominante é a variável dendrométrica mais importante e a mais usada para classificação de índice de sítio, por ser a menos influenciada pela densidade e pelos desbastes (SCHNEIDER e SCHNEIDER, 2008). Entre os conceitos de altura dominante, o mais usado e consagrado é o de Assmann, definido da seguinte forma: “a altura dominante é a altura média das 100 árvores mais grossas (>DAP) por hectare” (ASSMANN, 1970).

Os principais métodos usados para a construção de curvas para a classificação de sítio em povoamentos florestais são o método da curva guia (CG), método este gráfico ou analítico, o método da diferença algébrica (ADA) e o método da diferença algébrica generalizada (GADA), cujas equações derivadas podem ser extremamente flexíveis e gerar padrões complexos de curvas polimórficas e assíntotas variáveis (CIESZEWSKI e BAILEY, 2000).

Além desses métodos, existem outros menos difundidos, não muito conhecidos e pouco encontrados na literatura, como o método de Hammer, que é uma variação do método da Curva Guia, método de atribuição preliminar de índice de sítio para parcelas permanentes e método da predição de parâmetros com dados de parcelas permanentes e ou de análise de tronco (KIERNAN, 2014).

Até o início do século passado, a maioria das curvas de índice de sítio era construída utilizando-se a técnica gráfica, com a qual os valores eram plotados e as curvas traçadas a mão livre, sujeitas a uma tendência pessoal, gerando curvas proporcionais e anamórficas (ALDER, 1980).

Na década de 1940 em diante, começaram surgir estudos usando-se o método da curva guia de forma analítica e com os recursos de técnicas

estatísticas de regressão. Esta técnica permite a obtenção de curvas anamórficas e polimórficas (independentes), utilizando-se dados temporários, parcelas permanentes e de análise de tronco (anatro), aplicando-se modelos de regressão simples e múltiplos, lineares e não lineares. Este método analítico da curva guia foi muito usado até o final do século passado, porém já na década de 1970 Bailey e Clutter apresentaram uma técnica para derivar equações denominada método da diferença algébrica (ADA), que consiste na substituição de um parâmetro do modelo base para expressá-lo em função do sítio e construir curvas anamórficas e polimórficas (BAILEY e CLUTTER, 1974).

Cieszewski e Bailey, no ano 2000, propuseram uma generalização das equações de diferença algébrica (ADA) e veio a ser conhecido como método da diferença algébrica generalizada (GADA) do inglês “generalized algebraic difference approach” (CIESZEWSKI e BAILEY, 2000). Neste caso, a equação base pode ser expandida com mais de um parâmetro dependente da qualidade do sítio e as curvas de crescimento de sítio polimórficas são mais flexíveis, mais precisas e invariantes quanto a idade de referência e geram diferentes assíntotas, porém os dados devem ser de parcelas permanentes ou análise de tronco (anatro), ou seja, devem expressar as taxas de crescimento entre as idades. Geralmente, se recomenda o método iterativo de ajuste, “nested iterative procedure”, para ajustar os parâmetros globais e locais com a metodologia GADA.

Atualmente, a metodologia GADA é uma das mais usadas em pesquisas e estudos de índice de sítio no mundo, como se comprova na revisão de literatura da última década. São arrebatadoras suas vantagens de precisão e flexibilidade de ajuste das curvas em diversas espécies estudadas. Nota-se sua aplicação em estudos de diâmetro e área basal e, também, de volume (SOUZA, 2022).

Portanto, a metodologia da diferença algébrica generalizada (GADA) é um procedimento que trouxe grandes ganhos no refinamento da classificação de índice de sítio e torna-se altamente recomendável sua aplicação, mesmo com duas décadas de atraso, para florestas plantadas e também para espécies nativas, como, por exemplo, Araucária e Bracatinga, dentre outras do sul do Brasil.

1.5 Distribuição Diamétrica de Burr

As distribuições diamétricas são imprescindíveis para o conhecimento da densidade da população florestal e sua qualidade em termos de diâmetros. Estas informações, ao longo da rotação, servem para calcular volumes totais, volumes de sortimento, quantidades de madeira para comercialização e valores monetários, agilizando as decisões e trazendo segurança e confiabilidade ao planejamento florestal.

As distribuições diamétricas, como recursos de auxílio ao manejo florestal, propiciam o conhecimento do número de árvores por unidade de área, geralmente em hectares, por idade e por classes de diâmetro. Ainda, possibilita a determinação de sortimento no decorrer do período de rotação, pois apresenta a estrutura da composição diamétrica das árvores, indicando o tipo e intensidade de desbaste. Assim, é possível avaliar a produção florestal e, dentre os tipos de distribuições diamétricas para o manejo florestal, maiores destaques são dados às distribuições normal e hiperbólica (SCHNEIDER e SCHNEIDER, 2008). A distribuição normal está presente na natureza, nos seres e na maior parte dos fenômenos biológicos, que apresentam dados distribuídos de maneira suficientemente normais, se repetem e tendem a se agrupar em torno da média, caracterizando uma distribuição em forma de sino, unimodal, bimodal ou multimodal. A forma destas curvas de distribuição é influenciada pela idade, índice de sítio, tamanho da área e desbastes. No caso da distribuição hiperbólica, ela descreve a ocorrência dos indivíduos de uma floresta natural, enquanto a distribuição normal é mais aplicada em florestas plantadas.

As distribuições podem ser discretas ou contínuas. As discretas envolvem variáveis com valores inteiros e servem para o estudo da ocorrência ou não de uma espécie, monitorar espécies com baixa frequência de ocorrência e outros eventos raros.

Na área florestal, as distribuições contínuas mais usadas e aplicadas para estudar e simular o crescimento e a produção florestal são a Normal, Lognormal, Gama, Beta, Johnson SB e Weibull. A distribuição Normal, uma das mais antigas e largamente usada, tem como característica principal sua forma simétrica e tem apenas dois parâmetros, a média e o desvio padrão, enquanto que a Gama é usada para interpolar valores e a Weibull, muito usada na ciência florestal, por

apresentar parâmetros com alta correlação com as variáveis dendrométricas do povoamento florestal.

A eficiência da aplicação destas distribuições contínuas é avaliada por meio de uma análise de desempenho, aplicando-se testes de aderência, KS, χ^2 , desvio padrão, além de medidas de assimetria e curtose (DELINETTE-MULLER *et al.*, 2015; TEIMOURI *et al.*, 2020).

A quantificação de biomassa florestal, produções florestais de madeira e a sua qualidade, presente e ao longo do tempo, se baseiam fundamentalmente nas distribuições diamétricas em classes. Na área de manejo florestal, entre as funções mais usadas, Weibull se destaca como uma das melhores e das mais notáveis distribuições (BAILEY e DELL, 1973; GORGOSO *et al.*, 2007; GORGOSO-VARELA e ROJO-ALBORECA, 2014; MERGANIČ e STERBA, 2006; PRETZSCH, 2009; STANKOVA e ZLATANOV, 2010), devido sua flexibilidade para ajuste à diferentes tendências de distribuição dos dados, desde um comportamento exponencial até um comportamento normal (CAMPOS e LEITE, 2006). Também vale ressaltar, como razões estatísticas, a facilidade intrínseca e bondade de ajuste e a alta correlação de seus parâmetros com as variáveis dendrométricas do povoamento florestal.

Os principais métodos, ou alternativas de ajuste da função Weibull, são o de predição de parâmetro, método dos momentos, dos percentis, máxima verossimilhança e da aproximação linear, porém o método da máxima verossimilhança é o mais indicado e eficiente, gerando as melhores estimativas (CAO, 2004).

Outra distribuição, pouco conhecida na ciência florestal, de grande potencial e que se destacou com resultados melhores que a Weibull em nosso recente estudo de pesquisa, foi a distribuição de Burr, mais precisamente uma distribuição de três parâmetros denominada de Burr Tipo XII (BURR, 1942), inédita na aplicação em florestas plantadas e manejadas de *Pinus taeda* L. no sul do Brasil.

Certamente, com maiores estudos e aplicações, esta distribuição de Burr Tipo XII pode se tornar mais uma opção de grande valia para a ciência florestal brasileira, pois mostrou-se eficiente nas estimativas de frequência das árvores por classes diamétricas e por idade, com alto nível de bondade de ajuste, em uma rotação inteira de floresta plantada de *Pinus taeda*. Apresentou aderência

em todos os ajustes de nove medições bianuais com intervalo de classe de 2 cm de diâmetro, garantindo segurança e confiabilidade nas estimativas de frequência obtidas.

Portanto, as distribuições densidade de probabilidade contínuas de Burr e Weibull são as que se destacam para o uso em florestas plantadas, devido a facilidade de ajuste, flexibilidade e precisão na descrição das frequências diamétricas em um período de rotação e a alta correlação com as variáveis dendrométricas do povoamento florestal. Recomenda-se a distribuição de Weibull pelo farto material de estudo e aplicação florestal e a distribuição de Burr Tipo XII pelo seu grande potencial de uso e aplicação com resultados excelentes na ciência florestal.

1.6 Funções de Preußner para estimar volumes de *Pinus taeda* L.

Inicialmente o fuste das árvores foi estudado com o uso de sólidos de revolução, como o neiloide, o parabolóide e o conoide para explicar a forma das árvores e calcular seu volume.

No início do século XX iniciou-se a aplicação de uma equação de afilamento para a finalidade de descrever o perfil de troncos. Na sequência também se usou métodos de análise gráfica e, mais tarde, já nas décadas de 50-70 começaram surgir as funções de forma, melhorando e se tornando compatíveis com as funções de volume, assegurando que os volumes parciais de sortimento, partes do fuste, não ultrapassassem o volume total da árvore.

Deste ponto em diante e com recursos de processamento sendo disponibilizados, surgiram também os modelos mais complexos. Neste contexto, situa-se os modelos polinomiais (SCHÖPFER, 1966), polinomiais segmentados (MAX e BURKHART, 1976) e os sigmoidais. Estes modelos se ajustam melhor em determinadas espécies do que em outras, também funcionando melhor quando ajustados por classe de idade e por classe diamétrica.

Deve-se considerar, entretanto, que a forma das árvores varia por espécie, idade, desbaste efetuado e, também, pelo efeito de poda, pela posição sociológica, pelo material genético utilizado no plantio, sítio e espaçamento. Neste caso, o desempenho dos modelos pode variar devido a estas condições supra citadas.

As funções de afilamento são modelos matemáticos que expressam o perfil longitudinal do fuste de uma árvore em toda sua extensão ou apenas em um segmento deste.

Basicamente, estes modelos matemáticos são divididos em simples e segmentados. Os modelos simples são aqueles em que apenas uma função explica o perfil da árvore e, geralmente, são polinômios e, também, simples funções parabólicas. Os modelos simples, não segmentados, são caracterizados pelo ajuste de análise de regressão, cujas variáveis são os diâmetros mensurados ao longo do fuste e suas respectivas alturas, sendo relacionadas com o diâmetro à altura do peito (DAP), altura total e altura comercial das árvores. Os dados para ajustar as equações matemáticas são obtidos por meio de cubagem do tronco das árvores e, dentre os tipos de cubagem, a efetuada de forma relativa em função da altura total da árvore é a que melhor descreve o seu perfil (HOHENADL, 1924). A quantidade de diâmetros, cinco ou dez, além dos diâmetros DAP e da base do fuste, são medidos em pontos relativos da altura da árvore, como por exemplo 10%, 30%, 50%, 70% e 90%.

Os modelos simples em que uma única função representa a forma do fuste, da base ao ápice, apresentam a vantagem de expressar todo o perfil com uma única função e são de fácil ajuste e aplicabilidade. A desvantagem apresentada por estes modelos, são erros de tendência em determinados pontos do perfil do tronco (BI, 2000).

Os modelos de afilamento polinomiais, por sua vez, são mais elaborados e caracterizados pelo ajuste de regressão múltipla entre a relação de diâmetros d_i/DAP como variável dependente e de alturas $(h_i/h)^n$ como variável independente com graus variando de dois a cinco e potências inteiras (SCHÖPFER, 1966) ou fracionárias (HRADETZKY, 1976). Os polinômios apresentam precisão e acuracidade melhor em relação aos modelos simples e são largamente utilizados atualmente, beneficiando-se das facilidades dos recursos da informática, especialmente o polinômio de 5º grau de Schöpfer, para descrever a forma das árvores de florestas plantadas de *Pinus taeda* L. no sul do Brasil. Como desvantagem, estes modelos não explicam de forma acurada a base do tronco, apresentando erros de tendenciosidade nas estimativas (ROJO *et al.*, 2005).

Por outro lado, os modelos segmentados são funções ligadas e contínuas em que cada uma representa uma porção do fuste e sua união ocorre por meio de restrições no modelo geral, variáveis *dummy*, que no momento do ajuste ativam ou ignoram partes da equação (PREUßNER, 1974; JORGE, 1984; PÉLLICO NETTO, 1994; MAX e BURKHART, 1976).

Os modelos segmentados são mais difíceis de serem trabalhados, ajustados em seções do fuste, duas, três e até quatro, visando diminuir os erros de tendência nas estimativas.

Preußner desenvolveu uma teoria de curvas relativas de forma dividindo o fuste em quatro partes com suas funções correspondentes. Este método de Preußner é fácil de se trabalhar e de ser aplicado, é muito exato e, devido ser possível segmentar o fuste em quatro partes ou mais, pode ser usado com sucesso tanto para árvores de florestas naturais tropicais ou plantadas.

Estas equações de afilamento do fuste permitem estimar o diâmetro em qualquer altura do tronco e, de forma inversa, as alturas de qualquer diâmetro, possibilitando por meio da integração das funções obter as estimativas de volume das partes deste fuste, ou seja, calcular o sortimento de madeira da árvore e, conseqüentemente, do povoamento florestal.

Entretanto, o melhor modelo depende da eficiência desta função de afilamento e está relacionada à sua flexibilidade para descrever o perfil geral das árvores da espécie em específico e, também, de acordo com os fatores que influenciam a forma dos indivíduos. Então, um modelo que se ajusta bem em determinadas condições pode não funcionar tão bem em outras ocasiões.

Em regiões temperadas subtropicais, no estudo de florestas naturais, foram testados modelos de afilamento de Biging para espécies de coníferas e de Garay para espécies tropicais, tendo estas funções apresentado bons resultados (BIGING, 1984; GARAY, 1979).

Um modelo, em particular, indicado para florestas naturais, para espécies nativas e exóticas na Mata Atlântica, destacamos a função de Preußner, em especial devido à facilidade de uso e aplicação. Esta função apresenta grande flexibilidade em se adaptar às formas das árvores e ser um método muito preciso ao longo de todo o perfil do fuste, mantendo-se em torno de 1% sua precisão, ou seja, explica 99% do perfil da árvore (PÉLLICO NETTO, 1994).

Portanto, o método de Preußner é altamente indicado, devido às vantagens e facilidades intrínsecas para aplicação de suas funções em espécies nativas subtropicais e tropicais, permitindo viabilizar e ampliar a detecção de forma das árvores e, conseqüentemente, obter mais confiáveis avaliações no sortimento de toras em seus fustes.

REFERÊNCIAS

ACR. **Anuário Estatístico de base florestal para o Estado De Santa Catarina**. Associação Catarinense de Empresas Florestais. Lages, Santa Catarina, 2022.

ALDER, D. **Forest volume estimation and yield prediction**. FAO FORESTRY PAPER 22/2, COMMONWEALTH Forestry Institute, U.K. Food and Agriculture Organization of the United Nations, Rome, 1980. 194 p.

ASSMANN, E. **The principles of forest yield study**. New York, USA: Pergamon Press, 1970. 506 p.

BAILEY, R. L.; CLUTTER, J. L. Base-Age invariant Polymorphic Site Curves. **Forest Science**, 20, p. 155-159, 1974.

BAILEY, R. L.; DELL, T., Quantifying diameter distributions with the Weibull function. **Forest Science** 19(2), p. 97-104, 1973. <http://dx.doi.org/10.1093/forest-science/19.2.97>

BI, H. Trigonometric variable-form taper equations for Australian Eucalypts. **Forest Science**, 46(3), p. 397-407, 2000.

BIGING, G.S. Taper equations for second mix conifers of northern California. **Forest Science**, 30(4), p. 1103-1117, 1984.

BURR, I. W. Cumulative frequency functions. **The Annals of Mathematical Statistics**. 13(2), p. 215-232, 1942.

CAMPOS, J. C. C.; LEITE, H. G. **Mensuração Florestal: perguntas e respostas**. 2. ed. Viçosa: UFV, 2006. 470 p.

CAO, Q. V. Predicting parameters of a Weibull function for modelling diameter distribution. **Forest Science**, 50(5), p. 682-685, 2004.

CIESZEWSKI, C.; BAILEY, R. L. Generalized Algebraic Difference Approach: Theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes. **Forest Science**. v. 46, p. 116-126, 2000.

DELIGNETTE-MULLER, M.L.; DUTANG, C. *fitdistrplus*: An R Package for fitting distributions. **Journal of Statistical Software**. 64(4), p. 1-34, 2015. <http://www.jstatsoft.org/v64/i04/>

GARAY, L. Tropical forest utilization system (contrib. 36). VIII. **A taper model for entire stem profile including buttressing**. Seattle, WA, USA: College of Forest Resources, Institute of Forest Products, University of Washington. 1979.

GORGOSO-VARELA, J.; ROJO-ALBORECA, A. Use of Gumbel and Weibull functions to model extreme values of diameter distributions in forest stands. **Ann. Forest Science** 71(7), p. 741–750, 2014. <http://dx.doi.org/10.1007/s13595-014-0369-1>

GORGOSO, J.; GONZÁLEZ, J.Á.; ROJO, A., GRANDAS-ARIAS, J. Modelling diameter distributions of *Betula alba* l. stands in northwest Spain with the two-parameter Weibull function. **Forest System** 16(2), p. 113-123, 2007. <http://dx.doi.org/10.5424/srf/2007162-01002>

HOHENADL, W. Der Aufbau der Baumschafte. **Fw. Cbt.** 1924. <https://doi.org/10.1007/BF02424886>

HRADETZKY, J. Analyze und interpretation statistischer abränger keisen. (Biometrische Beiträge zu aktuellen forschuns projekten). Baden: **Württemberg Mitteilungen der FVA**. 1976.

JORGE, L. A. B. Tabelas de sortimento para *Pinus elliottii* Engelm. Na Floresta Nacional de Três Barras - SC. **Floresta**, 15(1/2), p. 61-80, 1984. <https://doi.org/10.5380/rf.v15i12.6345>

KIERNAN, D. **Natural Resources Biometrics**. Published by Open SUNY Textbooks, Milne Library (IITG PI). State University of New York at Geneseo, Geneseo, NY 14454, 2014. 251 p.

KOZAK, A. My last words on taper equations. **Forestry Chronicle**, 80(4), p. 507-515, 2004.

MARINHESKI FILHO, A.; PÉLLICO NETTO, S.; MACHADO, S. A.; CORTE. A. P. D.; BEHLING, A. Site classification for *Eucalyptus* sp. in a tropical region of Brazil. **Anais da Academia Brasileira de Ciências**, v. 95, n. 1. 2023. <https://doi.org/10.1590/0001-3765202320200038>

MAX, T. A.; BURKHART, H. E. Segmented polynomial regression applied to taper equations. **Forest Science**, 22(3), p. 283-289, 1976.

MERGANIČ, J.; STERBA, H. Characterization of diameter distribution using the Weibull function: method of moments. **European Journal of Forest Research**. 125(4), p. 427-439, 2006. <http://dx.doi.org/10.1007/s10342-006-0138-2>

PÉLLICO NETTO, S. As curvas relativas contínuas de forma de Preußner para o sortimento dos fustes de espécies florestais. **Cerne**, 1(1), p. 17-27, 1994.

PRETZSCH, H. **Forest Dynamics, Growth and Yield: from Measurement to Model**. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2009. 671 p.
<http://dx.doi.org/10.5860/choice.47-2562>

PREUßNER, K. Eine neue Schafftkurvengleichung um ihre Anwendung. **Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Universität Dresden**, 23(11), p. 305-309, 1974.

ROJO, A.; PERALES, X.; SÁNCHEZ-RODRÍGUEZ, F.; GONZÁLEZ VAREZ, J.G.; von GADOW, K. Stem taper functions for maritime pine (*Pinus pinaster* Ait.) in Galicia (Northwestern Spain). **European Journal of Forest Research**, 124(3), p. 177-186, 2005. <https://doi.org/10.1007/s10342-005-0066-6>

SCHNEIDER, P. R.; SCHNEIDER, P. S. P. **Introdução ao Manejo Florestal**. 2. ed., FACOS-UFSM, Santa Maria, 2008. 566 p.

SCHÖPFER, W. **Automatisierung des Massen, Sorten und Wertberechnung stender Waldbestände Schriftenreihe Bad.** [S.I.]: Wurt-Forstl. 1966.

SECRETARIA DA AGRICULTURA DE SANTA CATARINA. 2021.
<https://www.fecoagro.coop.br/santa-catarina-busca-alternativas-de-apoio-ao-setor-florestal/>

SOUZA, H. J. *et al.* Thinning-response modifier term in growth models: An application on clonal *Tectona grandis* Linn F. stands at the Amazonian region, **Forest Ecology and Management**, v. 511, 120109, 2022.
<https://doi.org/10.1016/j.foreco.2022.120109>

STANKOVA, T.V.; ZLATANOV, T.M. Modeling diameter distribution of austrian black pine (*Pinus nigra* Arn.) plantations: a comparison of the Weibull frequency distribution function and percentile-based projection methods. **European Journal of Forest Research**. 129(6), p. 1169-1179, 2010.
<http://dx.doi.org/10.1007/s10342-010-0407-y>

TEIMOURI, M.; DOSER, J. W.; FINLEY, A. O. ForestFit: An R package for modeling plant size distributions. **Environmental Modeling and Software** 131, 104668, 2020.

CAPÍTULO 2. CURVAS DE ÍNDICE DE SÍTIO PELO MÉTODO DA DIFERENÇA ALGÉBRICA GENERALIZADA – GADA EM FLORESTAS PLANTADAS DE *Pinus taeda* L. NO MEIO-OESTE DE SANTA CATARINA

RESUMO

As florestas plantadas de *Pinus taeda* L. são uma importante fonte de matéria-prima para a indústria madeireira, além de serem utilizadas na produção de madeira serrada e em outras aplicações. A produtividade dessas florestas pode ser melhorada e, para tanto, é necessário conhecer bem as suas características e o ambiente em que são cultivadas. Uma das ferramentas utilizadas para avaliar o potencial produtivo das florestas é gerar curvas de índice de sítio. O índice de sítio é uma medida do potencial produtivo das florestas e é influenciado por diversos fatores, como a fertilidade do solo, a disponibilidade de água e luz, entre outros. Ela representa a relação entre a altura dominante das árvores e a idade em um determinado local. Essa curva é utilizada para estimar o crescimento futuro das árvores e, conseqüentemente, a produtividade da floresta. As curvas de índice de sítio são uma ferramenta importante para a gestão florestal e o manejo sustentável de florestas plantadas. Essas curvas relacionam o crescimento das árvores com os efeitos expressos nas variáveis dendrométricas mais usuais, como diâmetro e altura. No Meio-Oeste de Santa Catarina, região que abriga grandes áreas de plantações de *Pinus taeda* L., a geração das curvas de índice de sítio é essencial para garantir o sucesso da produção florestal. O método da diferença algébrica generalizada (GADA) é uma abordagem matemática utilizada para modelar as curvas de índice de sítio em florestas plantadas e tem sido uma boa alternativa para modelar crescimento de altura dominante das árvores para representar as condições do sítio. Essa técnica permite modelar a relação entre a altura dominante das árvores e a idade utilizando equações não-lineares, o que permite uma melhor adaptação aos dados observados. Além disso, o método GADA permite incluir outras variáveis que influenciam o índice de sítio, como a fertilidade do solo, a disponibilidade de água e luz, entre outras. Em estudos realizados ao redor do mundo são construídas curvas de índice de sítio para florestas plantadas de *Pinus taeda* L. e demais coníferas, utilizando o método GADA. Os dados utilizados mais comumente se restringem à altura dominante de árvores em diversas ocasiões ao longo do tempo e em diferentes locais, sendo que em cada local são coletadas amostras em áreas com diferentes níveis de fertilidade do solo. Os dados foram analisados utilizando o software estatístico R, em que, no caso desta pesquisa, foram ajustados modelos de curva de índice de sítio utilizando o método GADA. Os resultados do estudo indicaram que o método GADA foi capaz de modelar adequadamente as curvas de índice de sítio para as florestas plantadas de *Pinus taeda* L.. Estes resultados mostraram também que o método GADA foi eficiente para o ajuste das curvas de índice de sítio para as plantações de *Pinus taeda* L. na região do Meio-Oeste de Santa Catarina. As curvas obtidas permitiram identificar áreas de maior e menor produtividade, o que é fundamental para o planejamento do manejo florestal e para a maximização da produção de madeira. Além disso, o estudo destacou a importância da coleta de dados

precisos e representativos para o ajuste das curvas de índice de sítio. É necessário considerar fatores como a heterogeneidade do sítio, a variabilidade genética das árvores e as interações entre as condições do sítio e o manejo florestal para obter resultados confiáveis. Portanto, as curvas de índice de sítio são uma ferramenta essencial para a gestão florestal e o manejo sustentável de florestas plantadas. O método da Diferença Algébrica Generalizada (GADA) tem se mostrado eficiente para o ajuste dessas curvas em plantações de *Pinus taeda* L. na região do Meio-Oeste de Santa Catarina, permitindo identificar áreas de maior e menor produtividade e planejar o manejo florestal de forma mais eficiente. No entanto, é fundamental coletar dados precisos e representativos para obter resultados confiáveis e relevantes para a produção florestal. Em resumo, as curvas de índice de sítio são uma ferramenta importante para avaliar o potencial produtivo e gestão das florestas plantadas de *Pinus taeda* L..

Palavras Chave: Crescimento, Altura dominante, Modelagem, Potencial Produtivo.

ABSTRACT

Planted forests of *Pinus taeda* L. are an important source of raw material for the timber industry, as well as being used in the production of sawn timber and other applications. The productivity of these forests can be improved and, to do so, it is necessary to have a good understanding of their characteristics and the environment in which they are grown. One of the tools used to assess the productive potential of forests is to generate site index curves. Site index is a measure of the productive potential of forests and is influenced by various factors, such as soil fertility, water and light availability, among others. It represents the relationship between the dominant height of trees and age in a given location. This curve is used to estimate the future growth of trees and, consequently, the productivity of the forest. Site index curves are an important tool for forest management and sustainable management of planted forests. These curves relate tree growth to the effects expressed in the most common dendrometric variables, such as diameter and height. In the Midwest region of Santa Catarina, which houses large areas of *Pinus taeda* L. plantations, generating site index curves is essential to ensure the success of forest production. The Generalized Algebraic Difference Approach (GADA) method is a mathematical approach used to model site index curves in planted forests and has been a good alternative for modeling dominant tree height growth to represent site conditions. This technique allows modeling the relationship between dominant tree height and age using non-linear equations, which allows for better adaptation to observed data. Additionally, the GADA method allows the inclusion of other variables that influence site index, such as soil fertility, water, and light availability, among others. Site index curves for planted *Pinus taeda* L. and other conifer forests are constructed using the GADA method in studies conducted around the world. The data commonly used are restricted to dominant tree height in different locations and at different times, with samples collected in areas with different levels of soil fertility. The data were analyzed using the statistical software R, in which, in the case of this research, site index curve models were fitted using the GADA method. The results of the study indicated that the GADA method was able to adequately model the site index curves for planted forests of *Pinus taeda* L..

These results also showed that the GADA method was efficient for adjusting the site index curves for *Pinus taeda* L. plantations in the midwestern region of Santa Catarina. The curves obtained allowed the identification of areas of higher and lower productivity, which is essential for forest management planning and maximizing wood production. Additionally, the study highlighted the importance of collecting accurate and representative data for adjusting site index curves. It is necessary to consider factors such as site heterogeneity, tree genetic variability, and interactions between site conditions and forest management to obtain reliable results. Therefore, site index curves are an essential tool for forest management and sustainable management of planted forests. The Generalized Algebraic Difference Approach (GADA) has been shown to be efficient for adjusting these curves in *Pinus taeda* L. plantations in the midwestern region of Santa Catarina, allowing the identification of areas of higher and lower productivity and more efficient forest management planning. However, it is fundamental to collect accurate and representative data to obtain reliable and relevant results for forest production. In summary, site index curves are an important tool for evaluating the productive potential and management of planted forests of *Pinus taeda* L..

Keywords: Growth, Dominant Height, Modeling, Productive Potential.

2.1 INTRODUÇÃO

A quantidade de madeira a ser produzida no futuro é uma variável de importância capital para o negócio florestal. Em aplicações financeiras se faz um acompanhamento do rendimento do valor aplicado e, de forma análoga, se faz necessário monitorar o rendimento de um projeto florestal. Este rendimento, ao longo do tempo, pode ser monitorado por meio do volume produzido e seu significado em termos de valores sob uma taxa de juros. Neste contexto, as curvas de índice de sítio fornecerão subsídios para o planejamento e otimização da produção florestal. O conhecimento do crescimento da altura dominante, objeto deste estudo, foi obtido com dados de florestas plantadas de *Pinus taeda*, manejadas para serraria, que se localizam na região Meio-Oeste do estado de Santa Catarina. Os dados a serem analisados são de parcelas permanentes instaladas na região nos últimos 25 anos, de maneira que se possa compreender como se comporta o crescimento das árvores em diferentes sítios.

A predição do crescimento da altura dominante, como ferramenta do manejo florestal para planejamento da produção e geração de processos de otimização, necessita de informações fidedignas para que as tomadas de decisão sejam consistentes. A busca do conhecimento das quantidades e

qualidades da produção florestal no tempo e a intensidade das atividades de manejo, como desbastes e podas, só são possíveis com o auxílio de softwares específicos, possibilitando alcançar os objetivos do empreendimento florestal. Esta agilidade é fator preponderante e define o sucesso ou não do negócio, pois, conforme Schneider e Schneider (2008), desbastes aplicados em épocas e pesos inadequados, levam a perdas de produção superiores a 30%. Ainda, Schneider e Schneider (2008) complementa: devido a isto, o manejo florestal deverá ser implementado, principalmente com adoção de tecnologias de gerenciamento da produção, com o objetivo de maximização física e econômica da produção. Por outro lado, empresas produtoras de sementes melhoradas geneticamente indicam um ganho em produtividade da ordem de 20%. Assim, um projeto que não priorize a utilização de material genético superior e adoção de um gerenciamento otimizado, terá redução na competitividade, resultando em perdas de recursos.

2.2 OBJETIVOS

2.2.1 Objetivo geral

O objetivo geral deste estudo é utilizar o método da diferença algébrica generalizada (GADA) para modelar curvas de índice de sítio e classificar áreas de florestas plantadas de *Pinus taeda* L., com base em sua produtividade potencial.

2.2.2 Objetivos específicos

1. Modelar dados de altura e idade de árvores em áreas de florestas plantadas de *Pinus taeda* L. no Meio-Oeste de Santa Catarina;
2. Utilizar o método GADA para modelar as curvas de índice de sítio das áreas de florestas plantadas de *Pinus taeda* L.;
3. Comparar a acurácia (exatidão) da classificação de sítio obtida pelo método GADA com outros métodos de classificação de sítio conhecidos na literatura;

4. Discutir as implicações dos resultados obtidos para o manejo florestal de florestas plantadas de *Pinus taeda* L. no Meio-Oeste de Santa Catarina;

5. Comparar os resultados obtidos com as classificações feitas por outros métodos de modelagem de curvas de índice de sítio, a fim de verificar a eficácia do método GADA para essa finalidade;

6. Elaborar classificação de índice de sítio das áreas de florestas plantadas de *Pinus taeda* L. com base nas curvas modeladas utilizando o método GADA.

2.3. REVISÃO DE LITERATURA

2.3.1 Crescimento em altura

As principais questões do manejo florestal passam por estratificação da produção, regimes de manejo e predição da produção (CAMPOS e LEITE, 2013).

A qualidade do sítio, expressa pela altura dominante, determinará a maior ou menor produtividade da floresta (CLUTTER *et al.*, 1983). As classes de produtividade, mapeadas em seções dos talhões, são definidas pela classificação e mapeamento dos sítios. Depois, trata-se do entendimento dos processos do crescimento e suas consequências na gestão do negócio. A administração dos recursos florestais no tempo requer o conhecimento do que a floresta vai produzir no futuro, já que as decisões dependem diretamente da predição de produções futuras com base em informações atuais (CAMPOS e LEITE, 2013).

O número de árvores por classe de tamanho e sua distribuição espacial são características de controle do pesquisador (CLUTTER *et al.*, 1983) e, ainda, conforme estes autores, a escolha de regimes de manejo adequados possibilita o alcance dos objetivos de capacidade de produção do sítio. Por outro lado, os autores supracitados, afirmam que a densidade e crescimento do povoamento passam pela análise de variáveis como crescimento da altura e diâmetro e que resultam em determinada forma da árvore, área basal e volume do povoamento florestal. Ressalta-se, então, que o crescimento e produção dos diferentes regimes de manejo são as informações correntes a serem analisadas para a construção de simulações de diferentes realidades de manejo e sítio.

A produção de povoamentos florestais ao longo do tempo pode ser estimada de várias formas, através de métodos biométricos estáticos e dinâmicos (ALDER, 1980, citado por SCHNEIDER e SCHNEIDER, 2008). Neste trabalho, serão analisadas as vantagens e desvantagens destes métodos e, também, de outros modelos para estimar o crescimento e produção. Outros fatores a serem abordados são a mortalidade populacional e suas características e a estruturação da produção, apresentada de forma mais clássica por meio de tabelas de produção organizadas por idade e índice de sítio (SCHNEIDER e SCHNEIDER, 2008).

2.3.2 Classificação de sítio

A classificação de sítio é um importante processo utilizado na silvicultura para avaliar a produtividade potencial de uma área de floresta plantada. Ela é definida como a capacidade do solo para suprir nutrientes, água e outros fatores necessários para o desenvolvimento das árvores. Dessa forma, a classificação de sítio pode auxiliar no planejamento de manejo florestal, na seleção de espécies adequadas para o local e na prognose do volume de madeira que pode ser produzido.

Dentre os métodos utilizados para a classificação de sítio, destacam-se os baseados em curvas de índice de sítio, que relacionam a altura das árvores dominantes com a idade em uma determinada área. A partir da análise dessas curvas, é possível identificar áreas de maior e menor produtividade potencial, classificando-as em diferentes níveis de índice de sítio.

Dentre os modelos utilizados para a elaboração das curvas de índice de sítio, encontra-se o modelo de Chapman-Richards, amplamente utilizado na silvicultura para modelagem do crescimento e produção de árvores. Este modelo é baseado em equações diferenciais e apresenta alta flexibilidade para ajustar diferentes padrões de crescimento das árvores.

Mais recentemente, a diferença algébrica generalizada (GADA) tem sido aplicada na modelagem de curvas de índice de sítio (CIESZEWSKI e BAILEY, 2000). Este método é baseado em equações diferenciais generalizadas, que permitem a modelagem de diferentes padrões de crescimento das árvores em

uma única equação. Além disso, o método GADA permite a inclusão de variáveis ambientais como fatores que influenciam no crescimento das árvores.

Estudos têm demonstrado que a utilização do método GADA na elaboração de curvas de índice de sítio pode propiciar melhor adequação do modelo aos dados coletados em campo, resultando em uma classificação mais precisa das áreas de florestas plantadas. Assim, a aplicação do método GADA na classificação de sítios de florestas plantadas pode contribuir para uma gestão mais eficiente dessas áreas, com ganhos em produtividade e rentabilidade.

2.3.3 Índice de sítio

Atualmente, o Índice Sítio é o método mais amplamente usado para classificar os estratos de produtividade florestal, principalmente em florestas plantadas. Segundo Clutter *et al.* (1983), a variável altura dominante usada para a construção das curvas deste índice está correlacionada com os fatores de crescimento da produção volumétrica, sendo pouco influenciada pela densidade e desbastes e de fácil obtenção nas amostragens.

2.3.4 Construção das curvas de índice de sítio

A construção das curvas de índice de sítio é um processo que envolve a coleta de dados em campo e a aplicação de modelos matemáticos para ajuste das curvas de crescimento das árvores em relação à idade. Os seguintes passos podem ser seguidos para a construção das curvas de índice de sítio:

1. Coleta de dados em campo: medições de diâmetro e altura das árvores em diferentes idades são efetuadas, em uma ou mais áreas representativas da região de interesse. Além disso, dados sobre o solo, clima e outras variáveis ambientais que possam influenciar no crescimento das árvores são coletados.
2. Seleção do modelo matemático: modelos matemáticos que se adequem aos padrões de crescimento das árvores observados em campo são selecionados. O modelo de Chapman-Richards é um dos mais utilizados para essa finalidade, sendo baseado em equações

diferenciais que permitem a modelagem de diferentes padrões de crescimento das árvores (RICHARDS, 1959).

3. Ajuste no modelo: ajustes nos parâmetros do modelo matemático selecionado são efetuados, a fim de que a curva de crescimento das árvores se adeque aos dados coletados em campo. Esses ajustes podem ser efetuados manualmente ou por meio de *softwares* de estatística e modelagem matemática.
4. Construção da curva de índice de sítio: a curva de índice de sítio é construída a partir dos valores ajustados dos parâmetros do modelo matemático. Esta curva representa a relação entre a produtividade das árvores e a idade em diferentes níveis de índice de sítio.
5. Validação do modelo: é importante realizar a validação do modelo construído, a fim de verificar a sua adequação aos dados coletados em campo. Essa validação pode ser efetuada por meio da comparação dos valores observados em campo com os valores previstos pelo modelo.

A utilização do método da diferença algébrica generalizada (GADA) na construção das curvas de índice de sítio pode propiciar maior flexibilidade na modelagem dos padrões de crescimento das árvores, bem como a inclusão de variáveis ambientais como fatores que influenciam no seu crescimento (CIESZEWSKI e BAILEY, 2000; CIESZEWSKI, 2001, 2002, 2003, 2008).

2.3.5 Método matemático de construção das curvas de índice de sítio

Os principais métodos de construção de curvas de índice de sítio são: a) método da curva guia; b) predição de parâmetros; c) diferenças algébricas – ADA (BAILEY e CLUTTER, 1974) e; d) diferenças algébricas generalizadas – GADA (CIESZEWSKI e BAILEY, 2000).

As curvas de altura dominante em função da idade podem ser anamórficas ou polimórficas, dependendo do método a ser utilizado. As curvas polimórficas, independentes entre si e com várias assíntotas, são superiores em termos de acuracidade e precisão e são mais amplamente utilizadas (BURKHART e TOMÉ, 2012).

A construção das curvas de índice de sítio é baseada em modelos matemáticos que permitem a modelagem do crescimento das árvores em

relação à idade e às condições ambientais. Dentre os modelos matemáticos mais utilizados na construção das curvas de índice de sítio, destaca-se o modelo de Chapman-Richards, baseado em uma equação diferencial que relaciona o crescimento da árvore com a sua idade. Essa equação é dada pela seguinte expressão:

$$h_t = h_{max}(1 - e^{a(t-t_0)^b})^c$$

em que:

h_t é a altura da árvore em relação à idade t ;

h_{max} é a altura máxima que a árvore pode atingir;

a , b e c são parâmetros do modelo, que controlam o padrão de crescimento das árvores em relação à idade;

t_0 é a idade de início de crescimento da árvore.

Para construção das curvas de índice de sítio, os parâmetros do modelo de Chapman-Richards são ajustados aos dados coletados em campo. Dessa forma, é possível obter uma curva que representa a relação entre a produtividade das árvores e a idade em diferentes níveis de índice de sítio.

Também, outros modelos de altura dominante em função da idade foram ajustados, veja Tabela 2.1, porém optou-se pelo de Chapman-Richards por seu histórico de eficiência na descrição do crescimento em altura, uma vez que não houve diferenças significantes entre os modelos.

Modelo de Chapman-Richards:

Equação básica:
$$h_d = b_0(1 - \exp(-b_1.t))^{b_2} + \varepsilon \quad (1)$$

$$SI = b_0(1 - \exp(-b_1.t_0))^{b_2} + \varepsilon \quad (2)$$

Modelo guia:
$$h_d = SI \left[\frac{1 - \exp(-b_1.t_1)}{1 - \exp(-b_1.t_0)} \right]^{b_2} + \varepsilon \quad (3)$$

2.3.6 Método da diferença algébrica – ADA

Vários modelos que descrevem a relação altura dominante em função da idade baseiam-se na metodologia das diferenças algébricas, introduzido por Bailey e Clutter (1974) e que possibilita a modelagem de uma função de crescimento a partir de um modelo básico, resultando curvas com parâmetros comuns, exceto o do sítio. Estabeleceu-se a invariância da idade de referência como uma propriedade, ou seja, foi fixada para derivar o modelo de índice de sítio. Esta metodologia atribui um parâmetro no modelo base e denominado como uma característica do local, curva guia, parâmetro específico do local com outros parâmetros atribuídos como comuns ou globais (TRIM *et al.*, 2020). As curvas geradas por estes modelos são anamórficas e com uma única assíntota.

2.3.7 Método da diferença algébrica generalizada – GADA

O método da diferença algébrica generalizada (GADA) é uma abordagem matemática mais flexível para a modelagem do crescimento das árvores em relação à idade e às condições ambientais (MANSO *et al.*, 2021). Ele permite a inclusão de variáveis ambientais e tratamentos silviculturais como fatores que influenciam no crescimento das árvores, além de possibilitar a modelagem de diferentes padrões de seu crescimento (TRIM *et al.*, 2020). Por outro lado, em certos casos, a metodologia ADA pode ser suficiente na modelagem da altura dominante de uma espécie em determinada região (LÓPEZ *et al.*, 2013). No entanto, a utilização do método GADA na construção das curvas de índice de sítio pode propiciar maior precisão na classificação de sítios florestais e na previsão da produtividade potencial das florestas plantadas.

Este método pode ser aplicado conforme os seguintes passos:

1. Selecionar a equação básica (neste caso Chapman-Richards) e identificar os parâmetros de local;
2. Definição dos parâmetros que mudam entre as parcelas e substituindo-os por funções de X (uma variável não medida que descreve a produtividade);
3. A equação de base bidimensional, inicialmente selecionada $Y = f(t)$, é agora expandida em uma equação tridimensional $Y = f(t,X)$,

descrevendo as mudanças transversais e longitudinais com duas variáveis independentes (t e X);

4. Substituir X por condições iniciais, de uma série mínima de duas observações no tempo, equivalentes que representam observações pontuais das duas variáveis observáveis t e Y (por exemplo, t_0, Y_0), para que o modelo possa ser definido implicitamente (por exemplo, $Y = f(t, t_0, Y_0)$) (CIESZEWSKI e BAILEY, 2000; CIESZEWSKI, 2002).

A formulação GADA derivada por Krumland e Eng (2005) a partir do modelo Richards, considerando α_1 e α_3 como relacionados à produtividade do local, foi o sistema de equações selecionado.

Modelo de Chapman-Richards:

Neste modelo, será usado a equação básica (1) com a seguinte notação:

$$h_d = \alpha_1(1 - \exp(-\alpha_2 t))^{\alpha_3}$$

Equações ADA e GADA usadas neste estudo:

Modelo I (MANSO *et al.*, 2021)

Parâmetros do sítio: $\alpha_1 = X$ (4)

Solução de X : $X_0 = H_0 / (1 - e^{-\beta_1 t_0})$

Equação dinâmica: $h_1 = h_0 \left[\frac{1 - e^{-\beta_1 t_1}}{1 - e^{-\beta_1 t_0}} \right]^{\beta_2}$

Modelo III (MANSO *et al.*, 2021)

Parâmetros do sítio: $\alpha_1 = e^{(X)}$, $\alpha_3 = \beta_1 + \beta_3 / X$ (5)

Solução de X com valores iniciais (t_0, X_0):

$$X_0 = \frac{1}{2} \left[(\ln H_0 - \beta_2 L_0) + \sqrt{(\ln H_0 - \beta_2 L_0)^2 - 4\beta_3 L_0} \right] \quad (6)$$

$$L_0 = \ln[1 - e^{-\beta_1 t_0}] \quad (7)$$

Equação dinâmica:
$$h_1 = h_0 \left[\frac{1 - e^{(-\beta_1 t_1)}}{1 - e^{(-\beta_1 t_0)}} \right]^{\beta_2 + \beta_3 / X_0} \quad (8)$$

em que: h_d , h_1 são a altura dominante (m) da i -ésima parcela na idade t de uma medição; h_0 é a altura dominante na idade de referência t_0 ; X é o valor da função na idade t , e X_0 é a variável referência definida como valor da função na idade t_0 ; t_1 é a idade (anos) correspondente a h_1 ; t_0 é a idade de referência; SI é o índice de sítio da parcela em uma medição; α_1 , α_2 , α_3 são parâmetros locais do modelo; β_0 , β_1 e β_2 são parâmetros globais da equação dinâmica; e é o número exponencial de Euler; ε é o erro aleatório.

2.3.8 Acuracidade e estabilidade das curvas de índice de sítio

A acuracidade e estabilidade das curvas de índice de sítio são fundamentais para o sucesso do uso dessa ferramenta em projetos de manejo florestal. A acuracidade se refere à capacidade de a curva representar com precisão a relação entre a produtividade das árvores e a idade em diferentes níveis de índice de sítio. Já a estabilidade se refere à capacidade de a curva manter essa representatividade ao longo do tempo.

A acuracidade das curvas de índice de sítio depende da qualidade dos dados utilizados na estimativa dos parâmetros dos modelos matemáticos. Dados imprecisos, incompletos ou inadequados podem levar a erros de modelagem e, conseqüentemente, a uma curva imprecisa. Além disso, a escolha do modelo matemático adequado para a construção da curva também é fundamental para garantir sua acuracidade.

A estabilidade das curvas de índice de sítio depende de a capacidade do modelo matemático representar com precisão as mudanças nas condições ambientais ao longo do tempo. Mudanças no clima, no manejo florestal e nas características do solo podem influenciar no crescimento das árvores, e é importante que a curva de índice de sítio seja capaz de incorporar essas mudanças ao longo do tempo.

Para garantir a acuracidade e estabilidade das curvas de índice de sítio, é importante que sejam utilizados dados confiáveis e atualizados, e que sejam efetuadas avaliações periódicas da curva em relação às condições ambientais

locais. Além disso, é importante que sejam efetuados estudos comparativos entre diferentes modelos matemáticos para determinar qual deles é mais adequado para a construção da curva em cada região ou condição ambiental específica.

2.3.9 Idade índice

A idade índice é usualmente escolhida arbitrariamente e deve se posicionar próxima do fim do período de rotação do povoamento florestal. Conforme Heger (1971), as estimativas de índice de sítio podem estar sujeitas a erros quando a idade índice estiver distante das idades amostradas.

2.3.10 Tipos de dados para construção das curvas de índice de sítio

Os dados utilizados neste estudo são informações provenientes de parcelas permanentes e, neste caso, usadas para classificação de sítio, constituindo-se de pares de dados de altura dominante e suas respectivas idades.

2.3.11 Aplicação prática da classificação de índice de sítio

A partir do momento que se tem as curvas de sítio de um local ou região, o mapeamento por classes de sítio das áreas de interesse constitui-se na etapa final da classificação de sítio, gerando a quantidade de área dos estratos da produção florestal e assegurando qualidade de informação para o manejo florestal.

2.4. MATERIAIS E MÉTODOS

2.4.1 Localização da área de estudo

Os dados de altura dominante foram levantados em áreas do Meio-Oeste Catarinense em um período de cerca de 25 anos, como parte das informações coletadas para Inventário Florestal Contínuo, principalmente no município de

Caçador, e também nos municípios de Calmon, Matos Costa, Lebon Régis, Videira e Fraiburgo, região fisiográfica do Alto Vale do Rio do Peixe, planalto ocidental de Santa Catarina, integrando a microrregião do Contestado situada entre os paralelos 26° e 27° e os meridianos 50° e 52° Oeste. (ROCHA, 2016).

2.4.2 Caracterização da área

Segundo a classificação climática de Köppen, o clima da região é do tipo "Cfb", mesotérmico, subtropical úmido, com verões frescos, não apresentando estação seca definida. A precipitação média anual é de 1.600 mm, temperatura média anual de 16,5°C e a temperatura média mínima em torno de 11,5°C (PANDOLFO *et al.*, 2002; MOTA *et al.*, 1971)

O solo da região onde os dados foram coletados são, predominantemente, Latossolos e Nitossolos e enquadram-se na unidade de mapeamento Vacaria, textura argilosa, friáveis, medianamente profundos e relevo suavemente ondulado (ROCHA, 2016).

Figura 2.1 – Mapa das regiões de Santa Catarina com os plantios de *Pinus* e *Eucalyptus* e localização das florestas objeto de estudo.



Fonte: ACR (2022).

Os dados foram amostrados em vários sítios, predominantemente foram medidos em solos dos tipos Latossolo e Cambissolo, caracterizados pela textura argilosa e argilosa média e pela vegetação primária de campo e floresta, com base no levantamento e no mapeamento de solos existentes nas áreas de plantio (SCHNEIDER e SCHNEIDER, 2008).

2.4.3 Origem dos dados

Os dados utilizados no presente estudo, assinalados na Figura 2.1, da região Meio-Oeste de Santa Catarina, são provenientes de Parcelas Permanentes de Inventário Florestal Contínuo (IFC), instalado a partir de 1998. Basicamente, estes dados são constituídos de diâmetro à altura do peito, altura total, altura dominante e um código de defeito, quando houver, como por exemplo, árvore torta, bifurcada e assim por diante. Concomitantemente, também foram efetuadas cubagens em todas as idades e diferentes locais.

Na implantação dos povoamentos, a área teve preparo de solo, limpeza do local e efetuação dos coveamentos. A partir do ano de 1997, o preparo nas áreas mecanizadas passou a ser feito com escarificador e trator traçado, riscando o solo e constituindo a linha de plantio. O plantio foi feito manualmente e foram realizados os tratamentos culturais comumente utilizados, tais como: roçadas, coroamentos e combate a formiga.

As áreas de floresta deste estudo foram medidas, anualmente, a partir de 5 até os 17 anos de idade. As unidades amostrais são de 20 m x 20 m, 400 m², e, no interior de cada uma delas, foram medidas a circunferência à altura do peito de todas as árvores, a altura das árvores das primeiras duas linhas e a altura dominante, ou seja, das quatro árvores de maior diâmetro da parcela.

Por outro lado, os dados provenientes dessas parcelas permanentes foram distribuídos em diferentes classes de idade, sítios e formas de manejo florestal. Todos os dados originaram-se de povoamentos implantados em espaçamento de 2,5 m x 2,5 m e 3,0 m x 2,0 m e que no manejo tiveram podas à altura de 2,0; 4,0 e 6,0 metros, efetuadas, respectivamente, quando a altura total da árvore atingiu em torno de 4,0; 8,0 e 12 metros (SCHNEIDER e SCHNEIDER, 2008).

2.4.4 Informações coletadas

Em cada unidade amostral foram medidas a circunferência à altura do peito (*CAP*) de cada árvore, a altura das 16 primeiras árvores e a altura das árvores dominantes. Os *CAPs* foram obtidos com fita métrica e as alturas com o hipsômetro, para uma precisão de décimos de metro. A determinação da altura dominante (h_d) das parcelas teve como base o conceito de Assmann (1970), que define tomá-las nas 100 árvores de maior diâmetro por hectare.

2.4.5 Distribuição dos dados

Os dados provenientes de parcelas permanentes de Inventário Florestal Contínuo, instaladas na região do Meio-Oeste de Santa Catarina, estão distribuídos em vários sítios, locais de topografia ondulada, baixadas, vales e campos de altitude do planalto catarinense.

2.4.6 Modelos usados no ajuste da altura dominante

O processamento das estimativas de altura dominante foi realizado usando-se o software R®, ajustando modelos não lineares de altura dominante em função da idade de dados provenientes de parcelas permanentes, ou seja, cada parcela constitui um par de dados para a análise de regressão. Na Tabela 2.1 tem-se os modelos que foram testados para a determinação da relação altura dominante e idade.

2.4.7 Índice de sítio

Para a modelagem do índice de sitio foram utilizados pares de dados de altura dominante (h_d) e idade (t). Os modelos não lineares utilizados, apresentados na Tabela 2.1, servem para descrever o crescimento biológico e são comumente utilizados na literatura florestal para descrever o crescimento em altura. O ajuste foi realizado por meio do software R® em que também foram geradas as estatísticas de ajuste e gráficos de resíduos que serviram para selecionar a melhor equação a ser usada.

Uma vez escolhido o modelo que apresente a melhor performance, foram equacionadas as curvas de índice de sitio pelo método da curva guia. Por se tratar de povoamentos de *Pinus taeda*, cuja idade de rotação é definida em torno de 18-20 anos, determinou-se como idade de referência 16 anos. Considerando a espécie e homogeneidade dos dados, predefiniu-se classificar o povoamento em quatro índices de sitio.

Tabela 2.1 – Modelos matemáticos selecionados para a modelagem de altura dominante (m) em função da idade (anos).

N°	Modelo não linear	Autor
1	$h_d = b_0(1 - \exp(-b_1.t))^{b_2} + \varepsilon$	Chapman-Richards
2	$h_d = b_0/(1 + b_1.\exp(-b_2.t))^{1/b_3} + \varepsilon$	Richards
3	$h_d = b_0(1 - \exp(b_1.b_2(-b_2.t))) + \varepsilon$	Mitscherlich
4	$h_d = b_0(\exp(-b_1.\exp(-b_2.t))) + \varepsilon$	Gompertz
5	$h_d = b_0(\exp(-b_1.\exp(-b_2.t))) + \varepsilon$	Logistic
6	$h_d = b_0 - b_1.\exp(-b_2.t) + \varepsilon$	Meloun I
7	$h_d = b_0(1 - b_1.\exp(-b_2.t)) + \varepsilon$	Brody
8	$h_d = b_0(1 - b_1.\exp(-b_2.t))^3 + \varepsilon$	Bertalanffy

em que: h_d é a altura dominante; t é a idade; β_{is} são os coeficientes de regressão; ε_i é o erro aleatório do modelo.

Fonte: autor.

2.5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

2.5.1 Resumo dos dados utilizados

A Tabela 2.2 apresenta a faixa de variação dos dados objetos desta pesquisa.

Tabela 2.2 – Dimensões da faixa dos dados para o ajuste dos modelos.

Estatística	$d_{1,30m}$ (cm)	h (m)	Idade (anos)
Mínimo	10,6	6,0	4,6
Máximo	40,9	24,9	18,0
Média	26,3	15,4	10,3
CV (%)	26,4	29,8	-

Fonte: Autor.

Os ajustes apresentaram um resultado muito próximo entre os modelos,

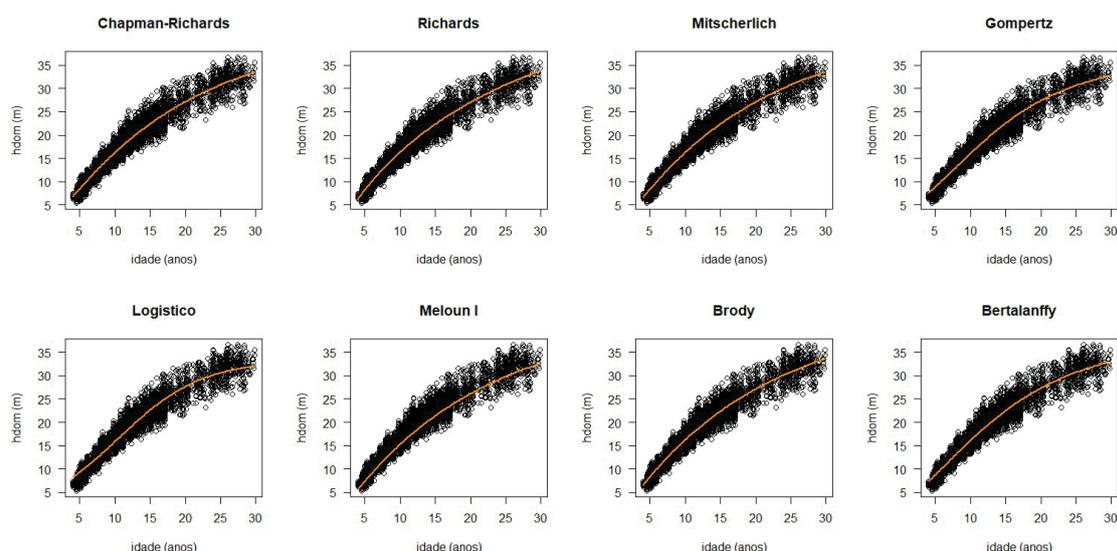
como pode-se ver na Figura 2.2.

2.5.2 Seleção do modelo de altura dominante em função da idade

A curva ajustada para cada modelo de índice de sítio está apresentada na Figura 2.2 e observa-se tal como nos gráficos de resíduos (Figuras 2.4, 2.5 e 2.6) a semelhança entre a estimativa dos modelos ao longo da linha de tendência, diferenciando-se apenas nos extremos que correspondem as estimativas nas maiores e menores idades do povoamento mensurado.

Portanto, o modelo adotado para prover as estimativas de altura dominante foi o de Chapman-Richards.

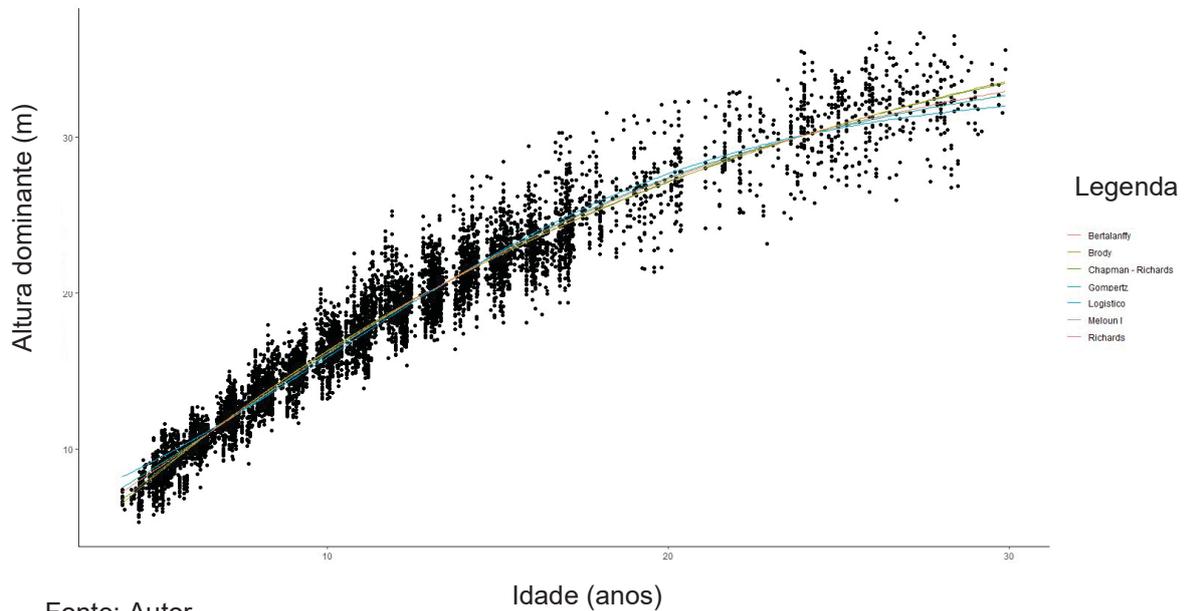
Figura 2.2 - Modelos ajustados e suas Curvas Guias.



Fonte: Autor.

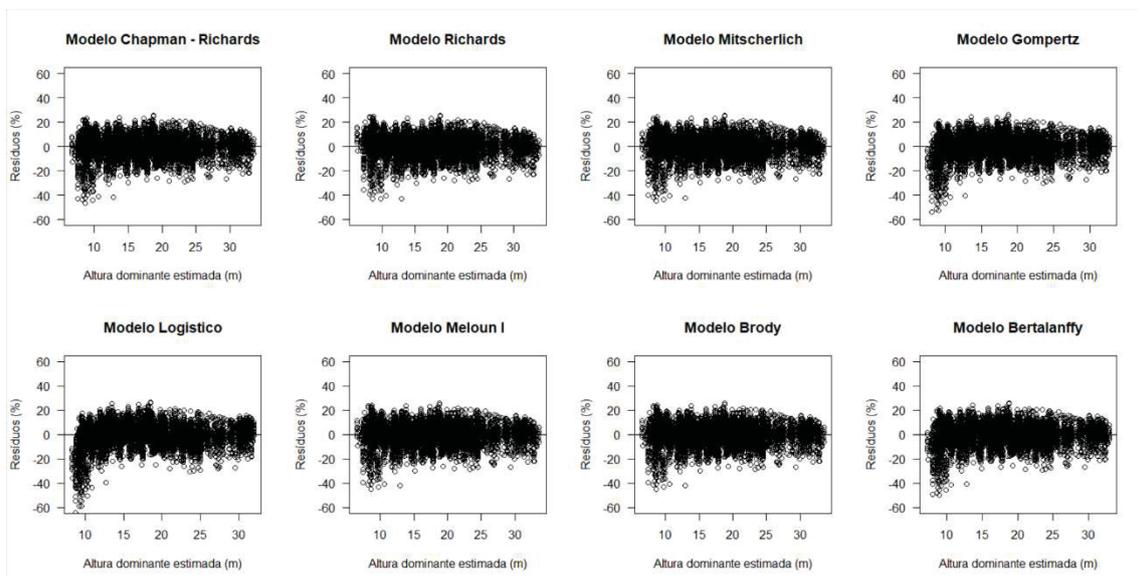
O gráfico de resíduos para cada modelo de índice de sítio (Figura 2.4), evidencia que não há tendenciosidades no ajuste. Destaca-se a semelhança da distribuição dos resíduos entre os oito modelos ajustados, com quase a totalidade dos valores percentuais entre -30% e 30%. As maiores diferenças entre os valores reais de altura dominante e as estimativas encontram-se nas idades iniciais dos indivíduos do povoamento florestal, cujos erros tendem a ser maiores (BECK e TROUSDELL, 1973).

Figura 2.3 – Curvas Guias dos modelos ajustados com dados até 30 anos.



Fonte: Autor.

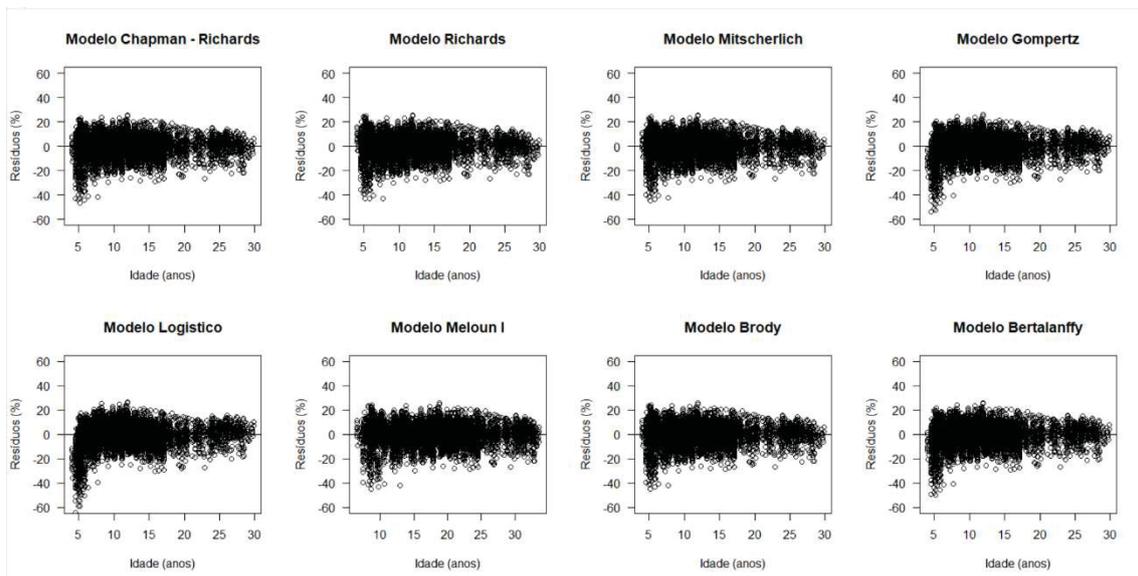
Figura 2.4 – Resíduos percentuais do ajuste da altura dominante.



Fonte: Autor.

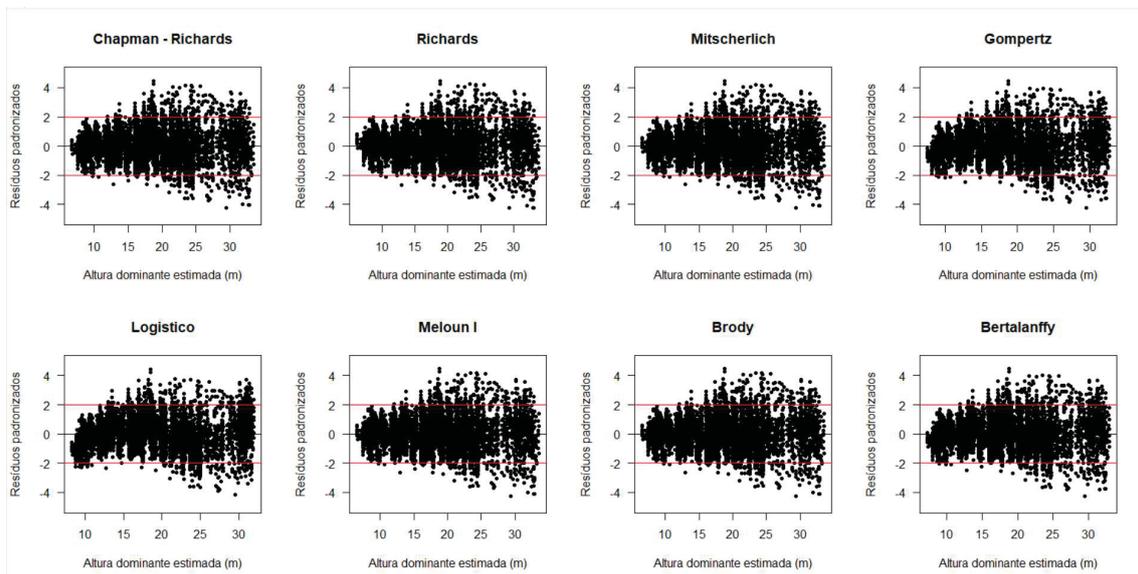
Na Figura 2.7 estão apresentados três tipos de gráficos de resíduos para o modelo escolhido, em que o terceiro, que corresponde aos resíduos padronizados, evidencia maior dispersão na estimativa das maiores alturas dominantes, com alguns valores acima de ± 2 desvios padrões.

Figura 2.5 – Resíduos percentuais do ajuste da altura dominante no período de rotação.



Fonte: Autor.

Figura 2.6 – Resíduos padronizados do ajuste dos modelos da altura dominante.

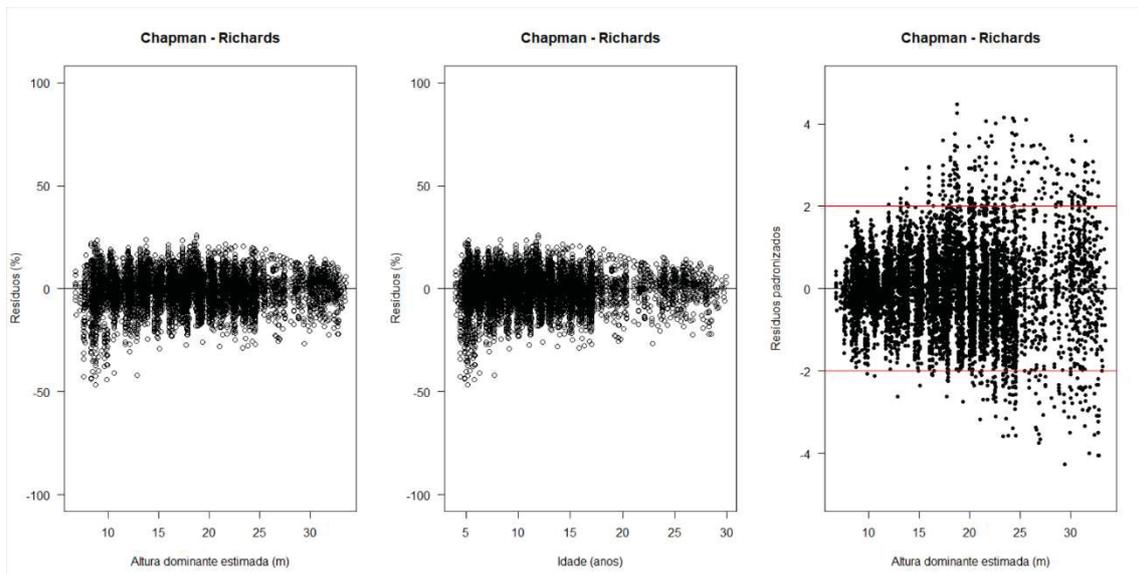


Fonte: Autor.

2.5.3 Coeficientes do Modelo de Chapman-Richards

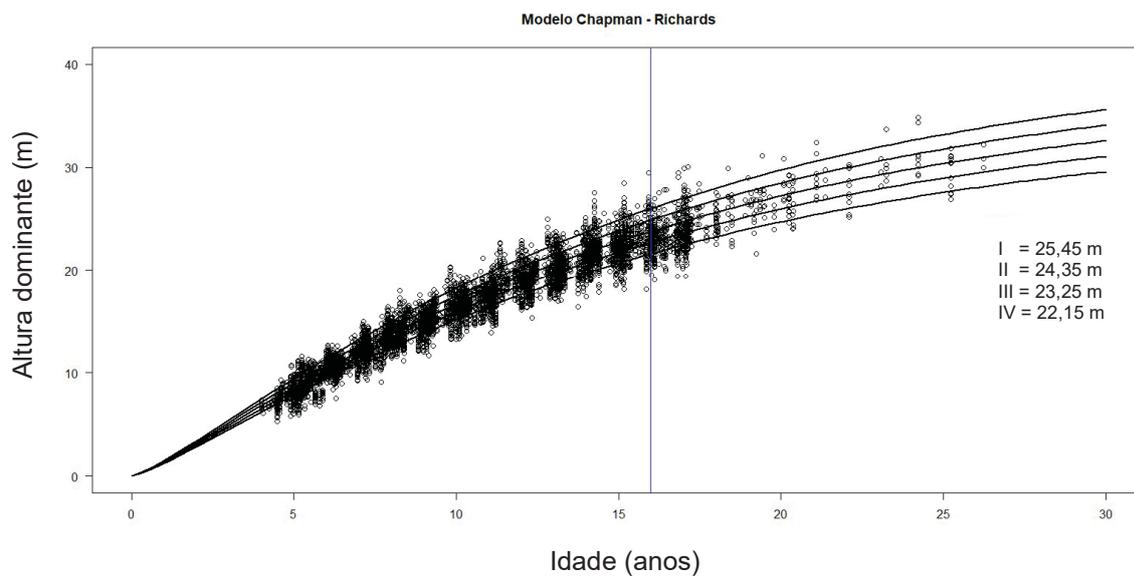
$$h_d = 36,652387(1 - \exp^{-0,07415})^{1,256544} \quad (9)$$

Figura 2.7 – Gráfico de resíduos do modelo de Chapman-Richards para estimativa de h_d .



Fonte: Autor.

Figura 2.8 – Classificação de índice de sítio pelo método da Curva Guia utilizando o modelo de Chapman-Richards para estimativa de h_d e idade de referência de 16 anos.



Fonte: Autor.

2.5.4 Coeficientes da formulação das Equações Algébricas Generalizadas – GADA

Os ajustes dos modelos foram feitos com software R v. 3.5.1 (Equipe R Core, 2018) em conjunto com o RStudio Versão 1.1.463 - © 2009-2011 RStudio, Inc. (Equipe RStudio, 2016), utilizando-se o pacote *nlme* (PINHEIRO e BATES, 2023).

Equações ADA e GADA usadas neste estudo e seus coeficientes:

Modelo I – ADA

$$\text{Parâmetros do sítio: } \alpha_1 = X \quad (10)$$

$$\text{Solução de X: } X_0 = H_0 / (1 - e^{-0,099039 * t_0}) \quad (11)$$

$$\text{Equação dinâmica: } h_1 = h_0 \left[\frac{1 - e^{(-0,099039 * t_1)}}{1 - e^{(-0,099039 * t_0)}} \right]^{1,457599} \quad (12)$$

Modelo III – GADA

$$\text{Parâmetros do sítio: } \alpha_1 = e^{(X)}, \alpha_3 = \beta_1 + \beta_3 / X \quad (13)$$

Solução de X com valores iniciais (t_0, X_0) :

$$X_0 = \frac{1}{2} \left[(\ln H_0 - 0,09919973 L_0) + \sqrt{(\ln H_0 - 0,09919973 \beta_2 L_0)^2 - 4 * 2,037642 \beta_3 L_0} \right] \quad (14)$$

$$L_0 = \ln[1 - e^{-0,09919973 \cdot 0}] \quad (15)$$

Equação dinâmica:

$$h_1 = h_0 \left[\frac{1 - e^{(-0,09919973t_1)}}{1 - e^{(-0,09919973t_0)}} \right]^{0,8734289 + 2,037642 / X_0} \quad (16)$$

2.5.5 Particularidades do processo GADA

O método GADA é um ajuste complexo, que capta o efeito de uma determinada variável ao longo do tempo, sendo necessário para seu ajuste no mínimo duas medições e exige uma atenção em relação a base de dados, que seja apropriadamente organizada. Basicamente, esta organização prévia dos dados visa agrupá-los para minimizar os efeitos de sítio, regime de manejo ou um determinado fenômeno ou evento que se queira estudar, ou que se saiba de sua existência.

Outra dificuldade foi encontrar as sementes ou valores iniciais dos coeficientes a serem fornecidos para o ajuste dos modelos. Alguns valores foram considerados como referência e funcionaram bem, outros não (DIÉGUEZ-ARANDA *et al.*, 2006; TRIM *et al.*, 2020; MANSO *et al.*, 2021). No caso das pesquisas de Diéguez-Aranda *et al.* (2006) e de Trim *et al.* (2020), mesmo sendo da mesma espécie desta pesquisa, os coeficientes GADA do modelo de Chapman-Richards são bem diferentes, evidenciado por uma rotação três a quatro vezes maior, não servido, portanto, como exemplo. Na pesquisa de Manso *et al.* (2021), alguns valores chegaram próximos aos encontrados para *Pinus taeda*, mas eram de outra espécie de conífera.

Este problema de encontrar as sementes para os coeficientes evidenciou que eles se encontram em pequenas faixas de ocorrência, indicando que os modelos GADA são sensíveis aos diferentes tipos de dados, ou seja, quando se mistura dados de florestas com diferentes regimes de manejo, então, não há convergência no ajuste do modelo. Quando ajustados de forma separada e com as mesmas sementes ocorre a convergência.

A idade de referência quando se encontra muito próxima das alturas máximas dos dados ou quando abaixo dos dez anos de idade, também não foi possível encontrar sementes iniciais de coeficientes para o ajuste do Modelo III de GADA.

Os modelos estimadores da altura dominante foram analisados quanto à sua eficiência aplicando-se os critérios estatísticos de coeficiente de determinação (R^2_{ajust}), erro padrão da estimativa ($S_{yx\%}$) e a dispersão gráfica dos resíduos, apresentados a seguir nas equações (17-20).

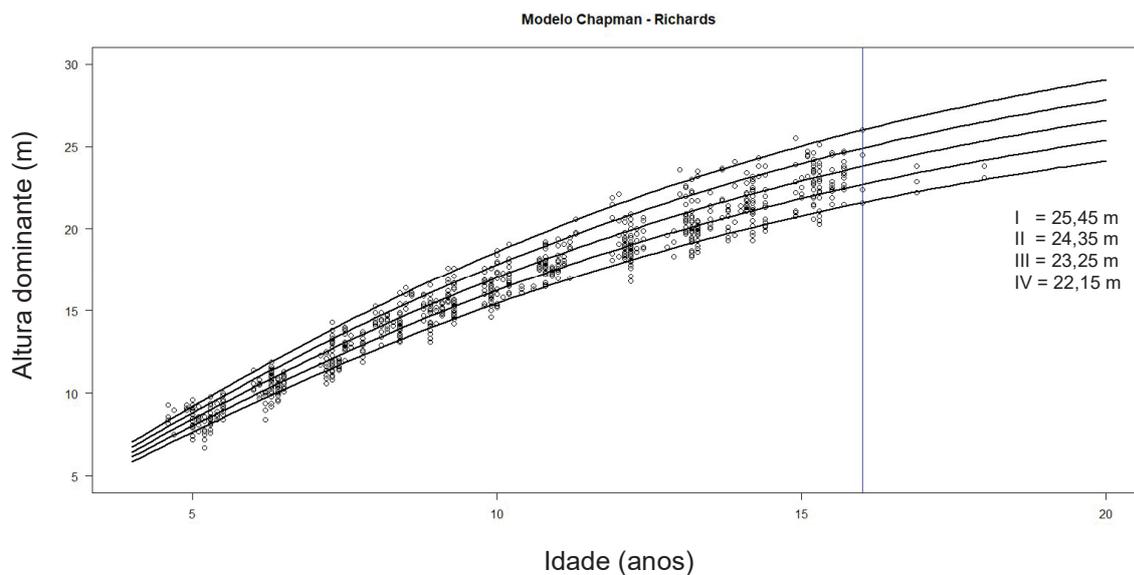
$$R^2 = 1 - \left(\frac{SQR}{SQT} \right) \quad (17)$$

$$R^2_{adj} = 1 - \left[(R^2) \frac{(n-1)}{(n-p)} \right] \quad (18)$$

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{SQR}{n-p}} \quad (19)$$

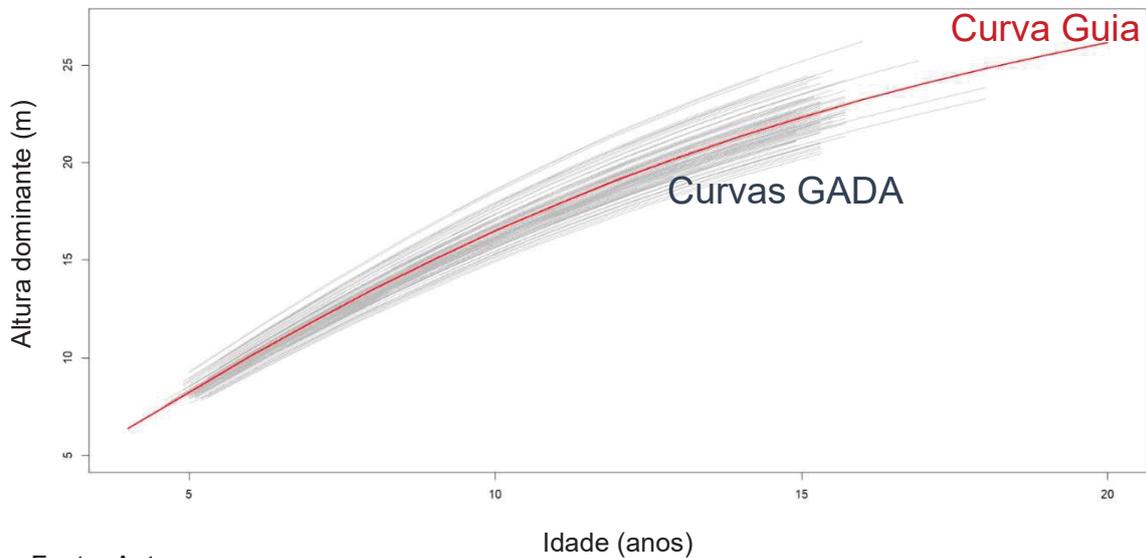
$$S_{yx\%} = \frac{S_{yx}}{\bar{y}} \cdot 100 \quad (20)$$

Figura 2.9 – Curvas de índice de sítio pelo método da Curva Guia, utilizando dados seleccionados e o modelo de Chapman-Richards para estimativa de h_d e idade de referência de 16 anos.



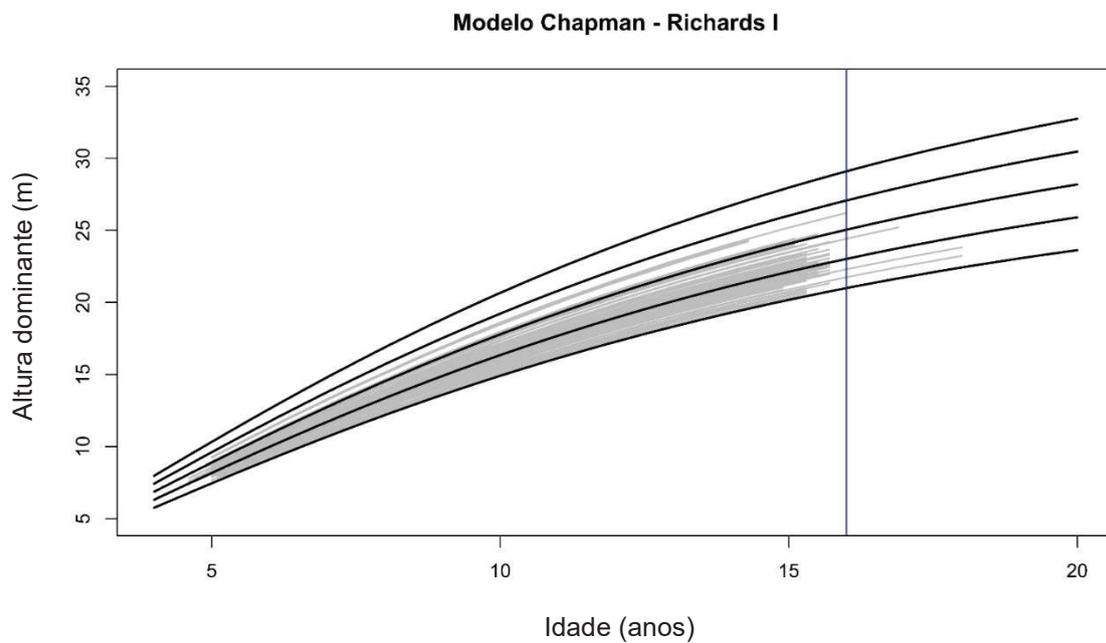
Fonte: Autor.

Figura 2.10 – Curvas de índice de sítio pelo método da Curva Guia e GADA Modelo III utilizando o modelo básico de Chapman-Richards para estimativa de h_d e idade de referência de 16 anos das 903 parcelas.



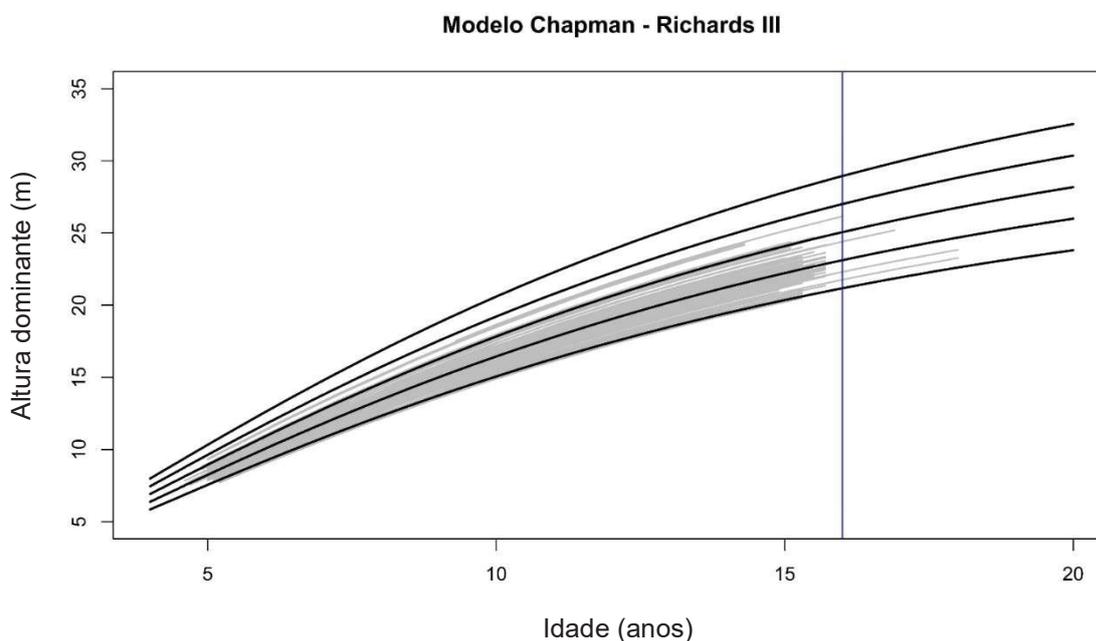
Fonte: Autor.

Figura 2.11 – Classes de índice de sítio e as curvas das 903 parcelas pelo método ADA Modelo I utilizando o modelo básico de Chapman-Richards para estimativa de h_d e idade de referência de 16 anos.



Fonte: Autor.

Figura 2.12 – Classes de índice de sítio e as curvas das 903 parcelas pelo método GADA Modelo III utilizando o modelo básico de Chapman-Richards para estimativa de h_d e idade de referência de 16 anos.



Fonte: Autor.

Tabela 2.3 – Estatísticas de avaliação do ajuste dos modelos matemáticos de estimativas de altura dominante.

Modelo	SQRes.	R^2_{ajust}	$S_{yx}\%$
Curva Guia	852,42	0,9559	5,9172
ADA Modelo I	135,17	0,9938	2,3550
GADA Modelo III	133,46	0,9950	2,3414

em que: SQRes. é a soma do quadrado dos resíduos; R^2_{ajust} é o coeficiente de determinação ajustado; $S_{yx}\%$ é o erro padrão da estimativa em percentual.

O Modelo III (equação dinâmica 16) foi o que apresentou as melhores estimativas de altura dominante ao longo da rotação do *Pinus taeda* L. na região do Meio-Oeste de Santa Catarina. Este modelo apresentou, também, as melhores propriedades para generalizar as estimativas devido ao efeito da variável latente X , neste caso o próprio índice de sítio. O Modelo I (equação dinâmica 12) veio logo em seguida, apresentando estimativas bastante próximas do melhor modelo, porém como possui apenas dois coeficientes, obrigatoriamente ficou atrás do Modelo III – GADA que possui três coeficientes,

ou seja, explica um pouco melhor a relação altura dominante em função da idade.

Este método das diferenças algébricas generalizadas (*Generalized Algebraic Difference Approach* – GADA), apresenta grande vantagem quando se o compara com o método tradicional de ajuste da Curva Guia, devido à redução do erro padrão da estimativa em mais de 50% e a soma dos quadrados de resíduos em aproximadamente 85% (Tabela 2.3). Também, por ser um método invariante quanto a escolha da idade de referência, apresenta flexibilidade no ajuste, maior precisão e gera curvas de crescimento polimórficas com diferentes assíntotas. Estas características asseguram que, em futuras decisões de manejo, esta metodologia será utilizada e melhor avaliada quanto a adição de outras variáveis teóricas de efeitos aleatórios ao longo da rotação.

As unidades amostrais apresentaram um comportamento de crescimento em altura dominante bastante uniforme, suas curvas de ajuste dos Modelos I e III GADA seguem uma tendência ascendente regular, não se superpondo umas às outras (Figuras 2.10, 2.11 e 2.12). Na classe maior de índice de sítio com o modelo GADA, poucas parcelas estão ali contidas e apenas no estágio inicial. Outro aspecto a ser ressaltado é a autocorrelação resultante das repetições de medidas das unidades amostrais que, possivelmente, afetarão a significância estatística dos parâmetros do modelo. Assim sendo, foi introduzido um procedimento autorregressivo para identificar a estrutura da autocorrelação, denominado de estrutura de erro autorregressiva contínua (CAR(p)), apropriada para dados longitudinais e espaçados de forma desigual (BRAVO-OVIEDO *et al.*, 2007).

2.6 CONCLUSÕES

Uma nova referência de método de ajuste da altura dominante foi apresentado nesta pesquisa, contribuindo na integração das bases do manejo florestal. A perda de crescimento das árvores decorrente do manejo, por exemplo, pode acumular grandes perdas em um projeto florestal na sua totalidade, bem como os erros das estimativas podem, também, acarretar grandes erros em sua extrapolação. O objetivo inicial em se obter ganhos de precisão e acuracidade nas estimativas de altura dominante foram atingidos e,

daqui em diante, o método das diferenças algébricas generalizadas – GADA deve-se integrar ao manejo florestal nos anos porvindouros.

A metodologia GADA apresentou redução substancial no erro padrão da estimativa ($S_{yx\%}$), menos da metade quando comparada com o método tradicional da curva guia e aumento de 0,95 para 0,99 no R^2_{ajus} . Neste trabalho, apenas o modelo básico de Chapman-Richards foi ajustado, porém existem vários outros modelos que podem ser estudados e aplicados para melhor classificar sítios, como, por exemplo, os modelos de Hossfeld IV e Korf. Portanto, a metodologia de GADA se mostrou adequada e eficiente para a classificação de índice de sítio, revelando ser flexível e apresentar precisão e acuracidade confiáveis.

Também, recomenda-se a aplicação da metodologia GADA utilizando a altura dominante em associação com outras variáveis como rotação, variáveis climáticas e, mesmo, variáveis de densidade dos povoamentos de plantios florestais e de florestas naturais.

REFERÊNCIAS

ACR. **Anuário Estatístico de base florestal para o Estado De Santa Catarina**. Associação Catarinense de Empresas Florestais. Lages, Santa Catarina, 2022.

ALDER, D. **Forest volume estimation and yield prediction**. Roma: FAO, 1980. 80 p.

ASSMANN, E. **The principles of forest yield study**. New York, USA: Pergamon Press, 1970. 506 p.

BAILEY, R. L.; CLUTTER, J. L. Base-Age invariant Polymorphic Site Curves. **Forest Science**, 20, p. 155-159, 1974.

BECK, D. E.; TROUSDELL, K. B. **Site Index: Accuracy of Prediction**. Res. Paper SE-108. Asheville, NC: Southeastern Forest Experiment Station, Forest Service, U.S. Department of Agriculture. 7 p. 1973.

BRAVO-OVIEDO, A.; RÍO, M. del; MONTERO, G. Geographic variation and parameter assessment in generalized algebraic difference site index modeling. **Forest Ecology and Management**, v. 247, n. 1-3, p. 107-119, 2007. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2007.04.034>

BURKHART, H. E.; TOMÉ, M. **Modeling Forest Trees and Stands**. Springer Science & Business Media. 2012. 458 p. <https://doi.org/10.1007/978-90-481-3170-9>

CAMPOS, J. C. C., LEITE, H. G. **Mensuração Florestal: perguntas e respostas**. 4. ed. Viçosa: Editora UFV, 2013. 605 p.

CIESZEWSKI, C. J., STRUB, M. Generalized algebraic difference approach derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes from exponential and logarithmic functions. **Forest Science** v. 54 p.303-315. 2008.

CIESZEWSKI, C. J. **One- and Two-point Principle Dynamic Site Equations Derived from Richards, Weibull, and other Exponential Functions**. PMRC Technical report 2004-6. 2004.

CIESZEWSKI, C. J. **GADA derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes from Richards Weibull, and other Exponential Functions**. PMRC Technical report 2004-5. 2004.

CIESZEWSKI, C. J. Developing a well-behaved dynamic site equation using a modified Hossfeld IV function $Y_3 = (ax^m)/(c + x^{m-1})$, a simplified mixed-model and scant subalpine fir data. **Forest Science**. v. 49, n. 4, p. 539-554., 2003.

CIESZEWSKI, C. J. Comparing fixed and variable-base age site equations having single versus multiple asymptotes. **Forest Science**, Bethesda, v. 48, p. 7-23, 2002.

CIESZEWSKI C. J. Three methods of deriving advanced dynamic site equations demonstrated on inland Douglas-fir site curves. *Can. Forest Science*. p. 31:165-173, 2001.

CIESZEWSKI, C.; BAILEY, R. L. Generalized Algebraic Difference Approach: Theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes. **Forest Science**. v. 46, p. 116-126, 2000.

CLUTTER, J. L.; FORTSON, J. C.; PIENAAR, L. V.; BRISTER, G. H.; BAILEY, R. L. **Timber management: a quantitative approach**. New York: John Wiley & Sons, 1983. 333 p.

DIÉGUEZ-ARANDA, U.; H.E. BURKHART, H. E.; AMATEIS, R. L. Dynamic site model for loblolly pine (*Pinus taeda* L.) plantations in the United States. **Forest Science**, v. 52, n. 3, p. 262-272, 2006.

HEGER, L. Confidence interval for site index using curves based on stem analyses. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 1, p. 241–245, 1971. <https://doi.org/10.1139/x71-033>

KRUMLAND, B.; ENG, H. **Site-index systems for major Young-growth forest and woodland species in northern California**. Forest Report, no. 4. California Department of Forestry and Fire Protection, Sacramento, CA. 219 p. 2005.

LÓPEZ, A. C.; VARGAS-LARRETA, B.; RIVAS, J. J. C.; LUNA, J. A. N.; COBOS, F. C.; HERNÁNDEZ, F. J. Modelo compatible altura - índice de sitio para cuatro especies de pino en Santiago Papasquiario, Durango. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, v. 4, n. 18, p. 86-103, 2013. <https://doi.org/10.29298/rmcf.v4i18.391>

MANSO, R.; MCLEAN, J. P.; ARCANGELI, C.; MATTHEWS, R. Dynamic top height models for several major forest tree species in Great Britain. **Forestry: An International Journal of Forest Research**, v. 94, n. 2, p. 181-192, 2021. <https://doi.org/10.1093/foresj/cpaa036>

MOTA, F. S.; BEIRSDORF, M. I. C.; GARCEZ, J. R. B. Zoneamento agroclimático do Rio Grande do Sul e Santa Catarina: normais agroclimáticas. Pelotas: **Instituto de Pesquisa Agropecuária do Sul**, v.1, 1971.

PANDOLFO, C.; BRAGA, H. J.; SILVA JR, V. P. da; MASSIGNAM, A. M., PEREIRA, E. S.; THOMÉ, V. M. R.; VALCI, F.V. **Atlas climatológico do Estado de Santa Catarina**. Florianópolis: Epagri, 2002. CD-Rom.

PINHEIRO, J.; BATES, D. R Core Team. **nlme: Linear and Nonlinear Mixed Effects Models**. R package version 3. p. 1-162, 2023. <https://CRAN.R-project.org/package=nlme>

R CORE TEAM. R: A language and environment for statistical computing. **R Foundation for Statistical Computing**. Viena, Austria. 2018. <https://www.R-project.org/>

RICHARDS, F. J. A flexible growth function for empirical use. **Journal of Experimental Botany**, Oxford, v. 10, p. 290-300, 1959.

ROCHA, I. de O. **Atlas Geográfico de Santa Catarina**. Estado e Território. Fascículo 1. 2nd edn. Udesc. Florianópolis, 76pp. 2016.

RSTUDIO TEAM. Rstudio: Integrated development for R. *Rstudio, Inc*. Boston, MA. 2016. <http://rstudio.com/>

SCHNEIDER, P. R.; SCHNEIDER, P. S. P. **Introdução ao Manejo Florestal**. 2. ed., FACOS-UFSM, Santa Maria, 2008. 566 p.

TRIM, K. R.; COBLE, D. W.; WENG, Y.; STOVALL, J. P.; HUNG, I. A New Site Index Model for Intensively Managed Loblolly Pine (*Pinus taeda*) Plantations in the West Gulf Coastal Plain. **Forest Science**, v. 66, n. 1, p. 2-13, 2020.

CAPÍTULO 3. FUNÇÃO DE BURR APLICADA PARA DESCREVER A DISTRIBUIÇÃO DIAMÉTRICA EM UM POVOAMENTO DE *Pinus taeda* L. NO SUL DO BRASIL

RESUMO

Inicialmente, a distribuição de Burr, entre outras, pode ser utilizada aqui como uma nova proposta para descrever a distribuição diamétrica de povoamentos de *Pinus taeda* L. ao longo de sua rotação. Este trabalho teve como objetivo analisar o comportamento dessa distribuição em um projeto de reflorestamento comercial, em nove remedições sucessivas, utilizando o modelo de Burr de três parâmetros. A metodologia consistiu na estruturação da distribuição diamétrica da população arbórea avaliada em períodos de dois anos por meio de inventário florestal contínuo. A função densidade de probabilidade de Burr foi ajustada e, quando comparada com outras distribuições, foi a mais recomendada para uso em projeções de crescimento e produtividade. Além disso, o ajuste da distribuição foi efetuado para cada conjunto de observações bianuais, ou seja, por idade e submetido ao teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov. Os resultados dos ajustes em rotação, desbaste e corte raso mostraram boa precisão e aderência para intervalos de classe de 2 cm. Conclui-se que a função de Burr é apropriada para descrever a distribuição diamétrica de *Pinus taeda* L. e seus parâmetros são correlacionados com a idade e variáveis do povoamento.

Palavras Chave: Qualidade de ajuste, Desbaste, Remedições, Rotação, Manejo florestal.

ABSTRACT

Initially, the Burr distribution, among others, can be used here as a new proposal to describe the diameter distribution of *Pinus taeda* L. in stands throughout their rotation. This study aimed to analyze the behavior of this distribution in a commercial reforestation project, over nine successive thinning's, using the three-parameter Burr model. The methodology consisted of structuring the diameter distribution of the tree population evaluated in two-year periods through continuous forest inventory. The Burr probability density function was fitted and, when compared to other distributions, it was the most recommended for use in growth and productivity projections. In addition, the distribution fitting was performed for each set of biannual observations, i.e., by age, and subjected to the Kolmogorov-Smirnov goodness-of-fit test. The results of the fittings in rotation, thinning, and clearcutting showed good accuracy and goodness of fit for class intervals of 2 cm. It was concluded that the Burr function is appropriate to describe the diameter distribution of *Pinus taeda* L., and its parameters are correlated with age and stand variables.

Keywords: Goodness-of-fit, Thinning, Successive Remeasurements, Rotation, Forest Management.

3.1 INTRODUÇÃO

A distribuição diamétrica é uma informação essencial no manejo florestal para modelar a densidade populacional, bem como a qualidade de suas árvores. Nas empresas florestais, os gestores buscam esta informação sobre o número de árvores e suas dimensões ao longo de uma rotação a fim de prever seus volumes, sortimentos e disponibilidade para uso comercial. Esta informação permite otimizar o processo de tomada de decisão, trazer segurança para os que administram o negócio florestal, solidificar o planejamento e garantir o fornecimento de matéria-prima para a indústria. Existem vários tipos de distribuições de probabilidade adequadas para descrever os diâmetros de florestas plantadas, que têm sido utilizados para este fim, entre elas a Normal, Lognormal, Gamma, Beta, Weibull, Johnson, citando os mais importantes, Bailey e Dell (1973) e Hafley e Schreuder (1977). Por outro lado, a distribuição de Burr Tipo XII discutida nesta tese não é, praticamente, utilizada para descrever a distribuição diamétrica para o manejo florestal. Lindsay *et al.* (1996), utilizando a função Burr Tipo III em povoamentos de *Pinus radiata*, obtiveram um aumento de precisão de aproximadamente 13% em relação à distribuição de Weibull. Mais recentemente, Gove (2008) também comparou a distribuição de Burr III com a Weibull em um estudo de "estruturas de povoamentos, a partir de uma manipulação combinada de densidade e conversão de idade uniforme para desuniforme", e ambas as distribuições resultaram em bons ajustes.

Inicialmente, a distribuição de Burr foi proposta por Irving W. Burr (BURR, 1942), quando introduziu a distribuição Burr Tipo XII, também conhecida como distribuição de Burr, como parte de um sistema composto por doze distribuições contínuas. A distribuição de Burr não é comumente usada para descrever a estrutura diamétrica de povoamentos florestais, entretanto, com o surgimento de várias ferramentas para análise estatística de dados, como os softwares R e Julia, tornou-se mais acessível e prático testar novas distribuições para aplicação em povoamentos florestais. Outro fator é que a distribuição de Weibull tem sido tradicionalmente utilizada devido a metodologias já desenvolvidas que associam seus parâmetros às variáveis dendrométricas com significativa correlação. A distribuição de Weibull, amplamente utilizada na área florestal e

testada nos dados deste trabalho, foi a que apresentou o pior desempenho em relação às distribuições Normal, Lognormal, Gamma, Logística e Burr. As distribuições Normal e Lognormal apresentaram um bom desempenho, mas a função de Burr foi a primeira e a segunda melhor no ranking de nove conjuntos de dados. Assim, a densidade e a função de probabilidade (fdp) Burr do Tipo XII foi selecionada para o presente estudo. Alguns estudos usando a distribuição de Burr são citados por Ali (2015): Lindsay *et al.* (1996), Wingo (1993), Wang *et al.* (1996), Zimmer *et al.* (1998), Watkins (1999), Shao (2000 e 2004). Ali (2015) relata que a distribuição de Burr III tem sido amplamente utilizada em silvicultura, controle de qualidade e confiabilidade, fatores mecânicos, distribuição de seres vivos, análise de risco, previsão do tempo, preços ao consumidor, entre outros. Guera *et al.* (2018) obteve os melhores ajustes, em comparação com outras distribuições, com Burr (4P) nas classes de idade de 10 a 30 anos de *Pinus caribea* Morelet var. *caribea* Barr. & Golf. No Brasil, não há notícias sobre a aplicação e o uso dessas distribuições, Burr III e Burr (4P), nem de Burr Tipo XII para descrever distribuições diamétricas em populações florestais. Outro trabalho recente com a distribuição de Burr (4P), Péllico Netto *et al.* (2015) estudaram a "dinâmica da radiação fotossintética que atinge a superfície do solo em povoamentos de *Acacia mearnsii* De Wild e sua influência no crescimento em altura" no estado do Rio Grande do Sul, Brasil.

Este estudo propõe a realização de dois objetivos por meio da aplicação da distribuição de Burr Tipo XII: i) Verificar se a distribuição de Burr descreve a frequência diamétrica de povoamentos plantados de *Pinus taeda* L. com idades de medição variando de 6 a 24 anos em nove amostras, o que corresponde a uma rotação; ii) Estudar a correlação dos parâmetros da distribuição de Burr com variáveis obtidas do inventário florestal contínuo do povoamento florestal.

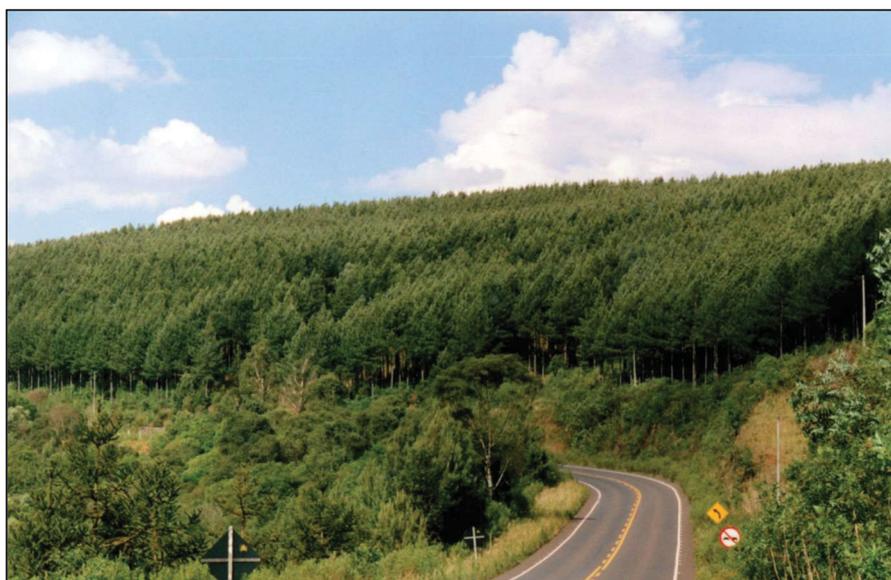
3.2 MATERIAIS E MÉTODOS

3.2.1 Caracterização da área de estudo

Nesta pesquisa foram utilizadas informações do Inventário Florestal Contínuo (IFC), do qual foram selecionadas 17 parcelas de 400 m² em nove ocasiões diferentes, localizadas no município de Caçador, região Centro-Oeste,

coordenadas geográficas de S 26° 50' 38,43"; W 51° 02' 38,90", a uma altitude de 960 m, estado de Santa Catarina, Brasil. De acordo com a classificação climática de Köppen, o clima na região é Cfb. Em Caçador, município utilizado como referência para os dados de classificação climática de localização da floresta, a 7 km de distância, o clima é subtropical, úmido, com verões frescos e sem estação seca definida. De acordo com o Atlas Geográfico de Santa Catarina (ROCHA, 2016), a precipitação média anual é de 1.633 mm, a precipitação média mensal é de 136 mm, ocorre 135 dias de chuva por ano e a precipitação máxima em 24 horas é de 47 mm. A temperatura média anual é de 16,0°C e a temperatura média mínima é de cerca de 11,5°C e, de acordo com o Atlas, a temperatura mínima absoluta é de -10,4°C (ago.), com 28 geadas por ano e temperatura máxima absoluta de 36,2°C (nov.). O local de estudo apresenta, predominantemente, solos do tipo Nitosol, que podem ser marrons, vermelhos ou háplicos, Atlas Geográfico de Santa Catarina (ROCHA, 2016), localizado na unidade de mapeamento Vacaria, textura argilosa, friável, média profundidade e relevo suavemente ondulado. O reflorestamento localiza-se no município de Caçador e faz divisas com a rodovia SC-135 no lado oeste e o Rio do Peixe no lado leste, está no Geossistema do Planalto do Rio Iguaçu e do Uruguai e suas informações sobre altitude, temperatura e precipitação correspondem ao Geofaces do Vale do Rio do Peixe.

FIGURA 3.1 – Área de reflorestamento objeto deste estudo.



Fonte: © Secretaria Estadual de Planejamento de Santa Catarina, Atlas Geográfico de Santa Catarina (ROCHA, 2016).

3.2.2 Fonte dos dados

Os dados da espécie *Pinus taeda* L. foram coletados a cada dois anos nas parcelas, onde foram medidos o diâmetro de todas as árvores e a altura das árvores da primeira e segunda fileira, além da altura das quatro maiores árvores em diâmetro na unidade, consideradas como alturas dominantes. As medições sempre ocorreram durante a estação de inverno, entre junho e agosto, período de menor crescimento. As parcelas foram alocadas marcando todos os DAPs das árvores com tinta, para que as medições sucessivas pudessem ser feitas sempre na mesma altura do tronco. Uma amostragem aleatória simples foi efetuada e as estimativas foram calculadas para um erro máximo de 10% do volume estimado com 95% de probabilidade. Esta área foi plantada no inverno de 1993, com espaçamento de 2,5 m x 2,5 m, e três talhões foram selecionados aleatoriamente para a amostragem, cada um deles com 5 parcelas, em uma área de 204,7312 ha. A primeira medição ocorreu em julho de 1999, aos 6 anos de idade, e as outras foram efetuadas a cada dois anos, totalizando nove medições até a idade de 24 anos em 2017, ano em que este talhão foi cortado.

3.2.3 Ajuste da curva de distribuição de Burr

Os dados foram processados em classes de diâmetro, de acordo com Sturges (1926). O ajuste foi efetuado de acordo com a seguinte metodologia: a distribuição Burr (DUTANG, 2008) com parâmetros de forma 1 = α , forma 2 = γ e escala = θ , com densidade probabilística $f(x)$:

$$f(x) = \frac{\alpha\gamma(x/\theta)^\gamma}{x[1 + \alpha\gamma(x/\theta)^\gamma]^{\alpha+1}}$$

em que:

$$\alpha > 0; \quad x > 0; \quad \gamma > 0; \quad e \quad \theta > 0$$

A variável aleatória para distribuição de Burr é dada por:

$$\theta \left(\frac{x}{1-x} \right)^{1/\gamma},$$

em que X tem uma distribuição beta com parâmetros 1 e α .

Conforme Dutang (2008), a distribuição de Burr se compõe de casos

especiais: (i) uma distribuição log-logística quando $\alpha = 1$, (ii) uma distribuição paralogística quando $\alpha = 1$ e (iii) uma distribuição de Pareto quando $\theta = 1$. Watkins (1999) afirma que "as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros Weibull, para os dados redimensionados, implicam que a distribuição Burr XII de três parâmetros é uma melhoria em relação àquela distribuição, mais comumente ajustada". Dutang (2008), citando Keleiber e Kotz (2003), também relata que a distribuição Burr Tipo XII é conhecida como Singh-Maddala. Este artigo também usa o pacote R *fitdistrplus* (DELIGNETTE-MULLER *et al.*, 2014), em que a taxa = θ , adotada neste trabalho e os ajustes foram feitos usando o método de máxima verossimilhança. Além disso, a distribuição Burr Tipo XII pode cobrir as características de forma da curva para algumas funções densidade de probabilidade, como as distribuições normal, Weibull, Logística, Lognormal e de Valor Extremo Tipo I (WANG *et al.*, 1996).

3.3 RESULTADOS

3.3.1 Estimativas de parâmetros e coeficientes

O processamento de dados foi efetuado utilizando o R v. 3.5.1 (Equipe R Core, 2018) e o RStudio Versão 1.1.463 - © 2009-2011 RStudio, Inc. (Equipe RStudio, 2016) e basicamente com os pacotes *actuar* (DUTANG, 2008), *fitdistrplus* (DELIGNETTE-MULLER, 2015) e *ggplot2* (WICKHAM, 2016).

Os parâmetros e coeficientes estimados estão apresentados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Parâmetros estimados das nove medições bianuais.

Estatística	Medições								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Idade	6	10	12	14	16	18	20	22	24
CC	9	11	13	15	17	19	21	23	25
Média	15,5	20,3	22,6	23,9	28,4	29,7	31,5	34,1	35,7
Variância	5,3098	8,8532	10,052	13,191	13,427	17,213	21,550	23,639	23,969
α	2,6914	1,4321	0,9830	1,1074	0,8189	1,1548	1,8808	2,5963	1,4414
γ	9,2129	10,661	12,583	11,178	14,457	11,764	9,7351	9,7470	11,207
θ	0,0563	0,0473	0,0448	0,0417	0,0364	0,0333	0,0292	0,0258	0,0269
KS	0,0472	0,0341	0,0455	0,0478	0,0903	0,0764	0,0735	0,0449	0,0513
s_d	2,3043	2,9754	3,1705	3,6319	3,6643	4,1489	4,6422	4,8620	4,8958
Assimetria	-0,115	0,2502	0,3682	0,3275	0,3233	0,2886	0,1699	-0,155	0,2797
Curtose	3,1803	2,9530	2,9040	2,8975	2,5050	2,6531	2,5541	3,0957	2,4955

em que: CC é o diâmetro do centro de classe; KS é o teste de Kolmogorov – Smirnov; s_d é o desvio padrão e α , γ , θ são os coeficientes do modelo.

Fonte: Autor.

3.3.2 Frequências observadas e estimadas da distribuição ajustada com diâmetros

Os valores de frequência por classes de diâmetro, usando os estimadores obtidos pelo ajuste, estão dispostos ao lado dos valores observados mostrados na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Frequências observadas e estimadas de árvores.ha⁻¹ com intervalo de classe de diâmetro de 2 cm.

Classes (cm)			Medições bienais																	
Limite Inferior	Centro de Classe	Limite Superior	1		2		3		4		5		6		7		8		9	
			Obs.	Est.	Obs.	Est.	Obs.	Est.	Obs.	Est.	Obs.	Est.	Obs.	Est.	Obs.	Est.	Obs.	Est.	Obs.	Est.
8	9	9.99	30	20																
10	11	11.99	80	100																
12	13	13.99	390	330	10	15														
14	15	15.99	640	640	90	65	5	10												
16	17	17.99	480	545	200	185	45	40	30	25										
18	19	19.99	190	185	295	340	110	115	75	70										
20	21	21.99	50	35	360	350	245	220	150	150	10	10	5	10						
22	23	23.99			185	205	210	225	210	210	50	35	25	25	10	15	5	5		
24	25	25.99			95	80	115	135	175	180	75	80	50	50	40	30	5	10		
26	27	27.99			50	30	70	60	90	110	140	120	105	85	70	50	25	20	15	10
28	29	29.99			5	10	40	25	65	55	60	105	95	100	80	75	40	30	40	20
30	31	31.99					15	10	45	25	50	65	55	90	70	85	45	45	30	35
32	33	33.99							15	10	60	35	70	60	55	80	55	60	50	50
34	35	35.99									35	20	45	35	80	60	60	65	55	60
36	37	37.99									10	10	20	15	40	40	60	55	60	55
38	39	39.99											10	10	25	20	25	35	45	45
40	41	41.99											5	5	10	10	30	20	20	30
42	43	43.99													5	5	10	10	20	15
44	45	45.99															5	5	15	10
46	47	47.99																	5	5
Total			1.860	1.855	1.290	1.280	855	840	855	835	490	480	485	485	485	485	365	360	355	335

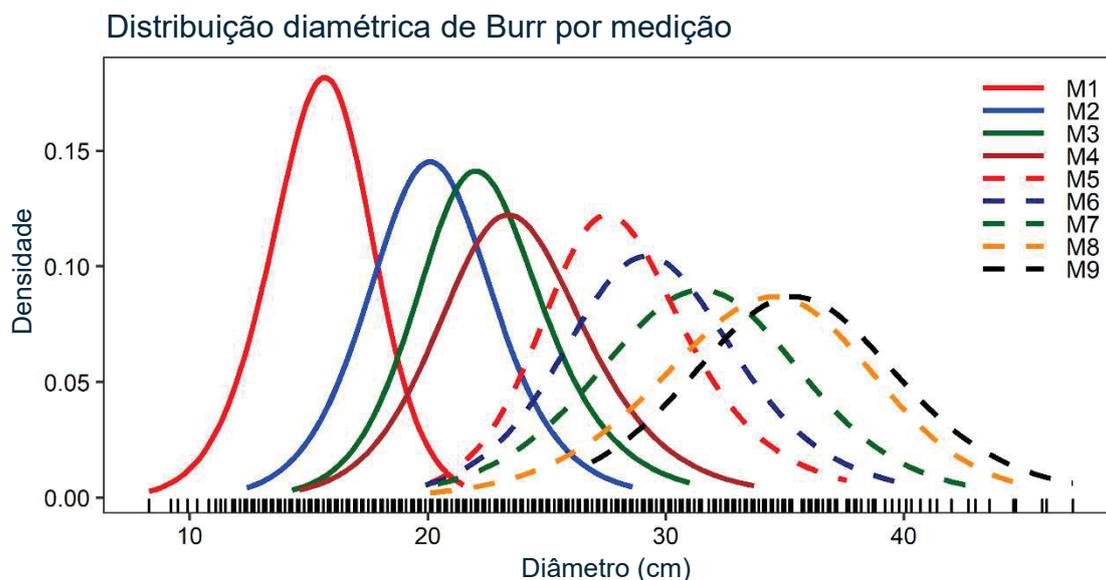
Fonte: Autor.

3.3.3 Curvas de distribuição de diâmetro

As curvas, basicamente, são o resultado da aplicação da função densidade de probabilidade (Figura 3.2), expressam a frequência relativa ou por hectare de indivíduos em cada classe diamétrica, ou seja, quantos indivíduos se encontram em cada intervalo de diâmetro. Inicialmente, elas apresentam uma forma leptocúrtica, passando para a forma mesocúrtica, com uma diminuição

marcada nas três primeiras ocasiões e, subsequentemente, diminuindo ligeiramente, o que caracteriza o tipo de manejo utilizado neste povoamento.

Figura 3.2 – Curvas de distribuição diamétrica de frequência da *fdp* Burr ajustadas para as nove remediações do inventário florestal contínuo.



em que: M é a ocasião da remediação, amostragem dos dados do IFC e as curvas são as funções densidade de probabilidade ajustadas.

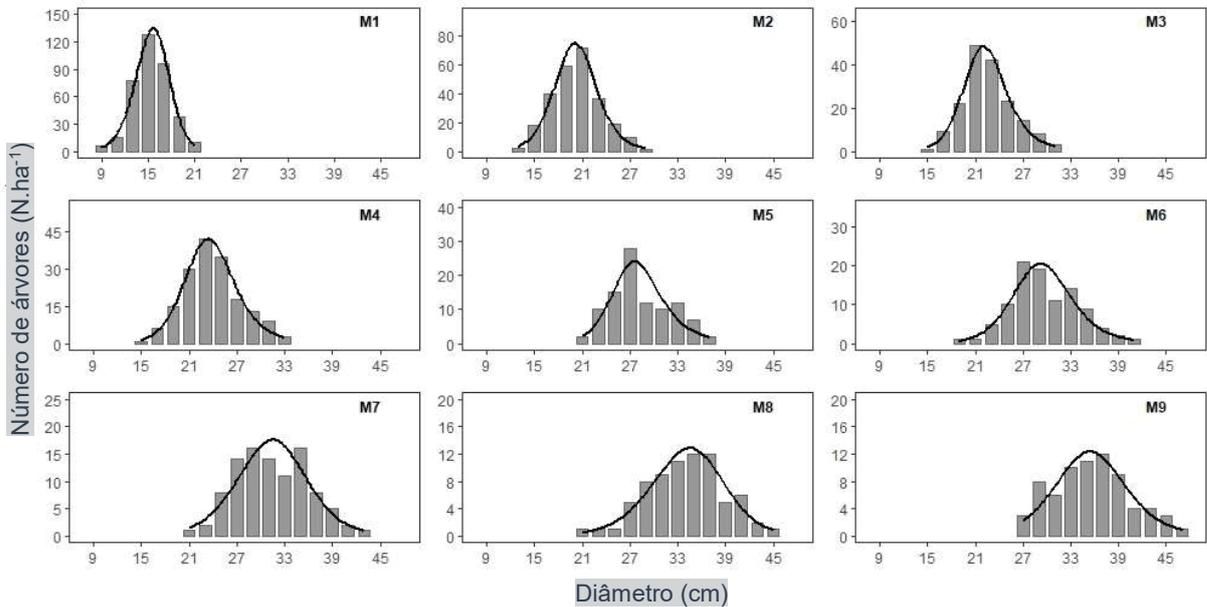
Fonte: Autor.

A Figura 3.3 apresenta os valores observados juntamente com as curvas *fdp* estimadas por hectare. Esses valores observados e ajustados representados por classes mostram a evolução dos diâmetros, em que as curvas se achatam, abrem-se nas laterais e se deslocam com o aumento dos diâmetros e da idade.

3.3.4 Correlações entre os parâmetros da *fdp* Burr e variáveis do povoamento florestal

Os parâmetros da *fdp* de Burr tipo XII são três: α , γ e θ e, conforme o pacote actuar (DUTANG, 2008) utilizado no R (R Core Team, 2018) para processar os dados, são designados como shape 1, shape 2 e rate, respectivamente.

Figura 3.3 – Curvas *fdp* de diâmetro juntamente com os valores observados para as nove amostragens do IFC.

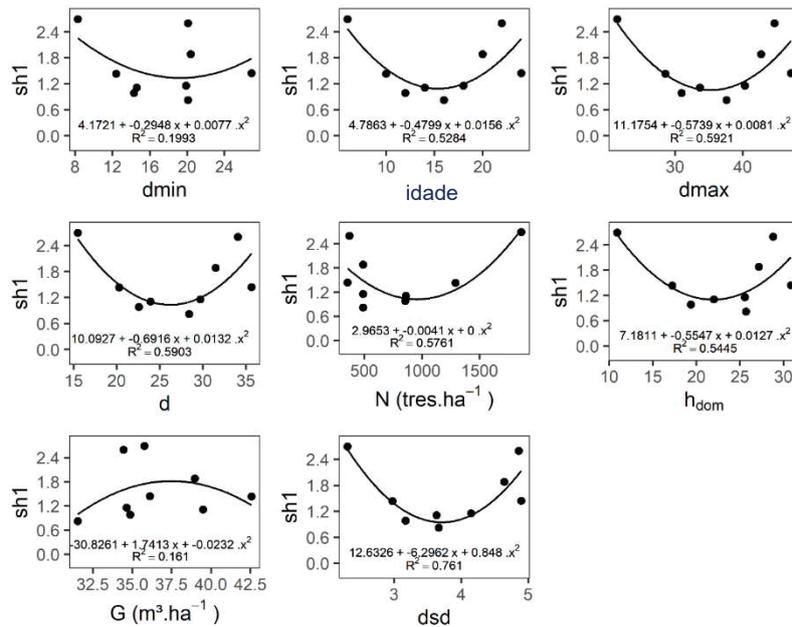


em que: M são as ocasiões de medição; as barras são os valores de frequência observados; as curvas são as *fdps* ajustadas.

Fonte: Autor.

- Para o parâmetro $\alpha = \text{shape } 1$

Figura 3.4 – Gráficos de tendência do parâmetro shape 1 (sh1) com variáveis dendrométricas.

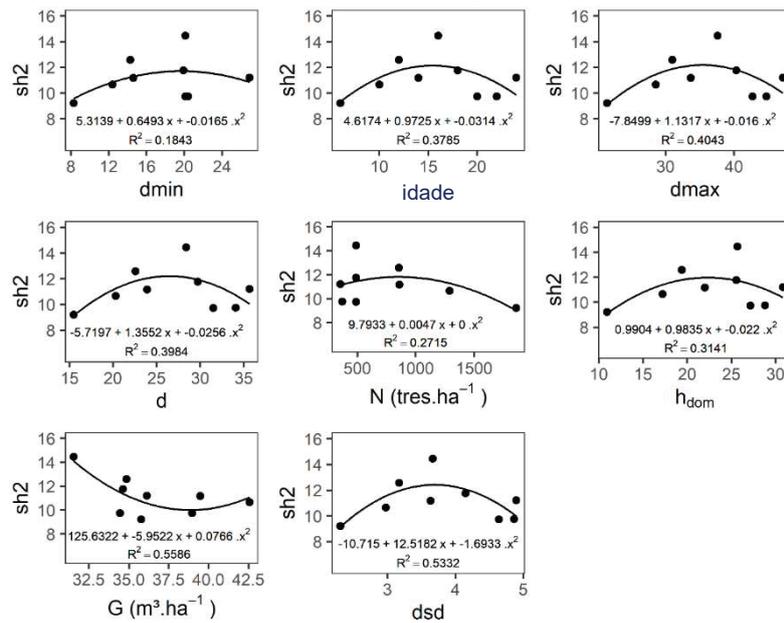


em que: t é a idade; d_{max} é o diâmetro máximo; d_{min} é o diâmetro mínimo; N é o número de árvores por hectare; h_{dom} é a altura dominante; G é a área basal (m²) e dsd é o desvio padrão do diâmetro.

Fonte: Autor.

- Para o parâmetro $\gamma = \text{shape } 2$

Figura 3.5 – Gráficos de tendência do parâmetro shape 2 (sh2) com variáveis dendrométricas.

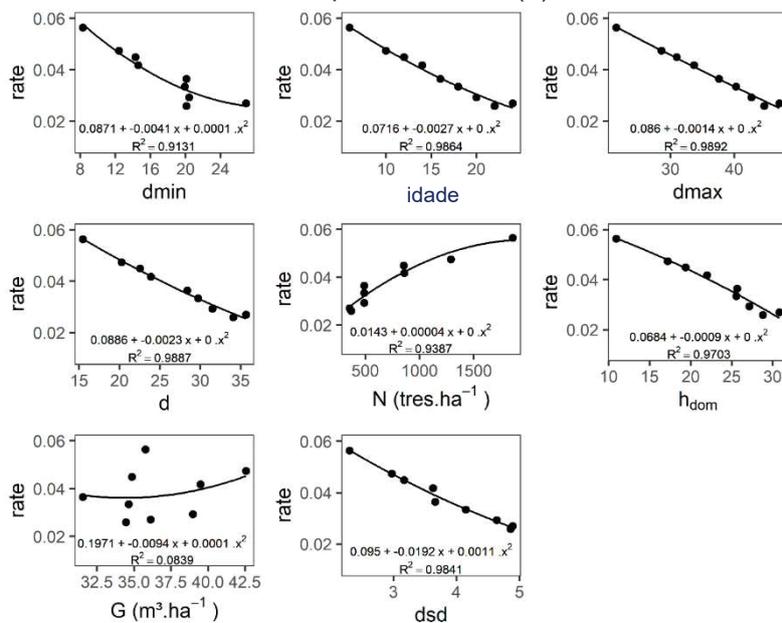


em que: t é a idade; d_{\max} é o diâmetro máximo; d_{\min} é o diâmetro mínimo; N é o número de árvores por hectare; h_{dom} é a altura dominante; G é a área basal (m²) e d_{sd} é o desvio padrão do diâmetro.

Fonte: Autor.

- Para o parâmetro $\theta = \text{rate (rt)}$

Figura 3.6 – Gráficos de tendência do parâmetro rate (rt) com variáveis dendrométricas.



em que: t é a idade; d_{\max} é o diâmetro máximo; d_{\min} é o diâmetro mínimo; N é o número de árvores por hectare; h_{dom} é a altura dominante; G é a área basal (m²) e d_{sd} é o desvio padrão do diâmetro.

Fonte: Autor.

3.4 DISCUSSÃO

3.4.1 Correlação entre os parâmetros de distribuição do Tipo XII de Burr e as variáveis dendrométricas

O principal objetivo de estabelecer correlação entre os parâmetros da função e as variáveis dendrométricas do povoamento florestal é estimar as frequências das árvores em diferentes momentos. Ao utilizar as correlações simples de Pearson, a maioria delas tende a zero. Isso ocorre porque a correlação de Pearson assume um modelo linear simples ($Y = b_0 + b_1X$). No entanto, ao longo dos anos, tem sido observado que as relações dos parâmetros da função de Burr com algumas variáveis florestais não seguem o comportamento de um modelo linear simples, devido às intervenções de desbaste ao longo do tempo. Assim, foi necessário obter as correlações usando modelos lineares polinomiais de segunda ordem, como pode ser visto nas Figuras 3.4, 3.5 e 3.6. Por exemplo, para os parâmetros de shape1 e rate, a correlação com o diâmetro máximo pode ser expressa por um modelo linear simples, o que não ocorre para o diâmetro mínimo. O desbaste no povoamento é seletivo e, portanto, afeta diretamente o diâmetro mínimo, e daí a razão pela qual algumas variáveis apresentam comportamentos de formas polinomiais de segunda ordem e não apenas linear simples. A regressão passo a passo também não foi adequada para incluir variáveis, uma vez que as seleciona de forma linear, e apenas o parâmetro rate apresenta essa tendência. Portanto, o efeito de d_{\min} é verificado sempre ao longo da idade, ou seja, tem um comportamento estável até a idade de 14 anos, quando o povoamento tem 800 árvores.ha⁻¹ e com o terceiro desbaste reduz para 490 árvores.ha⁻¹ e o d_{\min} de 14,2 cm torna-se igual a 20,1 cm. Esse salto ocorre devido à realização do terceiro desbaste e, também, porque essa intervenção resulta no maior percentual de remoção de árvores, da ordem de 44%.

A estimativa do parâmetro de forma shape1 apresentou uma correlação moderada e, como principal tendência, uma parábola invertida para as variáveis t , d_{\min} , d_{\max} , d , N , h_{dom} e d_{sd} , mas não se correlacionou com G (área basal.ha⁻¹). As maiores correlações ocorreram com d_{\max} e d_{sd} , uma vez que essas variáveis possivelmente não são influenciadas pelo desbaste. O parâmetro shape1 tende

a diminuir até a idade de 16 anos e, em seguida, aumentar até o final do período de rotação. A estimativa do parâmetro de forma shape 2 não mostrou correlação com G e apresentou baixas correlações com as outras variáveis, com uma tendência parabólica. Por outro lado, apresentou correlação mediana com o parâmetro rate, também com a tendência a uma relação parabólica. A tendência do parâmetro shape 2 é oposta à de shape 1, ou seja, aumenta até a idade de 16 anos e diminui novamente depois disso. A estimativa do parâmetro de rate escalar, movendo-se com a idade, apresentou alta correlação com todas as variáveis dendrométricas, exceto com G. Com d_{max} , a linha de tendência é praticamente linear e decrescente, e com d_{min} é mais curva, enfatizando o efeito do desbaste. Para N (número de árvores.ha⁻¹), a tendência é uma parábola suave descendente, que é a tendência desse parâmetro para todas as variáveis, exceto para G.

A utilização da distribuição Burr para previsão de frequência, como apontado por Lindsay *et al.* (1996), é necessária para estimar a média, variância, assimetria e curtose em todas as ocasiões medidas, ou seja, ao longo do tempo. Neste artigo, Lindsay *et al.* (1996) também constataram que a média, variância, assimetria e curtose são muito dependentes de N e a previsão de frequência precisa ser modelada com as variáveis Y_1 e Y_2 , que estão associadas a um atributo em idades t_1 e t_2 , respectivamente.

Os resultados da aplicação da distribuição Burr geraram nove ajustes, um para cada idade da parcela, e as estatísticas de ajuste estão apresentadas na Tabela 3.1. A partir das idades acima de 16 anos, não foi possível efetuar ajustes em algumas parcelas, devido ao baixo número de árvores e à redução do número de parcelas. Esse achado é consistente com as conclusões de Lindsay (1996), ou seja, o número de árvores afeta grandemente a estimativa dos parâmetros da distribuição, o que ocorre no momento do terceiro desbaste, aos 16 anos de idade, quando o maior percentual de árvores é removido do povoamento.

A distribuição Burr foi suficientemente flexível e apropriada para descrever a estrutura diamétrica do povoamento florestal, conforme encontrado nos resultados, indicando uma realidade oposta, geralmente expressa pela função Weibull, que nem sempre é a função mais apropriada a ser usada (GUERA, 2018). Até mesmo outras funções mais usadas devem ser avaliadas antes de

serem recomendadas para modelar a distribuição de diâmetros.

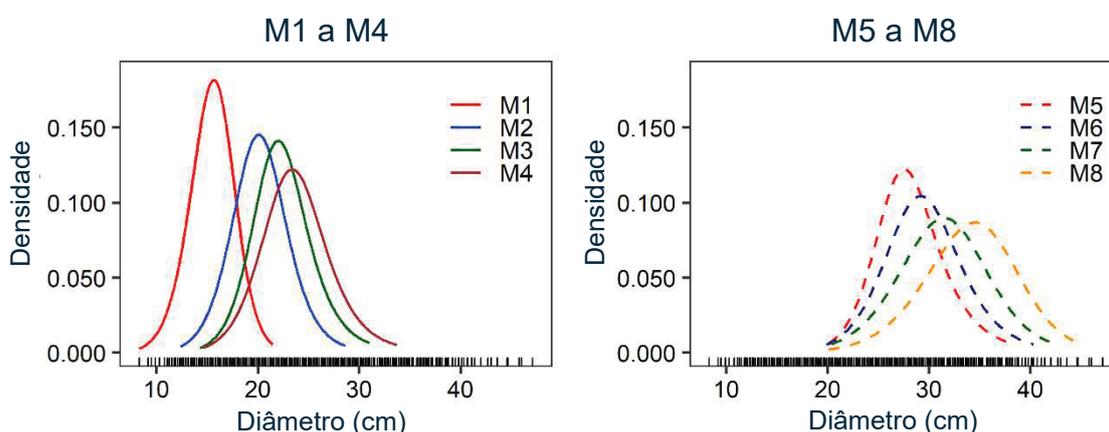
Observando a Figura 3.2, quando as curvas não partem do mesmo ponto e a curva se move para a direita, então shape1 tende a diminuir de valor até a idade de 16 anos e, por outro lado, quando as curvas avançam no mesmo ponto, movendo-se para a direita, shape1 tende a aumentar seu valor até a idade de 22 anos. Na última ocasião medida, devido à mortalidade, a diminuição do número de árvores por hectare forçou um valor de shape1 menor do que o anterior.

As mudanças no comportamento de shape1 ocorrem na estrutura florestal devido ao crescimento, desbaste e mortalidade, esta última especialmente nas classes iniciais.

As primeiras quatro curvas se movem para a direita e não começam no mesmo ponto, ou seja, o diâmetro mínimo está aumentando, e a relação de shape1 com a idade deve ser negativa (Figura 3.7). As próximas quatro curvas mostram correlação positiva com shape1, porque elas começam no mesmo ponto e se movem para a direita.

A última curva gera um ponto ligeiramente deslocado na correlação porque ela não começa no mesmo ponto que as anteriores.

Figura 3.7 – Curvas f_{dp} de Burr ajustadas e separadas a partir da idade de 16 anos.



em que: M é a ocasião da remedição.

Fonte: Autor.

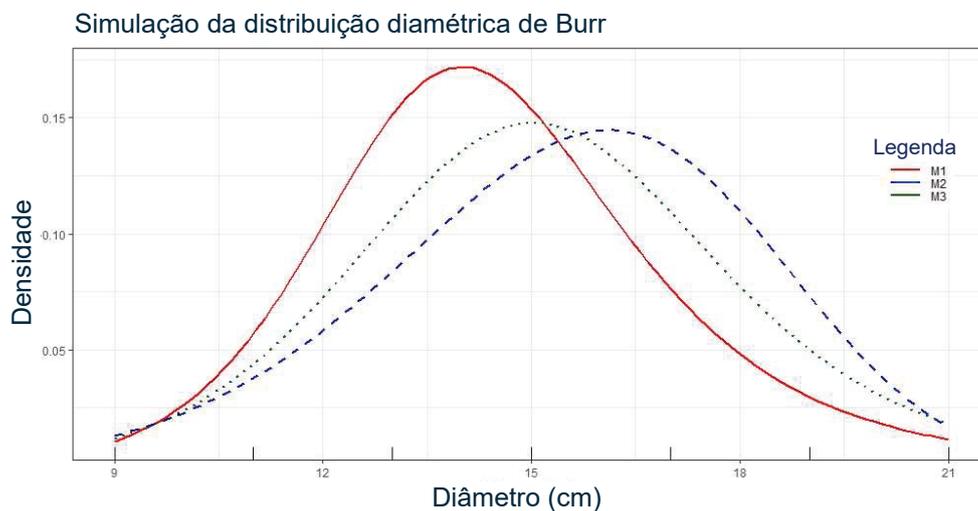
Nas primeiras quatro curvas, os dois desbastes causaram uma modificação na estrutura da floresta, não mantendo o mesmo d_{\min} . Nas próximas quatro curvas, após o terceiro desbaste, o d_{\min} foi mantido constante.

Observando-se a última curva da Figura 3.3, a mortalidade das árvores causou um novo d_{\min} , deslocando a curva para a direita.

O comportamento de shape2 é idêntico ao de shape1, mas sua correlação é inversa, indicando que os dados devem ser estratificados em dois estratos, no ponto em que inverte os valores de shape1 e shape2. O estrato 1 mostra que o desbaste e o crescimento mudam o d_{\min} para cima. O estrato 2, por sua vez, indica que o d_{\min} permaneceu com o mesmo valor, exceto na última curva, quando o d_{\min} aumentou, ver Figura 3.7.

Simulando-se a distribuição de frequência em três situações diferentes, Figura 3.8 - assimétrica positiva, assimétrica negativa e próxima do normal, mantendo o mesmo número de observações e ajustando-as com a distribuição Burr, observou-se que a amplitude, o início e o fim das curvas mudam dependendo da variância dos diâmetros, influenciada pelos coeficientes shape 1 e shape 2. Nesta simulação, o mesmo parâmetro rate (rt) de escala foi mantido para todas as três situações, resultando no mesmo ajuste do rate (rt).

Figura 3.8 – Curvas *fdp* de Burr ajustadas simuladas em três ocasiões, M_1 é assimétrica positiva, M_2 é assimétrica negativa e M_3 tende a normalidade.



em que: M é a ocasião da remedição.

Fonte: Autor.

Portanto, pode-se afirmar que os coeficientes da função Burr XII estão correlacionados com as variáveis da floresta e são dependentes de sua estrutura, crescimento e produção, desbaste e mortalidade.

A principal aplicação dessa função densidade de probabilidade para avaliação do crescimento e produção no manejo florestal diz respeito à obtenção do sortimento futuro do povoamento florestal.

Os coeficientes da função, correlacionados com as variáveis do povoamento florestal e as equações de volume, permitem o estabelecimento de um sistema de previsão de produção (SMALLEY e BAILEY, 1974).

A distribuição Burr permite estimar a frequência, no caso, o número de árvores por hectare por classes de diâmetro, que, juntamente com uma função de afilamento por idade, possibilita obter os sortimentos em diferentes idades.

3.5 CONCLUSÕES

A função distribuição de probabilidade do tipo Burr Tipo XII foi adequada e apropriada para a estimativa da distribuição de frequência de árvores por hectare em vários anos de rotação de florestas plantadas de *Pinus taeda* L. Os parâmetros da distribuição Burr correlacionam-se com as variáveis dendrométricas da floresta. Os resultados de ajustes bianuais da distribuição de diâmetros usando a Burr Tipo XII permitiram concluir: (i) que é possível estudar e desenvolver um sistema para prever as frequências de diâmetros futuros de acordo com a Burr *fdp*, (ii) estratificar a população por idade e classes antes de 14-16 anos e depois, (iii) as distribuições de diâmetro têm uma tendência comportamental até 14-16 anos, com um diâmetro mínimo que muda com a idade, e então esse comportamento muda, diminuindo drasticamente o aumento no diâmetro mínimo, (iv) entre as estimativas dos parâmetros shape 1 e shape 2, o comportamento é inverso: shape 1 diminui até 14-16 anos e depois aumenta, enquanto shape 2 aumenta até essa idade e depois diminui, (v) a estimativa do parâmetro rate de escala tem o mesmo comportamento de diminuição com todas as variáveis, exceto o número de árvores por hectare e área basal, que não apresentam correlação.

Portanto, o comportamento dos parâmetros da função Burr Tipo XII é influenciado pelo crescimento e produção das árvores, pela mortalidade e pelo desbaste. Claramente, a mudança na estrutura diamétrica da floresta reflete-se nos coeficientes da função Burr, mostrando a correlação e sua eficiência em estimar as frequências diamétricas em todas as idades do povoamento florestal.

A função Burr Tipo XII deve ser melhor estudada e aplicada em uma amplitude maior de dados e recomenda-se a comparação com outras *fdps* usualmente utilizadas na descrição da distribuição diamétrica de florestas plantadas. É recomendável, também, o estudo de projeção do número de árvores.ha⁻¹ por classes de diâmetro e, juntamente com uma função de afilamento por idade, que possibilitará obter os sortimentos em diferentes idades.

REFERÊNCIAS

ALI, A.; HASNAIN, S. A.; AHMAD, M. Modified Burr III distribution, properties and applications. **Pak. J. Statist.** Vol. 31(6), 697-708. 2015.

BAILEY, R. L.; DELL, T. R. Quantifying diameter distributions with the Weibull function. **Forest Science** 19(2), p. 97-104, 1973. <http://dx.doi.org/10.1093/forestscience/19.2.97>

BURR, I. W. Cumulative frequency functions. **The Annals of Mathematical Statistics.** 13(2), 215–232. 1942.

DELIGNETTE-MULLER, M. L. and DUTANG, C. fitdistrplus: An R Package for fitting distributions. **Journal of Statistical Software.** 64(4), 1–34. 2015. <http://www.jstatsoft.org/v64/i04/>

DUTANG, C.; GOULET, V.; PIGEON, M. actuar: An R package for actuarial science. **Journal of Statistical Software.** V. 25, N.7, p. 38. 2008. <http://www.jstatsoft.org/v25/i07>

GOVE, J. H.; DUCEY, M. J.; LEAK, W. B.; ZHANG, L. Rotated sigmoid structures in managed uneven-aged northern hardwood stands: a look at the Burr Type III distribution. **Forestry an International Journal of Forest Research.** Volume 81, Issue 2, 161–176. 2008.

GUERA, O. G. M.; SILVA, J. A. A. da; FERREIRA, R. L. C.; LAZO, D. A.; MEDEL, H. B.; SILVA, D. A. S da. Evolução da distribuição diamétrica em plantios de *Pinus caribea* Morelet var. *caribea* Barrett & Golfari. UFPR. **BIOFIX Scient. Journ.** v. 3, n. 1, 161-171. 2018.

HAFLEY, W. L.; SCHREUDER, H. T. Statistical distributions for fitting diameter and height data in even-aged stands. **Can. J. For. Res.** v. 4, p. 481 – 487. 1977.

LINDSAY, S. R.; WOOD, G. R.; WOOLLONS, R. C. Modelling the diameter distribution of forest stands using the Burr distribution. **Journal of Applied Statistics.** Vol. 23, No. 6, 609-619. 1996.

PÉLLICO NETTO, S.; SANQUETTA, C. R.; CARON, B. O.; BEHLING, A.; SIMON, A. A.; DALLA CORTE, A. P.; BAMBERG, R. Ground level photosynthetically active radiation dynamics in stands of *Acacia mearnsii* De Wild. **An. Acad. Bras. Ciênc.** vol.87, n.3, 1833-1845. 2015. <http://dx.doi.org/10.1590/0001-3765201520140080>

R CORE TEAM. R: A language and environment for statistical computing. *R Foundation for Statistical Computing*. Viena, Austria. 2018. <https://www.R-project.org/>

ROCHA, I. de O. **Atlas Geográfico de Santa Catarina**. Estado e Território. Fascículo 1. 2nd ed. Florianópolis, Brazil: Universidade do Estado de Santa Catarina. 2016.

RSTUDIO TEAM. Rstudio: Integrated development for R. *Rstudio, Inc.* Boston, MA. 2016. <http://rstudio.com/>

SHAO, Q. Notes on maximum likelihood estimation for the three-parameter Burr XII distribution. **Comput. Stat. Data Anal.** 45(3), 675–687. 2004.

SHAO, Q.; WONG, H.; XIA, J.; IP, W. C. Models for extremes using the extended three-parameter Burr XII system with application to flood frequency analysis. **Hydrological Sciences Journal.** 49(4). 2004.

SMALLEY, G. W.; BAILEY, R. L. Yield tables and stand structure for loblolly pine plantations in Tennessee, Alabama and Georgia highlands. USDA. **Forest Service Research Paper SO.** 96, 81pp. 1974.

STURGES, H. The choice of a class-interval. **Journal of American Statistical Association.** [S.I.], v. 21, n. 153, 65-66. 1926

WANG, F. K.; KEATS, J. B.; ZIMMER, W. J. Maximum likelihood estimation of the Burr XII parameters with censored and uncensored data. **Microelectron. Reliability** 36, 359-362. 1996.

WATKINS, A. J. An algorithm for maximum likelihood estimation in the three parameter Burr XII distribution. **Computational Statistics & Data Analysis.** 32(1), 19–27. 1999.

WICKHAM, H. **ggplot2: Elegant graphics for data analysis**. 2nd ed. Springer-Verlag. New York, 260pp. 2016.

WINGO, D. R. Maximum likelihood methods for fitting the Burr Type XII Distribution to multiply (progressively) censored life test data. **Metrika.** (40): 203-210. 1993.

ZIMMER, W. J.; KEATS, J.B.; WANG, F.K. The Burr XII Distribution in Reliability Analysis. **Journal of Quality Technology.** 30(4), 386–394. 1998.

CAPÍTULO 4. FUNÇÕES DE PREUßNER PARA ESTIMAÇÃO DE VOLUMES DE *Pinus taeda* L. NA REGIÃO SUL DO BRASIL

RESUMO

A modelagem da forma das árvores “taper” e a estimativa de volume são procedimentos-chave no manejo e planejamento de florestas plantadas. O objetivo deste trabalho foi avaliar o comportamento de conicidade e volume da espécie *Pinus taeda* L., ao longo do caule em diferentes idades, utilizando as funções de conicidade de Preußner, comparando com o polinômio de 5º de Schöpfer, modelos de Kozak e Max-Burkhart. Este trabalho teve como foco os plantios de *Pinus taeda* L., devido à sua ampla utilização como fonte de matéria-prima na indústria florestal do sul do Brasil. Metodologicamente, os dados foram coletados nos últimos 22 anos na região Meio-Oeste de Santa Catarina, em árvores com idade variando de 3,5 a 18 anos. Este conjunto de dados consistiu em uma coleção de seções de volume, com medidas de diâmetro relativo ao longo do caule, usadas em inventário florestal convencional. O volume total das árvores, obtido pela integração das funções de conicidade de Preußner, foi subdividido em quatro partes, às quais foram ajustadas parábolas, e comparado com o volume total e comercializável estimado pelo polinômio do 5º grau de Schöpfer, funções de Kozak e Max-Burkhart. Os resultados de Bias, RMSE e r foram geralmente melhores com a aplicação do modelo de Kozak, e AIC e BIC para o modelo de Preußner. As conclusões apontam para a função de Kozak como ligeiramente melhor para fornecer o volume comercializável. Em termos de volume total, ambas as funções, Kozak e Preußner, forneceram estimativas confiáveis. A vantagem do procedimento proposto por Preußner é a flexibilidade para ajustes de suas funções, a simplicidade dos cálculos de volume por integração e a viabilidade de interpretação de seus coeficientes.

Palavras-chave: Modelagem; Forma da árvore; Estimativa de volume; Preußner; Polinômio do 5º grau de Schöpfer; Modelo de forma de Kozak; Modelo de conicidade de Max-Burkhart.

ABSTRACT

Modeling tree shape "taper" and volume estimation are key procedures in the management and planning of planted forests. The aim of this study was to evaluate the behavior of conicity and volume of *Pinus taeda* L. species along the stem at different ages, using Preußner conicity functions and comparing with Schöpfer's 5th-degree polynomial, Kozak and Max-Burkhardt models. This study focused on *Pinus taeda* L. plantations, due to its extensive use as a source of raw material in the forestry industry in southern Brazil. Methodologically, data was collected over the last 22 years in the Midwest region of Santa Catarina, on trees ranging in age from 3.5 to 18 years. This data set consisted of a collection of volume sections, with measurements of relative diameter along the stem, used in conventional forest inventory. The total volume of the trees, obtained by integrating the Preußner conicity functions, was subdivided into four parts, to which parabolas were fitted, and compared with the total and marketable volume estimated by Schöpfer's 5th-degree polynomial, Kozak and Max-Burkhardt functions. The results of Bias, RMSE and r were generally better with the application of the Kozak model, and AIC and BIC for the Preußner model. The conclusions point to the Kozak function as slightly better in providing marketable volume. In terms of total volume, both Kozak and Preußner functions provided reliable estimates. The advantage of the Preußner procedure is the flexibility for adjustments of its functions, the simplicity of volume calculations by integration, and the feasibility of interpreting its coefficients.

Keywords: Modeling; Tree shape; Volume estimation; Preußner; Schöpfer's 5th-degree polynomial; Kozak shape model; Max-Burkhardt conicity model.

4.1 INTRODUÇÃO

O uso da madeira serrada de alta qualidade se tornou cada vez mais proeminente em todo o mundo, propiciando uma demanda crescente por pesquisas florestais para calcular volumes de árvores de maneira simples e rápida. A madeira é uma matéria-prima essencial usada para atender a várias demandas no Brasil - é importante nos setores de móveis, construção civil, agrícola e industrial e é a segunda *commodity* mais importante do estado de Santa Catarina (ACR – Anuário Estatístico do Estado de Santa Catarina, 2022).

O uso racional e apropriado dos volumes disponíveis de madeira e sua variedade estão associados ao crescimento de uma espécie específica, principalmente por meio de estudos sobre funções de afilamento. Entre eles, pode-se destacar a dinâmica do tronco, como a avaliação de seu afilamento, ou seja, a redução do diâmetro com o aumento da altura da árvore. Essa variação pode ser expressa usando uma função matemática (MIGUEL *et al.* 2011).

Entre as variáveis usadas para avaliar a qualidade da madeira para fins de volume total e volume de sortimento, o perfil da árvore tem sido um dos assuntos mais estudados em espécies comercialmente valiosas. É comum medir o diâmetro da árvore na base, ou seja, a 0,3 m, e a 1,3 m acima do solo e, em seguida, em intervalos de comprimento fixo usando o método Smalian ou em posições relativas usando o método Hohenadl.

Por meio do uso de equações ajustadas ao longo do tronco é possível descrever o perfil da árvore e, por integração, obter estimativas dos volumes total e parcial em diferentes seções com razoável precisão. Esses estimadores são de extrema importância, tanto para a avaliação rápida do estoque de madeira, em volume e biomassa, quanto para obter variedades de tipos de toras. Os métodos de modelagem atualmente utilizados para descrever o perfil da árvore são diversos.

As funções de afilamento descrevem as formas das árvores e expressam a variação diamétrica ao longo do tronco como uma função do diâmetro à altura do peito (DAP) e alturas relativas. Essas variações são afetadas pela espécie, em diferentes idades, espaçamento e qualidade do local. Para um melhor desempenho das funções de afilamento quanto ao ajuste e ao uso de pontos de inflexão, Kozak (1988); Lee *et al.* (2003) introduziram modelos de afilamento de

forma variável e Bi (2000) usou modelos com princípios trigonométricos, representados por modelos de regressão não segmentados, que implicitamente dividiam as árvores em segmentos, sem a necessidade de pontos de inflexão.

"Taper" é entendido como a taxa de diminuição do diâmetro à medida que a altura do tronco aumenta (NEWNHAM, 1992). Os troncos de árvores, tanto de coníferas quanto de folhosas, até o início da copa, podem apresentar as seguintes características: (1) a base do tronco é convexa em relação ao eixo longitudinal, com um ponto de inflexão variável, dependendo da espécie, que se assemelha a uma elipse. (2) a partir desse ponto de inflexão até o topo da copa, o perfil externo é côncavo em relação ao eixo. Em coníferas, essa porção do tronco pode ser descrita por um Parabolóide. (3) as partes terminais das coníferas, que vão desde a base das copas até o ápice, apresentam um perfil ligeiramente côncavo em relação aos eixos das árvores, e podem ser representadas por um Parabolóide quadrático ou cone (ASSMAN, 1970).

Max e Burkhart (1976) propuseram que as formas das árvores poderiam ser representadas por um modelo polinomial segmentado, unindo tais segmentos ao longo do tronco. Essa ideia passou a ser amplamente utilizada por vários pesquisadores (MAGUIRE e BATISTA, 1996; CLARK *et al.*, 1991; LEITES e ROBINSON, 2004; MACHADO *et al.*, 2004; JIANG *et al.*, 2007).

As funções de taper têm sido um dos tópicos mais importantes de estudo no manejo florestal no último século (FANG *et al.*, 1999). Várias formas de perfis do tronco e tipos de modelos foram propostos e avaliados quanto à sua precisão (STERBA, 1980; CLUTTER *et al.*, 1983; AVERY e BURKHART, 2002; KOZAK, 2004; ROJO *et al.*, 2005).

Todos os desenvolvimentos teóricos para descrever o perfil do tronco da árvore são aproximados para explicar adequadamente todas as variações em suas formas. Do ponto de vista objetivo e prático, uma função de taper é essencial para estimar os volumes de árvores em pé para múltiplos usos, especialmente ao estabelecer o planejamento de produção dos povoamentos ou detalhar restrições quanto aos tamanhos de diâmetros e comprimentos das seções dos troncos das árvores (NEWNHAM, 1988; SHARMA e ZHANG, 2004; TRINCADO e BURKHART, 2006).

De acordo com vários autores (PRODAN, 1965; KOZAK *et al.*, 1969; HUANG *et al.*, 2000; KOZAK, 2004; ADAMS, 2005), modelos de taper são

relações que descrevem o perfil longitudinal do tronco de uma árvore com funções dinâmicas, porque possibilitam estimar o volume total da árvore e das toras, seções ao longo do tronco, assim como diâmetros em qualquer posição do fuste, altura em vários diâmetros, volume entre quaisquer dois pontos no tronco, além de acompanhar a evolução do taper da árvore em diferentes idades.

Embora a primeira tentativa de estabelecer uma relação entre séries de diâmetros e séries de alturas tenha sido apresentada por Höjer (1903), foi apenas muito tempo depois que isso foi feito por Altherr (1953), que construiu um sistema baseado no princípio da régua de cálculo, no qual diâmetros e alturas eram obtidos em valores absolutos a partir de seus valores relativos. Mais tarde, a possibilidade de relacionar séries de diâmetros e alturas por meio de uma função polinomial foi sugerida por outros autores. Osumi (1959) aplicou esse conceito à espécie *Criptomeria japonica*, tendo ajustado um polinômio de terceiro grau. Wutt (1961), Prodan (1965) e Schöpfer (1966) propuseram o ajuste de polinômios de quarto e quinto graus, argumentando que era desejável descrever a forma do tronco com uma única função, facilitando sua integração e permitindo obter precisão confiável. A partir desses resultados, Peters (1971) aplicou tal modelagem à *Araucaria araucana* com resultados confiáveis no Chile e Burger *et al.* (1979) à *Araucaria angustifolia*, também com resultados confiáveis no Brasil. Os pesquisadores então tentaram agrupar os diferentes conceitos e modelos aplicados para descrever o perfil dos troncos de árvores e propuseram uma separação entre modelos não segmentados e modelos segmentados da seguinte forma:

4.1.1 Modelos não segmentados

De acordo com Demaerschalk e Kozak (1977), entre as várias técnicas de modelagem estatística, destacam-se os modelos não segmentados, que conseguem combinar eficiência com simplicidade quando comparados aos modelos segmentados. Desses modelos, os primeiros desenvolvidos e utilizados foram polinômios de baixa ordem, para uma altura relativa no fuste (Rojo *et al.* 2005).

Em 1923, Behre usou dados de *Pinus ponderosa* para determinar se a equação de Höjer (1903) poderia ser aprimorada introduzindo-se um novo termo,

ou se poderia ser encontrada uma equação diferente para descrever a conicidade média do fuste da árvore. Conseqüentemente, após esses estudos, uma nova equação foi desenvolvida para descrever a forma do fuste de maneira mais consistente.

Kozak *et al.* (1969) desenvolveram uma função de conicidade baseada na suposição de que o fuste da árvore é um Parabolóide quadrático, cuja equação é baseada em um polinômio quadrático de segunda ordem.

Como algumas funções de conicidade eram inadequadas para descrever a forma próxima à base do fuste, polinômios de ordem superior foram utilizados para caracterizar corretamente a base (ROJO *et al.*, 2005). Bruce *et al.* (1968) e Goulding & Murray (1976) também usaram polinômios de alta ordem para caracterizar o perfil do fuste.

Demaerschalk (1972; 1973) desenvolveu funções de conicidade a partir de sistemas integrados para estimativas volumétricas, que foram derivadas a partir de equações de volume baseadas no modelo de Schumacher e Hall (1933), modelo de Spurr (1952), modelo de Honer (1965) e outras variações.

Muitos modelos de afilamento foram desenvolvidos com o objetivo de obter resultados satisfatórios de precisão para estimativas de variáveis dendrométricas (ORMEROD, 1973; FORSLUND, 1991; AMIDON, 1984; BIGING, 1984; BALDWIN e FEDUCCIA, 1991; SHARMA e ODERWALD, 2001). Ao analisarem o desempenho de seis modelos não segmentados, tanto lineares quanto não lineares, utilizando dados de *Eucalyptus* sp. destinados à produção de madeira serrada, Souza *et al.* (2008) concluíram que o modelo de Biging apresentou maior acuracidade nas estimativas de altura e volume comercial. O modelo de Garay (1979) seguiu como o segundo mais preciso na análise. Ainda, Souza *et al.* (2008) compararam o desempenho de modelos não segmentados com modelos segmentados, destacando que, além de serem mais simples, os melhores resultados foram alcançados com os modelos não segmentados.

4.1.2 Modelos segmentados

Conforme asseveram Demaerschalk e Kozak (1977), é necessário usar diferentes modelos para estudar o afilamento, um para a base e outro para o topo das árvores, a fim de obter maior precisão nas estimativas. No entanto,

esses autores afirmaram que o número de equações a serem usadas dependia de quão complexa era a forma do perfil da árvore.

Por outro lado, de acordo com Bi (2000), as fraquezas compartilhadas por muitas funções de afilamento são: (1) um alto grau de viés na previsão do diâmetro em algumas partes do fuste, em particular na base e no topo, embora o desvio total seja baixo; e (2) uma incapacidade de levar em conta as diferenças nas formas de troncos entre as árvores.

O estudo de modelos de afilamento segmentados é bastante recente. Cao *et al.* (1980) e Trincado e Burkhart (2006) comentaram que o primeiro modelo segmentado desenvolvido foi o de Max e Burkhart (1976) nos Estados Unidos.

No Brasil, os trabalhos de Péllico Netto (1994), Figueiredo-Filho *et al.* (1996), Rios (1997), Figueiredo-Filho *et al.* (1999), Assis *et al.* (2001), Fischer *et al.* (2001), Ferreira (2004) e Souza *et al.* (2008) são os mais notáveis.

Os modelos de afilamento segmentados usam equações separadas para descrever vários segmentos do fuste (MAX e BURKHART, 1976; CAO *et al.*, 1980; BYRNE e REED, 1986; TRINCADO e BURKHART, 2006; CAO, 2009; BROOKS *et al.*, 2008; ÖZÇELİK *et al.*, 2011; CAO e WANG, 2011). Na maioria dos casos, os parâmetros dos modelos segmentados são difíceis de serem estimados e nem sempre permitem previsões de altura para um determinado diâmetro (KOZAK, 1988; PEREZ *et al.*, 1990).

Métodos iterativos devem ser usados para encontrar a altura para um determinado diâmetro. Além disso, a maioria dos modelos de afilamento requer mais de quatro parâmetros a serem estimados e envolvem diferentes limitações, como um diâmetro zero no topo do tronco. Além disso, esses modelos têm sido usados sem testar hipóteses sobre como os parâmetros e/ou as formas das equações são adaptados à forma do fuste (BENBRAHIM e GAVALAND, 2003).

Destaca-se a abordagem de Kublin, uma função flexível baseada em efeitos mistos de regressão B-spline, que os autores usaram para estimar os volumes totais e de sortimentos do abeto-norueguês, *Picea abies* L. H. Karst. (KUBLIN *et al.*, 2013).

Scotti *et al.* (2014) também aplicaram essa metodologia para estudar o pinheiro-manso, *Pinus pinaster*, na comuna de Pattada, região da Sardenha, Itália. Li *et al.* (2012), ao comparar modelos de forma para estimar o afinamento e o volume do tronco em espécies de coníferas na região de Acadia, na América

do Norte, utilizaram modelagem não linear de efeito misto, que leva em conta a autocorrelação entre múltiplas observações feitas em um mesmo tronco de árvore.

Uma abordagem alternativa para a aplicação de curvas de afinamento foi desenvolvida por Preußner no ano de 1974. Preußner propôs uma metodologia acessível aos silvicultores, segmentando o tronco em quatro partes e aplicando quatro parábolas para descrevê-las. Seu método apresenta vantagens sobre outros, como destacado por Péllico Netto (1994), quando ele o aplicou em árvores de *Araucaria angustifolia* (Bertol.) Kuntze no sul do Brasil. A subdivisão do tronco, usando as funções de Preußner, facilita a estimativa do volume de madeira por meio da integração em intervalos que coincidem com pontos de escala. Isso torna possível estimar facilmente o volume total, o volume em toras e os sortimentos parciais.

Até o momento, apenas dois estudos utilizaram o método de Preußner no Brasil, Jorge (1984) e Péllico Netto (1994). Ambos afirmam que a metodologia é apropriada para modelar o afinamento das árvores. Talvez a maior limitação para a aplicação dessas funções se deve ao estudo original ter sido publicado em alemão. Aqui, apresentamos procedimentos passo a passo para ajustar as curvas de Preußner a fim de facilitar a compreensão de sua aplicação.

Esta foi a primeira metodologia de afinamento que usou os quocientes de forma relacionados ao diâmetro tomado na metade da altura total da árvore. Isso tornou a função mais suave ao longo do tronco, com uma leve mudança nos valores dos coeficientes, o que resultou em curvas ajustadas para árvores em diferentes condições. Embora o modelo proposto seja flexível, ele não tem sido comumente utilizado para modelar o afinamento das árvores no Brasil.

Além disso, os resultados obtidos a partir das funções de Preußner foram comparados com os obtidos a partir de funções polinomiais de 5º grau, um dos métodos mais usados para descrever o afinamento de árvores e suas categorias de volume no Brasil. Além disso, é de interesse compará-lo com outros modelos amplamente utilizados, como os modelos de Kozak e Max-Burkhart. Assim, duas hipóteses foram testadas: (1) os coeficientes que descrevem o afinamento da árvore com modelos de Preußner, com funções parabólicas, apresentam maior estabilidade quando aplicados para modelá-lo em diferentes idades e (2) ajustes segmentados das funções de Preußner são eficazes para modelar o perfil do

fuste, em comparação com a aplicação das funções polinomiais de Schöpfer, Kozak e Max-Burkhart.

O presente trabalho teve como objetivo aprofundar a compreensão do método mais apropriado para calcular os volumes totais de árvores e seus sortimentos e aumentar a precisão de sua aplicação em *Pinus taeda* L., uma espécie com grande produção e uso comercial no sul do Brasil. Dados de plantações comerciais de *Pinus taeda* L. foram utilizados, coletados ao longo dos últimos 22 anos no Meio-Oeste de Santa Catarina, Brasil.

4.2 MATERIAIS E MÉTODOS

4.2.1 Caracterização da área de estudo

Os dados utilizados neste estudo foram obtidos na região entre os municípios de Caçador (26°46'30", 51°00'5"), Calmon (26°35'59", 51°05'50"), Lebon Régis (26°55'44", 50°41'42"), Fraiburgo (27°01'34", 50°55'17") e Videira (27°00'28", 51°09'07"), estado de Santa Catarina, Brasil. Conforme a classificação climática de Köppen, esta região, o Meio-Oeste, apresenta clima Cfb. Nos municípios de Caçador e Videira, considerados como referência para esta área, o clima é úmido, com verões quentes, e os três meses mais frios do ano têm uma temperatura média de 15°C. Nessas mesmas áreas, as precipitações anuais são de 1.633 mm e 1.793 mm, as temperaturas médias anuais são de 16 °C e 17 °C, e as altitudes são de 960 m e 779 m. Esta região é caracterizada por relevo levemente ondulado a ondulado, com colinas íngremes e solos Cambissolos eutróficos, derivados de basalto e Bruna, que possuem fertilidade natural variável e baixo teor de fósforo (ROCHA, 2016).

4.2.2 Origem dos dados

Novecentas e quatro (904) árvores foram utilizadas, mensuradas a partir do inventário florestal contínuo de plantações comerciais regularmente espaçadas, a maioria com espaçamento de 2,5 x 2,5 m, com árvores de 3 a 18 anos de idade. Os dados foram coletados de 1998 a 2018 em povoamentos de

Pinus taeda L. em diferentes locais, utilizando o método de Hohenadl. A modelagem foi aplicada dividindo-se os dados em quatro grupos de idades: 5, 10, 15 e 20 anos.

4.2.3 Ajuste da curva de afilamento de Preußner e sua aplicação

Objetivando-se manter as condições descritas por Preußner (1974), as medições de diâmetro foram reestruturadas ao longo do fuste em posições relativas, de tal modo a permitir a obtenção dos coeficientes de forma em função do diâmetro medido na metade do fuste ($d_{0,5h}$), conforme proposto por Hohenadl (1924).

Desta forma, modificou-se ligeiramente a subdivisão do fuste conforme sugerida por Preußner: o primeiro segmento variou de 0 a 25% do fuste, o segundo segmento de 25 a 50%, o terceiro segmento de 50 a 75% e o último segmento de 75 a 100%. Essas divisões coincidem com as necessidades de estimativas de volume e outras variáveis necessárias para estudos de classificação de madeira. Assim, as seguintes funções foram ajustadas para estabelecer uma curva de afilamento contínua que une os extremos sucessivos dos coeficientes de forma:

$$y = a_{11} d_{0,5h} \frac{1}{\sqrt{1+bx}} \text{ para } 0,0 < x \leq 0,25;$$

$$y = a_{21} d_{0,5h} \sqrt[1-w]{1-x} \text{ para } 0,25 < x \leq 0,50;$$

$$y = a_{31} d_{0,5h} \sqrt[1-w]{1-x} \text{ para } 0,50 < x \leq 0,75;$$

$$y = a_{41} d_{0,5h} \sqrt[1-w]{1-x} \text{ para } 0,75 < x \leq 1,0.$$

em que: y é o diâmetro na posição x ; $d_{0,5h}$ é o diâmetro no meio do fuste; x é o comprimento relativo do fuste (ou seja, $x = h_x / h$, e " x " é um valor real no intervalo de 0,0 a 1,0, onde h é a altura total da árvore); w é o expoente da equação, igual a um para uma linha reta e menor que um para obter uma parábola normal (ou seja, conforme se aproxima de zero, descreve uma curva acentuada, e conforme se aproxima de um, descreve uma curva suave); e b é o acelerador das parábolas. Assim, as expressões anteriores da curva de afilamento podem ser visualizadas por uma única função matemática ou um conjunto de funções sucessivas ao longo do fuste.

4.2.4 Ajuste dos modelos de afilamento propostos por Schöpfer, Kozak e Max-Burkhart

Os modelos propostos por Schöpfer, Kozak e Max-Burkhart foram

ajustados e comparados com o modelo de Preußner.

4.2.5 Ajuste e aplicação do modelo de Schöpfer (polinômio de 5º grau)

Inicialmente, os dados foram ajustados com o polinômio de expoente fracionário (HRADETZKY, 1976) e com o polinômio de quinto grau (SCHÖPFER, 1966), resultando em estimativas de volume bastante similares. O modelo de Hradetzky foi aplicado aos dados utilizando vários expoentes por meio de uma regressão *stepwise*, incluindo quatro a cinco variáveis por idade. No entanto, as equações selecionadas para o cálculo de volume foram difícil integração e as estimativas menos precisas do que as obtidas pelo polinômio de quinto grau de Schöpfer. Consequentemente, optou-se por comparar as estimativas de volume obtidas com o polinômio de quinto grau de Schöpfer com aquelas obtidas com o modelo de Preußner, devido ao seu amplo uso na descrição de perfil de *Pinus taeda* L. e *Pinus elliottii* Engelm. no sul do Brasil (FIGUEIREDO FILHO, 2000).

O polinômio de quinto grau de Schöpfer é expresso da seguinte forma:

$$\frac{d_i}{d_{1,30}} = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{h_i}{h_t}\right) + \beta_2 \left(\frac{h_i}{h_t}\right)^2 + \beta_3 \left(\frac{h_i}{h_t}\right)^3 + \beta_4 \left(\frac{h_i}{h_t}\right)^4 + \beta_5 \left(\frac{h_i}{h_t}\right)^5$$

em que: β_j são os parâmetros a serem estimados; d_j são diâmetros (cm) em posições sequenciais de altura h_j ; $d_{1,30}$ são diâmetros a 1,30 m acima do solo (cm); h_t é a altura total (m); h_j são alturas nos diâmetros d_j .

O volume total da árvore foi estimado por integração do polinômio:

$$V = K \int_{h_1}^{h_2} d_i^2 \delta / h$$

$$V = K d_{1,30}^2 \int_{h_1}^{h_2} (c_0 + c_1 h_1^{p_1} + c_2 h_2^{p_2} + \dots + c_n h_n^{p_n})^2 dh$$

em que: K é $\pi/40.000$; p_j são expoentes variando de 1 a 5.

$$c_0 = \beta_0; \quad c_1 = \frac{\beta_1}{h}; \quad c_2 = \frac{\beta_2}{h^2}; \quad \dots; \quad c_{51} = \frac{\beta_5}{h^5}$$

Resolvendo a integral:

$$V = Kd^2 \left[c_0^2 h_i + c_0 c_1 h_i^2 + \left(\frac{2}{3} c_0 c_2 + \frac{1}{3} c_1^2 \right) h_i^3 + \left(\frac{1}{2} c_0 c_3 + \frac{1}{2} c_1 c_2 \right) h_i^4 + \right. \\ \left. \left(\frac{2}{5} c_0 c_4 + \frac{2}{5} c_1 c_3 + \frac{1}{5} c_2^2 \right) h_i^5 + \left(\frac{1}{3} c_0 c_5 + \frac{1}{3} c_1 c_4 + \frac{1}{3} c_2 c_3 \right) h_i^6 + \right. \\ \left. \left(\frac{2}{7} c_1 c_5 + \frac{2}{7} c_2 c_4 + \frac{1}{7} c_3^2 \right) h_i^7 + \left(\frac{1}{4} c_2 c_5 + \frac{1}{4} c_3 c_4 \right) h_i^8 + \left(\frac{2}{9} c_3 c_5 + \frac{1}{9} c_4^2 \right) h_i^9 + \right. \\ \left. \frac{1}{5} c_4 c_5 h_i^{10} + \frac{1}{11} c_5^2 h_i^{11} \right]_{h_1}^{h_2}$$

4.2.6 Ajuste e aplicação da curva de afilamento de Kozak

$$d_i = a_0 D^{a_1} H^{a_2} X_i^{b_1} z_i^{a_4 + b_2} [1/e^{D/H}] + b_3 X_i^{0,1} + b_4 [1/D] + b_5 H^{Q_i} + b_6 X_i$$

em que:

$$X_i = [1,0 - (h_i/H)^{1/3}] / [1,0 - p^{1/3}]$$

$$Q_i = [1,0 - (h_i/H)^{1/3}]$$

$$p = 1,30/H$$

Objetivando-se obter o volume total e de sortimento, foi utilizada uma integral numérica, estabelecendo os limites inferiores e superiores das variáveis.

4.2.7 Ajuste e aplicação da curva de afilamento de Max-Burkhart

$$d_i = D [b_1 (X - 1) + b_2 (X^2 - 1) + b_3 (a_1 - X)^2 I_1 + b_4 (a_2 - X)^2 I_2]^{0,5}$$

em que:

$$X = h_i/H$$

a_1 e a_2 são os pontos de conexão dos polinômios

$$I_1 = \begin{cases} 1 & \text{se } X \leq a_1 \\ 0 & \text{se } X > a_1 \end{cases}$$

$$I_2 = \begin{cases} 1 & \text{se } X \leq a_2 \\ 0 & \text{se } X > a_2 \end{cases}$$

$$V = Kd^2 H \left[\frac{b_2}{3} \left(\left(\frac{h_2}{H} \right)^3 - \left(\frac{h_1}{H} \right)^3 \right) + \frac{b_1}{2} \left(\left(\frac{h_2}{H} \right)^2 - \left(\frac{h_1}{H} \right)^2 \right) - (b_1 + b_2) \left(\left(\frac{h_2}{H} \right) - \left(\frac{h_1}{H} \right) \right) \right. \\ \left. - \frac{b_3}{3} \left(\left(a_1 - \frac{h_2}{H} \right)^3 I_1 - \left(a_1 - \frac{h_1}{H} \right) I_1 \right) - \frac{b_4}{3} \left(\left(a_2 - \frac{h_2}{H} \right) I_2 - \left(a_2 - \frac{h_1}{H} \right) I_2 \right) \right]$$

4.2.8 Avaliação e comparação das funções de afilamento de Preußner com o Polinômio de 5º Grau de Schöpfer e os modelos de Kozak e Max-Burkhart

Na avaliação dos modelos de afilamento de 5º grau de Schöpfer, Kozak e Max-Burkhart, foram utilizados o coeficiente de determinação ajustado (R^2_{adj}), o erro padrão da estimativa ($S_{xy\%}$), o quadrado médio do erro (MSE), a raiz quadrada média do erro (RMSE), a raiz quadrada média do erro relativo (RMSE%) e o erro padrão dos parâmetros. Para avaliar as funções de Preußner, foram utilizados o MSE, o RMSE e o RMSE%. Além disso, foram inspecionados os seguintes gráficos: resíduos absolutos da estimativa do diâmetro, resíduos relativos para a estimativa do diâmetro, diâmetros observados e estimados, resíduos absolutos da estimativa do volume total, resíduos relativos da estimativa do volume total e volumes totais observados e estimados. Por meio desta avaliação, a melhor função entre o polinômio de 5º grau, Kozak e Max-Burkhart foi selecionada e, em seguida, comparada com as funções de Preußner. A comparação entre os dois procedimentos para obtenção de afilamento da árvore, volume total e volume comercializável, foi avaliada por meio das diferenças entre os volumes observados e estimados. As estatísticas utilizadas foram:

$$Bias = \sum y_i - \hat{y}_i, \quad Bias_{\%} = \frac{Bias}{\bar{y}}$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}}, \quad RMSE_{\%} = \frac{RMSE}{\bar{y}}$$

$$Bias = \frac{\sum y_i - \hat{y}_i}{n}, \quad Bias_{\%} = \frac{Bias}{\bar{y}}$$

$$r = \frac{COV(y_i, \hat{y}_i)}{s_{y_i} s_{\hat{y}_i}}$$

$$AIC = -2n \left[-\frac{n}{2} \ln \left(\frac{1}{n} \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 \right) \right] + 2p$$

$$AIC_s = -2n \left[-\frac{n}{2} \ln \left(\frac{1}{n} \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 \right) \right] + 2p \frac{n}{(n-p-1)}$$

$$BIC = -2n \left[-\frac{n}{2} \ln \left(\frac{1}{n} \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 \right) \right] + \ln(n) p$$

em que: y_i é o volume estimado da árvore (m^3); y_i é o volume observado da árvore (m^3); n é o número de observações; COV é a covariância; r é a correlação; p é o número de parâmetros do modelo; AICs são aplicados quando $n/p < 40$; AIC é o critério de informação de Akaike e BIC é o critério de informação de Schwarz.

Além disso, foi calculado o volume comercializável, definido pelo volume de quatro toras:

- primeiro sortimento: toras com diâmetro mínimo de 8 cm e altura de 2,48 m.
- segundo sortimento: toras com diâmetro mínimo de 15 cm e altura de 2,48 m.
- terceiro sortimento: toras com diâmetro mínimo de 25 cm e altura de 2,48 m.
- quarto sortimento: toras com diâmetro mínimo de 35 cm e altura de 2,48 m.

4.3. RESULTADOS

4.3.1. Estatísticas descritivas

Os resumos de diâmetro, altura e volume para cada idade estão apresentados na Tabela 4.1. Os valores médios foram maiores para as florestas mais velhas. As árvores menores tinham diâmetros à altura do peito (DAP) de 10 cm, enquanto as maiores 52,5 cm. O diâmetro, altura e volume médios foram, respectivamente, 34,5 cm, 22,4 m e 0,734 m^3 para a floresta mais velha. A árvore com o maior volume medido foi de 2,263 m^3 . O coeficiente de variação para as variáveis diâmetro, altura e volume foi menor nos talhões mais velhos, devido ao desbaste.

Tabela 4.1 – Estatísticas descritivas para diâmetro à altura do peito (d), altura (h) e volume total (v).

Idade	Nº Árvs.	\bar{d}	\bar{h}	\bar{v}	max v	min v	CV% v
5	78	10,0	6,4	0,0242	0,1289	0,0022	98,63
10	241	21,0	12,6	0,1648	0,9601	0,0137	82,66
15	465	28,7	18,1	0,4293	2,2631	0,0359	79,67
20	120	34,5	22,4	0,7344	2,2563	0,3322	63,97
Idade	Nº Árvs.	max d	min d	CV% d	max h	min h	CV% h
5	78	19,7	4,0	34,62	9,5	3,5	25,03
10	241	37,2	7,5	24,65	17,7	6,2	16,95
15	465	52,2	9,0	24,60	25,6	11,7	16,19
20	120	52,5	21,6	19,49	26,5	19,0	6,72

em que: max é o valor máximo, min é o valor mínimo e CV% é o coeficiente de variação em percentual.

Fonte: Autor.

4.3.2 Ajuste dos modelos de afilamento propostos por Schöpfer, Kozak e Max-Burkhart

Os parâmetros estimados do polinômio de quinto grau de Schöpfer, Kozak e Max-Burkhart, ajustados para todas as idades, estão apresentados nas Tabelas 4.2 a 4.11, com seus respectivos erros padrões dos parâmetros, R^2_{adj} , $S_{xy}\%$, MSE, RMSE e RMSE%. Para todos os modelos, nas idades avaliadas, os valores de R^2_{adj} foram indicadores de bom ajuste (maiores que 0,98), bem como os valores de $S_{xy}\%$ foram aceitos como confiáveis (menores que 10%). Os valores de MSE, RMSE e RMSE% dependeram do modelo e da idade, sendo que o modelo de Kozak resultou em estatísticas mais apropriadas, ou seja, com valores mais confiáveis quando comparados com os modelos de Schöpfer e Max-Burkhart. Para o modelo de Kozak, os valores de RMSE variaram de 0,0030 a 0,0656, enquanto o valor de RMSE% variou de 12,45% a 8,93%, respectivamente para as idades de 5 e 20 anos. As Figuras 4.1 a 4.6 mostram gráficos do modelo de Kozak, com as seguintes características:

- Os resíduos absolutos da estimativa do diâmetro não apresentaram viés, sendo o pior resultado obtido para a floresta de 5 anos;
- Os maiores valores de resíduos relativos foram observados nas florestas de 15 e 20 anos para a estimativa do diâmetro;
- O modelo é suficientemente flexível para representar o perfil do fuste em todas as idades para diâmetros observados e estimados;

- As estimativas menos confiáveis foram observadas nas florestas mais jovens (5 e 10 anos) para os resíduos absolutos da estimativa do volume total;
- As estimativas menos confiáveis também foram obtidas para as florestas mais jovens (5 e 10 anos) para os resíduos relativos da estimativa do volume total, mas elas não apresentaram viés;
- O modelo foi suficientemente flexível para detectar a variabilidade do volume total observado e estimado em todas as idades.

As figuras 4.7 a 4.13 mostram os gráficos para o modelo de Schöpfer, que revelam o seguinte:

- Os resíduos absolutos para a maior estimativa de diâmetro na floresta de 5 anos apresentaram viés;
- Os maiores valores residuais para a estimativa de diâmetro foram observados nas florestas de 15 e 20 anos;
- O modelo é menos flexível na representação do perfil do fuste para diâmetros observados e estimados em todas as idades, quando comparado com o modelo de Kozak;
- Os resíduos absolutos da estimativa do volume total apresentaram viés;
- As estimativas menos confiáveis para os resíduos relativos das estimativas de volume total foram obtidas para as florestas mais antigas (15 e 20 anos);
- O modelo é flexível o suficiente para representar a variabilidade de volumes totais observados e estimados em todas as idades.

As Figuras 4.14 a 4.20 mostram os gráficos para o modelo de Max-Burkhardt, os quais revelam o seguinte:

- Resíduos absolutos da estimativa de diâmetro: os resíduos da estimativa de diâmetro não foram tendenciosos, mas foram os piores resultados obtidos para a floresta de 5 anos;
- Os maiores valores de resíduos relativos para a estimativa de diâmetro foram observados nas florestas de 15 e 20 anos;
- O modelo é menos flexível na representação de diâmetros observados e estimados no perfil do tronco em todas as idades, quando comparado com o modelo de Kozak;
- Resíduos absolutos para estimativas de volume total apresentaram tendência, especialmente para florestas mais antigas (15 e 20 anos);

- As estimativas menos confiáveis para os resíduos da estimativa de volume total foram observadas em florestas mais velhas;

- O modelo foi suficientemente flexível para representar a variabilidade dos volumes observados e estimados em todas as idades.

Seguindo os resultados das estatísticas de ajuste e avaliações de representação gráfica dos resíduos dos valores observados e estimados, o modelo Kozak foi considerado o mais flexível, tendo mais bem explicada a variabilidade dos perfis do tronco e do volume total para florestas com idades entre 5 e 20 anos. As estatísticas mais confiáveis para este modelo, assim como para análises gráficas, foram obtidas nas florestas mais velhas (de maior importância econômica). Em geral, ao longo do tempo, as árvores tenderam a ser menos cilíndricas, mostrando um afilamento mais acentuado.

4.3.3 Funções de Preußner

Os passos para ajustar as funções de Preußner estão apresentados no Apêndice 1. As funções propostas por Preußner e ajustadas no presente estudo podem ser usadas para responder várias questões: qual é o comprimento do tronco para um determinado diâmetro no topo? Qual é o diâmetro do tronco para uma determinada altura? Qual é o volume total ou o volume segmentado dentro de uma determinada faixa do fuste?

Embora muitas questões possam ser formuladas e respondidas, o objetivo deste trabalho é apenas apresentar o cálculo do volume total da árvore, obtido pela soma das integrações das quatro parábolas. Os passos para o cálculo dos volumes usando as funções de Preußner estão apresentados no Apêndice 2.

Os parâmetros estimados do modelo de Preußner, ajustados para todas as idades, estão apresentados no Apêndice 1. O viés se aproximou de zero, indicando que as estimativas foram imparciais. Os valores de RMSE variaram de 0,0043 a 0,0768, enquanto os valores de RMSE% variaram de 17,65% a 10,46%, respectivamente, para as idades de 5 e 20 anos.

As Figuras 4.21 a 4.31 mostram gráficos do modelo de Preußner e revelaram o seguinte:

- Os resíduos absolutos das estimativas de diâmetro foram, em grande parte, não tendenciosos, com pior desempenho obtido para florestas de 5 anos;
- Os maiores valores de resíduos relativos para a estimativa de diâmetro foram observados em florestas de 15 e 20 anos;
- O modelo é ligeiramente menos flexível na representação de perfis de tronco para diâmetros observados e estimados em todas as idades quando comparado com o modelo de Kozak;
- Os resíduos absolutos da estimativa de volume total foram tendenciosos em florestas de 5 anos;
- A pior distribuição dos resíduos para as estimativas de volume total foram observados nas florestas mais jovens (5 anos);
- O modelo é flexível o suficiente para representar a variabilidade de volumes totais observados e estimados em todas as idades.

4.4 DISCUSSÃO

Ao avaliar o desempenho de modelos polinomiais, razões de volume e funções de *spline* cúbicas para estimar volumes comerciais (LAPPI, 2006; PINHEIRO e BATES, 1995), Rios (1997) constataram que os modelos polinomiais propiciaram estimativas mais exatas na descrição dos perfis das árvores (CIARNOSCHI, 2016). Em particular, o Polinômio de Quinto Grau superou o Polinômio de Potências Fracionárias. Em segundo lugar em termos de precisão estavam as razões de volume do povoamento, seguidas pelas funções de *spline*. Rios (1997) também recomendou que as equações de afilamento devem ser ajustadas por classes de diâmetro para se obter estimativas mais precisas.

Ciarnoschi (2016) cita que Lima (1986) efetuou uma avaliação da eficácia dos modelos propostos por Biging (1984), Demaerschalk (1973), Kozak *et al.* (1969) e Ormerod (1973) em árvores de *Pinus elliottii*, no que se refere à estimativa de volumes total e comercial, assim como seus respectivos diâmetros e alturas. Prosseguindo, Lima (1986) chegou à conclusão de que o modelo mais preciso para a estimativa do volume comercial foi o de Kozak *et al.* (1969), enquanto o menos preciso foi o de Ormerod (1973). O modelo de Demaerschalk

(1973) revelou ser razoável para a estimativa de todas as variáveis, exceto para o volume total, para o qual o modelo de Biging (1984) foi mais adequado.

Embora o polinômio de quinta ordem gere resultados suficientemente precisos para a maioria dos usos das equações de forma, ele apresenta tendências claras. Parte das deformações da base é explicada, mas os diâmetros são geralmente subestimados até cerca de 20% da altura total e superestimados acima de 80% da altura total (GORDON, 1983). Hradetzky (1976) foi o primeiro a identificar que uma boa representação do fuste por polinômios exige uma combinação de potências apropriadas, sendo necessário, para sua determinação, que elas sejam submetidas ao processo de seleção passo a passo e que essas potências variem de 0,005 a 25.

Foram avaliadas a qualidade do ajuste das funções de Preußner (ajustadas empiricamente) e do polinômio de 5º grau de Schöpfer, bem como dos modelos de Kozak e Max-Burkhart (ajustados pela minimização de resíduos usando o método de mínimos quadrados), comparando os volumes observados e estimados. Ao comparar as estatísticas de ajuste dos modelos ajustados por análise de regressão, os resíduos e os valores observados e estimados, o modelo de Kozak foi selecionado.

As funções de Kozak e Preußner apresentaram desempenho semelhante em todas as idades, com poucas diferenças nas estatísticas de ajuste e na estimativa do volume total. Os resultados das funções de Preußner podem ser melhorados pela minimização dos resíduos. Nesta pesquisa, decidiu-se encontrar os coeficientes de Preußner de maneira empírica, uma vez que os coeficientes variaram pouco com a idade e apresentaram uma tendência lógica, o que revelou uma melhor compreensão do perfil de afilamento.

O valor de w é o poder da função, sendo igual a um para obter uma linha reta e menor que um para obter uma parábola clássica, ou seja, se w for zero, o perfil (curva de afilamento) é forte (curvatura acentuada) e quando se aproxima de um, o perfil (curva de afilamento) é fraco (curva suave). O coeficiente b é o acelerador da parábola. Os valores de w para o primeiro segmento variaram entre 0,06 e 0,046, respectivamente para florestas com 5 e 20 anos. Portanto, observou-se que o primeiro segmento foi influenciado pela idade das árvores, e as mais velhas apresentaram um afilamento mais pronunciado. Os outros segmentos também foram afetados pela idade das árvores, e os valores de w

variaram entre 0,98 e 0,76, de tal forma que os valores mais baixos foram observados para a floresta mais velha e no último segmento. O intervalo da altura relativa $0,25 < x \leq 0,75$ resultou na curva mais suave. O valor de b foi estável ao longo da idade (Figura 4.30).

Os coeficientes β_1 e β_3 revelaram tendência no modelo de Kozak em todas as idades da floresta. Os valores do coeficiente β_1 variaram de -0,7605 a 2,369. Os valores do coeficiente a_1 não variaram com a idade da floresta e ocorreram na faixa de -0,2743 a 2,8047. Os resultados revelaram que o modelo de Kozak representava adequadamente o perfil do fuste em todas as idades, mas era difícil interpretar seus coeficientes e relacioná-los ao perfil do fuste.

As seguintes características das funções de Preußner podem ajudar a entender os perfis das árvores:

- O valor de b é o acelerador da parábola. Valores mais altos de b indicam curvas acentuadas. Se b for igual a zero, o perfil é suave (Figura 4.31).

- O valor de w é a forma do perfil, se w for zero o perfil é pronunciado (curvatura é acentuada) e se w for igual a um o perfil é fraco (curva suave) (Figura 4.31);

- Se todos os coeficientes (b e w) forem iguais a zero, o perfil da árvore se aproxima de um cilindro (Figura 4.31);

- Se todos os coeficientes (b e w) forem iguais a um, o perfil da árvore se aproxima de um cone (Figura 4.31);

- Conforme apresentado no Apêndice 2, é possível obter o fator de forma de Hohenadl (HF), ou seja, após a integração da função para todos os segmentos, é possível estimar o volume total para qualquer árvore usando a equação resultante $v = \frac{\pi}{4} \cdot k^2 \cdot h^2 \cdot HF$, em que HF é o fator de forma natural médio de Hohenadl no diâmetro de referência $d_{0,5h}$. Observe que os resultados do volume das partes do fuste (volume comercial + volume residual) serão naturalmente compatíveis com o volume total;

- Se todos os coeficientes (b e w) forem iguais a zero ou um, o fator de forma natural médio de Hohenadl no diâmetro de referência $d_{0,5h}$ será aproximadamente igual a um;

- O valor de HF é uma constante para todas as árvores no conjunto de dados, ou seja, para obter resultado mais confiável na estimativa de volumes de toras, o ajuste deve ser feito estratificando o efeito de HF , por exemplo, por sítio.

O modelo de Kozak resultou nas estatísticas mais apropriadas (Bias, MSE, RMSE e r) para estimar volumes de toras comerciais (Tabelas 4.10 e 4.11). A forma da equação de expoente variável melhorou as estimativas de diâmetro até o topo das árvores, assimilando diferentes condições de sítio em cada idade. Os perfis foram constantes para as árvores descritas pelo modelo de Preußner, que foram representadas pelo fator de forma (HF). Dessa forma, a aplicação do modelo de Preußner pode ser melhorada; o ajuste pode ser efetuado considerando sítio ou até mesmo razões h/d , por exemplo. Além disso, para melhorar os resultados do modelo de Preußner, o MSE deve ser minimizado usando mínimos quadrados.

O modelo de Preußner não é derivado pelo mesmo procedimento de mínimos quadrados que o modelo de Kozak, embora, em ambos os casos, o viés médio seja aproximadamente zero. Por outro lado, ao avaliar as estatísticas AIC e BIC, os melhores resultados foram obtidos com o modelo de Preußner. Isso resultou da complexidade do modelo de Kozak em comparação com o modelo de Preußner.

Além disso, os coeficientes das funções de Preußner são obtidos de forma analítica, enquanto nas outras funções são obtidos por ajuste de regressão. Os coeficientes das parábolas também são interpretativos e não podem ser analisados de maneira semelhante em outras funções. No modelo de Preußner, essa interpretação pode ser feita por seção. Embora a análise da relação entre os coeficientes das funções e o perfil da árvore possa ser interessante; para o modelo de Kozak essas análises serão apropriadas apenas se a suposição fundamental de independência dos erros dentro de cada árvore, normalidade e homogeneidade dos resíduos forem assumidas.

A facilidade operacional para se aplicar modelos matemáticos é um assunto a ser debatido, já que eles devem atender a duas condições básicas: eficiência e praticidade de uso. As funções de Preußner são facilmente integradas por seções, o que não é o caso de outros modelos testados, uma vez

que as integrais são complexas (ajustadas para todo o fuste). O modelo de Preußner pressupõe etapas para ajuste dos coeficientes:

(1) Solução de "x" (posição relativa) como função de "y" (diâmetro), ajuste dos coeficientes como função de $d_{1,30}$, solução de "x" como função de "y" para $d_{1,30}$, e a integração das quatro seções para estimar os volumes total e de sortimento;

(2) Coeficientes fracionários próximos de 1 e com quatro casas decimais para a primeira seção do fuste diminuem nas outras seções e nas equações (1) a (16) (Apêndice 1);

(3) Na sequência, coeficientes crescentes também são observados nas equações (17) a (32) (Apêndice 1) e a magnitude da mudança aumenta com a idade. Esse comportamento também é observado nas constantes;

(4) Os expoentes usados para obter a constante "k" mostram pouca variação e diminuem ligeiramente com a idade, como mostrado nas equações (44) a (47) (Apêndice 1).

Esses comportamentos observados nas constantes e expoentes no cálculo de $d_{0,5h}$ são repetidos na solução de ajuste de $d_{1,30}$, como função de $d_{0,5h}$.

4.5 CONCLUSÕES

- O modelo de Kozak é a função mais precisa para estimar o volume comercializável de *Pinus taeda* de 3 a 18 anos em plantações comerciais na região centro-oeste de Santa Catarina, Brasil.

- As funções de Preußner são adequadas e precisas para estimar os volumes total e de sortimento.

- As vantagens do procedimento proposto por Preußner incluem: funções flexíveis, cálculos simples para os volumes e flexibilidade para interpretar seus coeficientes.

- O viés, o RMSE e o r foram geralmente melhores com a aplicação do modelo de Kozak, e o AIC e BIC para o modelo de Preußner.

- As funções de Preußner ajustadas por subpopulações estratificadas por idade e sítio podem aumentar significativamente a precisão e eficiência das estimativas dos volumes total e comercializáveis de árvores.

Portanto, o método de Preußner é indicado para estudos diversos de afilamento e obtenção de volume devido às suas vantagens e facilidades intrínsecas, servindo para o estudo e aplicação em pesquisas de espécies nativas e plantadas, com aprofundamento de conhecimento sobre formas dos troncos.

REFERÊNCIAS

ACR. **Anuário Estatístico de base florestal para o Estado De Santa Catarina**. Associação Catarinense de Empresas Florestais. Lages, Santa Catarina, 2022.

ADAMS, J. W. **Green weight, volume, and taper equations for Virginia pine (*Pinus virginiana*) in the piedmont Region of North Carolina**. 2005. 107 p. Thesis (Master Science), North Carolina State University, 2005.

ALDER, D. **Forest volume estimation and yield prediction**. FAO FORESTRY PAPER 22/2, COMMONWEALTH Forestry Institute, U.K. Food and Agriculture Organization of the United Nations, Rome, 1980. 194 p.

ALI, A.; HASNAIN, S. A.; AHMAD, M. Modified Burr III distribution, properties and applications. **Pak. J. Statist.** Vol. 31(6), 697-708. 2015.

ALTHERR, E. Vereinfachung des Hohenadlschen Massenermittlungsverfahrens durch Verwendung des „echten“ Formquotienten. **Mitt. d. Württ. Forstl. Vers. Anst.** Bd. 10, 44 s, 1953.

AMIDON, E. L. A general taper functional form to predict bole volume for five mixed-conifer species in California. **Forest Science**, v. 30, n. 1, p. 166-171, 1984.

ASSIS, A. L. de; SCOLFORO, J. R. S.; MELLO, J. M. de; ACERBI JÚNIOR, F. W.; OLIVEIRA, A. D. de Comparação de modelos polinomiais segmentados e Não-segmentados na estimativa de diâmetros e volumes ao longo do fuste de *Pinus taeda*. **Cerne**, v. 7, p. 20-40, 2001.

ASSMANN, E. **The principles of forest yield study**. New York, USA: Pergamon Press, 1970.

AVERY, T. E.; BURKHART, H. E. **Forest Measurements**. 5th ed., New York, USA: McGraw-Hill, 2002.

BAILEY, R. L.; CLUTTER, J. L. Base-Age invariant Polymorphic Site Curves. **Forest Science**, 20, p. 155-159, 1974.

BAILEY, R. L.; DELL, T., Quantifying diameter distributions with the Weibull function. **Forest Science** 19(2), p. 97-104, 1973. <http://dx.doi.org/10.1093/forest-science/19.2.97>

BALDWIN Jr. V. C.; FEDUCCIA, D. P. Compatible tree-volume and upper-stem diameter equations for plantation loblolly pines in the West Gulf region. **Southern Journal of Applied Forestry**, v. 15, n. 2, p. 92-97, 1991. <https://doi.org/10.1093/sjaf/15.2.92>

BECK, D. E.; TROUSDELL, K. B. **Site Index: Accuracy of Prediction**. Res. Paper SE-108. Asheville, NC: Southeastern Forest Experiment Station, Forest Service, U.S. Department of Agriculture. 7 p. 1973.

BEHRE, C. E. Preliminary notes on studies of tree form. **Journal of Forestry**, v. 21, p. 507-511, 1923.

BENBRAHIM, M.; GAVALAND, A. A new stem taper function for short-rotation poplar. **Scandinavian Journal of Forest Research**, v. 18, n. 4, p. 377-383, 2003. <https://doi.org/10.1080/02827580310005171>

BI, H. Trigonometric variable-form taper equations for Australian Eucalypts. **Forest Science**, v. 46, n. 3, p. 397-407, 2000.

BIGING, G. S. Taper equations for second mix conifers of northern California. **Forest Science**, v. 30, n. 4, p. 1103-1117, 1984.

BRAVO-OVIEDO, A.; RÍO, M. del; MONTERO, G. Geographic variation and parameter assessment in generalized algebraic difference site index modeling. **Forest Ecology and Management**, v. 247, n. 1-3, p. 107-119, 2007. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2007.04.034>

BROOKS, J. R., JIANG, L., OZÇELIK, R. (2008). Compatible stem volume and taper equations for Brutian pine, Cedar of Lebanon, and Cilician fir in Turkey. **Forest Ecology and Management**, v. 256, p. 147-151. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2008.04.018>

BRUCE, D., CURTIS, R. O., VANCOEVERING, C. Development of a system of taper and volume tables for red alder. **Forest Science**, v. 3, p. 339-350, 1968. <https://doi.org/10.5962/bhl.title.87932>

BURGER, D., MACHADO, S. A., HOSOKAWA, R. T. **Estudo do desenvolvimento da forma de *Araucaria angustifolia* com relação a idade**. In: Proceedings of the meeting of the International Union of Forest Research Organizations (IUFRO) 1979. Curitiba: IUFRO, 1980. p. 320-329.

BURKHART, H. E.; TOMÉ, M. **Modeling Forest Trees and Stands**. Springer Science & Business Media. 2012. 458 p. <https://doi.org/10.1007/978-90-481-3170-9>

BURR, I. W. Cumulative frequency functions. **The Annals of Mathematical Statistics**. 13(2), p. 215-232, 1942.

BYRNE, J. C.; REED, D. D. Complex compatible taper and volume estimation systems for red and loblolly pine. **Forest Science**, v. 32, p. 423-443, 1986.

CAMPOS, J. C. C., LEITE, H. G. **Mensuração Florestal: perguntas e respostas**. 4. ed. Viçosa: Editora UFV, 2013. 605 p.

CAO, Q. V.; WANG, J. Calibrating fixed- and mixed-effects taper equations. **Forest Ecology and Management**, v. 262, n. 4, p. 671-673, 2011. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2011.04.039>

CAO, Q. V. Calibrating a segmented taper equation with two diameter measurements. **Southern Journal of Applied Forestry**, v. 33, n. 2, p. 58-61, 2009. <https://doi.org/10.1093/sjaf/33.2.58>

CAO, Q. V. Predicting parameters of a Weibull function for modelling diameter distribution. **Forest Science**, 50(5), p. 682-685, 2004.

CAO, Q. V.; BURKHART, H. E.; MAX, T. A. Evaluation of two methods for cubic-volume prediction of loblolly pine to any merchantable limit. **Forest Science**, v. 26, n. 1, p. 71-80, 1980.

CIARNOSCHI, L. D. Modelos de afilamento de tronco de *Araucaria angustifolia* (Bertol.) Kuntze, no oeste do estado de Santa Catarina. Lages: 2016. Dissertação (Mestrado em Ciência Florestal) – Universidade do Estado de Santa Catarina.

CIESZEWSKI, C. J., STRUB, M. Generalized algebraic difference approach derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes from exponential and logarithmic functions. **Forest Science** v. 54 p.303-315. 2008.

CIESZEWSKI, C. J. **One- and Two-point Principle Dynamic Site Equations Derived from Richards, Weibull, and other Exponential Functions**. PMRC Technical report 2004-6. 2004.

CIESZEWSKI, C. J. **GADA derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes from Richards Weibull, and other Exponential Functions**. PMRC Technical report 2004-5. 2004.

CIESZEWSKI, C. J. Developing a well-behaved dynamic site equation using a modified Hossfeld IV function $Y_3 = (axm)/(c + xm-1)$, a simplified mixed-model and scant subalpine fir data. **Forest Science**. v. 49, n. 4, p. 539-554., 2003.

CIESZEWSKI, C. J. Comparing fixed and variable-base age site equations having single versus multiple asymptotes. **Forest Science**, Bethesda, v. 48, p. 7-23, 2002.

CIESZEWSKI C. J. Three methods of deriving advanced dynamic site equations demonstrated on inland Douglas-fir site curves. Can. **Forest Science**. p. 31:165-173, 2001.

CIESZEWSKI, C.; BAILEY, R. L. Generalized Algebraic Difference Approach: Theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes. **Forest Science**. v. 46, p. 116-126, 2000.

CLARK III, A.; SOUTER, R. A.; SCHLAEGEL, B. E. **Stem profile equations for southern tree species**. [Research Paper SE-282]. Asheville, NC: U.S. Department of Agriculture, Forest Service, Southeastern Forest Experiment Station, 1991. 117 p. <https://doi.org/10.2737/SE-RP-282>

CLUTTER, J. L.; FORTSON, J. C.; PIENAAR, L. V.; BRISTER, G. H.; BAILEY, R. L. **Timber Management: A Quantitative Approach**. New York, USA: John Wiley & Sons. 1983. 333 p.

DELIGNETTE-MULLER, M.L.; DUTANG, C. fitdistrplus: An R Package for fitting distributions. **Journal of Statistical Software**. 64(4), p. 1-34, 2015. <http://www.jstatsoft.org/v64/i04/>

DEMAERSCHALK, J. P.; KOZAK, A. The hole-bole system: a conditional dual equation system for precise prediction of tree profiles. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 7, p. 488-497, 1977. <https://doi.org/10.1139/x77-063>

DEMAERSCHALK, J. P. Integrated systems for the estimation of tree taper and volume. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 3, n. 1, p. 90-94, 1973. <https://doi.org/10.1139/x73-013>

DEMAERSCHALK, J. P. Converting volume equations to compatible taper equations. **Forest Science**, v. 18, n. 3, p. 241-245, 1972. <https://doi.org/10.1093/forestscience/18.3.241>

DIÉGUEZ-ARANDA, U.; H.E. BURKHART, H. E.; AMATEIS, R. L. Dynamic site model for loblolly pine (*Pinus taeda* L.) plantations in the United States. **Forest Science**, v. 52, n. 3, p. 262-272, 2006.

DUTANG, C.; GOULET, V.; PIGEON, M. actuar: An R package for actuarial science. **Journal of Statistical Software**. V. 25, N.7, p. 38. 2008. <http://www.jstatsoft.org/v25/i07>

FANG, Z.; BAILEY, R. L. Compatible volume and taper models with coefficients for tropical species on Hainan Island in Southern China. **Forest Science**, v. 45, n. 1, p. 85-100, 1999.

FERREIRA, M. Z. Estudo de funções de afilamento para representar o perfil e o volume do fuste de *Pinus taeda* L. Lavras: 2004. Dissertação 132 (Mestrado em Engenharia Florestal) – Universidade Federal de Lavras, Lavras.

FIGUEIREDO FILHO, A.; MACHADO, S. A.; CARNEIRO, M. R. A. Testing accuracy of log volume calculation procedures against water displacement techniques (xylometer). **Canadian Journal of Forest Research**, v. 30, p. 990-997, 2000. <https://doi.org/10.1139/x00-006>

FIGUEIREDO FILHO, A.; SCHAAF, L. B. Comparison between predicted volumes estimated by taper equations and true volumes obtained by the water displacement technique (xylometer). **Canadian Journal of Forest Research**, v. 29, p. 451-461, 1999. <https://doi.org/10.1139/x99-013>

FIGUEIREDO FILHO, A.; BORGES, B. E.; HITCH, K. L. Taper equations for *Pinus taeda* plantations in southern Brazil. **Forest Ecology and Management**, v. 83, n. 1/2, p. 36-46, 1996. [https://doi.org/10.1016/0378-1127\(96\)03706-1](https://doi.org/10.1016/0378-1127(96)03706-1)

FISCHER, F.; SCOLFORO, J. R. S.; ACERBI JUNIOR, F. W.; MELLO, J. M.; MAESTRI, R. Exatidão dos modelos polinomiais não segmentados e das razões entre volumes para representar o perfil do tronco de *Pinus taeda*. **Ciência Florestal**, v. 11, n. 1, p. 167-188, 2001. <https://doi.org/10.5902/19805098503>

FORSLUND, R. R. The power function as a simple stem profile examination tool. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 21, n. 2, p. 193-198, 1991. <https://doi.org/10.1139/x91-023>

GARAY, L. **Tropical forest utilization system** (contrib. 36). VIII. A taper model for entire stem profile including buttressing. Seattle, WA, USA: College of Forest Resources, Institute of Forest Products, University of Washington. 1979.

GORDON, A. (1983). Comparison of compatible polynomial taper equations. **New Zealand Journal of Forestry Science**, v. 13, n. 2, p. 146-155, 1983.

GORGOSO, J.; GONZÁLEZ, J.Á.; ROJO, A., GRANDAS-ARIAS, J. Modelling diameter distributions of *Betula alba* l. stands in northwest Spain with the two-parameter Weibull function. **Forest System** 16(2), p. 113-123, 2007. <http://dx.doi.org/10.5424/srf/2007162-01002>

GORGOSO-VARELA, J.; ROJO-ALBORECA, A. Use of Gumbel and Weibull functions to model extreme values of diameter distributions in forest stands. *Ann. Forest Science* 71(7), p. 741–750, 2014. <http://dx.doi.org/10.1007/s13595-014-0369-1>

GOULDING, C. J.; MURRAY, J. C. Polynomial taper equations that are compatible with tree volume equations. *New Zealand Journal of Forestry Science*, v. 5, n. 3, p. 313-322, 1976.

GOVE, J. H.; DUCEY, M. J.; LEAK, W. B.; ZHANG, L. Rotated sigmoid structures in managed uneven-aged northern hardwood stands: a look at the Burr Type III distribution. *Forestry an International Journal of Forest Research*. Volume 81, Issue 2, 161–176. 2008.

GUERA, O. G. M.; SILVA, J. A. A. da; FERREIRA, R. L. C.; LAZO, D. A.; MEDEL, H. B.; SILVA, D. A. S da. Evolução da distribuição diamétrica em plantios de *Pinus caribea* Morelet var. *caribea* Barrett & Golfari. UFPR. *BIOFIX Scient. Journ.* v. 3, n. 1, 161-171. 2018.

HAFLEY, W. L.; SCHREUDER, H. T. Statistical distributions for fitting diameter and height data in even-aged stands. *Can. J. For. Res.* v. 4, p. 481 – 487. 1977.

HEGER, L. Confidence interval for site index using curves based on stem analyses. *Canadian Journal of Forest Research*, v. 1, p. 241–245, 1971. <https://doi.org/10.1139/x71-033>

HOHENADL, W. Der Aufbau der Baumschafte. *Forstwissenschaftliches Centralblatt*, v. 46, p. 495-508, 1924. <https://doi.org/10.1007/BF02424886>

HÖJER, A. G. **Growth of Scots pine and Norway spruce**. Stockholm, Sweden: Bihang till Fr. Lovén: Om våra Barrskogar. 1903.

HONER, T. G. A new total cubic foot volume function. *Forestry Chronicle, Mattawa*, v. 41, n. 4, p. 476-493, 1965. <https://doi.org/10.5558/tfc41476-4>

HRADETZKY, J. **Analyze und interpretation statistischer abränger keisen**. (Biometrische Beiträge zu aktuellen forschuns projekten). Baden: Württemberg Mitteilungen der FVA. 1976.

HUANG, S.; PRICE, D.; MORGAN, D.; PECK, K. Kozak's variable exponent taper equation regionalized for white spruce in Alberta. *Western Journal of Applied Forestry*, v. 15, p. 75-85, 2000. <https://doi.org/10.1093/wjaf/15.2.75>

JIANG, L.; BROOKS, J. R.; HOBBS G. R. Using crown ratio in yellow-poplar compatible taper and volume equations. *Northern Journal of Applied Forestry*, v. 24, p. 271-275, 2007. <https://doi.org/10.1093/njaf/24.4.271>

JORGE, L. A. B. Tabelas de sortimento para *Pinus elliottii* Engelm. na Floresta Nacional de Três Barras - SC. **Floresta**, v. 15, n. 1/2, p. 61-80, 1984. <https://doi.org/10.5380/rf.v15i12.6345>

KIERNAN, D. **Natural Resources Biometrics**. Published by Open SUNY Textbooks, Milne Library (IITG PI). State University of New York at Geneseo, Geneseo, NY 14454, 2014. 251 p.

KOZAK, A. My last words on taper equations. **Forestry Chronicle**, v. 80, n. 4, p. 507-515, 2004. <https://doi.org/10.5558/tfc80507-4>

KOZAK, A. A variable exponent taper equation. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 18, n. 11, p. 1363-1368, 1988. <https://doi.org/10.1139/x88-213>

KOZAK, A.; MUNRO D. D.; SMITH J. H. G. Taper functions and their application in forest inventory. **Forestry Chronicle**, v. 45, n. 4, p. 278-283, 1969. <https://doi.org/10.5558/tfc45278-4>

KRUMLAND, B.; ENG, H. **Site-index systems for major Young-growth forest and woodland species in northern California**. Forest Report, no. 4. California Department of Forestry and Fire Protection, Sacramento, CA. 219 p. 2005.

KUBLIN, E.; BREIDENBACH, J.; KÄNDLER, G. (2013). A flexible stem taper and volume prediction method based on mixed-effects B-spline regression. **European Journal of Forest Research**, v.132, p. 983-997, 2013. <https://doi.org/10.1007/s10342-013-0715-0>

LAPPI, J. A multivariate, nonparametric stem-curve prediction method. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 36, p. 1017-1027, 2006. <https://doi.org/10.1139/x05-305>

LEE, W. K.; SEO, J. H.; SON, Y. M.; LEE, K. H.; Von GADOW, K. Modeling stem profiles for *Pinus densiflora* in Korea. **Forest Ecology and Management**, v. 172, n. 1, p. 69-77, 2003. [https://doi.org/10.1016/S0378-1127\(02\)00139-1](https://doi.org/10.1016/S0378-1127(02)00139-1)

LEITES, L. P. ; ROBINSON, A. P. Improving taper equations of loblolly pine with crown dimensions in a mixed-effects modeling framework. **Forest Science**, v. 50, p. 204-212, 2004.

LI, R.; WEISKITTEL, A.; DICK, A. R.; KERSHAW Jr., J. A.; SEYMOUR, R. S. Regional stem taper equations for eleven conifer species in the Acadian Region of North America: Development and Assessment. **Northern Journal of Applied Forestry**, v. 29, n. 1, p. 5-14, 2012. <https://doi.org/10.5849/njaf.10-037>

LIMA, F. Análise de funções de “taper” destinadas à avaliação de multiprodutos de árvores de *Pinus elliottii*. Viçosa: 1986. Dissertação (Mestrado em Ciência Florestal) – Universidade Federal de Viçosa.

LINDSAY, S. R.; WOOD, G. R.; WOOLLONS, R. C. Modelling the diameter distribution of forest stands using the Burr distribution. **Journal of Applied Statistics**. Vol. 23, No. 6, 609-619. 1996.

LÓPEZ, A. C.; VARGAS-LARRETA, B.; RIVAS, J. J. C.; LUNA, J. A. N.; COBOS, F. C.; HERNÁNDEZ, F. J. Modelo compatible altura - índice de sitio para cuatro especies de pino en Santiago Papasquiario, Durango. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, v. 4, n. 18, p. 86-103, 2013. <https://doi.org/10.29298/rmcf.v4i18.391>

MACHADO, S. A.; URBANO, E.; CONCEIÇÃO, M. B.; FIGUEIREDO FILHO, A.; FIGUEIREDO, D. J. Comparação de modelos de afilamento do tronco para diferentes idades e regimes de desbaste em plantações de *Pinus oocarpa* Schiede. **Boletim de Pesquisa Florestal**, v. 48, p. 41-64, 2004.

MAGUIRE, D. A.; BATISTA, J. L. F. Sapwood taper models and implied sapwood volume and foliage profiles for coastal Douglas-fir. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 26, p. 849-863, 1996. <https://doi.org/10.1139/x26-093>

MANSO, R.; MCLEAN, J. P.; ARCANGELI, C.; MATTHEWS, R. Dynamic top height models for several major forest tree species in Great Britain. **Forestry: An International Journal of Forest Research**, v. 94, n. 2, p. 181-192, 2021. <https://doi.org/10.1093/foresj/cpaa036>

MARINHESKI FILHO, A.; PÉLLICO NETTO, S.; MACHADO, S. A.; CORTE, A. P. D.; BEHLING, A. Site classification for *Eucalyptus* sp. in a tropical region of Brazil. **Anais da Academia Brasileira de Ciências**, v. 95, n. 1. 2023. <https://doi.org/10.1590/0001-3765202320200038>

MAX, T. A.; BURKHART, H. E. Segmented polynomial regression applied to taper equations. **Forest Science**, v. 22, n. 3, p. 283-289, 1976.

MERGANIČ, J.; STERBA, H. Characterization of diameter distribution using the Weibull function: method of moments. **European Journal of Forest Research**. 125(4), p. 427-439, 2006. <http://dx.doi.org/10.1007/s10342-006-0138-2>

MIGUEL, E. P.; MACHADO, S. A.; FIGUEIREDO FILHO, A.; ARCE, J. E. Modelos polinomiais para representar o perfil e o volume do fuste de *Eucalyptus urophylla* na região norte do estado de Goiás. **Floresta**, v. 41, n. 2, p. 355-368, 2011. <https://doi.org/10.5380/rf.v41i2.21883>

MOTA, F. S.; BEIRSDORF, M. I. C.; GARCEZ, J. R. B. Zoneamento agroclimático do Rio Grande do Sul e Santa Catarina: normais agroclimáticas. Pelotas: **Instituto de Pesquisa Agropecuária do Sul**, v.1, 1971.

NEWNHAM, R. M. Variable-form taper functions for four Alberta tree species. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 22, n. 2, p. 210-223, 1992. <https://doi.org/10.1139/x92-028>

NEWNHAM, R. M. **A variable-form taper function**. [Information Report PI-X-83]. Petawawa, Ontario, Canada: Petawawa National Forest Institute, Canadian Forest Service. 1988.

ORMEROD, D. W. A simple bole model. **Forestry Chronicle**, v. 49, n. 3, p. 136-138, 1973. <https://doi.org/10.5558/tfc49136-3>

OSUMI, S. Studies on the stem form of the forest trees (1). On the relative stem form. **Journal of Japanese Forestry Society**, v. 41, n. 12, p. 471-479, 1959.

ÖZÇELİK, R.; BROOKS, J. R.; JIANG, L. Modeling stem profile of Lebanon cedar, Brutian pine, and Cilicica fir in Southern Turkey using nonlinear mixed-effects models. **European Journal of Forest Research**, v. 130, n. 4, p. 613-621, 2011. <https://doi.org/10.1007/s10342-010-0453-5>

PANDOLFO, C.; BRAGA, H. J.; SILVA JR, V. P. da; MASSIGNAM, A. M., PEREIRA, E. S.; THOMÉ, V. M. R.; VALCI, F.V. **Atlas climatológico do Estado de Santa Catarina**. Florianópolis: Epagri, 2002. CD-Rom.

PÉLLICO NETTO, S. As curvas relativas contínuas de forma de Preußner para o sortimento dos fustes de espécies florestais. **Cerne**, v. 1, n. 1, p. 17-27, 1994.

PÉLLICO NETTO, S.; SANQUETTA, C. R.; CARON, B. O.; BEHLING, A.; SIMON, A. A.; DALLA CORTE, A. P.; BAMBERG, R. Ground level photosynthetically active radiation dynamics in stands of *Acacia mearnsii* De Wild. **An. Acad. Bras. Ciênc.** vol.87, n.3, 1833-1845. 2015. <http://dx.doi.org/10.1590/0001-3765201520140080>

PEREZ, D. N.; BURKHART, H. E.; STIFF, C. T. A variable-form taper function for *Pinus oocarpa* Schiede in Central Honduras. **Forest Science**, v. 36, n. 1, p. 186-191, 1990.

PETERS, R. **Konstruktion eines Massentafelmodells dargestellt am Beispiel der Baumart Araucaria araucana (Mol.) C. Koch**. Forstwissenschaftlichen Fakultät der Albert Ludwig - Universität zu Freiburg i. Br. 95 s. 1971.

PINHEIRO, J.; BATES, D. R Core Team. **nlme: Linear and Nonlinear Mixed Effects Models**. R package version 3. p. 1-162, 2023. <https://CRAN.R-project.org/package=nlme>

PINHEIRO, J. C.; BATES, D. M. Approximations to the log-likelihood function in the nonlinear mixed effects model. **Journal of Agricultural Research**, v. 4, p. 12-35, 1995. <https://doi.org/10.1080/10618600.1995.10474663>

PRETZSCH, H. **Forest Dynamics, Growth and Yield: from Measurement to Model**. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2009. 671 p. <http://dx.doi.org/10.5860/choice.47-2562>

PREUßNER, K. Eine neue Schaftkurvengleichung um ihre Anwendung. **Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Universität Dresden**, v. 23, n. 11, p. 305-309, 1974.

PRODAN, M. **Holzmeßlehre**. Sauerländer's Verlag. Frankfurt am Main. 644 s. 1965.

R CORE TEAM. R: A language and environment for statistical computing. **R Foundation for Statistical Computing**. Viena, Austria. 2018. <https://www.R-project.org/>

RICHARDS, F. J. A flexible growth function for empirical use. **Journal of Experimental Botany**, Oxford, v. 10, p. 290-300, 1959.

RIOS, M. S. A eficiência das funções polinomiais, da função spline cúbica, e razões de volume para representar o perfil da árvore e estimar os sortimentos de *Pinus elliottii*. Lavras: 1997. 116 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Florestal). Universidade Federal de Lavras, Lavras.

ROCHA, I. de O. **Atlas Geográfico de Santa Catarina**. Estado e Território. Fascículo 1. 2nd ed. Florianópolis, Brazil: Universidade do Estado de Santa Catarina. 2016.

ROJO, A.; PERALES, X.; SÁNCHEZ-RODRÍGUEZ, F.; GONZÁLEZ VAREZ, J. G.; VON GADOW, K. Stem taper functions for maritime pine (*Pinus pinaster* Ait.) in Galicia (Northwestern Spain). **European Journal of Forest Research**, v. 124, n. 3, p. 177-186, 2005. <https://doi.org/10.1007/s10342-005-0066-6>

RSTUDIO TEAM. Rstudio: Integrated development for R. *Rstudio, Inc.* Boston, MA. 2016. <http://rstudio.com/>

SCHNEIDER, P. R.; SCHNEIDER, P. S. P. **Introdução ao Manejo Florestal**. 2. ed., FACOS-UFSM, Santa Maria, 2008. 566 p.

SCHÖPFER, W. **Automatisierung des Massen, Sorten und Wertberechnung stender Waldbestände Schriftenreihe Bad**. [S.l.]: Wurt-Forstl. 1966.

SCHUMACHER, F. X.; HALL, F. S. Logarithmic expression of timber tree volume. **Journal of Agricultural Research**, 47(9), 719-734, 1933.

SCOTTI R.; MURA, M.; PIREDDA, I.; CAMPUS, S.; LOVREGLIO, R. Gestione forestale sostenibile in Sardegna: dal legno al legname, le funzioni di profilo. In: Proceedings of the Second International Congress of Silviculture. Florence, Italia. November 26th-29th. 2014.

SECRETARIA DA AGRICULTURA DE SANTA CATARINA. 2021.
<https://www.fecoagro.coop.br/santa-catarina-busca-alternativas-de-apoio-ao-setor-florestal/>

SHAO, Q. Notes on maximum likelihood estimation for the three-parameter Burr XII distribution. **Comput. Stat. Data Anal.** 45(3), 675–687. 2004.

SHAO, Q.; WONG, H.; XIA, J.; IP, W. C. Models for extremes using the extended three-parameter Burr XII system with application to flood frequency analysis. **Hydrological Sciences Journal**. 49(4). 2004.

SHARMA, M.; ZHANG, S. Y. Variable-exponent taper equations for jack pine, black spruce, and balsam fir in eastern Canada. **Forest Ecology and Management**, v. 198, n. 1-3, p. 39-53, 2004.
<https://doi.org/10.1016/j.foreco.2004.03.035>

SHARMA, M.; ODERWALD, R. G. Dimensionally compatible volume and taper equations. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 31, n. 5, p. 797-803, 2001.
<https://doi.org/10.1139/x01-005>

SMALLEY, G. W.; BAILEY, R. L. Yield tables and stand structure for loblolly pine plantations in Tennessee, Alabama and Georgia highlands. USDA. **Forest Service Research Paper SO**. 96, 81pp. 1974.

SOUZA, H. J. *et al.* Thinning-response modifier term in growth models: An application on clonal *Tectona grandis* Linn F. stands at the Amazonian region, **Forest Ecology and Management**, v. 511, 120109, 2022.
<https://doi.org/10.1016/j.foreco.2022.120109>

SOUZA, C. A. M.; SILVA, G. F.; XAVIER, A. C.; MENDONÇA, A. R.; ALMEIDA, A. Q. Avaliação de modelos de afilamento não segmentados na estimação da altura e volume comercial de *Eucalyptus* sp. **Ciência Florestal**, v. 18, n. 3, p. 387-399, 2008. <https://doi.org/10.5902/19805098450>

SPURR, S. H. **Forest inventory**. New York, USA: Ronald Press Co. 1952.

STANKOVA, T.V.; ZLATANOV, T.M. Modeling diameter distribution of austrian black pine (*Pinus nigra* Arn.) plantations: a comparison of the Weibull frequency distribution function and percentile-based projection methods. **European Journal of Forest Research**. 129(6), p. 1169-1179, 2010. <http://dx.doi.org/10.1007/s10342-010-0407-y>

STERBA, H. Stem curves: a review of the literature. **Forestry Abstracts**, v. 41, n. 4, p. 141-145, 1980.

STURGES, H. The choice of a class-interval. **Journal of American Statistical Association**. [S.I.], v. 21, n. 153, 65-66. 1926

TEIMOURI, M.; DOSER, J. W.; FINLEY, A. O. ForestFit: An R package for modeling plant size distributions. **Environmental Modeling and Software** 131, 104668, 2020.

TRIM, K. R.; COBLE, D. W.; WENG, Y.; STOVALL, J. P.; HUNG, I. A New Site Index Model for Intensively Managed Loblolly Pine (*Pinus taeda*) Plantations in the West Gulf Coastal Plain. **Forest Science**, v. 66, n. 1, p. 2-13, 2020.

TRINCADO, G.; BURKHART, H. E. A generalized approach for modeling and localizing stem profile curves. **Forest Science**, v. 52, n. 6, p. 670-682, 2006.

WANG, F. K.; KEATS, J. B.; ZIMMER, W. J. Maximum likelihood estimation of the Burr XII parameters with censored and uncensored data. **Microelectron. Reliability** 36, 359-362. 1996.

WATKINS, A. J. An algorithm for maximum likelihood estimation in the three parameter Burr XII distribution. **Computational Statistics & Data Analysis**. 32(1), 19–27. 1999.

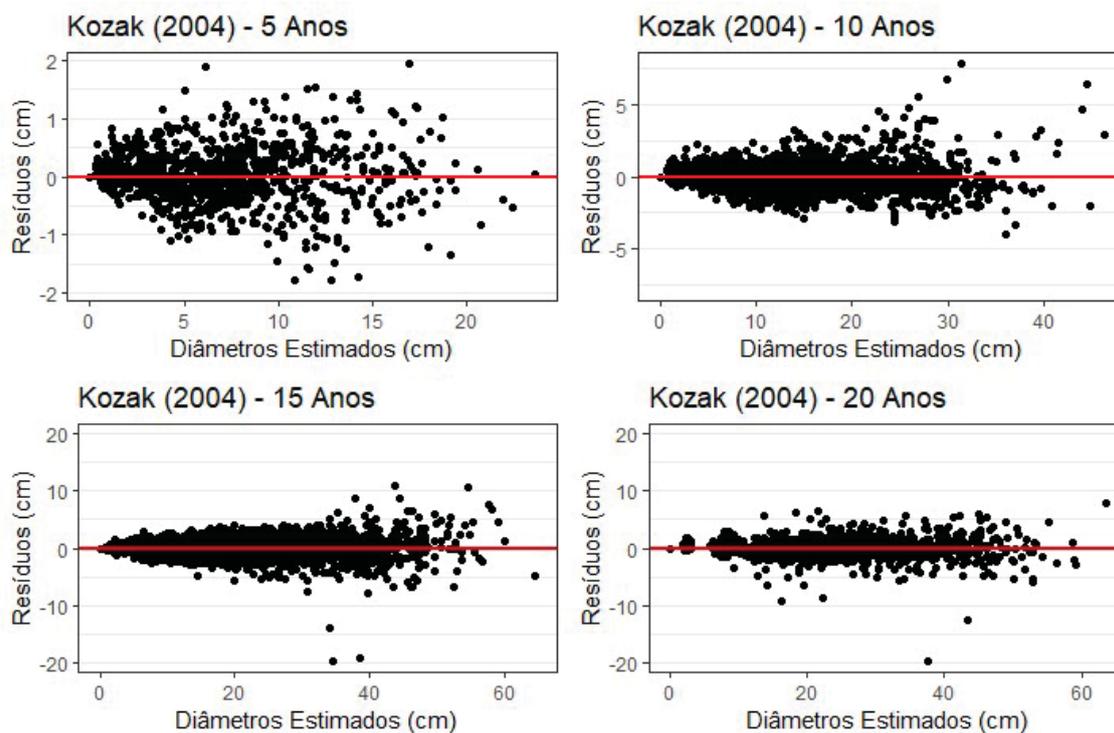
WICKHAM, H. **ggplot2: Elegant graphics for data analysis**. 2nd ed. Springer-Verlag. New York, 260pp. 2016.

WINGO, D. R. Maximum likelihood methods for fitting the Burr Type XII Distribution to multiply (progressively) censored life test data. **Metrika**. (40): 203-210. 1993.

WUTT, H. **Schaftkurven - Näherung durch Integration - Polynome**. Centralblatt für das Gesamte Forstwesen, H.1. 1961.

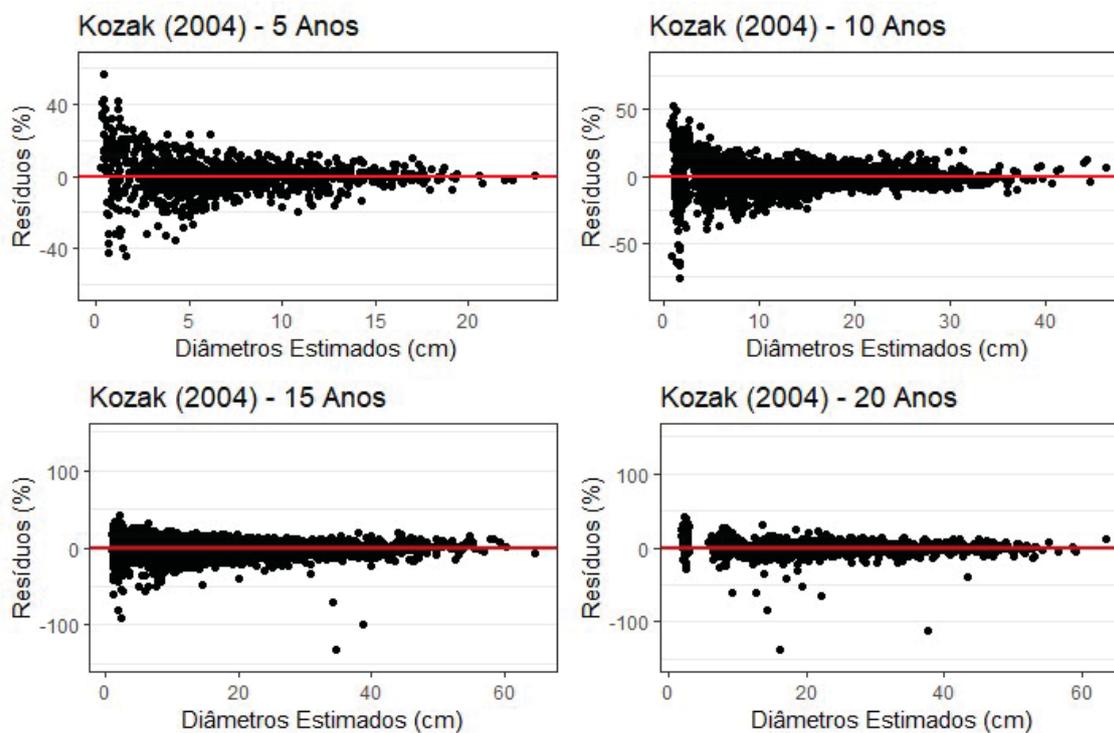
ZIMMER, W. J.; KEATS, J.B.; WANG, F.K. The Burr XII Distribution in Reliability Analysis. **Journal of Quality Technology**. 30(4), 386–394. 1998.

Figura 4.1 – Resíduos absolutos da estimativa de diâmetro para o modelo de Kozak.



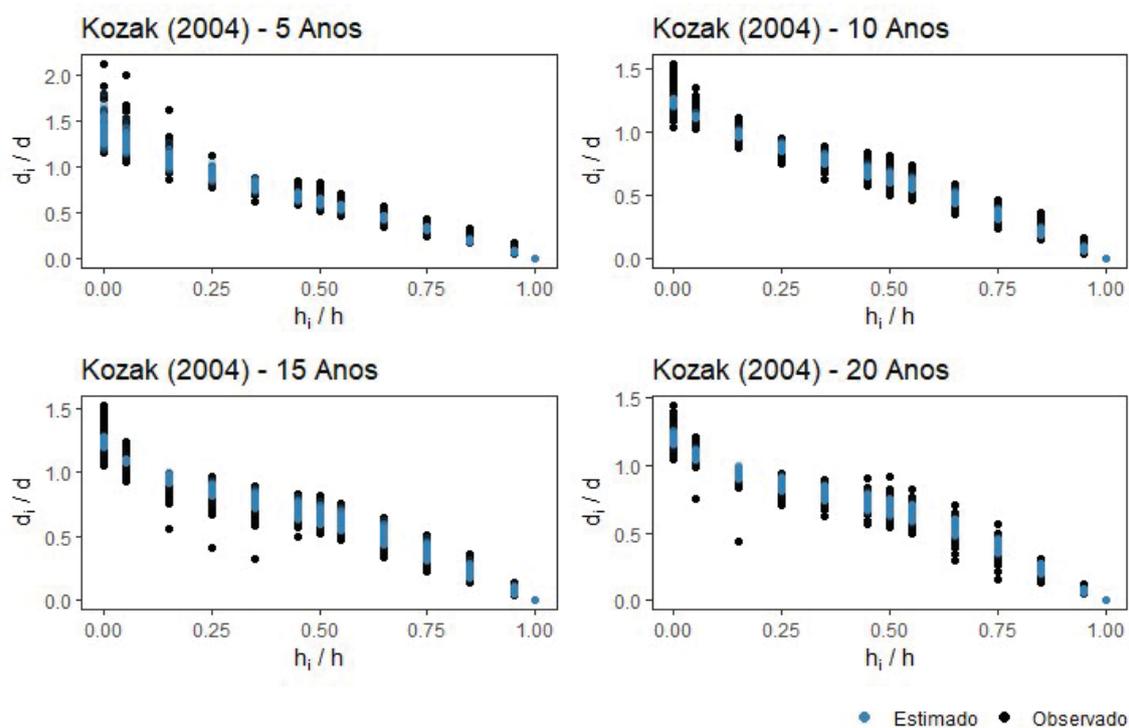
Fonte: Autor.

Figura 4.2 – Resíduos relativos para a estimativa de diâmetro para o modelo de Kozak.



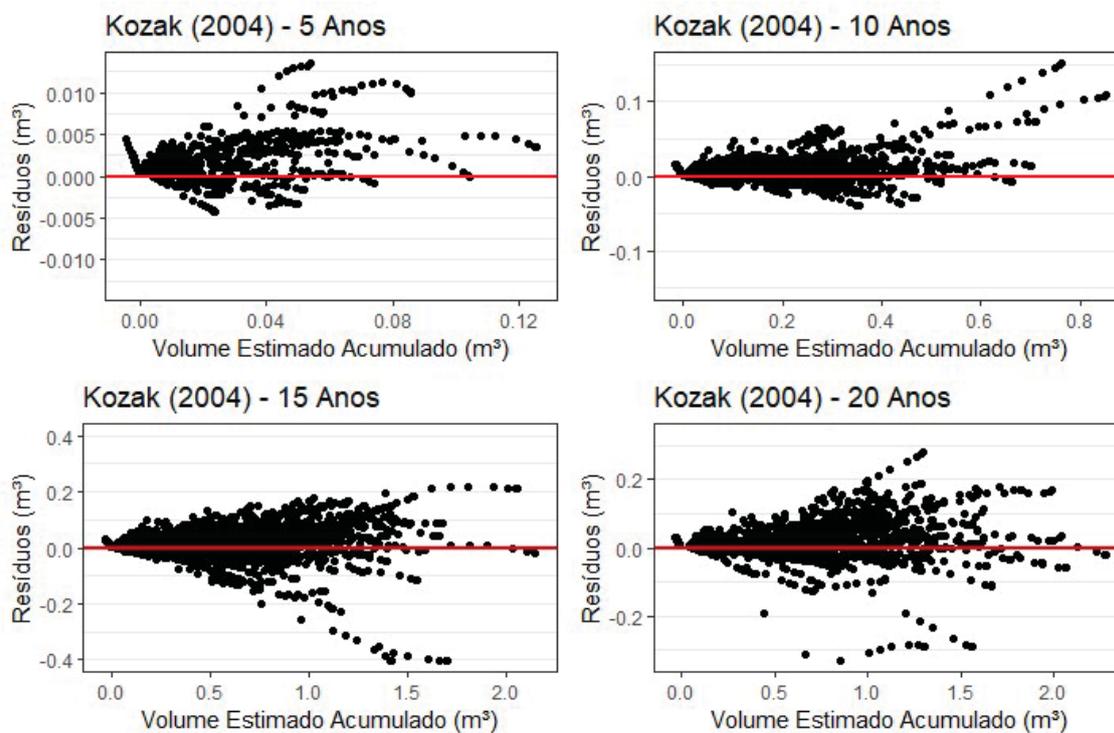
Fonte: Autor.

Figura 4.3 – Diâmetros observados e estimados para o modelo de Kozak.



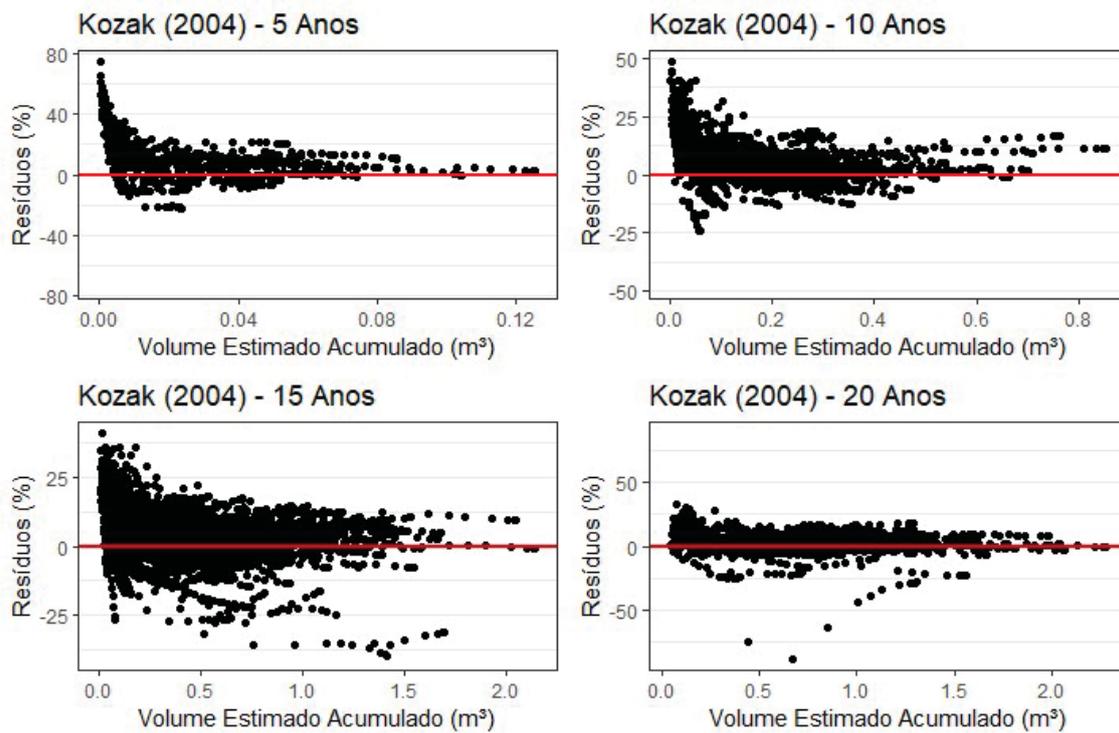
Fonte: Autor.

Figura 4.4 – Resíduos absolutos da estimativa do volume total para o modelo de Kozak.



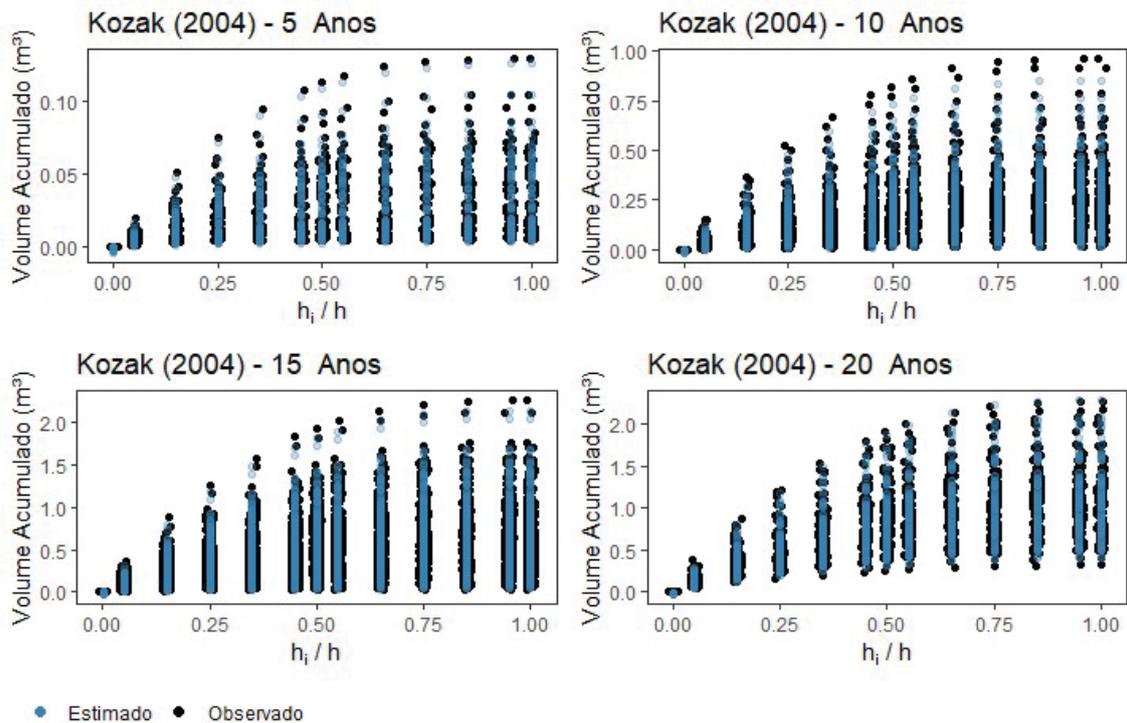
Fonte: Autor.

Figura 4.5 – Resíduos relativos da estimativa do volume total para o modelo de Kozak.



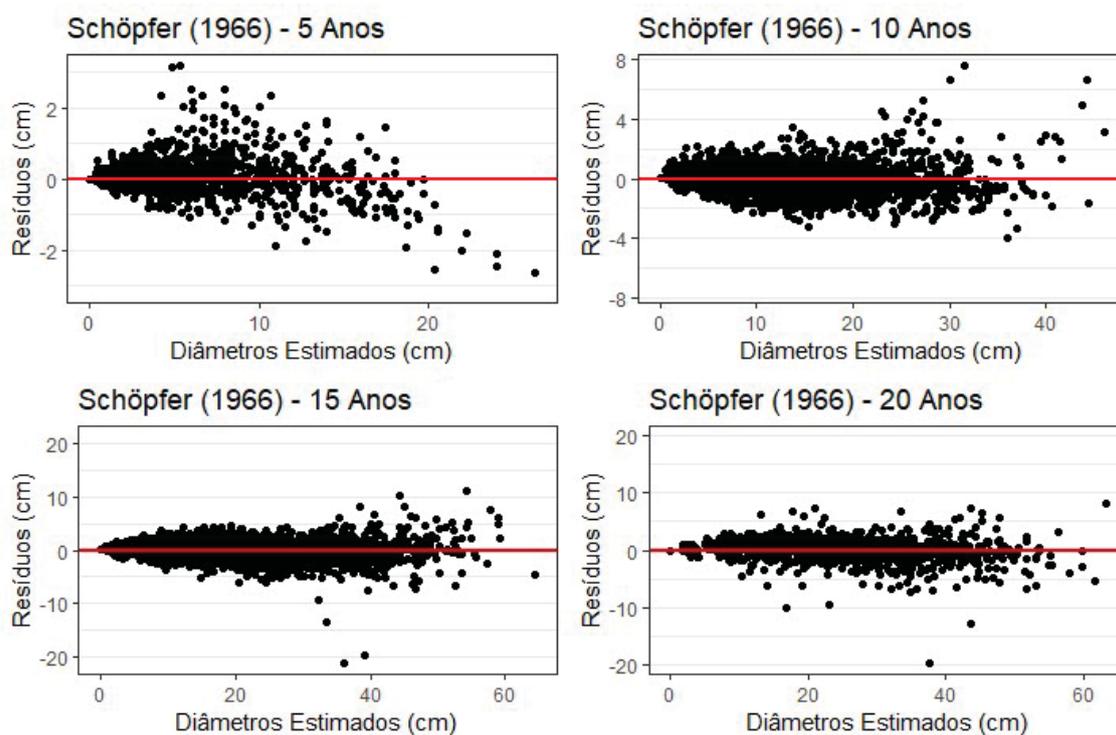
Fonte: Autor.

Figura 4.6 – Volumes totais observados e estimados para o modelo de Kozak.



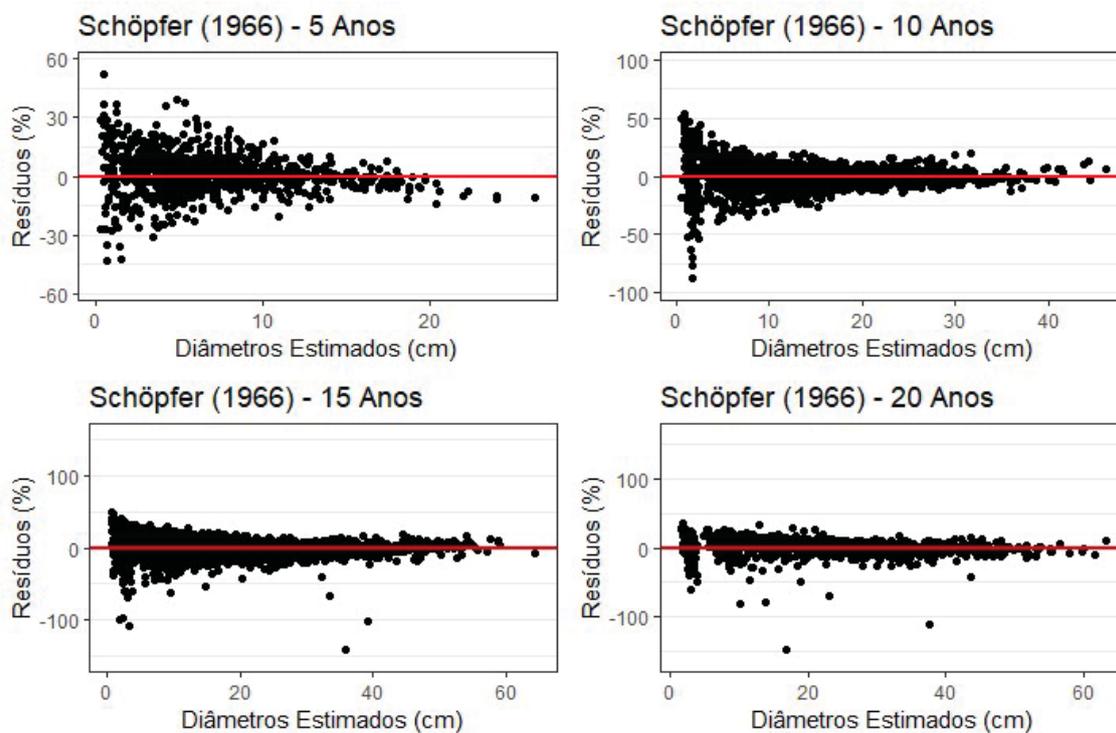
Fonte: Autor.

Figura 4.7 – Resíduos absolutos da estimativa de diâmetro para o modelo de Schöpfer.



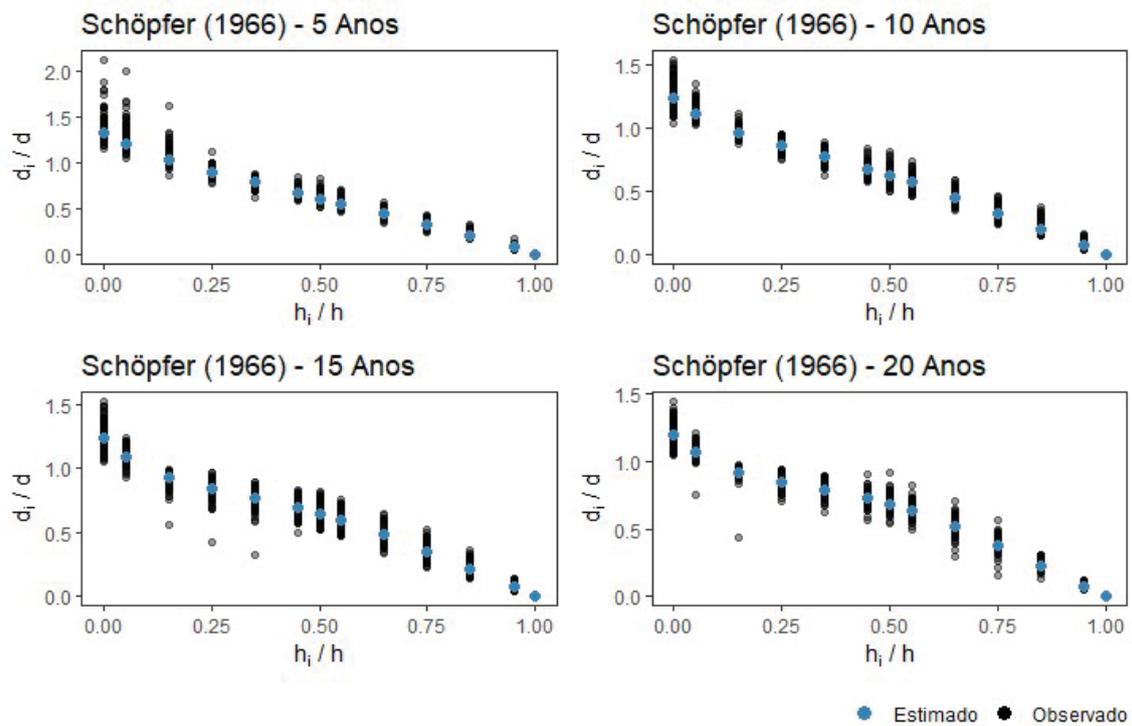
Fonte: Autor.

Figura 4.8 – Resíduos relativos para a estimativa de diâmetro para o modelo de Schöpfer.



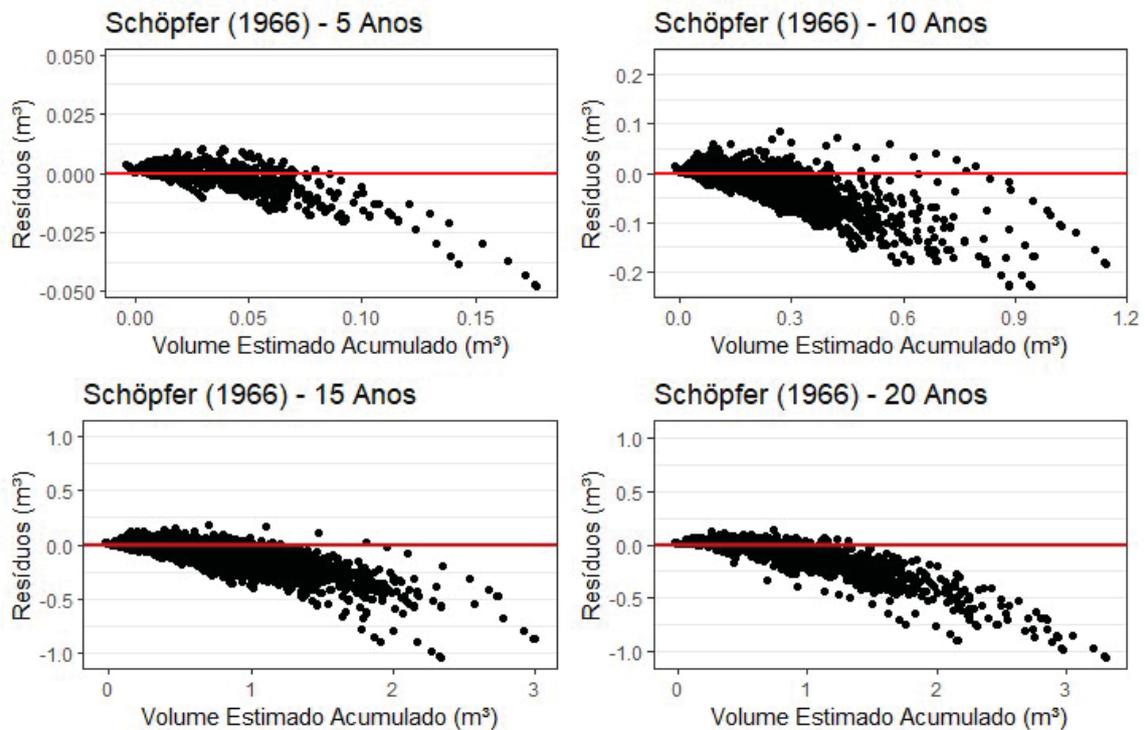
Fonte: Autor.

Figura 4.9 – Diâmetros observados e estimados para o modelo de Schöpfer.



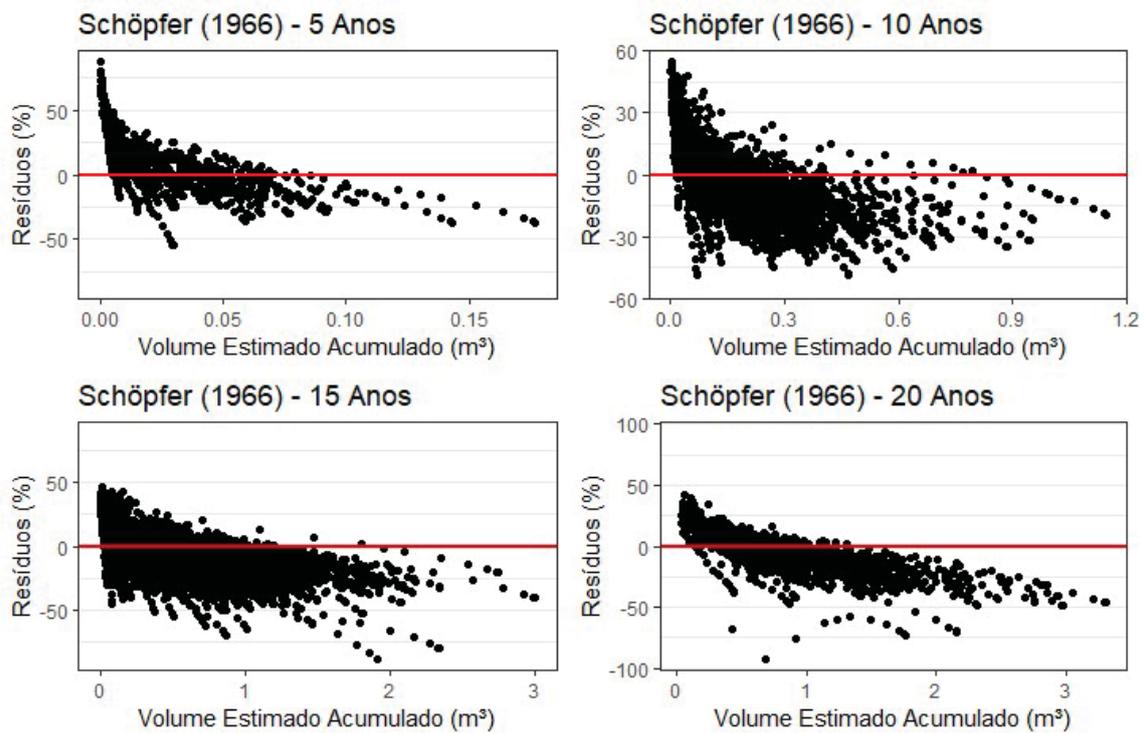
Fonte: Autor.

Figura 4.10 – Resíduos absolutos da estimativa do volume total para o modelo de Schöpfer.



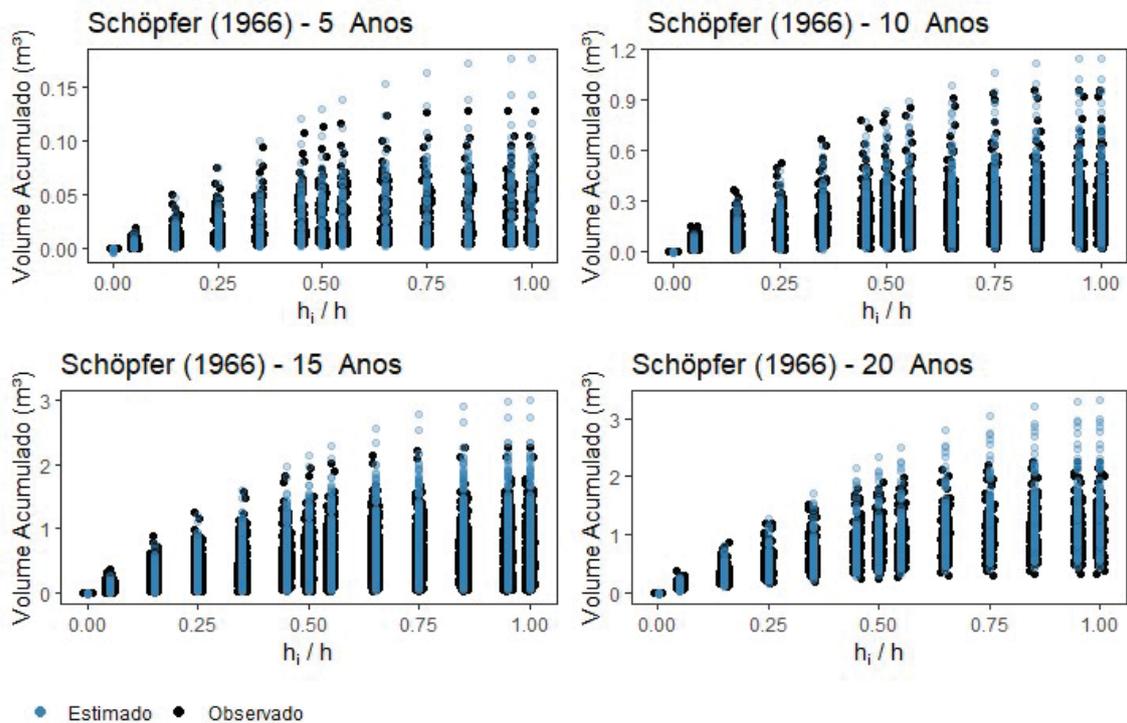
Fonte: Autor.

Figura 4.11 – Resíduos relativos da estimativa do volume total para o modelo de Schöpfer.



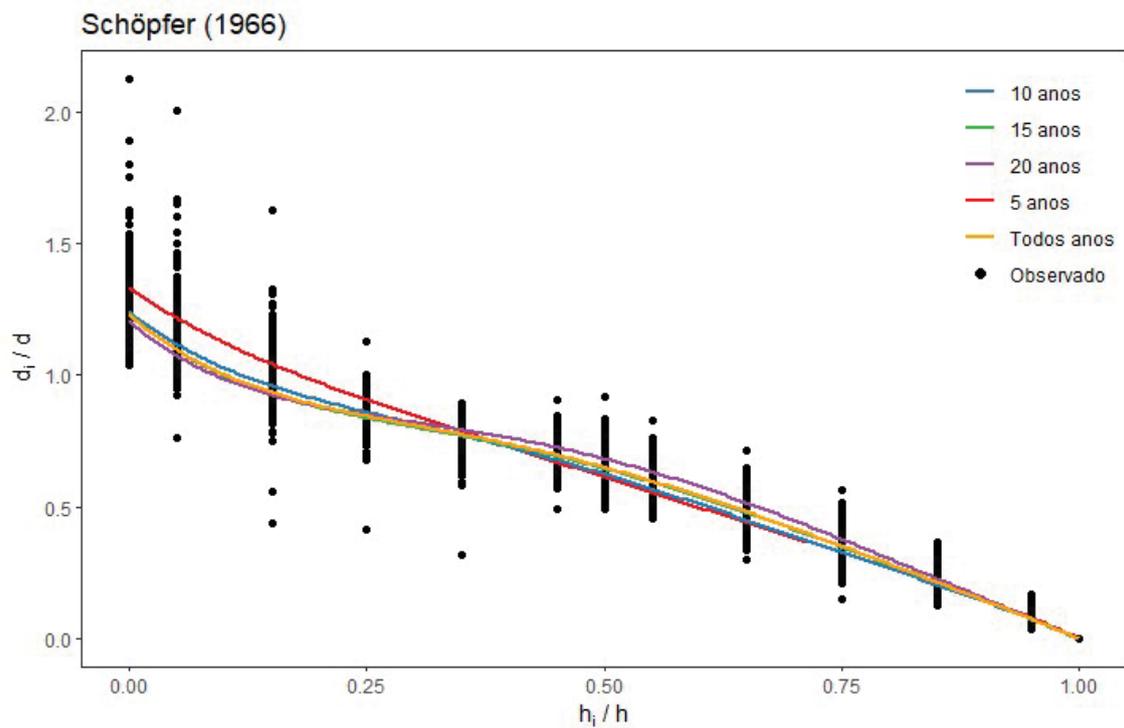
Fonte: Autor.

Figura 4.12 – Volumes totais observados e estimados para o modelo de Schöpfer.



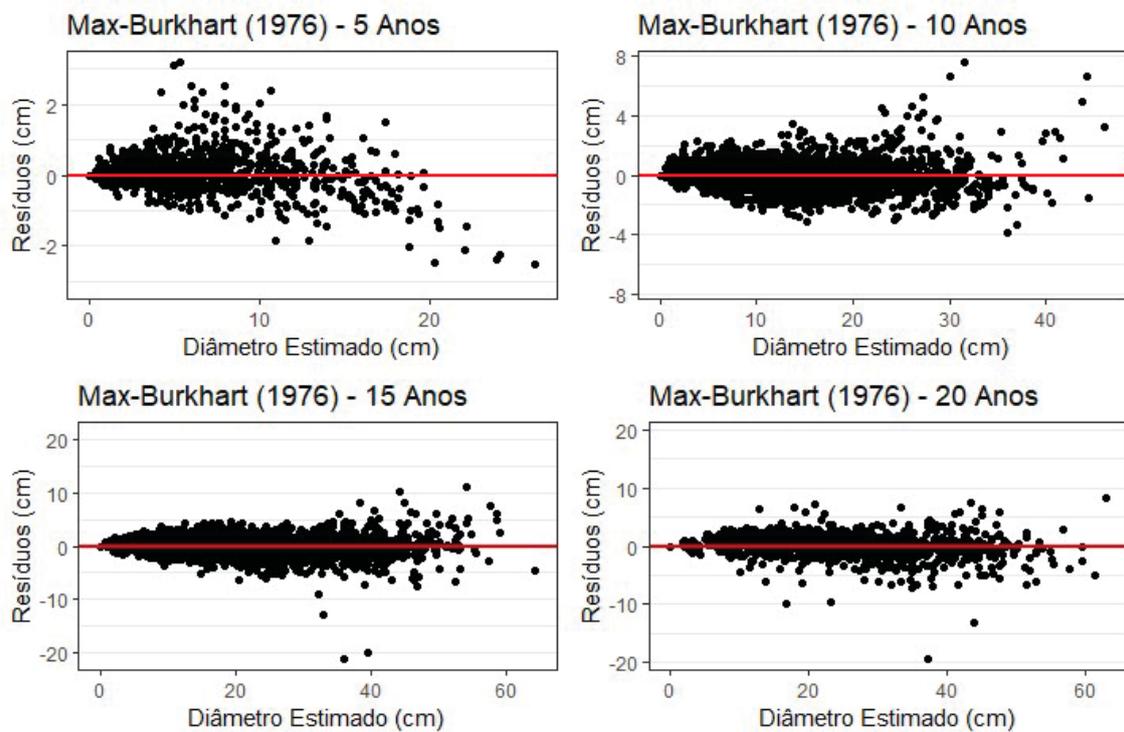
Fonte: Autor.

Figura 4.13 – Curvas dos perfis de fuste estimados nas idades para o modelo de Schöpfer.



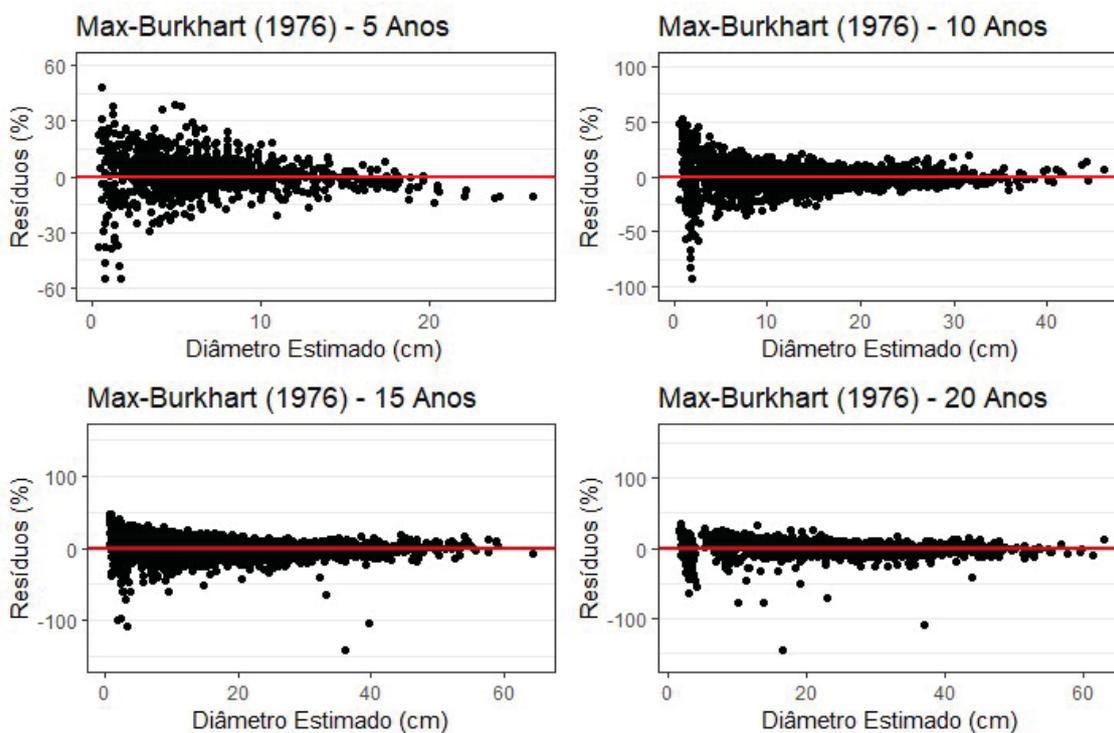
Fonte: Autor.

Figura 4.14 – Resíduos absolutos da estimativa de diâmetro para o modelo de Max-Burkhardt.



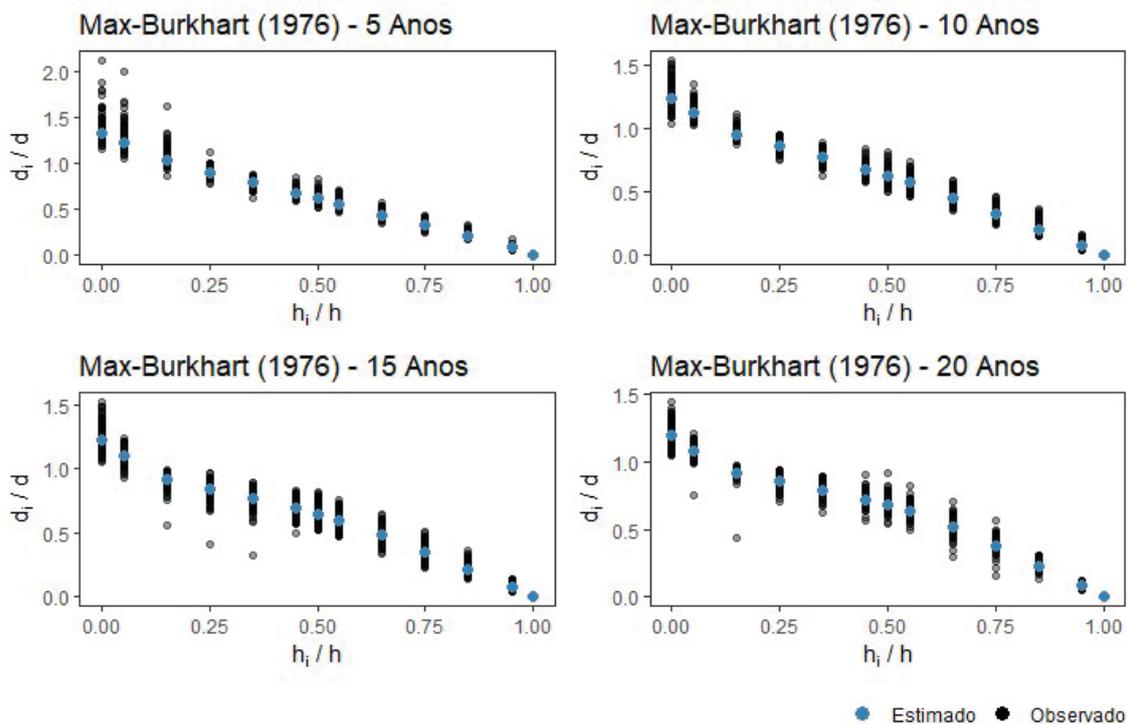
Fonte: Autor.

Figura 4.15 – Resíduos relativos para a estimativa de diâmetro para o modelo de Max-Burkhardt.



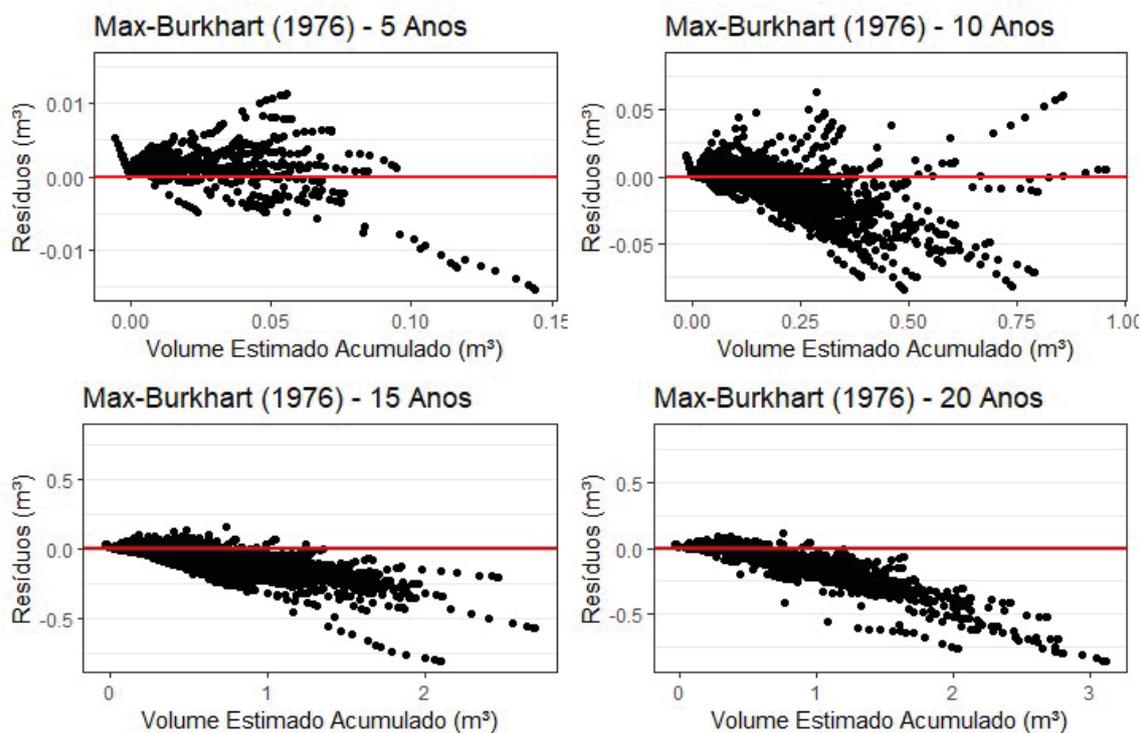
Fonte: Autor.

Figura 4.16 – Diâmetros observados e estimados para o modelo de Max-Burkhardt.



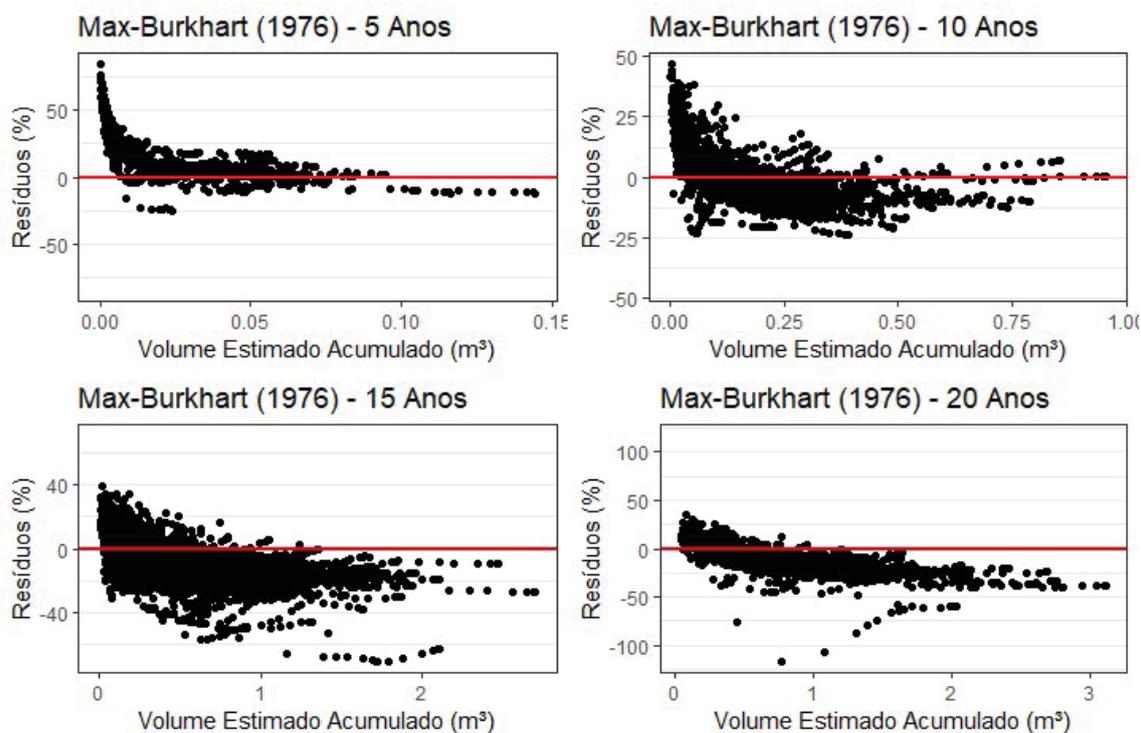
Fonte: Autor.

Figura 4.17 – Resíduos absolutos da estimativa do volume total para o modelo de Max-Burkhardt.



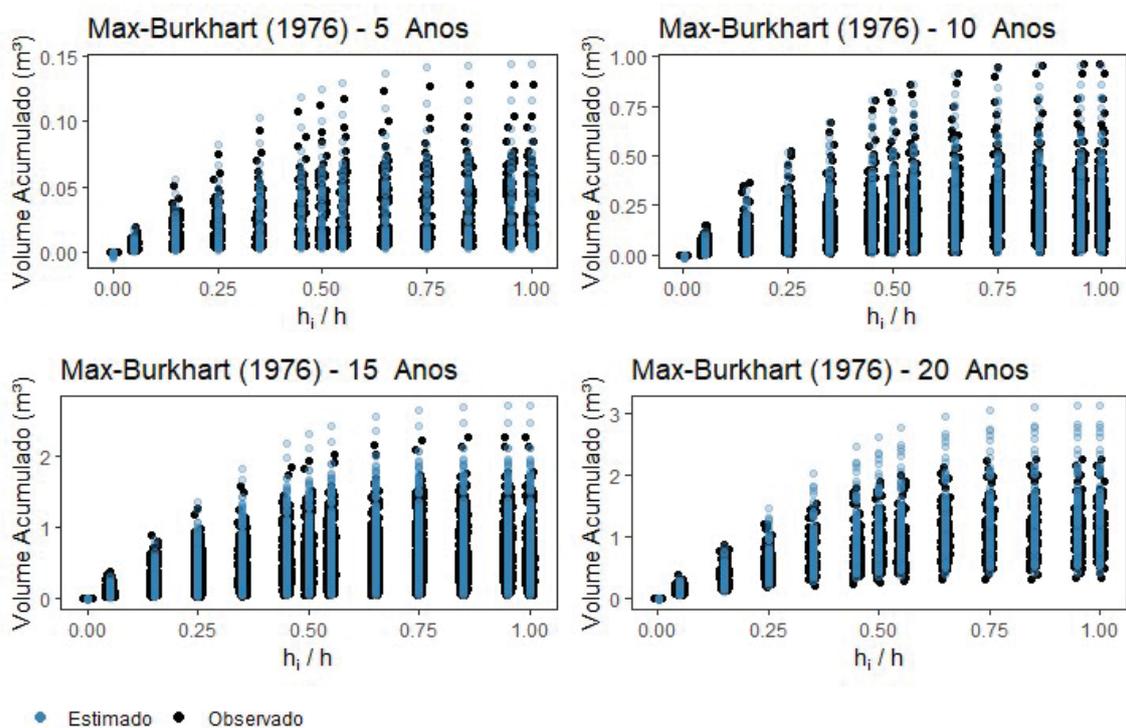
Fonte: Autor.

Figura 4.18 – Resíduos relativos da estimativa do volume total para o modelo de Max-Burkhardt.



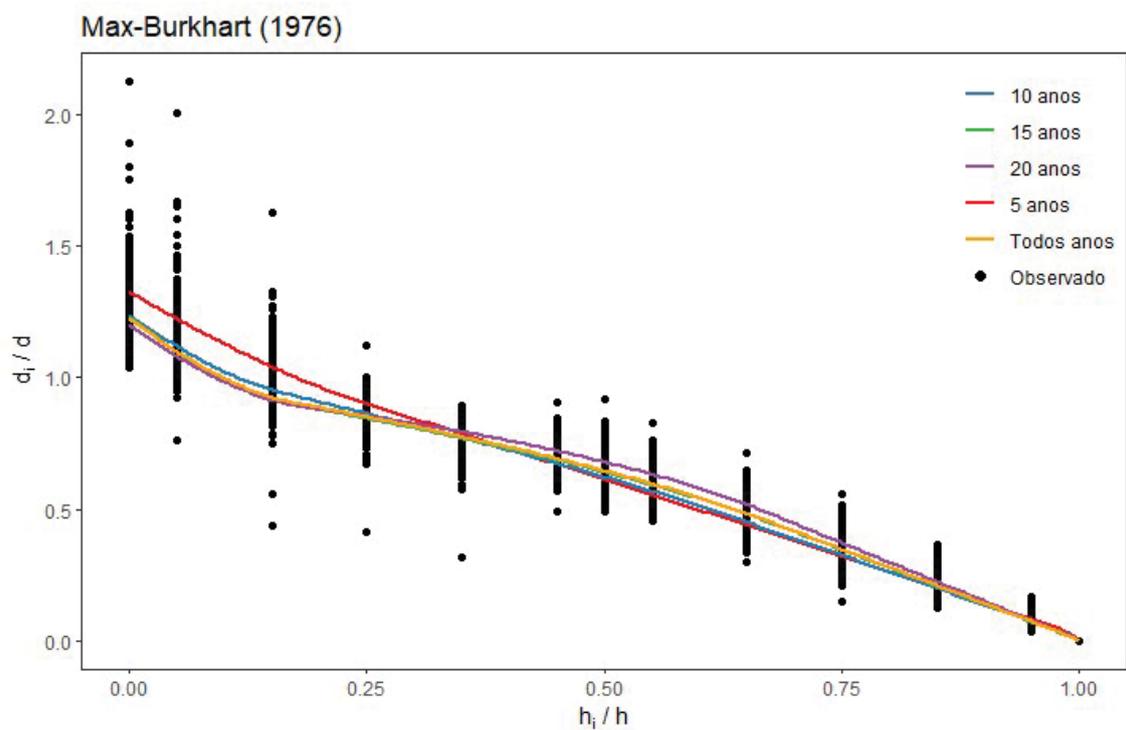
Fonte: Autor.

Figura 4.19 – Volumes totais observados e estimados para o modelo de Max-Burkhardt.



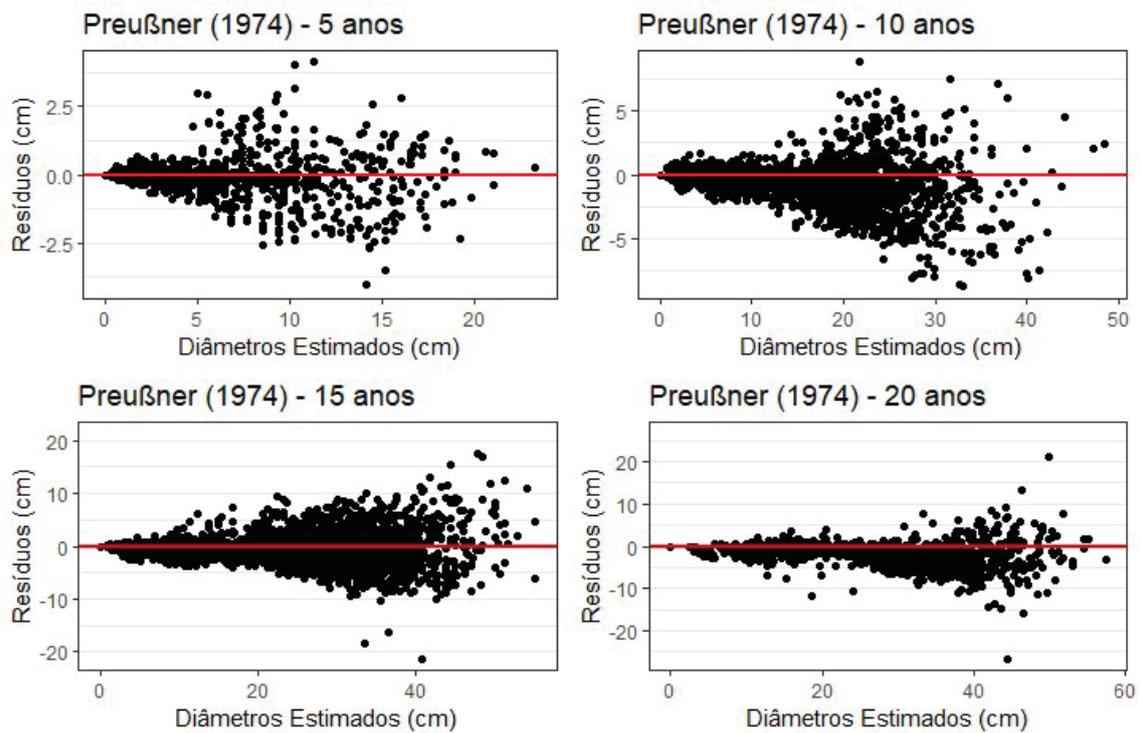
Fonte: Autor.

Figura 4.20 – Curvas dos perfis de fuste estimados nas idades para o modelo de Max-Burkhardt.



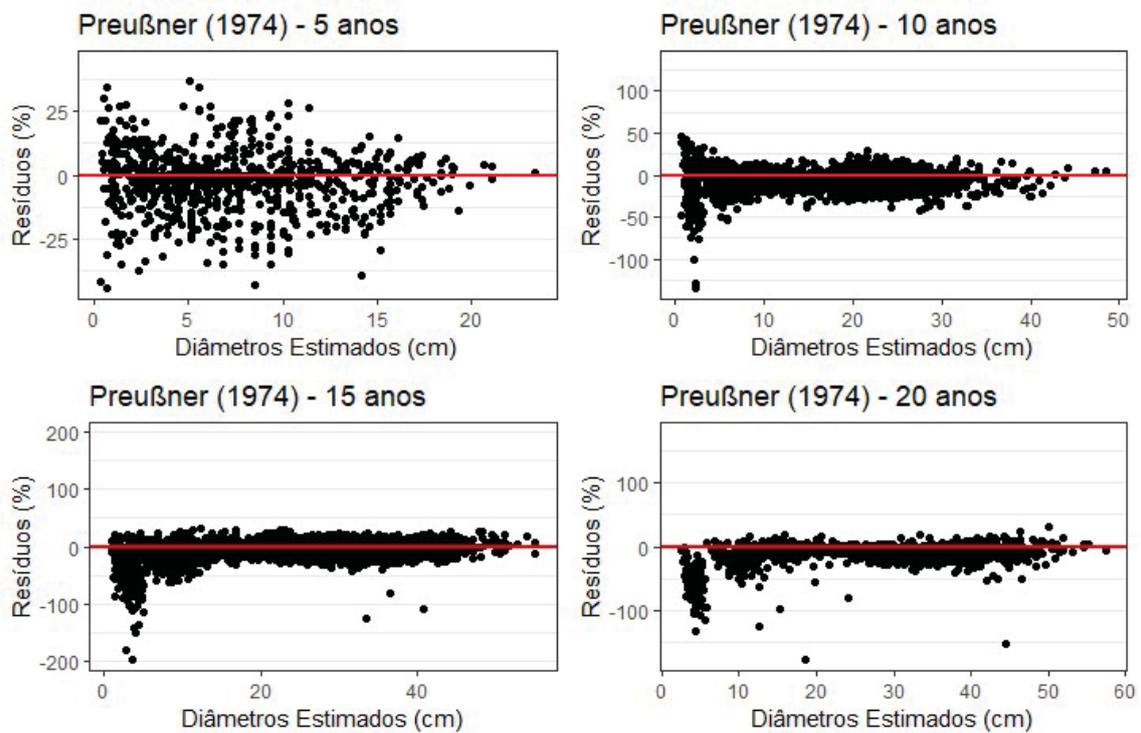
Fonte: Autor.

Figura 4.21 – Resíduos absolutos da estimativa de diâmetro para o modelo de Preußner.



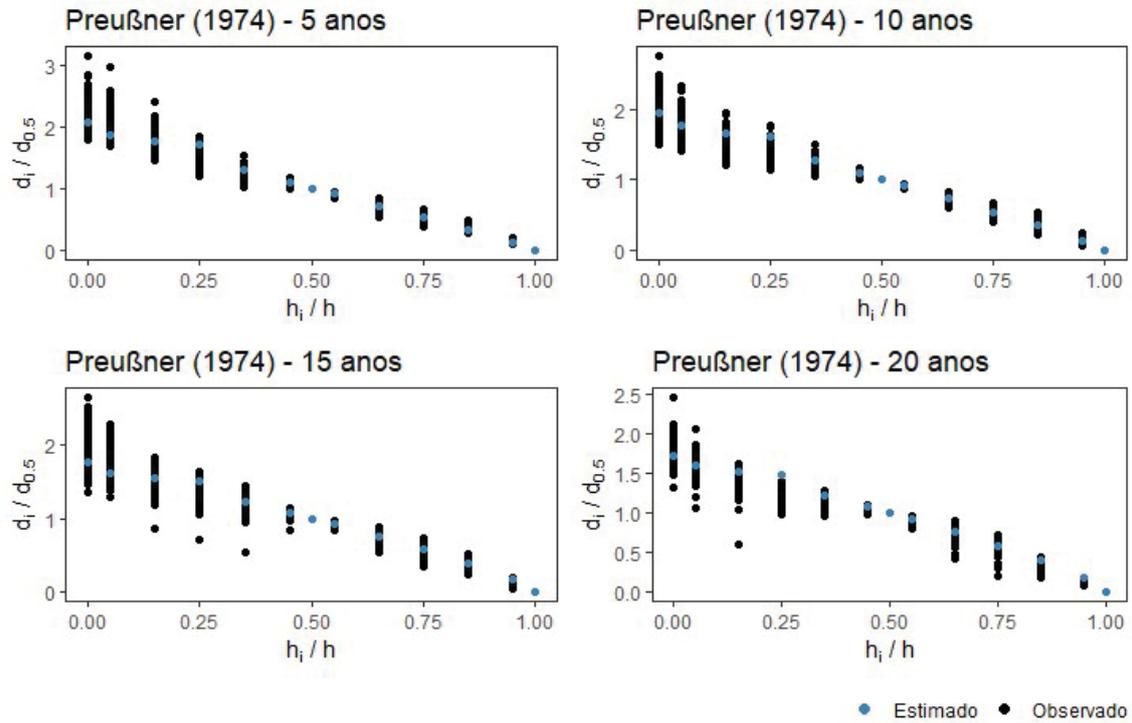
Fonte: Autor.

Figura 4.22 – Resíduos relativos para a estimativa de diâmetro para o modelo de Preußner.



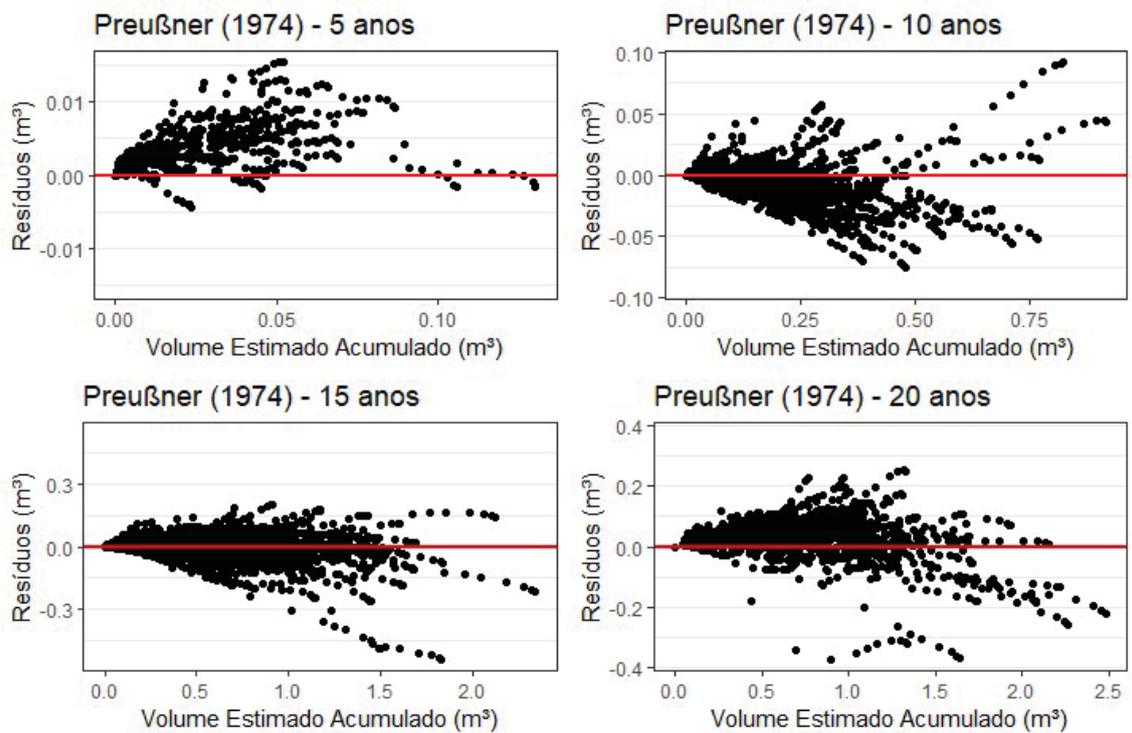
Fonte: Autor.

Figura 4.23 – Diâmetros observados e estimados para o modelo de Preußner.



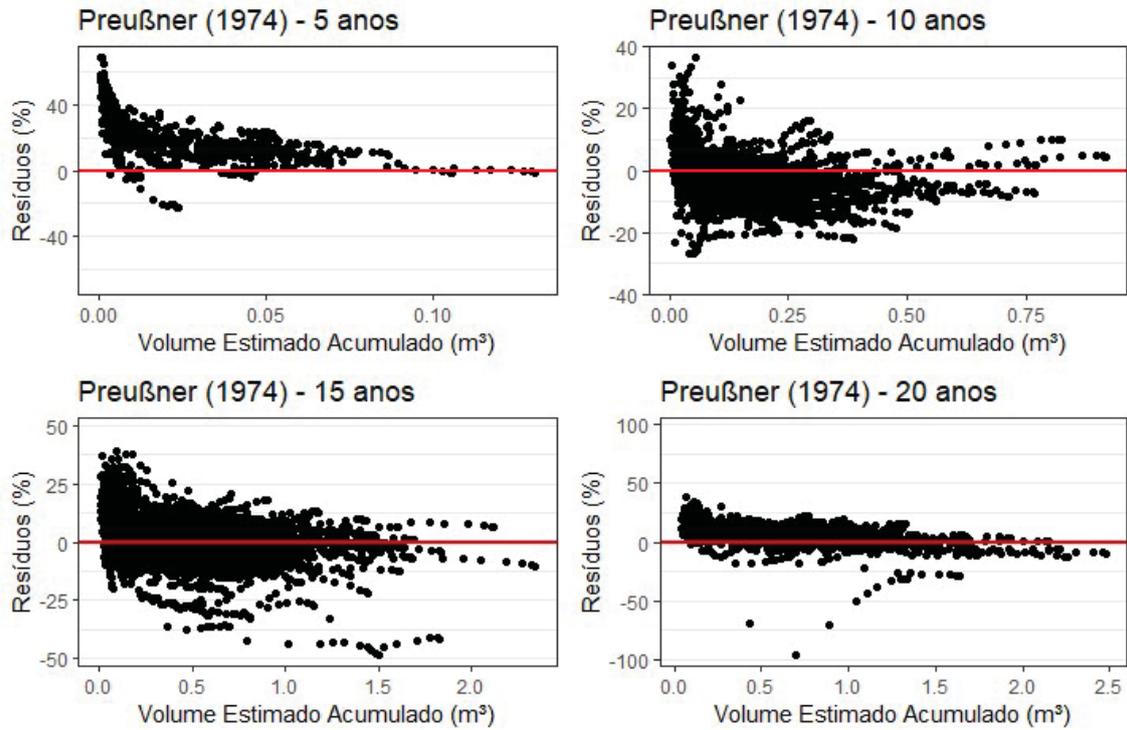
Fonte: Autor.

Figura 4.24 – Resíduos absolutos da estimativa do volume total para o modelo de Preußner.



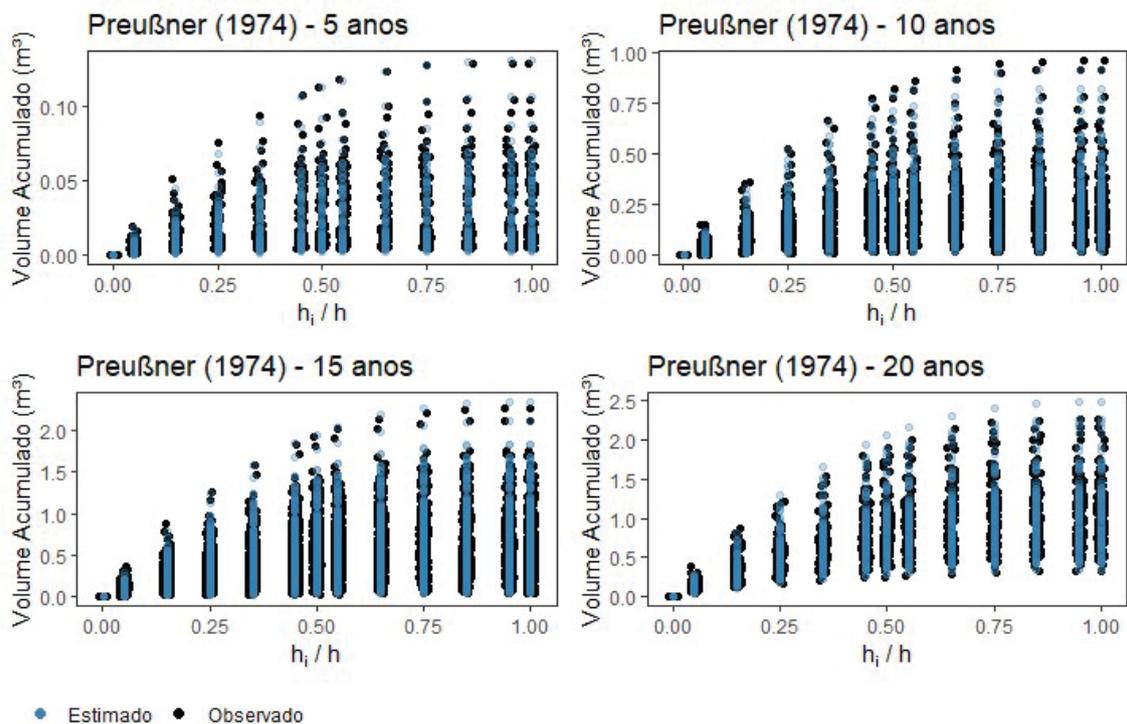
Fonte: Autor.

Figura 4.25 – Resíduos relativos da estimativa do volume total para o modelo de Preußner.



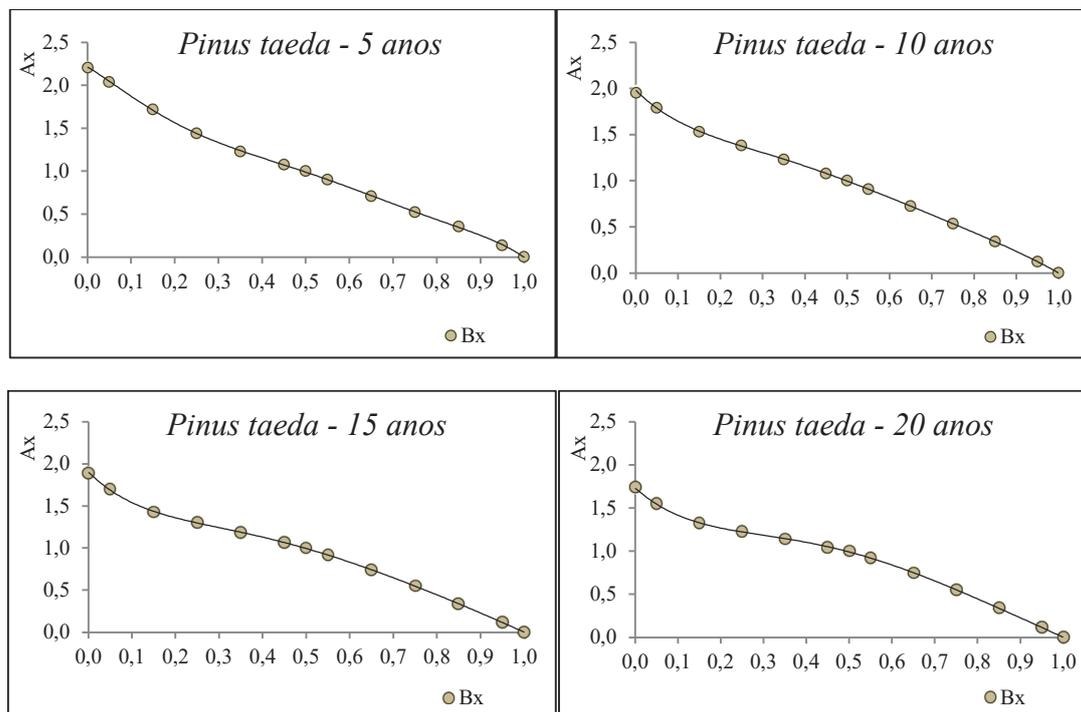
Fonte: Autor.

Figura 4.26 – Volumes totais observados e estimados para o modelo de Preußner.



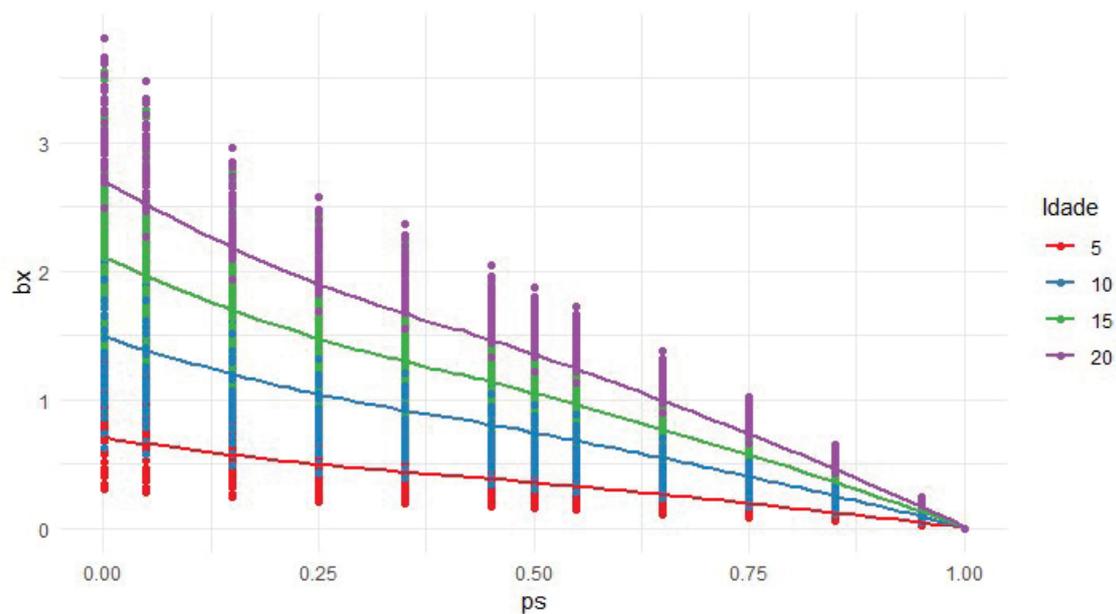
Fonte: Autor.

Figura 4.27 – Curvas de forma dos quocientes observados A_x e estimados B_x para o modelo de Preußner de quatro agrupamentos de idade: árvores com até 5 anos, de 5 a 10, 10 a 15 e de 15 a 20 anos de *Pinus taeda* L. do Meio-Oeste Catarinense.



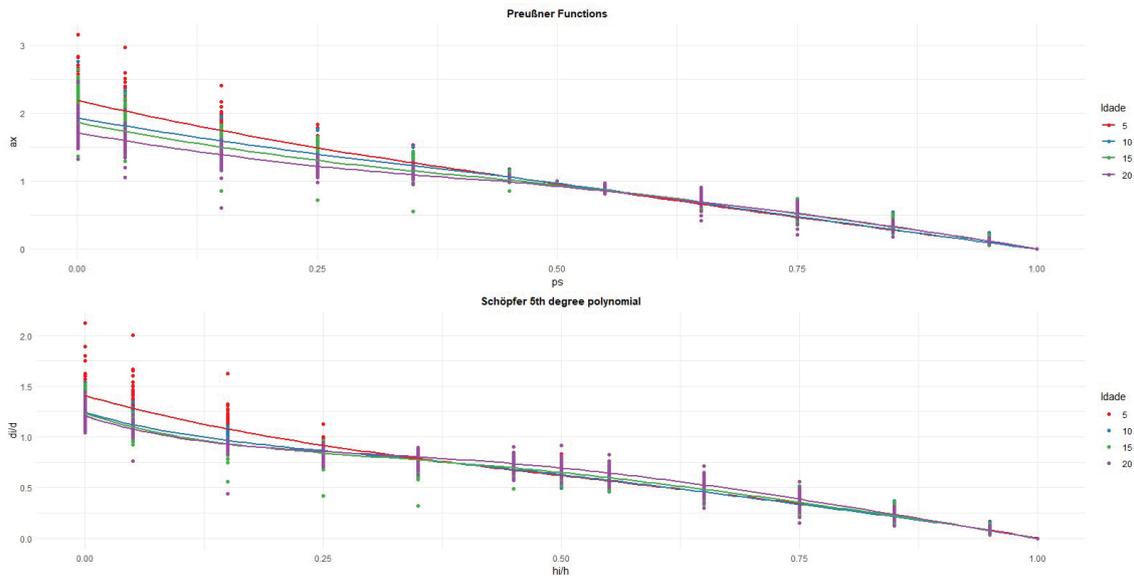
Fonte: Autor.

Figura 4.28 – Curvas dos perfis das árvores do ajuste das Funções de Preußner por idade.



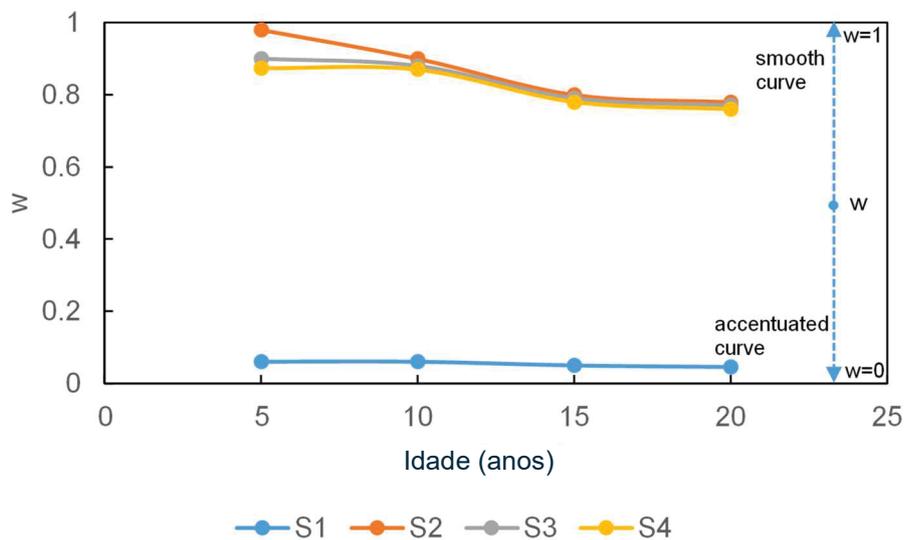
Fonte: Autor.

Figura 4.29 – Curvas dos perfis das árvores do ajuste das Funções de Preußner em comparação com o modelo de Schöpfer por idade.



Fonte: Autor.

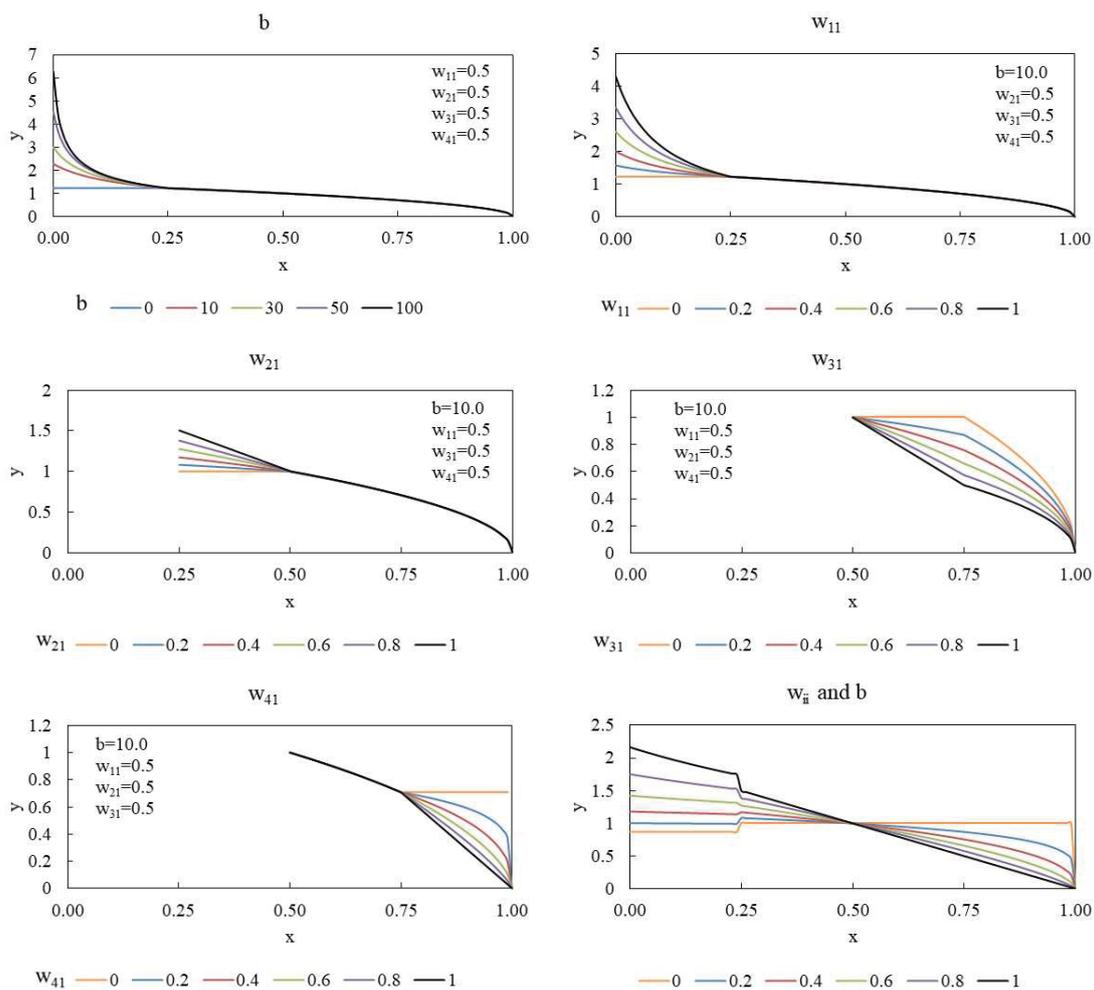
Figura 4.30 – Variação dos valores de w dos perfis das árvores do ajuste das Funções de Preußner por idade.



em que: S1 é o primeiro segmento das funções de Preußner i.e. $0,0 < x \leq 0,25$; S2 é o segundo segmento das funções de Preußner, i.e. $0,25 < x \leq 0,50$; S3 é o terceiro segmento das funções de Preußner, i.e. $0,50 < x \leq 0,75$; S4 é o quarto segmento das funções de Preußner, i.e. $0,75 < x \leq 1,00$.

Fonte: Autor.

Figura 4.31 – Relação entre os coeficientes w e b com as curvas dos perfis das árvores do ajuste das Funções de Preußner.



Fonte: Autor.

Tabela 4.2 – Coeficientes de ajuste dos modelos para idade 5.

Parâmetros estimados										
Modelos	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	$\hat{\beta}_6$
Kozak (2004)	1,767274	0,7927	0,1120		0,2969	-0,3412	0,8002	1,2650	-0,1029	-0,1792
Schöpfer (1966)				1,3317	-2,5077	5,1290	-9,6238	8,9117	-3,2391	
Max-Burkhardt (1976)		0,2469	0,5852		-2,7847	1,3517	5,8133	-0,0758		
Erro padrão do parâmetro										
Kozak (2004)	0,0388	0,0237	0,0331		0,0204	0,1154	0,0239	0,1816	0,0126	0,0499
Schöpfer (1966)				0,0061	0,1610	1,1206	2,9768	3,3359	1,3282	
Max-Burkhardt (1976)		0,0300	0,9778		0,1315	0,0741	1,0930	0,3175		

Fonte: Autor.

Tabela 4.3 – Estatísticas de ajuste dos modelos para idade 5 e volume total da árvore.

Estatísticas estimadas					
Modelos	R^2_{ajus}	$S_{yx}\%$	MSE	RMSE	RMSE ₁₀₀
Preußner (1974)			1,83E-05	0,0043	17,6508
Kozak (2004)	0,9898	7,4941	9,10E-06	0,0030	12,4487
Schöpfer (1966)	0,9841	9,6153	3,68E-05	0,0061	25,0410
Max-Burkhardt (1976)	0,9841	9,6169	9,92E-06	0,0031	13,0004

Fonte: Autor.

Tabela 4.4 – Coeficientes de ajuste dos modelos para idade 10.

Parâmetros estimados										
Modelos	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	$\hat{\beta}_6$
Kozak (2004)	1,19797	1,0373	-0,0336		0,4102	-0,3186	0,7067	-0,1164	-0,0199	-0,3166
Schöpfer (1966)				1,2403	-2,8449	8,8225	-17,845	15,9987	-5,3722	
Max-Burkhardt (1976)		0,1658	0,6348		-3,1609	1,5620	13,5017	-1,0789		
Erro padrão do parâmetro										
Kozak (2004)	0,0285	0,0097	0,0136		0,0123	0,0455	0,0088	0,1912	0,0056	0,0414
Schöpfer (1966)				0,0024	0,0622	0,4330	1,1503	1,2892	0,5134	
Max-Burkhardt (1976)		0,0088	0,0184		0,0546	0,0306	1,2708	0,0615		

Fonte: Autor.

Tabela 4.5 – Estatísticas de ajuste dos modelos para idade 10 e volume total da árvore.

Estatísticas estimadas					
Modelos	R^2_{ajus}	$S_{yx}\%$	MSE	RMSE	RMSE ₁₀₀
Preußner (1974)			0,000262	0,0162	9,81289
Kozak (2004)	0,9906	6,5574	0,000254	0,0159	9,67295
Schöpfer (1966)	0,9903	6,6772	0,001704	0,0413	25,0489
Max-Burkhardt (1976)	0,9903	6,6741	0,000313	0,0177	10,7305

Fonte: Autor.

Tabela 4.6 – Coeficientes de ajuste dos modelos para idade 15.

Parâmetros estimados										
Modelos	\hat{a}_0	\hat{a}_1	\hat{a}_2	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	$\hat{\beta}_6$
Kozak (2004)	1,350354	1,0460	-0,0848		0,5179	-0,7605	0,6327	1,7765	-0,0355	0,0628
Schöpfer (1966)				1,2335	-3,2456	10,728	-20,150	16,467	-5,0341	
Max-Burkhardt (1976)		0,1735	0,6846		-3,7667	1,8755	16,602	-1,8635		
Erro padrão do parâmetro										
Kozak (2004)	0,0313	0,0075	0,0111		0,0096	0,0335	0,0068	0,1993	0,0034	0,0331
Schöpfer (1966)				0,0019	0,0510	0,3547	0,9425	1,0564	0,4206	
Max-Burkhardt (1976)		0,0055	0,0091		0,0614	0,0336	0,9141	0,0439		

Fonte: Autor.

Tabela 4.7 – Estatísticas de ajuste dos modelos para idade 15 e volume total da árvore.

Estatísticas estimadas					
Modelos	R^2_{ajus}	$S_{yx}\%$	MSE	RMSE	RMSE ₁₀₀
Preußner (1974)			0,002216	0,0471	10,9655
Kozak (2004)	0,9883	7,1491	0,001916	0,0438	10,1966
Schöpfer (1966)	0,9869	7,5703	0,014876	0,1220	28,4084
Max-Burkhardt (1976)	0,9869	7,5692	0,010279	0,1014	23,6147

Fonte: Autor.

Tabela 4.8 – Coeficientes de ajuste dos modelos para idade 20.

Parâmetros estimados										
Modelos	\hat{a}_0	\hat{a}_1	\hat{a}_2	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	$\hat{\beta}_6$
Kozak (2004)	2,804767	1,0038	-0,2743		0,6255	-0,7154	0,5052	2,3690	-0,0517	0,3939
Schöpfer (1966)				1,2033	-3,0393	10,400	-19,160	14,817	-4,2206	
Max-Burkhardt (1976)		0,1905	0,6781		-4,3478	2,1647	14,268	-2,7426		
Erro padrão do parâmetro										
Kozak (2004)	0,3209	0,0155	0,0424		0,0203	0,1226	0,0178	1,1770	0,0065	0,0718
Schöpfer (1966)				0,0042	0,1117	0,7774	2,0657	2,3153	0,9219	
Max-Burkhardt (1976)		0,0124	0,0148		0,1393	0,0765	1,4805	0,1117		

Fonte: Autor.

Tabela 4.9 – Estatísticas de ajuste dos modelos para idade 20 e volume total da árvore.

Estatísticas estimadas					
Modelos	R^2_{ajus}	$S_{yx}\%$	MSE	RMSE	RMSE ₁₀₀
Preußner (1974)			0,005903	0,0768	10,4619
Kozak (2004)	0,9855	7,3066	0,004305	0,0656	8,9339
Schöpfer (1966)	0,9824	8,1355	0,042385	0,2059	28,0330
Max-Burkhardt (1976)	0,9823	8,1464	0,046220	0,2150	29,2736

Fonte: Autor.

Tabela 4.10 – Volume comercial observado e estimado (%) para quatro diâmetros mínimos até o topo e altura de 2,48 m.

Idade	Fonte	8 cm	15 cm	25 cm	35 cm
5	Observado	90,53	9,47	0	0
10		26,12	60,47	12,73	0,68
15		9,73	38,12	40,00	12,15
20		5,08	25,15	44,07	25,70
5	Kozak	94,59	5,41	0	0
10		27,68	57,88	13,83	0,61
15		9,78	38,49	39,50	12,23
20		4,86	25,68	47,04	22,43
5	Preußner	94,31	5,69	0	0
10		23,96	54,06	19,37	2,61
15		9,69	33,31	39,46	17,55
20		4,69	18,48	35,79	41,04

Fonte: Autor.

Tabela 4.11 – Estatísticas para avaliar as funções de Kozak e Preußner para o volume comercial. (continua)

Idade	Kozak				Preußner			
	>= 8 cm	>= 15 cm	>= 25 cm	>= 35 cm	>= 8 cm	>= 15 cm	>= 25 cm	>= 35 cm
RMSE								
5	0,0088	0,0077	-	-	0,0097	0,0078	-	-
10	0,0201	0,0416	0,0389	0,0030	0,0212	0,0614	0,0697	0,0358
15	0,0254	0,0603	0,0772	0,0680	0,0249	0,0808	0,1373	0,1183
20	0,0235	0,0961	0,1348	0,1359	0,0257	0,1477	0,2420	0,2233
RMSE(%)								
5	48,20	402,94	-	-	52,96	405,49	-	-
10	34,69	31,00	137,50	196,42	36,64	45,69	246,46	2.377,72
15	43,18	26,20	31,95	92,69	42,41	35,07	56,81	161,15
20	43,66	36,15	28,93	50,01	47,85	55,54	51,93	82,16
Bias								
5	0,0008	0,0009	-	-	0,0028	0,0010	-	-
10	-0,0013	0,0102	-0,0014	0,0002	0,0039	0,0123	-0,0154	-0,0044
15	0,0012	0,0038	0,0092	0,0014	0,0000	0,0283	0,0023	-0,0331
20	0,0033	-0,0006	-0,0225	0,0390	0,0061	0,0785	0,1046	-0,1446
Bias (%)								
5	4,48	47,78	-	-	15,35	51,17	-	-
10	-2,29	7,63	-4,79	12,65	6,79	9,19	-54,50	-291,55
15	2,07	1,66	3,79	1,94	0,03	12,28	0,93	-45,05
20	6,18	-0,24	-4,82	14,33	11,41	29,50	22,45	-53,19

Tabela 4.11 – Estatísticas para avaliar as funções de Kozak e Preußner para o volume comercial.

(conclusão)

<i>r</i>								
5	0,93	0,76	-	-	0,68	0,43	-	-
10	0,57	0,90	0,92	1,00	0,41	0,58	0,56	0,01
15	0,42	0,77	0,94	0,95	0,16	0,02	0,54	0,79
20	0,34	0,62	0,83	0,94	0,20	0,26	0,27	0,83
AIC								
5	-57.527,30	-59.152,33	-	-	-56.381,61	-59.076,97	-	-
10	-453.732,76	-369.257,15	-377.184,82	-676.426,73	-447.380,13	-324.216,00	-309.408,81	-386.772,83
15	-1.588.752,69	-1.214.241,75	-1.107.641,07	-1.162.346,69	-1.588.762,69	-1.088.060,57	-858.765,08	-923.167,36
20	-108.053,42	-67.428,69	-57.691,04	-57.457,26	-105.418,52	-55.064,44	-40.844,97	-43.156,73
BIC								
5	-57.508,74	-59.133,76	-	-	-56.383,42	-59.078,77	-	-
10	-453.702,18	-369.226,56	-377.154,23	-676.396,14	-447.366,19	-324.202,06	-309.394,87	-386.758,89
15	-1.588.715,41	-1.214.204,48	-1.107.603,80	-1.162.309,41	-1.596.534,21	-1.088.044,01	-858.748,51	-923.150,79
20	-108.029,97	-67.405,24	-57.667,59	-57.433,81	-105.418,16	-55.064,07	-40.844,60	-43.156,36

Fonte: Autor.

Apêndice 1

Passos para ajustar as funções de Preußner em diferentes idades.

A curva taper de Preußner como uma função do diâmetro médio $d_{0,5h}$

O ajuste das funções nos quatro segmentos do caule em diferentes idades resultou em:

$$\begin{array}{l}
 \text{5 anos} \\
 \text{10 anos} \\
 \text{15 anos} \\
 \text{20 anos}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 1^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 2,0770 \frac{1}{(1+100x)^{0,06}} \\
 2^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,9725 (1-x)^{0,98} \\
 3^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,8660 (1-x)^{0,9} \\
 4^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,8000 (1-x)^{0,874}
 \end{array} \right. \text{ para } \left\{ \begin{array}{l}
 0,0 < x \leq 0,25 \\
 0,25 < x \leq 0,5 \\
 0,5 < x \leq 0,75 \\
 0,75 < x \leq 1,0
 \end{array} \right. \begin{array}{l}
 (1) \\
 (2) \\
 (3) \\
 (4)
 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 1^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,9650 \frac{1}{(1+x)^{0,06}} \\
 2^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,8661 (1-x)^{0,9} \\
 3^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,8404 (1-x)^{0,88} \\
 4^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,8150 (1-x)^{0,87}
 \end{array} \right. \text{ para } \left\{ \begin{array}{l}
 0,0 < x \leq 0,25 \\
 0,25 < x \leq 0,5 \\
 0,5 < x \leq 0,75 \\
 0,75 < x \leq 1,0
 \end{array} \right. \begin{array}{l}
 (5) \\
 (6) \\
 (7) \\
 (8)
 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 1^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,7746 \frac{1}{(1+100x)^{0,05}} \\
 2^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,7411 (1-x)^{0,8} \\
 3^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,7291 (1-x)^{0,79} \\
 4^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,7053 (1-x)^{0,78}
 \end{array} \right. \text{ para } \left\{ \begin{array}{l}
 0,0 < x \leq 0,25 \\
 0,25 < x \leq 0,5 \\
 0,5 < x \leq 0,75 \\
 0,75 < x \leq 1,0
 \end{array} \right. \begin{array}{l}
 (9) \\
 (10) \\
 (11) \\
 (12)
 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 1^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,7275 \frac{1}{(1+100x)^{0,046}} \\
 2^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,7171 (1-x)^{0,78} \\
 3^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,7053 (1-x)^{0,77} \\
 4^\circ \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,6818 (1-x)^{0,76}
 \end{array} \right. \text{ para } \left\{ \begin{array}{l}
 0,0 < x \leq 0,25 \\
 0,25 < x \leq 0,5 \\
 0,5 < x \leq 0,75 \\
 0,75 < x \leq 1,0
 \end{array} \right. \begin{array}{l}
 (13) \\
 (14) \\
 (15) \\
 (16)
 \end{array}$$

Os resultados obtidos pelas funções (1 a 16) foram comparados com os dados originais. O erro percentual em cada ponto de referência foi calculado, em que os quocientes de forma foram levados em consideração, e observado que ele foi inferior a 3% (embora a valor, positivo ou negativo, tenha variado).

Uma vantagem dessa abordagem em relação a outras funções de conicidade é que a solução da variável "x" como função de "y" pode ser facilmente obtida.

$$\begin{array}{l}
 \text{5 anos} \\
 \text{10 anos}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 x = a_{12} \frac{1}{\left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{16,6667}} - \frac{1}{(b)} \\
 x = 1 - a_{22} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{1,0204} \\
 x = 1 - a_{32} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{1,1111} \\
 x = 1 - a_{42} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{1,1442}
 \end{array} \right. \text{ para } \left\{ \begin{array}{l}
 1,4879 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 2,0770 \\
 1,0000 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,4879 \\
 0,5359 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,0000 \\
 0,0000 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 0,5359
 \end{array} \right. \begin{array}{l}
 (17) \\
 (18) \\
 (19) \\
 (20)
 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x = a_{12} \frac{1}{\left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{16,6667}} - \frac{1}{(b)} \\
 x = 1 - a_{22} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{1,1111} \\
 x = 1 - a_{32} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{1,1364} \\
 x = 1 - a_{42} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{1,1494}
 \end{array} \right. \text{ para } \left\{ \begin{array}{l}
 1,4404 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,9650 \\
 1,0000 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,4404 \\
 0,5434 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,0000 \\
 0,0000 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 0,5434
 \end{array} \right. \begin{array}{l}
 (21) \\
 (22) \\
 (23) \\
 (24)
 \end{array}$$

$$15 \text{ anos} \left\{ \begin{array}{l} x = a_{12} \frac{1}{\left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{20}} - \frac{1}{(b)} \\ x = 1 - a_{22} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{1,25} \\ x = 1 - a_{32} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{1,2658} \\ x = 1 - a_{42} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{1,2821} \end{array} \right. \text{ para } \left\{ \begin{array}{l} 1,3832 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,7746 \quad (25) \\ 1,0000 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,3832 \quad (26) \\ 0,5783 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,0000 \quad (27) \\ 0,0000 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 0,5783 \quad (28) \end{array} \right.$$

$$20 \text{ anos} \left\{ \begin{array}{l} x = a_{12} \frac{1}{\left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{21,7391}} - \frac{1}{(b)} \\ x = 1 - a_{22} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{1,2821} \\ x = 1 - a_{32} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{1,2987} \\ x = 1 - a_{42} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^{1,3158} \end{array} \right. \text{ para } \left\{ \begin{array}{l} 1,3720 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,7275 \quad (29) \\ 1,0000 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,3720 \quad (30) \\ 0,5864 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,0000 \quad (31) \\ 0,0000 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 0,5864 \quad (32) \end{array} \right.$$

As transformações operacionais para obtenção da altura em cada diâmetro e as transformações como função de "d" estão resumidas em (17) a (32).

As constantes transformadas resultaram em:

Para idade de até 5 anos:

$$a_{12} = \frac{a_{11}^{16,6667}}{b} = 1.952,7222; a_{22} = \frac{1}{a_{21}^{1,0204}} = 0,5; a_{32} = \frac{1}{a_{31}^{1,1111}} = 0,5; a_{42} = \frac{1}{a_{41}^{1,1442}} = 0,5104$$

Para idades de 5 a 10 anos:

$$a_{12} = \frac{a_{11}^{16,6667}}{b} = 774,9383; a_{22} = \frac{1}{a_{21}^{1,1111}} = 0,5; a_{32} = \frac{1}{a_{31}^{1,1364}} = 0,5; a_{42} = \frac{1}{a_{41}^{1,1494}} = 0,504$$

Para idades de 10 a 15 anos:

$$a_{12} = \frac{a_{11}^{20}}{b} = 959,5463; a_{22} = \frac{1}{a_{21}^{1,25}} = 0,5; a_{32} = \frac{1}{a_{31}^{1,2658}} = 0,5; a_{42} = \frac{1}{a_{41}^{1,2821}} = 0,5045$$

Para idades de 15 a 20 anos:

$$a_{12} = \frac{a_{11}^{21,7391}}{b} = 1.449,9909; a_{22} = \frac{1}{a_{21}^{1,2821}} = 0,5; a_{32} = \frac{1}{a_{31}^{1,2987}} = 0,5; a_{42} = \frac{1}{a_{41}^{1,3158}} = 0,5046$$

Usando as equações (17) a (32), foi possível obter a posição relativa no tronco "x", para um diâmetro "y" dado. Observação: para escolher a equação adequada, primeiro é preciso calcular o valor de $y/d_{0,5h}$ para o diâmetro "y" escolhido.

A curva de conicidade como função do diâmetro à altura do peito

Levando-se em conta a praticidade, as curvas de conicidade devem ser apresentadas em função do DAP. É importante ressaltar que a conversão das funções para o DAP dependerá da altura da árvore. Assim, no presente caso, como a maioria das árvores tem altura maior que 5,2 m, a conversão ocorrerá no primeiro segmento, usando as equações pertinentes a esta seção. Em árvores com altura menor que 5,2 m, a conversão ocorrerá no segundo segmento.

O diâmetro relativo à altura do peito é dado por $x = 1,3/h$, e, com a conversão no segundo segmento, tem-se:

$$5 \text{ anos de idade: } d_{1,30} = a_{11}d_{0,5h}(1 - x)^{0,98} \quad (33)$$

Para o primeiro segmento:

$$5 \text{ anos de idade: } d_{1,30} = a_{11}d_{0,5h} \left(\frac{1}{(1+bx)^{0,06}} \right) \quad (34)$$

$$10 \text{ anos de idade: } d_{1,30} = a_{11}d_{0,5h} \left(\frac{1}{(1+bx)^{0,06}} \right) \quad (35)$$

$$15 \text{ anos de idade: } d_{1,30} = a_{11}d_{0,5h} \left(\frac{1}{(1+bx)^{0,05}} \right) \quad (36)$$

$$20 \text{ anos de idade: } d_{1,30} = a_{11}d_{0,5h} \left(\frac{1}{(1+bx)^{0,046}} \right) \quad (37)$$

Conseqüentemente, para o segundo segmento tem-se:

$$5 \text{ anos de idade: } d_{0,5h} = \frac{d_{1,30} \frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,98}}}{a_{21}} \quad (38)$$

Para o primeiro segmento:

$$5 \text{ anos de idade: } d_{0,5h} = \frac{d_{1,30}(1+bx)^{0,06}}{a_{11}} \quad (39)$$

$$10 \text{ anos de idade: } d_{0,5h} = \frac{d_{1,30}(1+bx)^{0,06}}{a_{11}} \quad (40)$$

$$15 \text{ anos de idade: } d_{0,5h} = \frac{d_{1,30}(1+bx)^{0,05}}{a_{11}} \quad (41)$$

$$20 \text{ anos de idade: } d_{0,5h} = \frac{d_{1,30}(1+bx)^{0,046}}{a_{11}} \quad (42)$$

Uma vez que os diâmetros e alturas ao longo do tronco de uma determinada árvore, bem como $d_{1,30}$ e a altura total (h) são conhecidos, então as equações (38) e (39) podem ser consideradas como constantes (k), ou seja:

$$\text{Para a idade de 5 anos e 2º segmento: } k = d_{1,30} \frac{1}{\left(1 - \frac{1,3}{h}\right)^{0,98}} \quad (43)$$

$$\text{Para a idade de 5 anos e 1º segmento: } k = d_{1,30}(1 + bx)^{0,060} \quad (44)$$

$$\text{Para a idade de 10 anos e 1º segmento: } k = d_{1,30}(1 + bx)^{0,060} \quad (45)$$

$$\text{Para a idade de 15 anos e 1º segmento: } k = d_{1,30}(1 + bx)^{0,050} \quad (46)$$

$$\text{Para a idade de 20 anos e 1º segmento: } k = d_{1,30}(1 + bx)^{0,046} \quad (47)$$

A altura da árvore deve ser considerada em metros, o que garante que o diâmetro $d_{0,5h}$ seja obtido em função de $d_{1,30}$. Portanto:

$$\text{Para o 2º segmento: } d_{0,5h} = \frac{k}{a_{21}} \quad (48)$$

$$\text{Para o 1º segmento: } d_{0,5h} = \frac{k}{a_{11}} \quad (49)$$

Pela substituição de (49) em (1) a (16) tem-se:

5 anos	$\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ y = a_{13} k \frac{1}{(1+100x)^{0,06}} \\ 2^\circ y = k(1-x)^{0,98} \\ 3^\circ y = a_{33} k(1-x)^{0,9} \\ 4^\circ y = a_{43} k(1-x)^{0,874} \end{array} \right.$	para	$\left\{ \begin{array}{l} 0,0 < x \leq 0,25 \\ 0,25 < x \leq 0,5 \\ 0,5 < x \leq 0,75 \\ 0,75 < x \leq 1,0 \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} (32) \\ (33) \\ (34) \\ (35) \end{array}$
10 anos	$\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ y = a_{13} k \frac{1}{(1+100)^{0,06}} \\ 2^\circ y = k(1-x)^{0,9} \\ 3^\circ y = a_{33} k(1-x)^{0,88} \\ 4^\circ y = a_{43} k(1-x)^{0,87} \end{array} \right.$	para	$\left\{ \begin{array}{l} 0,0 < x \leq 0,25 \\ 0,25 < x \leq 0,5 \\ 0,5 < x \leq 0,75 \\ 0,75 < x \leq 1,0 \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} (36) \\ (37) \\ (38) \\ (39) \end{array}$
15 anos	$\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ y = a_{13} k \frac{1}{(1+100x)^{0,05}} \\ 2^\circ y = k(1-x)^{0,8} \\ 3^\circ y = a_{33} k(1-x)^{0,79} \\ 4^\circ y = a_{43} k(1-x)^{0,78} \end{array} \right.$	para	$\left\{ \begin{array}{l} 0,0 < x \leq 0,25 \\ 0,25 < x \leq 0,5 \\ 0,5 < x \leq 0,75 \\ 0,75 < x \leq 1,0 \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} (40) \\ (41) \\ (42) \\ (43) \end{array}$
20 anos	$\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ y = a_{13} k \frac{1}{(1+100)^{0,046}} \\ 2^\circ y = k(1-x)^{0,78} \\ 3^\circ y = a_{33} k(1-x)^{0,77} \\ 4^\circ y = a_{43} k(1-x)^{0,76} \end{array} \right.$	para	$\left\{ \begin{array}{l} 0,0 < x \leq 0,25 \\ 0,25 < x \leq 0,5 \\ 0,5 < x \leq 0,75 \\ 0,75 < x \leq 1,0 \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} (40) \\ (41) \\ (42) \\ (43) \end{array}$

As constantes resultaram em:

Para 5 anos:

$$a_{13} = \frac{a_{11}}{a_{21}} = 1,0530; a_{33} = \frac{a_{31}}{a_{21}} = 0,9461; a_{43} = \frac{a_{41}}{a_{21}} = 0,9126; k = d_{1,30}(1 + bx)^{0,06}$$

Para 10 anos:

$$a_{13} = \frac{a_{11}}{a_{21}} = 1,0530; a_{33} = \frac{a_{31}}{a_{21}} = 0,9862; a_{43} = \frac{a_{41}}{a_{21}} = 0,9727; k = d_{1,30}(1 + bx)^{0,06}$$

Para 15 anos:

$$a_{13} = \frac{a_{11}}{a_{21}} = 1,0192; a_{33} = \frac{a_{31}}{a_{21}} = 0,9931; a_{43} = \frac{a_{41}}{a_{21}} = 0,9794; k = d_{1,30}(1 + bx)^{0,05}$$

Para 20 anos:

$$a_{13} = \frac{a_{11}}{a_{21}} = 1,0061; a_{33} = \frac{a_{31}}{a_{21}} = 0,9931; a_{43} = \frac{a_{41}}{a_{21}} = 0,9794; \quad k = d_{1,30}(1 + bx)^{0,046}$$

Para se obter alturas em um determinado diâmetro, as equações (32) a (43) também podem ser resolvidas. Assim, as constantes resultaram em:

$$\begin{array}{l} \text{5 anos} \\ \text{10 anos} \\ \text{15 anos} \\ \text{20 anos} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x = a_{14} \frac{1}{\left(\frac{y}{k}\right)^{16,6667}} - \frac{1}{(b)} \\ x = 1 - \left(\frac{y}{k}\right)^{1,0000} \\ x = 1 - a_{34} \left(\frac{y}{k}\right)^{1,1111} \\ x = 1 - a_{44} \left(\frac{y}{k}\right)^{1,1442} \end{array} \right. \text{ para } \left\{ \begin{array}{l} 0,7543 \leq \frac{y}{k} \leq 1,0530 \\ 0,5070 \leq \frac{y}{k} \leq 0,7543 \\ 0,2717 \leq \frac{y}{k} \leq 0,5070 \\ 0,0000 \leq \frac{y}{k} \leq 0,2717 \end{array} \right. \begin{array}{l} (44) \\ (45) \\ (46) \\ (47) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a_{14} \frac{1}{\left(\frac{y}{k}\right)^{16,6667}} - \frac{1}{(b)} \\ x = 1 - \left(\frac{y}{k}\right)^{1,0000} \\ x = 1 - a_{34} \left(\frac{y}{k}\right)^{1,1364} \\ x = 1 - a_{44} \left(\frac{y}{k}\right)^{1,1494} \end{array} \right. \text{ para } \left\{ \begin{array}{l} 0,7719 \leq \frac{y}{k} \leq 1,0530 \\ 0,5359 \leq \frac{y}{k} \leq 0,7719 \\ 0,2912 \leq \frac{y}{k} \leq 0,5359 \\ 0,0000 \leq \frac{y}{k} \leq 0,2912 \end{array} \right. \begin{array}{l} (48) \\ (49) \\ (50) \\ (51) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a_{14} \frac{1}{\left(\frac{y}{k}\right)^{20}} - \frac{1}{(b)} \\ x = 1 - \left(\frac{y}{k}\right)^{1,0000} \\ x = 1 - a_{34} \left(\frac{y}{k}\right)^{1,2658} \\ x = 1 - a_{44} \left(\frac{y}{k}\right)^{1,2821} \end{array} \right. \text{ para } \left\{ \begin{array}{l} 0,7944 \leq \frac{y}{k} \leq 1,0192 \\ 0,5743 \leq \frac{y}{k} \leq 0,7944 \\ 0,3322 \leq \frac{y}{k} \leq 0,5743 \\ 0,0000 \leq \frac{y}{k} \leq 0,3322 \end{array} \right. \begin{array}{l} (52) \\ (53) \\ (54) \\ (55) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a_{14} \frac{1}{\left(\frac{y}{k}\right)^{21,7391}} - \frac{1}{(b)} \\ x = 1 - \left(\frac{y}{k}\right)^{1,0000} \\ x = 1 - a_{34} \left(\frac{y}{k}\right)^{1,2987} \\ x = 1 - a_{44} \left(\frac{y}{k}\right)^{1,3158} \end{array} \right. \text{ para } \left\{ \begin{array}{l} 0,7990 \leq \frac{y}{k} \leq 1,0060 \\ 0,5824 \leq \frac{y}{k} \leq 0,7990 \\ 0,3415 \leq \frac{y}{k} \leq 0,5824 \\ 0,0000 \leq \frac{y}{k} \leq 0,3415 \end{array} \right. \begin{array}{l} (52) \\ (53) \\ (54) \\ (55) \end{array}$$

As constantes resultaram em:

Para 5 anos:

$$a_{14} = \frac{a_{13}^{16,6667}}{b} = 0,0236; a_{34} = \frac{1}{a_{33}^{1,1111}} = 1,0636; a_{44} = \frac{1}{a_{43}^{1,1442}} = 1,1104$$

Para 10 anos:

$$a_{14} = \frac{a_{13}^{16,6667}}{b} = 0,0236; a_{34} = \frac{1}{a_{33}^{1,1364}} = 1,0159; a_{44} = \frac{1}{a_{43}^{1,1494}} = 1,0324$$

Para 15 anos:

$$a_{14} = \frac{a_{13}^{20}}{b} = 0,0146; a_{34} = \frac{1}{a_{33}^{1,2658}} = 1,0088; a_{44} = \frac{1}{a_{43}^{1,2821}} = 1,0270$$

Para 20 anos:

$$a_{14} = \frac{a_{13}^{21,7391}}{b} = 0,0114; a_{34} = \frac{1}{a_{33}^{1,2987}} = 1,0090; a_{44} = \frac{1}{a_{43}^{1,3158}} = 1,0277$$

As funções (44) a (55) são aplicáveis quando o valor de "k" é conhecido, o qual depende do valor do DAP e da altura de cada árvore. Assim, a variável y/k pode ser inserida nas equações.

Apêndice 2

Exemplo para obtenção do volume de árvores usando a função de Preußner.

Para uma função relativa, a integração pode ser efetuada para a variável relativa "x" no intervalo $0 \leq x \leq 1$. A variável "y" fornece d; portanto, para que a integração resulte no volume, é necessário multiplicar y por $\pi/4$ para obter a área do círculo e pela altura (h) para obter o volume do sólido (v). Por fim, "y" é elevado ao quadrado (y^2) para obter a área da seção transversal para um dado diâmetro. Assim, tem-se:

$$v = \frac{\pi}{4} h \int_0^1 y^2 dx$$

Portanto, considerando as funções para "y" (que descrevem a faixa de zero a um), para a idade de 5 anos, tem-se:

$$v = \frac{\pi}{4} h \left[\int_0^{0,25} a_{13} k^2 \frac{1}{(1 + 100x)^{0,12}} dx + \int_{0,25}^{0,50} k^2 (1 - x)^{1,96} dx + \int_{0,50}^{0,75} a_{33} k^2 (1 - x)^{1,8} dx + \int_{0,75}^{1,0} a_{43} k^2 (1 - x)^{1,748} dx \right]$$

Para idade de 10 anos:

$$v = \frac{\pi}{4} h \left[\int_0^{0,25} a_{13} k^2 \frac{1}{(1 + 100x)^{0,12}} dx + \int_{0,25}^{0,50} k^2 (1 - x)^{1,8} dx + \int_{0,50}^{0,75} a_{33} k^2 (1 - x)^{1,76} dx + \int_{0,75}^{1,0} a_{43} k^2 (1 - x)^{1,74} dx \right]$$

Para idade de 15 anos:

$$v = \frac{\pi}{4} h \left[\int_0^{0,25} a_{13} k^2 \frac{1}{(1 + 100x)^{0,1}} dx + \int_{0,25}^{0,50} k^2 (1 - x)^{1,6} dx + \int_{0,50}^{0,75} a_{33} k^2 (1 - x)^{1,58} dx + \int_{0,75}^{1,0} a_{43} k^2 (1 - x)^{1,56} dx \right]$$

Para idade de 20 anos:

$$v = \frac{\pi}{4} h \left[\int_0^{0,25} a_{13} k^2 \frac{1}{(1 + 100x)^{0,092}} dx + \int_{0,25}^{0,50} k^2 (1 - x)^{1,56} dx + \int_{0,50}^{0,75} a_{33} k^2 (1 - x)^{1,54} dx + \int_{0,75}^{1,0} a_{43} k^2 (1 - x)^{1,52} dx \right]$$

Integração para a idade de 5 anos resulta em:

$$v = \frac{\pi}{4} h k^2 \left[a_{13}^2 \frac{1}{5} 1,2664 (1+bx)^{0,7897} \Big|_0^{0,25} 0,3657 (1-x)^{2,7347} \Big|_{0,25}^{0,50} a_{33}^2 0,3449 (1-x)^{2,8992} \Big|_{0,50}^{0,75} a_{43}^2 0,3854 (1-x)^{2,5946} \Big|_{0,75}^{1,0} \right]$$

Para idade de 10 anos:

$$v = \frac{\pi}{4} h k^2 \left[a_{13}^2 \frac{1}{5} 1,1364 (1+bx)^{0,88} \Big|_0^{0,25} 0,3571 (1-x)^{2,8} \Big|_{0,25}^{0,50} a_{33}^2 0,3623 (1-x)^{2,76} \Big|_{0,50}^{0,75} a_{43}^2 0,3650 (1-x)^{2,74} \Big|_{0,75}^{1,0} \right]$$

Para idade de 15 anos:

$$v = \frac{\pi}{4} h k^2 \left[a_{13}^2 \frac{1}{b} 1,1111 (1+bx)^{0,9} \Big|_0^{0,25} 0,3846 (1-x)^{2,6} \Big|_{0,50}^{0,25} a_{33}^2 0,3876 (1-x)^{2,58} \Big|_{0,50}^{0,75} a_{43}^2 0,3906 (1-x)^{2,56} \Big|_{0,75}^{1,0} \right]$$

Para idade de 20 anos:

$$v = \frac{\pi}{4} h k^2 \left[a_{13}^2 \frac{1}{b} 1,1013 (1+bx)^{0,908} \Big|_0^{0,25} 0,3906 (1-x)^{2,56} \Big|_{0,50}^{0,25} a_{33}^2 0,3937 (1-x)^{2,54} \Big|_{0,50}^{0,75} a_{43}^2 0,3968 (1-x)^{2,52} \Big|_{0,75}^{1,0} \right]$$

Das integrais obtidas anteriormente, é possível estimar o volume total ou parcial para uma faixa desejada de um segmento do tronco. Para ilustrar a estimativa de volume, usa-se uma árvore com um diâmetro igual a 38 cm na altura do peito e uma altura total de 22,8 m. Primeiro, o valor de k é calculado como: $1,3 / 22,8 = 0,0573$. Este valor está no primeiro segmento e aplicando-o na equação tem-se:

$$k = 38 \left(1 + 100 \left(\frac{1,3}{22,9} \right) \right)^{0,046} = 41,475 \text{ cm}$$

Usando k em metros, o volume da árvore pode ser facilmente obtido:

$$v = \frac{\pi}{4} (22,9) (0,41)^2 \left[1,01^2 \frac{1}{100} 1,1 (1+100x)^{0,06} \Big|_0^{0,25} 0,39 (1-x)^{2,56} \Big|_{0,50}^{0,50} 0,99^2 0,39 (1-x)^{2,54} \Big|_{0,50}^{0,75} 0,98^2 0,39 (1-x)^{2,52} \Big|_{0,75}^{1,0} \right]$$

$$v = 3,080359 (0,203611 + 0,120792 + 0,055283 + 0,011570)$$

$$v = 3,080359(0,391256)$$

$$v = 1,205209 \text{ m}^3$$

A volume observado da árvore selecionada de *Pinus taeda* foi de 1,189460 m³ e o volume estimado foi de 1,205209 m³ (com casca).

Observe que, após a integração, pode-se calcular o volume total de qualquer árvore usando a equação resultante $v = \pi/4 k^2 h^2 (0,391256)$; em que 0,391256 é o fator de forma natural médio de Hohenadl no diâmetro de referência $d_{0,5h}$.

Para a estimativa de volume em um intervalo específico, o procedimento de cálculo da integral será o mesmo apresentado anteriormente, exceto que a integração será efetuada no intervalo definido para a variável "x" ou $x_1 \leq x \leq x_2$. Portanto, $v_{x_1 x_2} = \pi/4 h \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$. Usando a mesma árvore do exemplo anterior, o volume de madeira entre as seções de 0-25%, 25-50%, 50-75% e 75-100% da altura total pode ser calculado da seguinte maneira:

$$v_{x_0 x_{0,25}} = \frac{\pi}{4} (22,9)(0,4147518)^2 \left[1,0061^2 \frac{1}{100} 1,1013 (1 + 100x)^{0,06} \Big|_0^{0,25} \right] = 0,627194 \text{ m}^3$$

$$v_{x_{0,25} x_{0,50}} = \frac{\pi}{4} (22,9)(0,4147518)^2 \left[0,3906 (1-x)^{2,56} \Big|_{0,25}^{0,50} \right] = 0,372083 \text{ m}^3$$

$$v_{x_{0,50} x_{0,75}} = \frac{\pi}{4} (22,9)(0,4147518)^2 \left[0,9931^2 0,3937 (1-x)^{2,54} \Big|_{0,50}^{0,75} \right] = 0,170291 \text{ m}^3$$

$$v_{x_{0,75} x_{1,0}} = \frac{\pi}{4} (22,9)(0,4147518)^2 \left[0,9794^2 0,3968 (1-x)^{2,52} \Big|_{0,75}^{1,0} \right] = 0,035641 \text{ m}^3$$