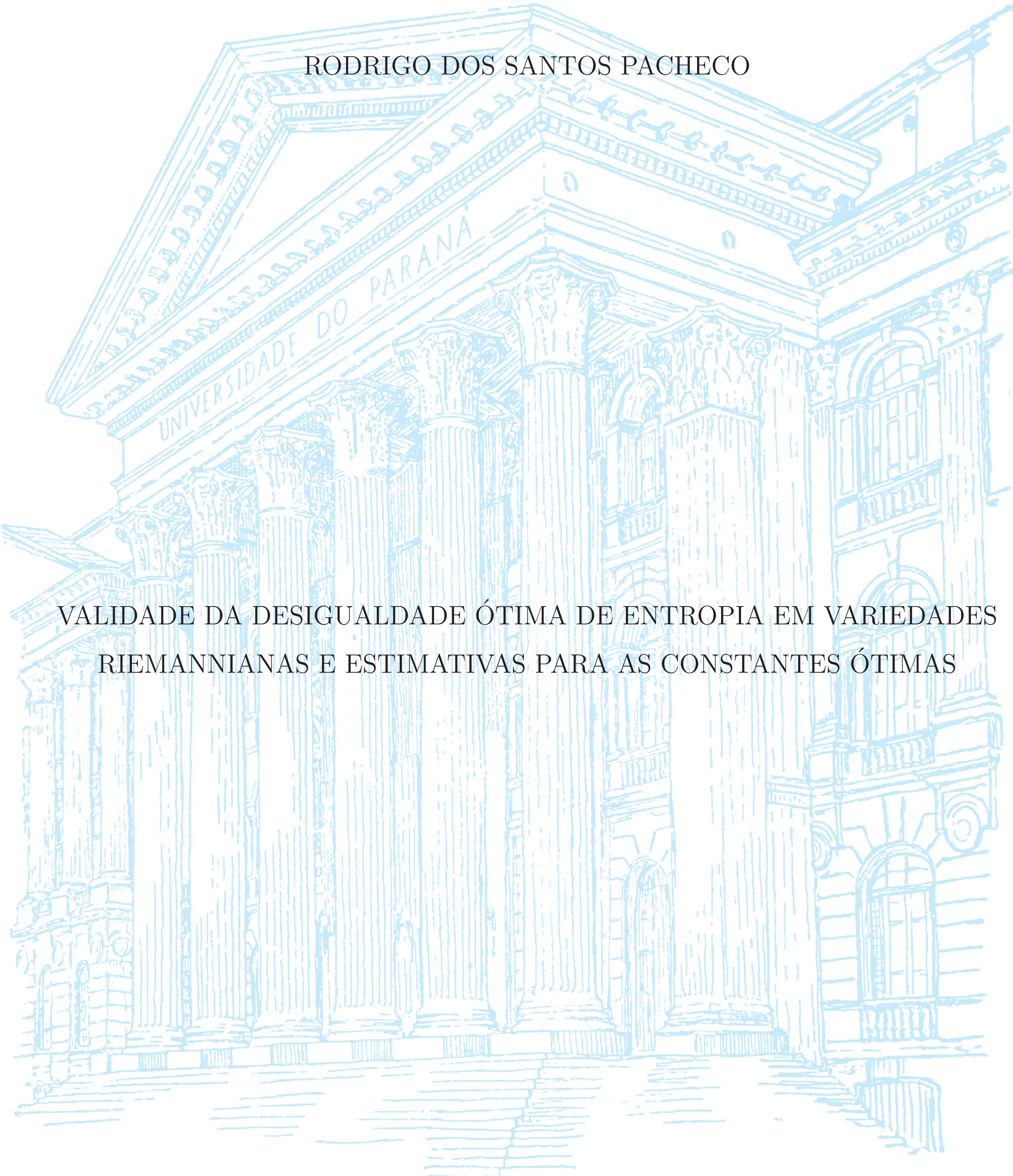
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

RODRIGO DOS SANTOS PACHECO



VALIDADE DA DESIGUALDADE ÓTIMA DE ENTROPIA EM VARIEDADES RIEMANNIANAS E ESTIMATIVAS PARA AS CONSTANTES ÓTIMAS

CURITIBA

2023

RODRIGO DOS SANTOS PACHECO

VALIDADE DA DESIGUALDADE ÓTIMA DE ENTROPIA EM VARIEDADES RIEMANNIANAS E ESTIMATIVAS PARA AS CONSTANTES ÓTIMAS

Tese de Doutorado apresentada ao curso de Pós-Graduação em Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jurandir Ceccon.

CURITIBA

2023

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Pacheco, Rodrigo dos Santos
Validade da desigualdade ótima de entropia em variedades riemannianas e estimativas para as constantes ótimas / Rodrigo dos Santos Pacheco. – Curitiba, 2023.
1 recurso on-line : PDF.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Orientador: Jurandir Ceccon

1. Teoria da decisão ótima. 2. Euclides, Elementos de. 3. Variedades riemanianas. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Ceccon, Jurandir. IV. Título.

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894

ATA Nº050

ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DOUTORADO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA

No dia dezessete de novembro de dois mil e vinte e tres às 09:00 horas, na sala virtual, Centro Politécnico da UFPR, foram instaladas as atividades pertinentes ao rito de defesa de tese do doutorando **RODRIGO DOS SANTOS PACHECO**, intitulada**: VALIDADE DA DESIGUALDADE ÓTIMA DE ENTROPIA EM VARIEDADES RIEMANNIANAS E ESTIMATIVAS PARA AS CONSTANTES ÓTIMAS**, sob orientação do Prof. Dr. JURANDIR CECCON. A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: JURANDIR CECCON (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ), OLIMPIO HIROSHI (UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS), MARCOS DA SILVA MONTENEGRO (UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS), HIGIDIO PORTILLO OQUENDO (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ), CARLOS EDUARDO DURAN FERNANDEZ (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ). A presidência iniciou os ritos definidos pelo Colegiado do Programa e, após exarados os pareceres dos membros do comitê examinador e da respectiva contra argumentação, ocorreu a leitura do parecer final da banca examinadora, que decidiu pela APROVAÇÃO. Este resultado deverá ser homologado pelo Colegiado do programa, mediante o atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca dentro dos prazos regimentais definidos pelo programa. A outorga de título de doutor está condicionada ao atendimento de todos os requisitos e prazos determinados no regimento do Programa de Pós-Graduação. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, JURANDIR CECCON, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos demais membros da Comissão Examinadora.

CURITIBA, 17 de Novembro de 2023.

Assinatura Eletrônica
17/11/2023 15:05:34.0
JURANDIR CECCON
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
17/11/2023 20:49:37.0
OLIMPIO HIROSHI
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS)

Assinatura Eletrônica
17/11/2023 15:36:23.0
MARCOS DA SILVA MONTENEGRO
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS)

Assinatura Eletrônica
17/11/2023 13:50:56.0
HIGIDIO PORTILLO OQUENDO
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
20/11/2023 18:59:24.0
CARLOS EDUARDO DURAN FERNANDEZ
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA -
40001016041P1

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **RODRIGO DOS SANTOS PACHECO** intitulada: **VALIDADE DA DESIGUALDADE ÓTIMA DE ENTROPIA EM VARIEDADES RIEMANNIANAS E ESTIMATIVAS PARA AS CONSTANTES ÓTIMAS**, sob orientação do Prof. Dr. JURANDIR CECCON, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 17 de Novembro de 2023.

Assinatura Eletrônica
17/11/2023 15:05:34.0
JURANDIR CECCON
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
17/11/2023 20:49:37.0
OLIMPIO HIROSHI
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS)

Assinatura Eletrônica
17/11/2023 15:36:23.0
MARCOS DA SILVA MONTENEGRO
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS)

Assinatura Eletrônica
17/11/2023 13:50:56.0
HIGIDIO PORTILLO OQUENDO
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
20/11/2023 18:59:24.0
CARLOS EDUARDO DURAN FERNANDEZ
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Dedico este trabalho ao meus pais, Horizonte e Nilda, ao meu irmão, Arthur e ao meu grande amor, Ingrid.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho só pode ser desenvolvido graças ao apoio de muitas pessoas que surgiram em minha vida e que não poderia deixar de mencioná-las aqui.

Primeiramente a Deus, que me abençoa a ilumina meu caminho.

Aos meus pais, Horizonte e Nilda, que sempre me apoiaram e possibilitaram que eu pudesse chegar até aqui.

Ao meu irmão e melhor amigo, Arthur, que sempre esteve comigo para dar suporte e abrigo.

Ao amor da minha vida, Ingrid, que foi a maior sorte que Deus pode me proporcionar. Vir para Curitiba já valeu a pena só por termos nos encontrado.

Aos meus amigos de Santa Maria - Pedro e Aline, Michel e Thais - e Rosário - Coxa, Lukinhas e, principalmente, Anderson e Lucas - que mesmo com a distância física sempre estiveram presentes. Aos amigos que fiz em Curitiba - Fábio, Beatriz, Pablo, Gustavo e Júnior - pelo companheirismo nesta fase.

À dona Rosa e ao Savinho, minha família de Aracaju/Curitiba, que me acolheram tão bem e torcem sempre pelo meu crescimento.

Ao meu orientador, prof. Dr. Jurandir Ceccon, grande exemplo de orientador e pai, paciente, bondoso e tranquilo como desejo ser um dia.

Ao meu orientador de graduação, prof. Dr. Juliano Damião, também um grande exemplo de orientador, professor e amigo.

À coordenação do curso de Pós-Graduação em Matemática da UFPR por toda a paciência que tiveram, principalmente nas qualificações no período de pandemia.

Aos membro da banca por aceitarem o convite em avaliar este trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

"- Eu sei tudo sobre a entropia, disse Adell, mantendo a sua dignidade.

- Duvido que saiba.

- Eu sei tanto quanto você.

- Então você sabe que um dia tudo terá um fim.

- Está certo. E quem disse que não terá?"

A Última Pergunta - Isaac Asimov

RESUMO

Dados $1 < r \leq p < n$ e $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = 1$, consideremos a desigualdade Euclidiana de r-entropia

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r \log |u|^r \, dx \leq \frac{nr}{np - nr + pr} \log \left(A \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx \right), \tag{1}$$

onde A é uma constante positiva. Considere a constante ótima Euclidiana da desigualdade de r-entropia

$$A_e(p,r) = \inf\{A \in \mathbb{R};\ (1) \text{ é valida}\}.$$

Disto, obtemos a desigualdade ótima Euclidiana de r-entropia

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r \log |u|^r \, dx \leq \frac{nr}{np - nr + pr} \log \left(A_e(p,r) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx \right). \tag{2}$$

Consideremos agora (M,g) uma variedade Riemanniana compacta, suave, sem bordo e de dimensão $n \geq 2$ e a desigualdade Riemanniana de r-entropia

$$Ent_{dv_g}(|u|^r) \leq C \log \left(A \left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right), \tag{3}$$

onde $u \in H^{1,p}(M)$ é tal que $\|u\|_{L^r(M)} = 1$, os parâmetros $1 < r \leq p < n$ e $1 \leq \tau \leq \min\{2, p\}$ e A, B são constantes positivas,

$$Ent_{dv_g}(|u|^r) = \int_M |u|^r \log |u|^r \, dv_g \text{ e } C = C(n,p,r,\tau) = \frac{npr}{\tau(r(p-n)+np)}.$$

Definimos a primeira constante ótima Riemanniana de r-entropia

$$A_{ent} = \inf\{A \in \mathbb{R};\ \text{existe } B \in \mathbb{R} \text{ tal que } (3) \text{ é valida}\}.$$

Mostramos que é válida a primeira desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia

$$Ent_{dv_g}(|u|^r) \leq C \log \left(A_{ent} \left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right), \tag{4}$$

além disto, A_{ent} não depende da métrica g da variedade Riemanniana M e vale

$$A_{ent} = A_e(p,r)^{\frac{\tau}{p}}.$$

A partir de (4), podemos considerar a segunda constante ótima Riemanniana de r-entropia

$$B_{ent} = \inf\{B \in \mathbb{R};\ (4) \text{ é valida}\}.$$

É imediato da definição acima que vale a segunda desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia,

$$Ent_{dv_g}(|u|^r) \leq C \log \left(A_{ent} \left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B_{ent} \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right), \tag{5}$$

e esta é a melhor desigualdade, no sentido que não podemos diminuir as constantes A e B em (3). As funções $u \in H^{1,p}(M)$ tais que $\|u\|_{L^r(M)} = 1$ que fazem valer a igualdade em (5) são ditas funções extremais da desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia. Caso $1 \leq \tau < \min\{2,p\}$ ou $\tau = p < 2$, então a segunda desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia admite função extremal e caso $\tau = 2$ obtemos a seguinte limitação por baixo para a segunda constante ótima

$$\sup_{x\in M} \frac{Scal_g(x)}{6n} A_{ent} \frac{I_2^{\frac{\tau}{p}}}{I_3^{\frac{\tau}{p}}} \frac{\tau}{p} \left(\frac{p-n}{n} J_1 + \frac{J_2}{I_2} - \frac{n(p-r)+pr}{nr} J_3 \right) \leq B_{ent},$$

onde $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ é uma função extremal para (2) - que demonstramos que pode ser escolhida como radial e no caso $1 < r < p < n$ com suporte compacto - e os termos da desigualdade acima são as integrais

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^r \log \varphi^r \, dx,\ I_2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^p \, dx,\ I_3 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^p \, dx,$$

e

$$J_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^r |x|^2 \, dx,\ J_2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^p |x|^2 \, dx,\ J_3 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^r \log \varphi^r |x|^2 \, dx.$$

Por fim, demonstramos que para o caso $\tau = 2$ valem das duas uma: ou (5) possuí função extremal; ou existe $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ função extremal de (2) tal que

$$B_{ent} = \sup_{x\in M} \frac{Scal_g(x)}{6n} A_{ent} \frac{I_2^{\frac{\tau}{p}}}{I_3^{\frac{\tau}{p}}} \frac{\tau}{p} \left(\frac{p-n}{n} J_1 + \frac{J_2}{I_2} - \frac{n(p-r)+pr}{nr} J_3 \right).$$

Palavras-chave: constantes ótimas. desigualdades ótimas. desigualdade de entropia. desigualdade logaritmica de Sobolev.

ABSTRACT

Given $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ and $1 < r \leq p < n$ such that $\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = 1$, consider the Euclidean inequality of r-entropy

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r \log |u|^r \, dx \leq \frac{nr}{np - nr + pr} \log \left(A \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx \right), \tag{6}$$

where A is a positive constant. Also, the Euclidean optimal constant of the r-entropy inequality

$$A_e(p,r) = \inf\{A \in \mathbb{R};\ (6) \text{ is valid}\}.$$

From this, we obtain the optimal Euclidean inequality of r-entropy

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r \log |u|^r \, dx \leq \frac{nr}{np - nr + pr} \log \left(A_e(p,r) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx \right). \tag{7}$$

Let us also consider (M,g) a compact, smooth, without boundary Riemannian manifold of dimension $n \geq 2$ and the Riemannian inequality of r-entropy

$$Ent_{dv_g}(|u|^r) \leq C \log \left(A \left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right), \tag{8}$$

where

$$Ent_{dv_g}(|u|^r) = \int_M |u|^r \log |u|^r \, dv_g \text{ and } C = C(n,p,r,\tau) = \frac{npr}{\tau(r(p-n) + np)},$$

$u \in H^{1,p}(M)$ is such that $\|u\|_{L^r(M)} = 1$, the parameters $1 < r \leq p < n$, $1 \leq \tau \leq \min\{2, p\}$ and A and B are positive constants. We define the first optimal Riemannian constant of r-entropy

$$A_{ent} = \inf\{A \in \mathbb{R};\ \text{exists } B \in \mathbb{R} \text{ such that } (8) \text{ is valid}\}.$$

We show that the first optimal Riemannian inequality of r-entropy is valid

$$Ent_{dv_g}(|u|^r) \leq C \log \left(A_{ent} \left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right), \tag{9}$$

and A_{ent} does not depend on the metric g of the Riemannian manifold M and

$$A_{ent} = A_e(p,r)^{\frac{\tau}{p}}$$

holds. From (9), we can consider the second optimal Riemannian constant of r-entropy

$$B_{ent} = \inf\{B \in \mathbb{R};\ (9) \text{ is valid}\}.$$

It is immediate from the above definition that the second optimal Riemannian inequality of r-entropy holds,

$$Ent_{dv_g}(|u|^r) \leq C \log\left(A_{ent}\left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} + B_{ent}\left(\int_M |u|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}\right), \tag{10}$$

and this is the best inequality, in the sense that we cannot decrease the constants A and B in (8). The functions $u \in H^{1,p}(M)$ such that $\|u\|_{L^r(M)} = 1$ which attain equality in (10) are called extremal functions for Riemannian optimal r-entropy inequality. If $1 \leq \tau < \min\{2, p\}$ or $\tau = p < 2$, then the second Riemannian optimal inequality of r-entropy admits an extremal function and in the case $\tau = 2$ we obtain the following constraint from below for the second optimal constant

$$\sup_{x\in M} \frac{Scal_g(x)}{6n} A_{ent} \frac{I_2^{\frac{\tau}{p}}}{I_3^{\frac{\tau}{p}}} \frac{\tau}{p}\left(\frac{p-n}{n} J_1 + \frac{J_2}{I_2} - \frac{n(p-r)+pr}{nr} J_3\right) \leq B_{ent},$$

where $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ is an extremal function for (7) - which we demonstrated that it can be chosen as radial and in the case $1 < r < p < n$ with compact support -, and the integral terms

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^r \log \varphi^r \, dx,\ I_2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^p \, dx,\ I_3 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^p \, dx,$$

and

$$J_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^r |x|^2 \, dx,\ J_2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^p |x|^2 \, dx,\ J_3 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^r \log \varphi^r |x|^2 \, dx.$$

Finally, we demonstrate that for the case $\tau = 2$, the following alternativs holds: Either (10) has an extremal function; or exists $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ extremal function for (7) such that

$$B_{ent} = \sup_{x\in M} \frac{Scal_g(x)}{6n} A_{ent} \frac{I_2^{\frac{\tau}{p}}}{I_3^{\frac{\tau}{p}}} \frac{\tau}{p}\left(\frac{p-n}{n} J_1 + \frac{J_2}{I_2} - \frac{n(p-r)+pr}{nr} J_3\right).$$

Keywords: optimal constants. optimal inequalities. entropy inequality. logarithmic Sobolev inequality.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O estudo de constantes ótimas em variedades Riemannianas tem sido vasto objeto de estudo nos últimos anos e possuí raízes nos estudos destas desigualdades no espaço $\mathbb{R}^n$. Fazendo um breve apanhado histórico, no ano de 1938, Sobolev [37] provou que para $1 \leq p < n$ existe uma constante positiva $A = A(n,p) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq A \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{11}$$

para toda função $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, onde $p^* = \frac{np}{n-p}$ é o expoente crítico de Sobolev. Esta desigualdade motivou o estudo da melhor constante $A \in \mathbb{R}$, isto é, a menor das constantes que vale (11). Tal constante é dita constante ótima Euclideana da desigualdade de Sobolev e pode ser definida por

$$K^{-1}(n,p) = \inf_{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \{\|\nabla u\|_p;\ \|u\|_{p^*} = 1\}.$$

Esta constante foi estudada por Aubin [4] e Talenti [38] em 1976 e foi determinada por

$$K(n,p) = \begin{cases} \dfrac{p-1}{n-p}\left(\dfrac{n-p}{n(p-1)}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\dfrac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{n}{p})\Gamma(n+1-\frac{n}{p})\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}, & \text{se } 1 < p < n, \\ \frac{1}{n}\left(\frac{n}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}, & \text{se } p = 1, \end{cases}$$

onde ω_{n-1} é o volume da esfera unitária $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ e Γ é a função gama de Euler

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\, dx.$$

Da definição de $K(n,p)$, podemos considerar a desigualdade ótima Euclideana de Sobolev

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq K(n,p) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{12}$$

Nesses mesmos trabalhos determinou-se ainda as funções que fazem valer a igualdade em (12). Tais funções denominamos funções extremais da desigualdade ótima Euclideana de Sobolev e estas foram caracterizadas como

$$u(x) = \lambda v(\beta(x - x_0)),$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e

$$v(x) = \left(\sigma + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{-\frac{n}{p^*}},$$

onde $\sigma > 0$ é escolhido tal que $\|v\|_{p^*} = 1$.

A partir da desigualdade de Sobolev combinada com a desigualdade de interpolação, podemos obter a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, que aparece pela primeira vez nos trabalhos de Gagliardo [24] em 1958 e aprimorada por Nirenberg [31] em 1959, definida por

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r \, dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq A \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{\theta}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q \, dx\right)^{\frac{1-\theta}{q}},$$

onde $u \in D^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ (veja a página 27 para mais detalhes), $1 \leq q < r \leq p$ e $\theta = \frac{np(r-q)}{r(q(p-n)+np)} \in (0,1)$ é o expoente interpolador. Definimos a constante ótima da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

$$A_e(p,q,r)^{-1} = \inf_{u \in D^{p,q}(\mathbb{R}^n)} \{\|\nabla u\|_p^{\theta} \|u\|_q^{1-\theta};\ \|u\|_r = 1\},$$

e podemos considerar a desigualdade ótima Euclideana de Gagliardo-Nirenberg

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r \, dx\right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq A_e(p,q,r) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q \, dx\right)^{\frac{p(1-\theta)}{q\theta}}. \tag{13}$$

Às funções $u \in D^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ que cumprem a igualdade em (13) chamamos de funções extremais da desigualdade ótima Euclideana de Gagliardo-Nirenberg.

Observamos que quando $q = \frac{p(n-1)}{n-p}$ e $r = \frac{np}{n-p}$, temos $\theta = 1$ e retornamos à desigualdade Euclideana de Sobolev. Por isto e pela definição das constantes ótimas, temos que $K(n,p) \leq A_e\left(p, \frac{p(n-1)}{n-p}, \frac{np}{n-p}\right)$.

Uma consequência importante da desigualdade Euclideana de Gagliardo-Nirenberg é a desigualdade de Sobolev logaritmica ótima, também conhecida como desigualdade ótima Euclideana de p-entropia. No mesmo sentido que em Bakry et al [6], utilizando uma família de desigualdades ótimas de Gagliardo-Nirenberg, Del Pino e Doubeault [33] em 2003 obtiveram, ao fazer $q \to p^-$, a desigualdade logaritmica de Sobolev

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \log |u|^p \, dx \leq \frac{n}{p} \log \left(A \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx \right), \tag{14}$$

onde $n \geq 2$, $p \geq 1$ e denotamos log pelo logaritmo natural. Considerando a melhor constante Euclidiana da desigualdade de p-entropia

$$A_0(n,p) = \inf\{A \in \mathbb{R};\ (14) \text{ é válida}\},$$

obtemos a desigualdade ótima Euclidiana de p-entropia

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \log |u|^p \, dx \leq \frac{n}{p} \log \left(A_0(n,p) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx \right). \tag{15}$$

Em 1975, Gross [27] relacionou a desigualdade de p-entropia para $p = 2$ com geradores de semigrupos, utilizando a medida de probabilidade gaussiana ν, onde $f \in L^2(\nu)$, dx é a medida de Lebesgue, $d\nu = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \log |f(x)| \, d\nu(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^2 \, d\nu(x) + \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \log \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Em 1978, Weissler [41] apresentou uma versão equivalente à apresentada por Gross e após isto Carlen [13] mostrou que as funções extremais desta são dilatações ou translações de

$$u(x) = \pi^{-\frac{n}{2}} e^{-|x|^2}.$$

Para o caso $p = 1$, Ledoux [29] provou (15) e Beckner [7] classificou como as funções extremais como funções caracteristicas normalizadas em bolas. Neste mesmo trabalho, provou-se a validade de (15) para $1 < p < n$.

Del Pino e Doubeault em [33] investigaram as funções extremais - aquelas cuja norma em $L^p(\mathbb{R}^n)$ é igual a 1 e que valem a igualdade em (15) - e as classificaram por

$$u_0(x) = \pi^{-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{n(p-1)}{p} + 1\right)} e^{-|x|^{\frac{p}{p-1}}}.$$

Utilizando técnicas de transporte de massa, Gentil [26] estabeleceu a validade da desigualdade ótima Euclidiana de p-entropia (15) e estendeu a existência das funções extremais para $p \geq n$. Em resumo, para $p > 1$,

$$A_0(n,p) = \frac{p}{n}\left(\frac{p-1}{e}\right)^{p-1}\pi^{-\frac{p}{2}}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n(p-1)}{p}+1\right)}\right)^{\frac{p}{n}}.$$

Consideraremos uma versão mais geral de (14). Para toda função $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r \log |u|^r \, dx \leq \frac{nr}{np - nr + pr} \log\left(A \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx\right), \tag{16}$$

onde $1 < r \leq p < n$. Como anteriormente, podemos considerar a constante ótima Euclideana de r-entropia

$$A_e(p,r) = \inf\{A \in \mathbb{R};\ (16) \text{ é válida}\},$$

e obtemos a desigualdade ótima Euclideana de r-entropia

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r \log |u|^r \, dx \leq \frac{nr}{np - nr + pr} \log\left(A_e(p,r) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx\right). \tag{17}$$

Arrumando os termos da desigualdade ótima Euclideana de Gagliardo-Nirenberg e tomando $q \to r^-$ no mesmo sentido que em [6], obtemos para toda função $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = 1$, a desigualdade ótima (17). Estas contas estão detalhadas no Capítulo 1.

Observamos que a desigualdade em (16) generaliza a desigualdade de p-entropia (14), pois a mesma é o caso particular quando $p = r$.

Vejamos o cenário Riemanniano. Seja (M,g) uma variedade Riemanniana compacta e suave de dimensão $n \geq 2$. Para $p \geq 1$, definimos o espaço de Sobolev $H^{1,p}(M)$ como o fecho de $C^\infty(M)$ com respeito a norma

$$\|u\|_{H^{1,p}(M)} = \|\nabla_g u\|_{L^p(M)} + \|u\|_{L^p(M)},$$

onde ∇_g é o operador gradiente de u com respeito a métrica g e $\|\cdot\|_{L^p(M)}$ é a norma padrão em $L^p(M)$. Pelo mergulho do espaço de Sobolev $H^{1,p}(M) \hookrightarrow L^{p^*}(M)$ [18], a desigualdade

Riemanniana de Sobolev afirma que para cada $1 \leq p < n$, existem constantes positivas A e B tais que, para cada $u \in H^{1,p}(M)$,

$$\left(\int_M |u|^{p^*}\, dv_g\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq A\left(\int_M |\nabla_g u|^p\, dv_g\right)^{\frac{1}{p}} + B\left(\int_M |u|^p\, dv_g\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{18}$$

onde dv_g é o elemento de volume Riemanniano com respeito a métrica g. De forma equivalente, podemos considerar a desigualdade Riemanniana de Sobolev como

$$\left(\int_M |u|^{p^*}\, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A\int_M |\nabla_g u|^p\, dv_g + B\int_M |u|^p\, dv_g. \tag{19}$$

Definindo os conjuntos

$$\mathscr{A}_p(M) = \{A \in \mathbb{R};\ \text{existe } B \in \mathbb{R} \text{ onde (19) é válida}\},$$

e

$$\mathscr{B}_p(M) = \{B \in \mathbb{R};\ \text{existe } A \in \mathbb{R} \text{ onde (19) é válida}\},$$

Observe que se $A \in \mathscr{A}_p(M)$ e se $A' > A$, então $A' \in \mathscr{A}_p(M)$. De forma análoga, se $B \in \mathscr{B}_p(M)$ e se $B' > B$, então $B' \in \mathscr{B}_p(M)$. Disto, o conjunto das constantes que podemos considerar na desigualdade Riemanniana de Sobolev é ilimitado a direita, e assim, os números interessantes nesses conjuntos são os extremos à esquerda

$$\alpha_p(M) = \inf \mathscr{A}_p(M),$$

e

$$\beta_p(M) = \inf \mathscr{B}_p(M).$$

Diferentemente da versão Euclidiana, a desigualdade Riemanniana de Sobolev possui duas melhores constantes. Neste caso, $\alpha_p(M)$ e $\beta_p(M)$ são as melhores constantes para (19) e dizemos que $\alpha_p(M)$ é a primeira melhor constante nessa desigualdade e $\beta_p(M)$ é a segunda melhor constante. Além disto, mostra-se que se $\alpha_p(M)$ ($\beta_p(M)$) é a primeira (segunda) constante ótima de (18), então $\alpha_p(M)^p$ ($\beta_p(M)^p$) é a primeira (segunda) constante ótima de (19).

Dizer que (19) assume a melhor forma com respeito a primeira constante significa que existem $B \in \mathbb{R}$ tal que, para cada $u \in H^{1,p}(M)$,

$$\left(\int_M |u|^{p^*}\, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \alpha_p(M)^p \int_M |\nabla_g u|^p\, dv_g + B \int_M |u|^p\, dv_g. \tag{20}$$

Afirmar a desigualdade acima é equivalente à dizer que $\alpha_p(M) \in \mathscr{A}_p(M)$. De maneira análoga, dizer que a melhor forma de (19) é válida - ou que $\beta_p(M) \in \mathscr{B}_p(M)$ - significa que existe $A \in \mathbb{R}$ tal que, para cada $u \in H^{1,p}(M)$,

$$\left(\int_M |u|^{p^*}\, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A \int_M |\nabla_g u|^p\, dv_g + \beta_p(M)^p \int_M |u|^p\, dv_g. \tag{21}$$

O programa AB, cujos detalhes podem serem encontrados em [28], possui duas partes e visa cumprir o estudo de constantes ótimas ao responder as seguintes questões:

Programa AB, parte 1

1. Qual é o valor exato de $\alpha_p(M)$? De forma paralela, qual é o valor exato de $\beta_p(M)$?
2. $\mathscr{A}_p(M)$ é um conjunto fechado, ou equivalente, (20) é válido? De forma análoga, $\mathscr{B}_p(M)$ é um conjunto fechado, ou equivalente, (21) é válido?

A segunda parte do programa AB corresponde a responder se as desigualdades ótimas possuem funções extremais. Suponhamos que (20) e (21) sejam válidas e definimos

$$A_0(g) = \inf\{A \in \mathbb{R};\ (20) \text{ é válida}\},$$

e

$$B_0(g) = \inf\{B \in \mathbb{R};\ (21) \text{ é válida}\}.$$

Neste caso, é imediato das definições acima que valem as respectivas desigualdades

$$\left(\int_M |u|^{p^*}\, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \alpha_p(M)^p \int_M |\nabla_g u|^p\, dv_g + B_0(g) \int_M |u|^p\, dv_g, \tag{22}$$

e

$$\left(\int_M |u|^{p^*}\, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A_0(g) \int_M |\nabla_g u|^p\, dv_g + \beta_p(M)^p \int_M |u|^p\, dv_g. \tag{23}$$

Essas duas desigualdades são ótimas em um sentido mais forte que as respectivas anteriores, pois as constantes envolvidas nas desigualdades não podem serem reduzidas.

Uma função $u \in H^{1,p}(M)$ não nula é dita uma função extremal para a desigualdade Riemanniana de Sobolev (22) (analogamente para a desigualdade (23)) se ela realiza a igualdade em (22). Duas questões mais surgem no programa AB

Programa AB, parte 2

1. Podemos computar ou ter estimativas para $B_0(g)$? Analogamente, podemos computar ou ter estimativas para $A_0(g)$?

2. (22) possuí função extremal? Paralelamente, (23) possuí função extremal?

Ainda, pode-se discutir em quais variedades tem-se $B_0(g) = \beta_p(M)^p$ e $A_0(g) = \alpha_p(M)^p$.

No contexto Riemanniano, o estudo de constantes ótimas teve importância na resolução do problema de Yamabe [42]. Considere M uma variedade Riemanniana compacta e suave de dimensão $n \geq 3$. Como podemos considerar varias métricas Riemannianas na mesma variedade M e por cada métrica g definir, no espaço tangente em cada ponto $p \in M$, um produto interno entre dois vetores, podemos definir ângulo entre dois vetores quaisquer X, Y do espaço tangente T_pM por

$$\cos(\theta) = \frac{g(X,Y)}{\sqrt{g(X,X)g(Y,Y)}}.$$

Sejam duas métricas g e $\tilde{g}$ em M. Se o ângulo entre dois vetores com respeito à g e $\tilde{g}$ forem sempre iguais em cada ponto da variedade, dizemos que g e $\tilde{g}$ são conformes a cada uma. Chamamos à mudança de métrica $g \to \tilde{g}$ de uma mudança conforme da métrica Riemanniana.

Lembramos que a classe conforme de g é definida por

$$[g] = \{\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g;\ u \in C^{\infty}(M),\ u > 0\}.$$

O objetivo de Yamabe [42] era demonstrar que, a menos de uma mudança conforme da métrica, sempre existe uma métrica com curvatura escalar constante. Neste sentido, Aubin [4] mostrou que uma reformulação do problema de Yamabe era provar que, para qualquer variedade Riemanniana compacta e suave (M, g) de dimensão $n \geq 3$, se g e $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ são métricas conformes, as curvaturas escalares $Scal_g$ e $Scal_{\tilde{g}}$ de g e $\tilde{g}$, respectivamente, satisfazem a equação diferencial

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g u + Scal_g u = Scal_{\tilde{g}} u^{2^*-1},$$

onde $\Delta_g u = -div_g(\nabla_g u)$ é o operador Laplaciano de u com respeito a métrica g e $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$. Desta forma, uma formulação equivalente do problema de Yamabe era mostrar que existem $u \in C^\infty(M)$, $u > 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que

$$\Delta_g u + \frac{n+2}{4(n-1)} Scal_g(u) = \lambda u^{2^*-1}, \tag{24}$$

Neste caso, as constantes ótimas da desigualdade Riemanniana de Sobolev para $p = 2$

$$\left(\int_M |u|^{2^*} \, dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \alpha_2(M)^2 \int_M |\nabla_g u|^2 \, dv_g + B_0(2) \int_M |u|^2 \, dv_g,$$

são tais que $\alpha_2(M)$ está relacionada com a existência de soluções de (24) e a segunda constante ótima $B_0(g)$ com a multiplicidade de soluções de (24).

Combinando a desigualdade Riemanniana de Sobolev com a desigualdade de interpolação, obtemos a desigualdade Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg. Esta garante que se $u \in H^{1,p}(M)$ e os parâmetros $1 \leq q < r \leq p < n$ e $1 \leq \tau \leq \min\{2, p\}$, existem constantes $A, B \in \mathbb{R}$ tais que

$$\left(\int_M |u|^r \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{r\theta}} \leq \left[A\left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} + B\left(\int_M |u|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}\right] \times$$
$$\times \left(\int_M |u|^q \, dv_g\right)^{\frac{\tau(1-\theta)}{q\theta}}, \tag{25}$$

onde $\theta = \frac{np(r-q)}{r(q(p-n)+np)} \in (0,1)$ provém do expoente interpolador. No sentido do programa AB, considere

$$A(p,q,r) = \inf\{A \in \mathbb{R};\ (25) \text{ é válida}\}.$$

Em [14], Ceccon e Durán demonstraram que existe $B \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left(\int_M |u|^r \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{r\theta}} \leq \left[A(p,q,r)\left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} + B\left(\int_M |u|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}\right] \times$$

$$\times \left(\int_M |u|^q \, dv_g \right)^{\frac{\tau(1-\theta)}{q\theta}}. \tag{26}$$

Consequentemente, podemos considerar

$$B(p,q,r) = \inf\{B \in \mathbb{R};\ (26) \text{ é válida}\},$$

e, da definição acima, vale a segunda desigualdade ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg

$$\left(\int_M |u|^r \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{r\theta}} \leq \left[A(p,q,r) \left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B(p,q,r) \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right] \times$$

$$\times \left(\int_M |u|^q \, dv_g \right)^{\frac{\tau(1-\theta)}{q\theta}}. \tag{27}$$

Nesta tese, estudaremos um caso limite da segunda desigualdade ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg. Seja (M,g) uma variedade Riemanniana compacta, suave, sem bordo e de dimensão $n \geq 2$. Dado $u \in H^{1,p}(M)$ tal que $\|u\|_{L^r(M)} = 1$, a desigualdade Riemanniana de r-entropia afirma que existem $A, B \in \mathbb{R}$ tais que

$$Ent_{dv_g}(|u|^r) \leq \frac{npr}{\tau(r(p-n)+np)} \log\left(A \left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right), \tag{28}$$

onde

$$Ent_{dv_g}(|u|^r) := \int_M |u|^r \log |u|^r \, dv_g.$$

A desigualdade de entropia surge naturalmente em áreas como Análise Real, Análise Complexa, Análise Geométrica, Geometria Convexa, Probabilidade, entre outras. Graças ao trabalho vanguardista de Gross [27], em um trabalho na teoria Quântica de Campos, apresentou-se a equivalência entre uma classe de desigualdades de entropia e hipercontratividade do semigrupo do calor.

Citamos aqui como aplicações da desigualdade de entropia com respeito a medida de probabilidade Gaussiana o trabalho de Perelman [32], na teoria do fluxo de Ricci; Talagrand [32], na teoria do Transporte ótimo; Análise de Wiener [40], no Cálculo das Variações; teoria da informação e os trabalhos de Ledoux [29], [30], sobre concentração de medida.

Definimos a primeira constante ótima Riemanniana de r-entropia

$$A_{ent} = \inf\{A \in \mathbb{R};\ (28) \text{ é válida}\}.$$

Ainda, a primeira desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia afirma que existe $B \in \mathbb{R}$ tal que, para toda $u \in H^{1,p}(M)$ com $\|u\|_{L^r(M)} = 1$, tal que

$$Ent_{dv_g}(|u|^r) \leq$$

$$\leq \frac{npr}{\tau(r(p-n)+np)} \log\left(A_{ent} \left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right). \tag{29}$$

Provaremos a validade da primeira desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia, estendendo o que já foi demonstrado por Alves [2] para o caso $\tau = p$ e $1 < r \leq p \leq 2$. Para tal, utilizaremos que como a desigualdade ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg vale para todo $q < r$, consideraremos a família de desigualdades ótimas Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg

$$\left(\int_M |u|^r \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{r\theta_k}} \leq \left[A(p, q_k, r) \left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B(p, q_k, r) \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right] \times$$

$$\times \left(\int_M |u|^{q_k} \, dv_g \right)^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}}, \tag{30}$$

para toda função $u \in H^{1,p}(M)$ e $1 \leq q_k < r \leq p < n$, $q_k = r - \frac{1}{k}$, $1 \leq \tau \leq \min\{2, p\}$, $A(p, q_k, r)$ é a primeira constante ótima desta desigualdade e $B(p, q_k, r)$ a segunda constante ótima. Como em [6], iremos derivar a desigualdade Riemanniana de entropia (28) como um caso limite da desigualdade acima quando $k \to \infty$ e apresentaremos esta ideia no que segue.

Fazendo um rearranjo dos termos da família de desigualdades ótimas Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg (30), obtemos

$$\frac{\tau}{\theta_k} \log\left(\frac{\|u\|_{L^r(M)}}{\|u\|_{L^{q_k}(M)}} \right) \leq \log\left(\frac{A(p, q_k, r)\|\nabla_g u\|^{\tau}_{L^p(M)} + B(p, q_k, r)\|u\|^{\tau}_{L^p(M)}}{\|u\|^{\tau}_{L^{q_k}(M)}} \right).$$

Ao tomarmos $k \to \infty$ na desigualdade acima, estamos fazendo $q_k \to r^-$. Nisto, a validade da desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia estará dividida em três passos, sendo o primeiro provar que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\tau}{\theta_k} \log\left(\frac{\|u\|_{L^r(M)}}{\|u\|_{L^{q_k}(M)}}\right) = \frac{\tau(r(p-n)+np)}{npr} \int_M \frac{|u|^r}{\|u\|^r_{L^r(M)}} \log\left(\frac{|u|^r}{\|u\|^r_{L^r(M)}}\right) dv_g.$$

A demonstração deste item é uma aplicação dupla do Teorema do Valor Médio. Os outros dois itens são demonstrar que as sequências $(A(p,q_k,r))_{k\in\mathbb{N}}$ e $(B(p,q_k,r))_{k\in\mathbb{N}}$ são limitadas. Disto, a menos de subsequência, existem constante positivas $A_0(p,r)$, $B_0(p,r)$ tais que

$$\lim_{k\to\infty} A(p,q_k,r) = A_0(p,r),$$

e

$$\lim_{k\to\infty} B(p,q_k,r) = B_0(p,r).$$

Este trabalho está estruturado em três partes. A primeira, presente no Capítulo 1, é provar que a constante ótima Riemanniana de r-entropia e a constante ótima Euclideana de r-entropia estão relacionadas por

$$A_{ent} = A_e(p,r)^{\frac{\tau}{p}},$$

onde A_{ent} é a primeira constante ótima da desigualdade Riemanniana de r-entropia.

A demonstração deste item será por contradição. A partir desta, obteremos uma equação de Euler-Lagrange e utilizando técnicas de EDP's elípticas como argumentos de explosão, técnica de iteração de Moser [35] e teoria de regularidade de Tolksdorf [39], para obtermos uma sequência de pontos que concentram em $L^r(M)$. Um passo fundamental para a demonstração desta igualdade é mostrar que, a partir de certas hipóteses, alguns termos na equação de Euler-Lagrange tendem a zero. Tais calculos foram inspirados nas contas de Druet em [21].

Sabendo da igualdade entre as constantes ótimas, teremos provado a limitação da sequência de primeiras constantes ótimas, pois mostraremos que $\lim\limits_{q\to r^-} A(p,q,r) = A_e(p,r)^{\frac{\tau}{p}} = A_{ent}$, para todo $1 \leq q < r$, restando apenas provar que a sequência de segundas constantes ótimas $(B(p,q_k,r))$ é limitada, sendo este o tema do Capítulo 2.

Observamos aqui que ao longo das contas, utilizamos fortemente que $A_e(p,q,r)^{\frac{\tau}{p}} = A(p,q,r)$, onde $A_e(p,q,r)$ é a primeira constante ótima Euclideana de Gagliardo-Nirenberg e $A(p,q,r)$ é a primeira constante ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg, fato que foi demonstrado por Ceccon, Durán e Godoi em um artigo em preprint.

Utilizando a equação de Euler-Lagrange obtida no Capítulo 2, produziremos uma sequência de funções na variedade que concentram em $L^r(M)$ e que convergem pontualmente para zero. Demonstraremos também um lema sobre a distância que tal sequência de pontos cumpre em M e argumentaremos a limitação da sequência de segundas constantes ótimas por absurdo.

Demonstrada a primeira desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia (29), podemos definir a segunda desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia

$$B_{ent} = \inf\{B \in \mathbb{R};\ (29) \text{ é válida}\}.$$

Como consequência imediata da definição acima, obtemos a segunda constante ótima Riemanniana de r-entropia

$$Ent_{dv_g}(|u|^r) \leq$$
$$\leq \frac{npr}{\tau(r(p-n)+np)} \log\left(A_{ent}\left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} + B_{ent}\left(\int_M |u|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}\right), \qquad (31)$$

válida para toda função $u \in H^{1,p}(M)$ com $\|u\|_{L^r(M)} = 1$.

Dizemos que uma função $u \in H^{1,p}(M)$ é uma função extremal para a desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia se esta faz valer a igualdade em (31). Encerrando o Capítulo 2, provamos a existência de função extremal para (31) quando $1 \leq \tau < \min\{p, 2\}$ ou $\tau = p < 2$. Nestes casos, $B_{ent} = B_0(p,r)$

No Capítulo 3, estimaremos a segunda constante ótima B_{ent}. No mesmo sentido que [1] e [33], demonstramos que sempre existem funções extremais para a desigualdade ótima Euclidiana de r-entropia e pelo artigo de Serrin e Tang [36] provamos que no caso onde $1 < r < p < n$ tais funções possuem suporte compacto. Ainda, inspirado nas contas de [17] e [28], quando $\tau = 2 \leq p$, provamos que

$$\sup_{x \in M} \frac{Scal(x)}{6n} A_{ent} \frac{I_2^{\frac{\tau}{p}}}{I_3^{\frac{\tau}{p}}} \frac{\tau}{p}\left(\frac{p-n}{n} J_1 + \frac{J_2}{I_2} - \frac{n(p-r)+pr}{nr} J_3\right) \leq B_{ent},$$

onde $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ é uma função extremal para (17) e os termos

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^r \log \varphi^r \, dx, \;\; I_2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^p \, dx, \;\; I_3 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^p \, dx,$$

e

$$J_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^r |x|^2 \, dx, \;\; J_2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^p |x|^2 \, dx, \;\; J_3 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^r \log \varphi^r |x|^2 \, dx.$$

Estas estimativas acima seguem ao combinarmos a desigualdade ótima Euclidiana de r-entropia com a função extremal φ e a expansão de Cartan da métrica g em cada termo da segunda desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia.

Por fim, inspirados no trabalho de Brouttelande [12], demonstramos que para o caso $\tau = 2 < p$, valem das duas uma: ou (31) possuí função extremal; ou

$$B_{ent} = \sup_{x \in M} \frac{Scal(x)}{6n} A_{ent} \frac{I_2^{\frac{\tau}{p}}}{I_3^{\frac{\tau}{p}}} \frac{\tau}{p} \left(\frac{p-n}{n} J_1 + \frac{J_2}{I_2} - \frac{n(p-r)+pr}{nr} J_3 \right).$$

A desigualdade acima foi obtida ao utilizarmos a segunda desigualdade ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg, o Lema da Distância que obtivemos no Capítulo 2 e as expansões de Taylor e de Cartan. Estas contas encerram esta tese.

Capítulo 1

IGUALDADE ENTRE AS CONSTANTES ÓTIMAS RIEMANNIANA E EUCLIDIANA DE ENTROPIA

O caminho natural no programa AB em variedades Riemannianas na literatura recente [2], [3], [14], [15] é demonstrar, via técnicas variacionais, que vale a desigualdade ótima de r-entropia e com isto provar que a primeira constante ótima Riemanniana de r-entropia não depende da métrica g da variedade em questão. Observa-se isso ao constatar que a primeira constante ótima Riemanniana e a constante ótima Euclidiana são iguais - exceto, possivelmente, à um expoente -.

Aqui, seguiremos o caminho inverso: demonstraremos que vale a igualdade entre as constantes ótimas Riemanniana e Euclidiana de r-entropia e utilizaremos isto no Capítulo 2 para demonstrarmos que vale a primeira desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia. Assim sendo, o objetivo deste capítulo é provar a igualdade entre a constante ótima Euclidiana e a primeira constante ótima Riemanniana de r-entropia.

O Capítulo 1 está estruturado da seguinte maneira: Na seção 1.1, demonstramos a validade da desigualdade ótima Euclidiana de r-entropia, ao considerarmos esta como um caso limite da desigualdade ótima Euclidiana de Gagliardo-Nirenberg.

Na seção 1.2 definiremos formalmente o que é a primeira constante ótima Riemanniana de r-entropia e começaremos a provar a igualdade entre as constantes ótimas Riemanniana de Euclidiana de r-entropia, a partir do absurdo que é supor que não vale a igualdade entre as mesmas.

A seção 1.2 está dividida em três passos e lançaremos mão de técnicas clássicas de EDP's elípticas para a demonstração da igualdade citada acima. No primeiro passo, a partir da desigualdade ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg - cuja veracidade está presente em [14] - e da contradição citada acima, criaremos uma família de funcionais lineares definidos na variedade Riemanniana (M, g) que é compacta, suave, sem bordo e de dimensão $n \geq 2$. Buscaremos nessa família de funcionais uma sequência de funções que atingem o mínimo nesses funcionais e, para cada uma destas, obteremos uma equação de Euler-Lagrange associada.

No segundo passo, tendo em vista as equações de Euler-Lagrange, utilizaremos a técnica de blow-up para estudarmos o que ocorre em torno dos pontos de máximo obtidos na seção anterior. Esta ferramenta consiste em criar um fenômeno para mostrarmos que as respectivas funções concentram em torno de uma bola em $L^r(M)$ com centro nos seus respectivos pontos de máximo. Inspirados nas contas de Druet [21], um passo fundamental na análise de concentração foi provar que os termos em $L^p(M)$ na equação de Euler-Lagrange tendem a zero.

Utilizando a técnica de iteração de Moser e teoria de regularidade de Tolksdorf, reescreveremos a equação de Euler-Lagrange em termos de uma função φ_k, cujo domínio está em $\mathbb{R}^n$, que converge para uma função φ em $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ quando k tende ao infinito. Finalizando o capítulo, no terceiro e último passo utilizaremos algumas estimativas integrais feitas na seção anterior combinadas com a função φ mencionada acima e a desigualdade ótima Euclidiana de r-entropia para obtermos a contradição desejada.

1.1 A desigualdade ótima Euclidiana de entropia

Nesta seção, provaremos a validade da desigualdade ótima Euclidiana de r-entropia. Para isto, precisaremos da desigualdade ótima Euclidiana de Gagliardo-Nirenberg para obtermos a desigualdade ótima Euclidiana de r-entropia como um produto dessa última.

Por simplicidade, denotaremos $\|u\|_{L^s(M)}$ por $\|u\|_s$, para todo $1 \leq s \leq \infty$. Às normas em $L^s(\mathbb{R}^n)$ denotaremos por $\|u\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}$. Podemos obter a desigualdade Euclidiana de Gagliardo-Nirenberg a partir da desigualdade Euclidiana de Sobolev [37]. Esta última afirma que, para $1 \leq p < n$ e toda função $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, existe $A = A(n,p) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} \, dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq A \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1}$$

Ponderemos ainda sobre a desigualdade de interpolação: para $1 \leq q < r \leq p^*$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r \, dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} \, dx\right)^{\frac{\theta}{p^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q \, dx\right)^{\frac{1-\theta}{q}}, \tag{1.2}$$

válida para toda função $u \in L^q(\mathbb{R}^n) \cap L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ e $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p^*} + \frac{1-\theta}{q}$, ou $\theta = \frac{np(r-q)}{r(q(p-n)+np)}$.

Seja $D^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ o fecho de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ sob a norma

$$\|u\|_{D^{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Combinando (1.1) com (1.2), obtemos a desigualdade Euclidiana de Gagliardo-Nirenberg: Se $u \in D^{p,q}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r \, dx\right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q \, dx\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}, \tag{GN$_E(C)$}$$

onde $1 \leq q < r \leq p < n$ e C é uma constante positiva que pode depender de p, q, r e n. Uma pergunta natural que surge é saber qual é a menor constante $C > 0$ que satisfaz a desigualdade acima. Assim, podemos considerar a constante ótima Euclidiana de Gagliardo-Nirenberg

$$A_e(p,q,r)^{-1} = \inf_{u \in D^{p,q}(\mathbb{R}^n)} \left\{ \|\nabla u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|u\|^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}_{L^q(\mathbb{R}^n)};\ \|u\|_r = 1 \right\}, \tag{1.3}$$

e imediatamente da definição acima, a desigualdade ótima Euclidiana de Gagliardo-Nirenberg, válida para toda função $u \in D^{p,q}(\mathbb{R}^n)$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r \, dx\right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq A_e(p,q,r) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q \, dx\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}, \tag{GN$_E(A_e(p,q,r))$}$$

onde $1 \leq q < r \leq p < n$ e $\theta = \frac{np(r-q)}{r(q(p-n)+np)}$.

A partir da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, obtemos a desigualdade Euclidiana de r-entropia: Para $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|u\|_r = 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r \log |u|^r \, dx \leq \frac{nr}{np - nr + pr} \log\left(C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx\right). \tag{L$_E(C)$}$$

Com efeito, fazendo um rearranjo dos termos na desigualdade Euclidiana de Gagliardo-Nirenberg ($\mathrm{GN}_E(C)$),

$$\left(\frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^r\,dx\right)^{\frac{1}{r}}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}}\right)^{\frac{p}{\theta}} \leq C\frac{\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^p\,dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^q\,dx\right)^{\frac{p}{q}}}.$$

Aplicando log em ambos os lados da desigualdade acima,

$$\frac{p}{\theta}\log\left(\frac{\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}}{\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}}\right) \leq \log\left(C\frac{\|\nabla u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}}{\|u\|^p_{L^q(\mathbb{R}^n)}}\right). \tag{1.4}$$

Pelo Teorema do Valor Médio, podemos estimar o lado esquerdo de (1.4) por

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}}{\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}}\right) &= \frac{1}{r}\log\|u\|^r_{L^r(\mathbb{R}^n)} - \frac{1}{q}\log\|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\
&= \frac{1}{r}\left[\log\|u\|^r_{L^r(\mathbb{R}^n)} - \log\|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}\right] + \frac{q-r}{r}\log\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\
&= \frac{1}{rY_q}\left[\|u\|^r_{L^r(\mathbb{R}^n)} - \|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}\right] + \frac{q-r}{r}\log\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

onde Y_q está entre $\|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ e $\|u\|^r_{L^r(\mathbb{R}^n)}$. Aplicando novamente o Teorema do Valor Médio, por $\lim\limits_{q\to r^-}\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}$ e pela definição de θ,

$$\begin{aligned}
\lim_{q\to r^-}\frac{p}{\theta}\log\left(\frac{\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}}{\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}}\right) &= \frac{r(p-n)+np}{n}\left[\lim_{q\to r^-}\frac{1}{r-q}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{Y_q}(|u|^r - |u|^q)\,dx - \right.\\
&\quad\left. - \log\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\right]\\
&= \frac{r(p-n)+np}{n}\left[\lim_{q\to r^-}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^\rho}{Y_q}\log|u|\,dx - \right.\\
&\quad\left. - \int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^r}{\|u\|^r_{L^r(\mathbb{R}^n)}}\log\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\,dx\right]\\
&= \frac{r(p-n)+np}{nr}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^r}{\|u\|^r_{L^r(\mathbb{R}^n)}}\log\left(\frac{|u|^r}{\|u\|^r_{L^r(\mathbb{R}^n)}}\right)\,dx,
\end{aligned}$$

onde $\rho \in (q,r)$ e toda função $D^{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Pela densidade de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ em $D^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ e tomando todo $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|v\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = 1$, ao fazermos $q \to r^-$ em (1.4),

$$\int_{\mathbb{R}^n}|v|^r\log|v|^r\,dx \leq \frac{nr}{np-nr+pr}\log\left(C\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla v|^p\,dx\right),$$

ou seja, obtemos a desigualdade Euclidiana de r-entropia a partir da desigualdade Euclidiana de Gagliardo-Nirenberg.

A partir da desigualdade acima, podemos considerar a constante ótima Euclidiana de r-entropia

$$A_e(p,r) = \inf_{u\in D^{p,q}(\mathbb{R}^n)} \{C \in \mathbb{R};\ L_E(C) \text{ é válido}\}. \tag{1.5}$$

Observamos que, imediatamente da definição acima, vale a desigualdade ótima Euclidiana de r-entropia:

$$\int_M |u|^r \log |u|^r \, dx \le \frac{nr}{np - nr + pr} \log\left(A_e(p,r) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx\right), \tag{$\mathrm{L}_E(A_e(p,r))$}$$

para toda função $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = 1$.

No que segue, demonstraremos que podemos obter $(\mathrm{L}_E(A_e(p,r)))$ como um caso limite da desigualdade ótima Euclidiana de Gagliardo-Nirenberg. Para isto, demonstremos que

$$\lim_{q\to r^-} A_e(p,q,r) = A_e(p,r). \tag{1.6}$$

Para demonstrarmos a validade de (1.6), mostraremos que a sequência $(A_e(p,q,r))$ é monótona e limitada. Provaremos, inicialmente, que $(A_e(p,q,r))$ é monótona não decrescente. Com efeito, dados $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ tal que $q_1 < q_2$, pela desigualdade de interpolação,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q_2} \, dx\right)^{\frac{1}{q_2}} \le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q_1} \, dx\right)^{\frac{\mu}{q_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r \, dx\right)^{\frac{1-\mu}{r}}, \tag{1.7}$$

onde $\dfrac{1}{q_2} = \dfrac{\mu}{q_1} + \dfrac{1-\mu}{r}$, ou $\mu = \dfrac{q_1(r-q_2)}{q_2(r-q_1)}$. Por outro lado, da desigualdade ótima Euclidiana de Gagliardo-Nirenberg,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r \, dx\right)^{\frac{p}{r\theta_2}} \le A_e(p,q_2,r) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q_2} \, dx\right)^{\frac{p(1-\theta_2)}{q_2\theta_2}}, \tag{1.8}$$

onde $\theta_2 = \dfrac{np(r-q_2)}{r(q_2(p-n)+np)}$. Combinando (1.7) e (1.8),

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r \, dx\right)^{\frac{p}{r}\left(\frac{1}{\theta_2} - \frac{(1-\mu)(1-\theta_2)}{\theta_2}\right)} \le A_e(p,q_2,r) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q_1} \, dx\right)^{\frac{\mu}{q_1}\frac{p(1-\theta_2)}{\theta_2}}.$$

Agora, por

$$\frac{p}{r}\left(\frac{1}{\theta_2}-\frac{(1-\mu)(1-\theta_2)}{\theta_2}\right)=\frac{p}{r}\left(1+\mu\frac{1-\theta_2}{\theta_2}\right),$$

e

$$\mu\frac{1-\theta_2}{\theta_2}=\frac{1-\theta_1}{\theta_1},$$

onde $\theta_1=\dfrac{np(r-q_1)}{r(q_1(p-n)+np)}$, obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^r\,dx\right)^{\frac{p}{r\theta_1}}\leq A_e(p,q_2,r)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^p\,dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q_2}\,dx\right)^{\frac{p(1-\theta_1)}{q_1\theta_1}}.$$

Pela definição da constante ótima da igualdade acima, obtemos $A_e(p,q_1,r)\leq A_e(p,q_2,r)$, e assim, $(A_e(p,q,r))$ é monótona não decrescente.

Provemos agora que $A_e(p,q,r)\leq A_e(p,r)$, para todo $q<r$, ou seja, que a sequência $(A_e(p,q,r))$ é limitada. Seja $u\in D^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo $\|u\|_r=1$. Como a função log é côncava,

$$\frac{\log(|u|^{q-r})-\log(\lambda)}{|u|^{q-r}-\lambda}\leq\alpha,$$

onde α é a inclinação da reta tangente à log em λ. Considerando $\lambda=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-r}|u|^r\,dx$ na desigualdade acima, multiplicando ambos os lados da desigualdade por $|u|^r$ e integrando, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\log(\lambda)|u|^r\,dx+\int_{\mathbb{R}^n}\left(|u|^{q-r}-\lambda\right)\alpha|u|^r\,dx\geq\int_{\mathbb{R}^n}\log(|u|^{q-r})|u|^r\,dx.$$

Ainda, por $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}|u|^r\,dx=1$,

$$\log\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-r}|u|^r\,dx\right)+\alpha\left\{\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-r}|u|^r\,dx-\lambda\right\}\geq\int_{\mathbb{R}^n}\log(|u|^{q-r})|u|^r\,dx$$

e, pela definição de λ, o segundo termo do lado esquerdo é igual a 0, ou seja,

$$\log\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-r}|u|^r\,dx\right)\geq\int_{\mathbb{R}^n}\log(|u|^{q-r})|u|^r\,dx.$$

Tomando isto em conta,

$$\begin{aligned}
-\log\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^q\,dx\right) &= -\log\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-r}|u|^r\,dx\right)\\
&\leq -\int_{\mathbb{R}^n}\log\left(|u|^{q-r}\right)|u|^r\,dx\\
&= \frac{r-q}{r}\int_{\mathbb{R}^n}\log\left(|u|^r\right)|u|^r\,dx. \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

Usando (1.9) e a desigualdade ótima Euclidiana de r-entropia,

$$\begin{aligned}
-\log\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^q\,dx\right) &\leq \frac{r-q}{r}\int_{\mathbb{R}^n}\log\left(|u|^r\right)|u|^r\,dx\\
&\leq \frac{r-q}{r}\frac{nr}{np-nr+pr}\log\left(A_e(p,r)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^p\,dx\right),
\end{aligned}$$

isto é

$$-\frac{np-nr+pr}{n(r-q)}\log\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^q\,dx\right)\leq\log\left(A_e(p,r)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^p\,dx\right).$$

Consequentemente,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^q\,dx\right)^{-\frac{np-nr+pr}{n(r-q)}}\leq A_e(p,r)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^p\,dx.$$

Como $\dfrac{p(1-\theta)}{\theta q}=\dfrac{np-nr+pr}{n(r-q)}$ e por $\|u\|_r=1$, segue que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^r\,dx\right)^{\frac{p}{r\theta}}=1\leq A_e(p,r)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^p\,dx\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^q\,dx\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}. \qquad (1.10)$$

Suponha $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ qualquer. Como $v=\frac{u}{\|u\|_r}$ satisfaz (1.10), concluímos que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|v|^r\,dx\right)^{\frac{p}{r\theta}}\leq A_e(p,r)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla v|^p\,dx\left(\int_{\mathbb{R}^n}|v|^q\,dx\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}.$$

Pela definição da constante ótima Euclidiana de Gagliardo-Nirenberg $A_e(p,q,r)$, obtemos $A_e(p,q,r)\leq A_e(p,r)$, para todo $q<r$. Por conseguinte, existe $\lim\limits_{q\to r^-}A_e(p,q,r)$. Definindo,

$$\lim_{q\to r^-}A_e(p,q,r):=A(p,r)<\infty,$$

pela construção acima $A(p,r)\leq A_e(p,r)$.

Por outro lado, arrumando a desigualdade ótima Euclidiana de Gagliardo-Nirenberg como fizemos em (1.4) e desenvolvendo esta expressão de forma análoga obtemos, ao fazermos $q \to r^-$,

$$\int_M |u|^r \log |u|^r \, dx \leq \frac{nr}{np - nr + pr} \log \left(A(p,r) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx \right),$$

e pela definição da constante ótima Euclidiana de r-entropia $A_e(p,r)$, segue que $A(p,r) \geq A_e(p,r)$ para todo $1 \leq q < r \leq p < n$. Logo, $A(p,r) = A_e(p,r)$, e assim,

$$\lim_{q \to r^-} A_e(p,q,r) = A_e(p,r). \tag{1.11}$$

Portanto, a desigualdade ótima Euclidiana de r-entropia pode ser vista como um caso limite da desigualdade ótima Euclidiana de Gagliardo-Nirenberg quando $q \to r^-$. Na próxima seção, relacionaremos a constante ótima Euclidiana de r-entropia com a constante ótima Riemanniana de r-entropia.

1.2 Relação entre as constantes ótimas Euclidiana e Riemanniana de entropia

Aqui, daremos inicio a contradição que provará a igualdade entre as constantes ótimas Riemanniana e Euclidiana de r-entropia, exceto a uma potência $\frac{\tau}{p}$. Para isto, utilizaremos as primeiras constantes ótimas Riemanniana e Euclidiana de Gagliardo-Nirenberg para obtermos a primeira constante ótima Riemanniana de r-entropia.

Antes de falarmos sobre as constantes ótimas Riemanniana de r-entropia, mostremos que existe a desigualdade Riemanniana de r-entropia. Como no cenário Euclidiano, obtemos como um caso limite da desigualdade Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg quando $q \to r^-$, porém, precisamos antes mostrar que a segunda constante que aparece na desigualdade Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg não depende do parâmetro q.

Ora, consideremos a desigualdade Riemanniana de Sobolev,

$$\left(\int_M |u|^{p^*} \, dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A \int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g + B \int_M |u|^p \, dv_g, \tag{$S_R(A,B)$}$$

válida para toda função $u \in H^{1,p}(M)$ e $1 \leq p < n$. Observe que as constantes A e B podem depender de p, n e da métrica g, mas observe que não dependem de q. Utilizando a desigualdade de interpolação para $q < r < p^*$ combinada com a desigualdade Riemanniana de Sobolev, obtemos

$$\left(\int_M |u|^r \, dv_g \right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq \left[A \int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g + B \int_M |u|^p \, dv_g \right] \left(\int_M |u|^q \, dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}},$$

onde A e B são as mesmas constantes da desigualdade Riemanniana de Sobolev. Elevando ambos os lados da desigualdade acima à $\frac{\tau}{p}$,

$$\left(\int_M |u|^r \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{r\theta}} \leq \left[A \left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right] \times$$

$$\times \left(\int_M |u|^q \, dv_g \right)^{\frac{\tau(1-\theta)}{\theta q}}, \qquad (\mathrm{GN}_R(A,B))$$

onde $1 \leq \tau \leq \min\{2, p\}$. Rearranjando os termos e procedendo de forma análoga a que fizemos com a desigualdade Euclidiana de Gagliardo-Nirenberg para obtermos a desigualdade Euclidiana de r-entropia $(\mathrm{L}_E(C))$, juntamente com o fato de que A e B são constantes positivas que não dependem de q, ao fazermos $q \to r^-$,

$$Ent_{dv_g}(|u|^r) \leq$$

$$\leq \frac{npr}{\tau(r(p-n)+np)} \log \left(A \left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right), \qquad (\mathrm{L}_R(A,B))$$

válida para toda função $u \in H^{1,p}(M)$ tal que $\|u\|_r = 1$, onde

$$Ent_{dv_g}(|u|^r) = \int_M |u|^r \log |u|^r \, dv_g.$$

Portanto, podemos definir

Definição 1.1. *A primeira constante ótima Riemanniana de r-entropia*

$$A_{ent} = \inf\{A \in \mathbb{R};\ \textit{existe } B \in \mathbb{R} \textit{ tal que } (L_R(A,B)) \textit{ é válida}\}.$$

Observamos que não é imediata a validade da desigualdade Riemanniana de r-entropia com A_{ent} no lugar de A em ($\mathrm{L}_R(A, B)$), pois neste caso B pode tender ao infinito a medida que A se aproxima de A_{ent}, a depender da geometria da variedade em questão. Para mais detalhes sobre este fenômeno, recomendamos [23] para a desigualdade de Nash. Porém, pela definição de ínfimo, dado $\varepsilon > 0$, existe $B_\varepsilon > 0$ tal que

$$Ent_{dv_g}(|u|^r) \leq$$

$$\leq \frac{npr}{\tau(n(p-r)+pr)} \log \left[(A_{ent} + \varepsilon) \left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B_\varepsilon \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right]. \quad (1.12)$$

Por um raciocínio similar, a desigualdade ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg com ε afirma que dado $\varepsilon > 0$, existe $B_\varepsilon > 0$ tal que

$$\left(\int_M |u|^r \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{r\theta}} \leq \left[(A(p,q,r) + \varepsilon) \left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B_\varepsilon \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right] \times$$

$$\times \left(\int_M |u|^q \, dv_g \right)^{\frac{\tau(1-\theta)}{\theta q}}, \quad (1.13)$$

onde $A(p,q,r)$ é a primeira constante ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg e os termos B_ε que aparecem nas duas desigualdades anteriores não são necessariamente os mesmos.

Provemos que $A_e(p,r)^{\frac{\tau}{p}} \leq A_{ent}$, onde $A_e(p,r)$ é a constante ótima Euclidiana de r-entropia, definida em (1.5). Com efeito, para todo $u \in H^{1,p}(M)$ tal que $\|u\|_r = 1$, por uma construção inteiramente análoga a feita em (1.9),

$$-\log \left(\int_M |u|^q \, dv_g \right) \leq \frac{r-q}{r} \int_M |u|^r \log |u|^r \, dv_g. \quad (1.14)$$

Combinando (1.12) com (1.14),

$$\left(\int_M |u|^q \, dv_g \right)^{-\frac{\tau(np-nr+pr)}{np(r-q)}} \leq (A_{ent} + \varepsilon) \left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B_\varepsilon \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}}$$

Da definição de θ, por $\|u\|_r = 1$ e por argumentos de homogeneidade, obtemos

$$\left(\int_M |u|^r \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{r\theta}} \leq \left[(A_{ent} + \varepsilon) \left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B_\varepsilon \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right] \times$$

$$\times \left(\int_M |u|^q \, dv_g \right)^{\frac{\tau(1-\theta)}{\theta q}}, \tag{1.15}$$

para toda $u \in H^{1,p}(M)$. Logo, da definição da primeira constante ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg,

$$A(p,q,r) \le A_{ent} + \varepsilon,$$

para todo $1 \le q < r$, onde $A(p,q,r)$ é a primeira constante ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg. Ainda, como $A(p,q,r) = A_e(p,q,r)^{\frac{\tau}{p}}$ para todo $1 \le q < r$ (trabalho em preprint por Ceccon et al), onde $A_e(p,q,r)$ é a constante ótima Euclidiana de Gagliardo-Nirenberg, obtemos

$$A_e(p,q,r)^{\frac{\tau}{p}} \le A_{ent} + \varepsilon,$$

Tomando $q \to r^-$ na desigualdade acima e logo após $\varepsilon \to 0$ e por (1.6),

$$A_e(p,r)^{\frac{\tau}{p}} \le A_{ent},$$

como queríamos provar.

Caso $A_e(p,r) = A_{ent}^{\frac{p}{\tau}}$, não há o que demonstrar. Consequentemente, assumiremos que não vale a igualdade entre a constantes ótima Euclidiana e a primeira constante ótima Riemanniana de r-entropia, isto é,

$$A_e(p,r) < A_{ent}^{\frac{p}{\tau}},$$

e a partir disto obteremos uma contradição. Disto, para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande,

$$A_e(p,r)^{\frac{\tau}{p}} < A_{ent} - \frac{1}{k}. \tag{1.16}$$

Enunciamos como teorema o principal resultado deste capítulo

Teorema 1.1. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana, compacta, suave e sem bordo, de dimensão $n \ge 2$. Consideremos os parâmetros $1 \le \tau \le \min\{2,p\}$ e $1 < r \le p < n$. Então $A_{ent} = A_e(p,r)^{\frac{\tau}{p}}$, onde A_{ent} é a primeira constante ótima Riemanniana de r-entropia e $A_e(p,r)$ é a constante ótima Euclidiana de r-entropia.*

Prova: A demonstração desse teorema estará diluída em três passos.

Passo 1 - Equação de Euler-Lagrange: Inicialmente, a partir da contradição (1.16) combinada com a desigualdade Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg, obteremos uma equação de Euler-Lagrange. Para isto, afirmamos que para todo $k \in \mathbb{N}$, existe uma função $\tilde{v}_k \in H^{1,p}(M) \setminus \{0\}$ e existe $q_k \in (r - \frac{1}{k}, r)$ tal que

$$\left(\int_M |\tilde{v}_k|^r \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{r\theta_k}} > \left(\mathscr{A}_k \left(\int_M |\nabla_g \tilde{v}_k|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} + k \left(\int_M |\tilde{v}_k|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}\right) \times$$
$$\times \left(\int_M |\tilde{v}_k|^{q_k} \, dv_g\right)^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{\theta_k q_k}}, \tag{1.17}$$

onde $\theta_k = \frac{np(r-q_k)}{r(q_k(p-n)+np)}$ e $\mathscr{A}_k = A_{ent} - \frac{1}{k}$.

Com efeito, caso contrário, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\int_M |u|^r \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{r\theta}} \leq \left(\mathscr{A}_{k_0} \left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} + k_0 \left(\int_M |u|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}\right) \left(\int_M |u|^q \, dv_g\right)^{\frac{\tau(1-\theta)}{\theta q}},$$

para toda função $u \in H^{1,p}(M) \setminus \{0\}$ e todo parâmetro $r - \dfrac{1}{k_0} < q < r$, onde $\theta = \frac{np(r-q)}{r(q(p-n)+np)}$. Disto,

$$\left(\frac{\left(\int_M |u|^r dv_g\right)^{\frac{1}{r}}}{\left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}}}\right)^{\frac{\tau}{\theta}} \leq \left(\frac{\mathscr{A}_{k_0} \left(\int_M |\nabla_g u|^p dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} + k_0 \left(\int_M |u|^p dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}}{\left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{\tau}{q}}}\right).$$

Por isto e por log ser uma função crescente,

$$\frac{\tau}{\theta} \log\left(\frac{\|u\|_r}{\|u\|_q}\right) \leq \log\left(\frac{\mathscr{A}_{k_0} \|\nabla_g u\|_p^\tau + k_0 \|u\|_p^\tau}{\|u\|_q^\tau}\right). \tag{1.18}$$

Analisemos o lado esquerdo de (1.18). Pelo Teorema do Valor Médio,

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{\|u\|_r}{\|u\|_q}\right) &= \frac{1}{r} \log \|u\|_r^r - \frac{1}{q} \log \|u\|_q^q \\
&= \frac{1}{r} \left[\log \|u\|_r^r - \log \|u\|_q^q\right] + \frac{q-r}{r} \log \|u\|_q \\
&= \frac{1}{rY} \left[\|u\|_r^r - \|u\|_q^q\right] + \frac{q-r}{r} \log \|u\|_q,
\end{aligned}$$

onde Y está entre $\|u\|_q^q$ e $\|u\|_r^r$. Novamente pelo Teorema do Valor Médio e por

$$\int_M \frac{|u|^r}{\|u\|_r^r}\, dv_g = \frac{\|u\|_r^r}{\|u\|_r^r} = 1,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{q\to r^-} \frac{\tau}{\theta} \log\left(\frac{\|u\|_r}{\|u\|_q}\right) &= \frac{\tau(r(p-n)+np)}{np}\left[\lim_{q\to r^-} \frac{1}{r-q}\int_M \frac{1}{Y}(|u|^r - |u|^q)\, dv_g - \log\|u\|_r\right] \\
&= \frac{\tau(r(p-n)+np)}{np}\left[\lim_{q\to r^-} \int_M \frac{|u|^\rho}{Y}\log|u|\, dv_g - \int_M \frac{|u|^r}{\|u\|_r^r}\log\|u\|_r\, dv_g\right] \\
&= \frac{\tau(r(p-n)+np)}{npr}\int_M \frac{|u|^r}{\|u\|_r^r}\log\left(\frac{|u|^r}{\|u\|_r^r}\right)\, dv_g,
\end{aligned}$$

onde $\rho \in (q,r)$. Em particular, para todo $v \in H^{1,p}(M)$ tal que $\|v\|_r = 1$, tomando $q \to r^-$ em (1.18) e por $\lim\limits_{q\to r^-} \|u\|_q = \|u\|_r$,

$$\int_M |v|^r \log|v|^r dv_g \leq \frac{npr}{\tau(r(p-n)+np)}\log\left(\mathscr{A}_{k_0}\left(\int_M |\nabla_g v|^p dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} + k_0\left(\int_M |v|^p dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}\right),$$

o que é um absurdo, pois da definição de A_{ent},

$$A_{ent} \leq \mathscr{A}_{k_0} = A_{ent} - \frac{1}{k_0}.$$

Logo, vale (1.17). No que segue, minimizaremos o nosso problema a partir de (1.17). Para cada $k \in \mathbb{N}$ fixado, definimos o espaço $\mathscr{E} = \{u \in H^{1,p}(M) \setminus \{0\}; \|u\|_p = 1\}$ e o funcional

$$J_k(u) = \left[\mathscr{A}_k\left(\int_M |\nabla_g u|^p\, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} + k\right]\left(\int_M |u|^{q_k}\, dv_g\right)^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}}\left(\int_M |u|^r\, dv_g\right)^{-\frac{\tau}{r\theta_k}}. \quad (1.19)$$

Este funcional é de classe C^1 quando $q_k > 1$. Como estamos fazendo q_k tender à r quando k tende ao infinito, podemos supor sem perda de generalidade que $q_k > 1$. Dado $\tilde{v}_k$ conforme (1.17), temos que $\omega_k = \dfrac{\tilde{v}_k}{\|\tilde{v}_k\|_p} \in \mathscr{E}$, logo, $\mathscr{E}$ não é o espaço vazio. Consideremos agora, para cada k fixado,

$$\nu_k = \inf_{u\in\mathscr{E}} J_k(u), \quad (1.20)$$

que existe, pois J_k é limitado inferiormente. Mostremos que o ínfimo acima é atingido em $\mathscr{E}$. Por (1.19),

$$\nu_k = \inf_{u\in\mathscr{E}} J_k(u) \leq J_k(\omega_k) < 1. \quad (1.21)$$

Seja uma sequência $(v_k^j)_{j\in\mathbb{N}}$ em $\mathscr{E}$ tal que

$$J_k(v_k^j) \to \nu_k.$$

Consideremos ainda $\sigma > 0$ fixado tal que $\nu_k < \sigma\nu_k \leq 1$. Pela definição de ν_k, para todo $j \in \mathbb{N}$ suficientemente grande,

$$J_k(v_k^j) \leq \sigma\nu_k.$$

Sendo assim, se $\omega_k^j = \|v_k^j\|_{q_k}^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{\theta_k}} \|v_k^j\|_r^{-\frac{\tau}{\theta_k}}$, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\left[\mathscr{A}_k\left(\int_M |\nabla_g v_k^j|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} + k\right]\omega_k^j \leq \sigma\nu_k. \tag{1.22}$$

Por outro lado, da desigualdade ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg,

$$\left[A(p,q_k,r)\left(\int_M |\nabla_g v_k^j|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} + B(p,q_k,r)\right]\omega_k^j \geq 1.$$

Por (1.16), $\mathscr{A}_k \geq A(p,q_k,r)$, e assim

$$\left[-\sigma\nu_k\mathscr{A}_k\left(\int_M |\nabla_g v_k^j|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} - \sigma\nu_k B(p,q_k,r)\right]\omega_k^j \leq -\sigma\nu_k. \tag{1.23}$$

Juntando (1.22) e (1.23),

$$\left[(1-\sigma\nu_k)\mathscr{A}_k\left(\int_M |\nabla_g v_k^j|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} + k - \sigma\nu_k B(p,q_k,r)\right]\omega_k^j \leq 0.$$

Como ω_k^j é positivo, temos que

$$(1-\sigma\nu_k)\mathscr{A}_k\left(\int_M |\nabla_g v_k^j|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} + k - \sigma\nu_k B(p,q_k,r) \leq 0.$$

Ainda, $1-\sigma\nu_k > 0$. Por conseguinte,

$$\left(\int_M |\nabla_g v_k^j|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} \leq \frac{\sigma\nu_k B(p,q_k,r) - k}{(1-\sigma\nu_k)\mathscr{A}_k}.$$

Por $\mathscr{A}_k$, ν_k, σ e $B(p,q_k,r)$ serem independentes de j, obtemos que a sequência $(v_k^j)_j \subset \mathscr{E}$ é limitada em $H^{1,p}(M)$. Devido a imersão compacta de Sobolev do espaço

$H^{1,p}(M) \hookrightarrow L^{p^*}(M)$ e por $H^{1,p}(M)$ ser um espaço reflexivo, a menos de subsequência, existe $v_k \in H^{1,p}(M)$ tal que, para $1 < s < p^*$,

$$v_k^j \to v_k \text{ em } L^s(M) \text{ quando } j \to \infty. \tag{1.24}$$

Ainda, por $v_k^j \in \mathscr{E}$ para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$\|v_k\|_p = \lim_{j\to\infty} \|v_k^j\|_p = 1,$$

ou seja, $v_k \in \mathscr{E}$.

Por fim, observamos que $J_k(v_k) \le \liminf_{j\to\infty} J_k(v_k^j) = \nu_k \le J_k(v_k)$. Portanto,

$$J_k(v_k) = \nu_k = \inf_{u\in\mathscr{E}} J_k(u) \le 1,$$

logo, o ínfimo acima é, na verdade, o mínimo que J_k atinge em $\mathscr{E}$. Afirmamos ainda que v_k não é constante, para todo k suficientemente grande.

Como $\nabla_g|v_k| = \pm\nabla_g v_k$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $v_k \ge 0$. Caso v_k seja constante, por $v_k \in \mathscr{E}$,

$$1 = \int_M |v_k|^p \, dv_g = v_k^p |M|,$$

isto é,

$$v_k = |M|^{-\frac{1}{p}}. \tag{1.25}$$

Por outro lado, por $J_k(v_k) < 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$k\|v_k\|_{q_k}^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{\theta_k}} \|v_k\|_r^{-\frac{\tau}{\theta_k}} < 1. \tag{1.26}$$

Agora, por (1.25),

$$\begin{aligned}
\|v_k\|_{q_k}^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{\theta_k}} \|v_k\|_r^{-\frac{\tau}{\theta_k}} &= |M|^{\left(\frac{\tau(1-\theta_k)}{\theta_k} - \frac{\tau}{\theta_k}\right)\left(-\frac{1}{p}\right)} |M|^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{\theta_k q_k}} |M|^{-\frac{\tau}{r\theta_k}} \\
&= |M|^{\frac{\tau}{p}\left(1 + \frac{p(1-\theta_k)}{\theta_k q_k} - \frac{p}{r\theta_k}\right)} \\
&= |M|^{\frac{\tau}{n}}.
\end{aligned}$$

Disto em (1.26),

$$k < |M|^{-\frac{\tau}{n}},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, o que é um absurdo. Logo, v_k não é constante. Desta forma, podemos considerar, para cada k suficientemente grande, a função $w_k = \dfrac{v_k}{\|\nabla_g v_k\|_p}$. Disto, de $\nu_k = J_k(v_k)$ e de $\|v_k\|_p = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\nu_k = \left[\mathscr{A}_k + k\|w_k\|_p^\tau\right] \|w_k\|_{q_k}^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{\theta_k}} \|w_k\|_r^{-\frac{\tau}{r\theta_k}}.$$

Dividindo a igualdade acima por $\nu_k > 0$,

$$\frac{\mathscr{A}_k}{\nu_k} = \|w_k\|_{q_k}^{-\frac{\tau(1-\theta_k)}{\theta_k}} \|w_k\|_r^{\frac{\tau}{\theta_k}} - \frac{k}{\nu_k}\|w_k\|_p^\tau. \tag{1.27}$$

Consideremos agora o espaço $\mathscr{W} = \{u \in H^{1,p}(M); \|\nabla_g u\|_p = 1\}$ e o funcional $\mathscr{L}_k : \mathscr{W} \to \mathbb{R}$, definido por

$$\mathscr{L}_k(u) = \left(\int_M |u|^{q_k}\, dv_g\right)^{-\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}} \left(\int_M |u|^r\, dv_g\right)^{\frac{\tau}{r\theta_k}} - \frac{k}{\nu_k}\left(\int_M |u|^p\, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}.$$

Como $\nu_k \leq \mathscr{J}_k(u)$, para todo $u \in \mathscr{H}$,

$$\mathscr{L}_k(u) \leq \frac{\mathscr{A}_k}{\nu_k}.$$

Vê-se ainda que $\mathscr{L}_k$ é um funcional de classe C^1 e que $w_k \in \mathscr{W}$. Consequentemente, por (1.27) e por $\nu_k < 1$,

$$\delta_k = \sup_{u \in \mathscr{W}} \mathscr{L}_k(u) = \mathscr{L}_k(w_k) = \frac{\mathscr{A}_k}{\nu_k} > \mathscr{A}_k.$$

Deste modo, w_k satisfaz a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\mathscr{A}_k}{\nu_k}\Delta_{p,g} w_k = \frac{1}{\theta_k}\|w_k\|_r^{\frac{\tau}{\theta}-r}\|w_k\|_{q_k}^{-\frac{\tau(1-\theta_k)}{\theta_k}} w_k^{r-1} - \frac{(1-\theta_k)}{\theta_k}\|w_k\|_{q_k}^{-\frac{\tau(1-\theta_k)}{\theta_k}-q_k}\|w_k\|_r^{\frac{\tau}{\theta_k}} w_k^{q_k-1} -$$

$$-\frac{k}{\nu_k}\|w_k\|_p^{\tau-p} w_k^{p-1}, \tag{1.28}$$

onde $\Delta_{p,g} = -div_g(|\nabla_g|^{p-2}\nabla_g)$ é o operador p-Laplaciano com respeito a g. Finalmente, reescrevendo a equação acima em termos de $u_k = \dfrac{w_k}{\|w_k\|_r}$, obtemos a seguinte equação de Euler-Lagrange

$$\lambda_k A_k \Delta_{p,g} u_k + D_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \|u_k\|_p^{\tau-p} u_k^{p-1} + \frac{1-\theta_k}{\theta_k}\|u_k\|_{q_k}^{-q_k} u_k^{q_k-1} = \frac{1}{\theta_k} u_k^{r-1}, \tag{1.29}$$

onde

$$\lambda_k = \nu_k^{-1}\mathscr{A}_k\|w_k\|_r^{p-\tau}\|u_k\|_{q_k}^{\frac{(\tau-p)(1-\theta_k)}{\theta_k}},\ D_k = k\nu_k^{-1} \text{ e } A_k = \left(\int_M u_k^{q_k}dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{\theta_k q_k}}. \tag{1.30}$$

Note pela definição de u_k que $\|u_k\|_r = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Ainda, por $\nabla_g|u_k| = \pm\nabla_g u_k$ em quase todo ponto de M, podemos assumir sem perda de generalidade que $u_k \geq 0$ em M.

Façamos agora uma estimativa sobre λ_k. Ao tomarmos w_k como função teste na equação (1.28),

$$\nu_k^{-1}\left(\mathscr{A}_k + k\|w_k\|_p^\tau\right) = \|w_k\|_r^{\frac{\tau}{\theta_k}}\|w_k\|_{q_k}^{-\frac{\tau(1-\theta_k)}{\theta_k}}.$$

Consequentemente,

$$\nu_k^{-1}\mathscr{A}_k \leq \|w_k\|_r^{\frac{\tau}{\theta_k}}\|w_k\|_{q_k}^{-\frac{\tau(1-\theta_k)}{\theta_k}}. \tag{1.31}$$

Por outro lado, pelas definições de λ_k e w_k,

$$\begin{aligned}\lambda_k &= \nu_k^{-1}\mathscr{A}_k\|w_k\|_r^{p-\tau}\|u_k\|_{q_k}^{\frac{(\tau-p)(1-\theta_k)}{\theta_k}}\\ &= \nu_k^{-1}\mathscr{A}_k\|w_k\|_r^{\frac{p-\tau}{\theta_k}}\|w_k\|_{q_k}^{-\frac{(p-\tau)(1-\theta_k)}{\theta_k}}.\end{aligned}$$

Como $\nu_k^{-1} \geq 1$ e usando (1.31), obtemos

$$\begin{aligned}\lambda_k &\geq \mathscr{A}_k\left(\|w_k\|_r^{\frac{\tau}{\theta_k}}\|w_k\|_{q_k}^{-\frac{\tau(1-\theta_k)}{\theta_k}}\right)^{\frac{p-\tau}{\tau}}\\ &\geq \mathscr{A}_k(\nu_k^{-1}\mathscr{A}_k)^{\frac{p-\tau}{\tau}}\\ &\geq \mathscr{A}_k^{\frac{p}{\tau}},\end{aligned}$$

isto é,

$$\lambda_k \geq \mathscr{A}_k^{\frac{p}{\tau}}. \tag{1.32}$$

Encerrando esta seção, afirmamos que $A_k \to 0$ quando $k \to \infty$. De fato, como $\|u_k\|_r = 1$, decorre da desigualdade de Hölder que

$$1 = \|u_k\|_r^r \leq |M|^{1-\frac{r}{p}}\|u_k\|_p^r.$$

Logo, $\|u_k\|_p^\tau \geq c = |M|^{\tau\left(\frac{\tau}{p}-1\right)} > 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Agora, utilizando u_k como função teste em (1.29) e sendo $1 \leq \nu_k^{-1}$,

$$ckA_k^{\frac{\tau}{p}} \leq D_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \|u_k\|_p^\tau \leq 1.$$

Tomando $k \to \infty$ na desigualdade acima, segue que

$$\lim_{k\to\infty} A_k = 0. \tag{1.33}$$

Passo 2 - Análise de concentração: Provaremos que u_k concentra em torno de uma bola centrada no ponto de máximo x_k em $L^r(M)$. Para tal, a técnica utilizada será de blow-up em torno do ponto de máximo, também conhecida como concentração $L^r(M)$. Esta técnica servirá como uma analise qualitativa do que ocorre em torno dos pontos de máximo dos funcionais u_k que obtivemos anteriormente.

Pela teoria de regularidade de Tolksdorf [39], temos que toda u_k que é solução de (1.29) é de classe $C^1(M)$. Por M ser uma variedade Riemanniana compacta, existe $x_k \in M$ tal que

$$u_k(x_k) = \|u_k\|_\infty.$$

No que segue, provaremos que

$$\lim_{\sigma,k\to\infty} \int_{B(x_k;\sigma t_k)} u_k^r \, dv_g = 1, \tag{1.34}$$

onde

$$t_k = A_k^{\frac{r}{n(p-r)+pr}}, \tag{1.35}$$

e $\lim\limits_{\sigma,k\to\infty}$ (ou $\sigma, k \to \infty$) significa que tomaremos primeiro $\lim\limits_{k\to\infty}$ e após isto $\lim\limits_{\sigma\to\infty}$.

Este limite acima significa criar uma explosão em torno de x_k. Veja que o primeiro limite faz o domínio degenerar em torno de x_k, pois $np - nr + pr > 0$ e de (1.33), $t_k \to 0$, quando $k \to \infty$. Como $\|u_k\|_r = 1$ em toda a variedade Riemanniana M, estamos afirmando aqui que na verdade os pontos relevantes para $\|u_k\|_r$ são aqueles em torno de uma bola que degenera em torno de x_k quando $\sigma, k \to \infty$

Provemos (1.34). Para isto, trabalharemos em coordenadas locais convenientes, fazendo o pullback da aplicação exponencial pela dilatação $\delta_{t_k} : TM \to TM$, $\delta_{t_k}(x) = t_k x$

e $E_k = \exp_{x_k} \circ \delta_{t_k}$. Definimos

$$\begin{cases} h_k = E_k^* g = g(\exp_{x_k}(t_k x)), \\ \varphi_k = t_k^{\frac{n}{r}} u_k \circ E_k = t_k^{\frac{n}{r}} u_k(\exp_{x_k}(t_k x)). \end{cases} \tag{1.36}$$

Como $t_k \to 0$ quando $k \to \infty$, estas equações acima estão bem definidas e, para todo $k \in \mathbb{N}$ grande o suficiente, $B(x_k; \sigma t_k)$ estará dentro de um conjunto onde $\exp_{x_k} : M \to B(0; \sigma)$ é um difeomorfismo.

Fazendo a renormalização (1.36) na equação de Euler-Lagrange (1.29), deduzimos que

$$\lambda_k \Delta_{p,h_k} \varphi_k + D_k A_k^{\frac{\tau}{p}-1} \|u_k\|_p^{\tau-p} t_k^p \varphi_k^{p-1} + \frac{1-\theta_k}{\theta_k} \varphi_k^{q_k-1} = \frac{1}{\theta_k} \varphi_k^{r-1} \text{ em } B(0;\sigma) \tag{1.37}$$

no sentido fraco. Esse rescalonamento foi feito dessa forma, pois necessitávamos eliminar o termo A_k que acompanhava o termo p-Laplaciano para escrevermos a forma fraca acima nos moldes de [35] para utilizarmos a técnica de iteração de Moser.

Aplicando o Teorema do Valor Médio em (1.37) e pela definição de θ_k,

$$\begin{aligned} \lambda_k \Delta_{p,h_k} \varphi_k + D_k A_k^{\frac{\tau}{p}-1} \|u_k\|_p^{\tau-p} t_k^p \varphi_k^{p-1} &= \frac{1}{\theta_k} \left(\varphi_k^{r-1} - \varphi_k^{q_k-1} \right) + \varphi_k^{q_k-1} \\ &= \frac{r(q_k(p-n)+np)}{np(r-q_k)} \varphi^{\rho_k} \log(\varphi_k)(r-q_k) + \varphi_k^{q_k-1} \\ &= \frac{r(q_k(p-n)+np)}{np} \varphi_k^{\rho_k} \log(\varphi_k) + \varphi_k^{q_k-1} \text{ em } B(0;\sigma), \end{aligned}$$

no sentido fraco para funções teste não negativas, onde $\rho_k \in (q_k - 1, r-1)$.

Consideremos $\varepsilon > 0$ tal que $r + \varepsilon < p^*$. Como $\varphi_k^{\rho_k} \log(\varphi_k^{\varepsilon}) \leq \varphi_k^{r-1+\varepsilon}$, temos em $B(0;\sigma)$

$$\lambda_k \Delta_{p,h_k} \varphi_k + D_k A_k^{\frac{\tau}{p}-1} \|u_k\|_p^{\tau-p} t_k^p \varphi_k^{p-1} \leq \frac{r(q_k(p-n)+np)}{np\varepsilon} \varphi_k^{r-1+\varepsilon} + \varphi_k^{q_k-1}. \tag{1.38}$$

Pela desigualdade em (1.32) e aplicando a técnica de iteração de Moser [35] em

(1.38), para k suficientemente grande,

$$\begin{aligned} t_k^n \|u_k\|_\infty^r &= \sup_{B(0;\frac{\sigma}{2})} \varphi_k^r \\ &\leq c \int_{B(0;\sigma)} \varphi_k^r \, dh_k \\ &= c \int_{B(x_k,\sigma t_k)} u_k^r \, dv_g \\ &\leq c, \end{aligned} \tag{1.39}$$

onde c uma constante positiva. Disto,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_M u_k^r \, dv_g \\ &\leq \|u_k\|_\infty^{r-q_k} \int_M u_k^{q_k} dv_g \\ &= \left(\|u_k\|_\infty t_k^{\frac{n}{r}} \right)^{r-q_k} \\ &\leq c, \end{aligned}$$

isto é,

$$1 \leq \|u_k\|_\infty \, t_k^{\frac{n}{r}} \leq c, \tag{1.40}$$

sendo c uma constante positiva independente de k. Em particular, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\int_{B(0;\sigma)} \varphi_k^r \, dh_k \geq c > 0, \tag{1.41}$$

para k suficientemente grande.

Vejamos que $\varphi_k \in W^{1,p}(B(0;\sigma))$, para todo k suficientemente grande. Utilizando a expansão de Cartan em coordenadas normais e por (1.40) temos, para cada $\sigma > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{B(0;\sigma)} \varphi_k^p \, dx &\leq c \int_{B(0;\sigma)} \varphi_k^p \, dh_k \\ &= c \, t_k^{\frac{n}{r}(p-r)} \int_{B(x_k,\sigma t_k)} u_k^p \, dv_g \\ &\leq c \left(t_k^{\frac{n}{r}} \|u_k\|_\infty \right)^{p-r} \int_M u_k^r \, dv_g \\ &\leq c, \end{aligned}$$

onde $c > 0$ não depende de k. Ainda, novamente da expansão de Cartan,

$$\begin{aligned}\int_{B(0;\sigma)} |\nabla\varphi_k|^p \, dx &\leq c\int_{B(0;\sigma)} |\nabla_{h_k}\varphi_k|^p \, dh_k \\ &= cA_k \int_{B(x_k,\sigma t_k)} |\nabla_g u_k|^p \, dv_g. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Tomando u_k como função teste em (1.29) e utilizando a estimativa dada em (1.32),

$$A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p dv_g \leq \lambda_k^{-1} \leq \mathscr{A}_k^{-\frac{p}{\tau}} \, .$$

Por definição, $\mathscr{A}_k = A_{ent} - \frac{1}{k} \leq c$ para todo k. Portanto

$$\begin{aligned}\int_{B(0;\sigma)} |\nabla\varphi_k|^p \, dx &\leq cA_k \int_{B(x_k,\sigma t_k)} |\nabla_g u_k|^p \, dv_g \\ &\leq c\mathscr{A}_k^{-\frac{p}{\tau}} \\ &\leq c. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Consequentemente, para cada $\sigma > 0$ e cada $k \in \mathbb{N}$ fixado, existe $\varphi \in W^{1,p}(B(0;\sigma))$ tal que, a menos de subsequência, $\varphi_k \rightharpoonup \varphi$ em $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Para cada $\sigma > 0$,

$$\int_{B(0;\sigma)} \varphi^r \, dx = \lim_{k\to\infty} \int_{B(0;\sigma)} \varphi_k^r \, dh_k = \lim_{k\to\infty} \int_{B(x_k;\sigma t_k)} u_k^r \, dv_g \leq 1 \, .$$

Da teoria de regularidade de Tolksdorf [39], o funcional φ_k converge para uma função φ_n, em cada $B(0;n)$. Podemos definir uma função φ para todo o $\mathbb{R}^n$ utilizando o argumento da Diagonal de Cantor, o que faremos no que segue.

Como φ_k converge em cada compacto, seja para alguma subsequência (se necessário), φ_1 tal que $\varphi_k \to \varphi_1$ em $W^{1,p}(B(0;1))$. Tomando tal subsequência, também temos que φ_k converge para uma função φ_2 em $W^{1,p}(B(0;2))$ e $\varphi_1 = \varphi_2$ em $W^{1,p}(B(0;1))$. Prosseguindo com esse argumento, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, existe uma subsequência em $k \in \mathbb{N}$ e uma função φ_n em $W^{1,p}(B(0;n))$ tal que $\varphi_n = \varphi_{n-1}$ em $B(0;n-1)$ e $\varphi_k \to \varphi_n$ em $W^{1,p}(B(0;n))$.

Considerando uma subsequência, se necessário, existe $\varphi := \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, e

$$\varphi \in L^r(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n). \tag{1.44}$$

Aplicando a teoria de regularidade de Tolksdorf em (1.38), $\varphi_k \to \varphi$ em $C^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Ainda, por (1.40) e pela definição de φ_k, φ é positiva em uma vizinhança da origem.

Faremos uso da forma fraca decorrente da equação de Euler-Lagrange e da desigualdade ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg para provarmos que u_k concentra em $L^r(M)$. Para isto, precisamos utilizar funções teste adequadas para estimarmos os termos que aparecem na desigualdade ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg e na equação de Euler-Lagrange (1.29).

Consideremos uma função de corte $\eta \in C^1_0(\mathbb{R})$ tal que $\eta = 1$ em $[0, \frac{1}{2}]$, $\eta = 0$ em $[1, \infty)$ e $0 \leq \eta \leq 1$. Definindo $\eta_{\sigma,k}(x) = \eta((\sigma t_k)^{-1} d_g(x, x_k))$ e tomando $u_k \eta^r_{\sigma,k}$ como função teste em (1.29), obtemos

$$\lambda_k A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta^r_{\sigma,k}\, dv_g + \lambda_k A_k \int_M |\nabla_g u_k|^{p-2} \nabla_g u_k \cdot \nabla_g(\eta^r_{\sigma,k}) u_k\, dv_g +$$

$$+ D_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \|u_k\|_p^{\tau-p} \int_M u_k^p \eta^r_{\sigma,k}\, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta^r_{\sigma,k}\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} = \frac{1}{\theta_k} \left[\int_M u_k^r \eta^r_{\sigma,k}\, dv_g - \right.$$
$$\left. - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta^r_{\sigma,k}\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right]. \tag{1.45}$$

Mostremos que

$$\lim_{\sigma, k \to \infty} A_k \int_M |\nabla_g u_k|^{p-2} \nabla_g u_k \cdot \nabla_g(\eta^r_{\sigma,k}) u_k\, dv_g = 0\,. \tag{1.46}$$

Com efeito, tomando u_k como função teste em (1.29) e por (1.32),

$$A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p dv_g \leq \mathscr{A}_k^{-\frac{p}{\tau}} \leq c\,. \tag{1.47}$$

Utilizando isto e a desigualdade de Hölder,

$$\left| A_k \int_M |\nabla_g u_k|^{p-2} \nabla_g u_k \cdot \nabla_g(\eta^r_{\sigma,k}) u_k\, dv_g \right| \leq \left(A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p dv_g \right)^{\frac{p-1}{p}} \times$$
$$\times \left(A_k \int_M u_k^p |\nabla_g \eta^r_{\sigma,k}|^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq c \left(A_k \int_M u_k^p |\nabla_g \eta_{\sigma,k}|^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}}\,.$$

Afirmamos que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$A_k \int_M u_k^p |\nabla_g \eta_{\sigma,k}|^p \, dv_g \leq \frac{c}{\sigma^p}\,. \tag{1.48}$$

Ora, por (1.40),

$$\begin{aligned}
A_k \int_M u_k^p |\nabla_g \eta_{\sigma,k}|^p \, dv_g &= \|u_k\|_\infty^{p-r} \, t_k^p \, t_k^{\frac{n(p-r)}{r}} \int_{B(x_k;\sigma t_k)\setminus B(x_k;\sigma t_k/2)} u_k^r |\nabla_g \eta_{\sigma,k}|^p \, dv_g \\
&= \|u_k\|_\infty^{p-r} \frac{t_k^p}{\sigma^p t_k^p} t_k^{\frac{n(p-r)}{r}} \int_{B(x_k;\sigma t_k)\setminus B(x_k;\sigma t_k/2)} u_k^r \left|\nabla_g \eta\left(\frac{d_g(x,x_k)}{\sigma t_k}\right)\right|^p \, dv_g \\
&\leq \frac{c}{\sigma^p}\left(\|u_k\|_\infty t_k^{\frac{n}{r}}\right)^{p-r} \int_M u_k^r \, dv_g \\
&\leq \frac{c}{\sigma^p}.
\end{aligned}$$

Consequentemente, vale (1.48). Por isto e por (1.47), (1.46) é válido. Ainda, observamos que $\lim\limits_{k\to\infty} q_k = r$, e utilizando (1.46) em (1.45),

$$\lim_{\sigma,k\to\infty}\left(\lambda_k A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta_{\sigma,k}^r \, dv_g + D_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \|u_k\|_p^{\tau-p} \int_M u_k^p \eta_{\sigma,k}^r \, dv_g\right) - \lim_{\sigma,k\to\infty}\left(\frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^r \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g}\right) =$$

$$= \frac{r(p-n)+np}{np} \lim_{\sigma,k\to\infty} \frac{r}{r-q_k}\left[\int_M u_k^r \eta_{\sigma,k}^r \, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^r \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g}\right]. \tag{1.49}$$

Escreveremos (1.49) de uma forma mais apropriada. Como

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^r \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} - \frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k} \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g}\right| &\leq \frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k}|\eta_{\sigma,k}^{r-q_k} - 1| dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} \\
&\leq \frac{\int_{B(x_k,\sigma t_k)\setminus B(x_k,\sigma t_k/2)} u_k^{q_k} \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} \\
&= \int_{B(0;\sigma)\setminus B(0;\sigma/2)} \varphi_k^{q_k} \, dh_k.
\end{aligned}$$

Disto, e por (1.44), temos que o limite do lado direito é 0 quando $k \to \infty$ e após isto $\sigma \to \infty$. Consequentemente,

$$\lim_{\sigma,k\to\infty} \frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^r \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} = \lim_{\sigma,k\to\infty} \frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k} \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g}. \tag{1.50}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
A_k\left|\int_M |\nabla_g u_k|^p\eta^r_{\sigma,k}\,dv_g-\int_M |\nabla_g u_k|^p\eta^p_{\sigma,k}\,dv_g\right| &\leq A_k\int_M |\nabla_g u_k|^p\eta^r_{\sigma,k}|1-\eta^{p-r}_{\sigma,k}|\,dv_g\\
&\leq A_k\int_{B(x_k;\sigma t_k)\backslash B(x_k;\sigma t_k/2)} |\nabla_g u_k|^p\,dv_g\\
&= \int_{B(0;\sigma)\backslash B(0;\sigma/2)} |\nabla_{h_k}\varphi_k|^p\,dh_k.
\end{aligned}$$

Como o limite do lado direito da desigualdade acima é 0 quando $\sigma, k\to\infty$, segue que

$$\lim_{\sigma,k\to\infty}\int_M |\nabla_g u_k|^p\eta^r_{\sigma,k}\,dv_g=\lim_{\sigma,k\to\infty}\int_M |\nabla_g u_k|^p\eta^p_{\sigma,k}\,dv_g. \tag{1.51}$$

Para o termo do lado direito da igualdade em (1.49), pelo Teorema do Valor Médio,

$$\begin{aligned}
\frac{r}{r-q_k}\left|\frac{\int_M u_k^{q_k}\eta^{q_k}_{\sigma,k}\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}-\frac{\int_M u_k^{q_k}\eta^{r}_{\sigma,k}\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}\right| &\leq \frac{r}{r-q_k}\frac{\int_M u_k^{q_k}|\eta^{q_k}_{\sigma,k}-\eta^r_{\sigma,k}|dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}\\
&\leq r\frac{\int_M u_k^{q_k}|\log(\eta_{\sigma,k})|\eta^{\xi_k}_{\sigma,k}\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}\\
&\leq c\frac{\int_{B(x_k,\sigma t_k)\backslash B(x_k,\sigma t_k/2)} u_k^{q_k}\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}\\
&= c\int_{B(0;\sigma)\backslash B(0;\sigma/2)}\varphi_k^{q_k}\,dh_k,
\end{aligned}$$

onde $c>0$ é uma constante positiva e $\xi_k\in(q_k,r)$. Tomando $k\to\infty$ e após isto $\sigma\to\infty$, a desigualdade anterior implica em

$$\lim_{\sigma,k\to\infty}\frac{r}{r-q_k}\frac{\int_M u_k^{q_k}\eta^r_{\sigma,k}\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}=\lim_{\sigma,k\to\infty}\frac{r}{r-q_k}\frac{\int_M u_k^{q_k}\eta^{q_k}_{\sigma,k}\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}. \tag{1.52}$$

Necessitamos agora que os termos em $L^p(M)$ que aparecem na equação de Euler-Lagrange tendam a 0 quando k tende para o infinito, isto é, provemos que

$$\lim_{k\to\infty} D_kA_k^{\frac{\tau}{p}}\|u_k\|_p^\tau=0. \tag{1.53}$$

Com efeito, tomando u_k como função teste em (1.29) e por (1.32),

$$\left(A_{ent}-\frac{1}{k}\right)^{\frac{p}{\tau}}A_k\int_M|\nabla_g u_k|^p\,dv_g+D_kA_k^{\frac{\tau}{p}}\left(\int_M u_k^p\,dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}\leq 1. \tag{1.54}$$

Pela definição da constante ótima Riemanniana de r-entropia e procedendo como em (1.15),

$$1 \leq \left((A_{ent} + \varepsilon) \left(\int_M |\nabla_g u_k|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B_\varepsilon \left(\int_M u_k^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right)$$

$$\times \left(\int_M u_k^{q_k} \, dv_g \right)^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}}. \tag{1.55}$$

Logo, usando (1.54) em (1.55),

$$\begin{aligned} 1 \quad &\leq \quad \left[\left(\frac{A_{ent} + \varepsilon}{A_{ent} - \frac{1}{k}} \right) \left(\left(A_{ent} - \frac{1}{k} \right)^{\frac{p}{\tau}} \int_M |\nabla_g u_k|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B_\varepsilon \left(\int_M u_k^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right] \times \\ &\times \quad \left(\int_M u_k^{q_k} \, dv_g \right)^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}} \\ &\leq \quad \left[\frac{A_{ent} + \varepsilon}{A_{ent} - \frac{1}{k}} \left(A_k^{-1} - D_k A_k^{\frac{\tau}{p} - 1} \left(\int_M u_k^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right)^{\frac{\tau}{p}} + B_\varepsilon \left(\int_M u_k^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right] A_k^{\frac{\tau}{p}} \\ &= \quad \left[\frac{A_{ent} + \varepsilon}{A_{ent} - \frac{1}{k}} \left(1 - D_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \left(\int_M u_k^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right)^{\frac{\tau}{p}} + B_\varepsilon A_k^{\frac{\tau}{p}} \left(\int_M u_k^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right] \end{aligned} \tag{1.56}$$

Como B_ε não depende de k - já que o mesmo provém da desigualdade Riemanniana de r-entropia com ε - e tomando u_k como função teste em (1.29),

$$A_k^{\frac{\tau}{p}} \left(\int_M u_k^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \leq \frac{1}{D_k} \to 0 \text{ quando } k \to \infty,$$

e assim,

$$\lim_{k \to \infty} B_\varepsilon A_k^{\frac{\tau}{p}} \left(\int_M u_k^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} = 0. \tag{1.57}$$

Tomando isto em conta, fazendo $k \to \infty$ e a seguir $\varepsilon \to 0$ em (1.56), obtemos

$$1 \leq \left(1 - \lim_{k \to \infty} D_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \left(\int_M u_k^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right)^{\frac{\tau}{p}},$$

isto é,

$$\lim_{k \to \infty} D_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \left(\int_M u_k^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} = 0, \tag{1.58}$$

o que prova (1.53). Como $\|u_k\eta_{\sigma,k}\|_p^\tau \le \|u_k\|_p^\tau$, obtemos

$$\lim_{k\to\infty} D_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \|u_k\eta_{\sigma,k}\|_p^\tau = 0. \tag{1.59}$$

Juntando (1.50), (1.51), (1.52) e (1.59) em (1.49),

$$\lim_{\sigma,k\to\infty} \lambda_k A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta_{\sigma,k}^p \, dv_g - \lim_{\sigma,k\to\infty} \left(\frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{\sigma,k}^{q_k} \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} \right)$$

$$= \frac{r(p-n)+np}{np} \lim_{\sigma,k\to\infty} \frac{r}{r-q_k} \left[\int_M u_k^r \eta_{\sigma,k}^r \, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{\sigma,k}^{q_k} \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} \right]. \tag{1.60}$$

Utilizaremos agora a desigualdade Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg para obtermos estimativas que se relacionam com a igualdade acima. Antes disso, façamos uma estimativa sobre o limite quando $k \to \infty$ de $\lambda_k^{\frac{\tau}{p}}$, definido em (1.30). Aplicando u_k como função teste em (1.29),

$$\lambda_k A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \, dv_g + D_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \left(\int_M u_k^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} = 1.$$

Combinando isto com (1.55), obtemos de forma análoga ao que fizemos em (1.56) que

$$1 \le \left[\frac{A_{ent}+\varepsilon}{\lambda_k^{\frac{\tau}{p}}} \left(1 - D_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \left(\int_M u_k^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right)^{\frac{\tau}{p}} + B_\varepsilon A_k^{\frac{\tau}{p}} \left(\int_M u_k^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right]$$

Pelo limites estimados em (1.57) e por (1.58), segue que

$$1 \le \frac{A_{ent}+\varepsilon}{\lambda_k^{\frac{\tau}{p}}}.$$

Por isto e pela estimativa que fizemos para $\lambda_k^{\frac{\tau}{p}}$ em (1.32), obtemos

$$A_{ent} - \frac{1}{k} \le \lambda_k^{\frac{\tau}{p}} \le A_{ent} + \varepsilon.$$

Tomando $\varepsilon \to 0$ e logo após $k \to \infty$, concluímos que

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k^{\frac{\tau}{p}} = A_{ent}. \tag{1.61}$$

Agora, utilizaremos a desigualdade Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg para obtermos outra equação com os mesmos termos de (1.60) e criaremos um sistema para provarmos a validade de (1.34). Com efeito, utilizando $u_k\eta_{\sigma,k}$ na desigualdade (1.55),

$$\left(\int_M (u_k\eta_{\sigma,k})^r \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{r\theta_k}} \leq \left((A_{ent}+\varepsilon)\left(\int_M |\nabla_g u_k\eta_{\sigma,k}|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} + B_\varepsilon\left(\int_M (u_k\eta_{\sigma,k})^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}\right)$$

$$\times\left(\int_M (u_k\eta_{\sigma,k})^{q_k} \, dv_g\right)^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}} .$$

Fazendo um rearranjo desses termos, aplicando log e por B_ε não depender de $k \in \mathbb{N}$, já que este provém da desigualdade Riemanniana de entropia, obtemos para k suficientemente grande

$$\begin{aligned}
\frac{\tau}{\theta_k}\log\left[\frac{\|u_k\eta_{\sigma,k}\|_r}{\|u_k\eta_{\sigma,k}\|_{q_k}}\right] &\leq \log\left[\frac{(A_{ent}+\varepsilon)\|\nabla_g(u_k\eta_{\sigma,k})\|_p^\tau + B_\varepsilon\|u_k\eta_{\sigma,k}\|_p^\tau}{\|u_k\eta_{\sigma,k}\|_{q_k}^\tau}\right] \\
&\leq \log\left[\frac{(A_{ent}+\varepsilon)A_k^{\frac{\tau}{p}}\|\nabla_g(u_k\eta_{\sigma,k})\|_p^\tau + D_k A_k^{\frac{\tau}{p}}\|u_k\eta_{\sigma,k}\|_p^\tau}{\|u_k\eta_{\sigma,k}\|_{q_k}^\tau \cdot \frac{\|u_k\|_{q_k}^{\frac{\tau}{\theta_k}}}{\|u_k\|_{q_k}^\tau}}\right],
\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{\tau}{\theta_k}\log\left[\frac{\|u_k\eta_{\sigma,k}\|_r}{\left(\frac{\|u_k\eta_{\sigma,k}\|_{q_k}}{\|u_k\|_{q_k}}\right)}\right] \leq \log\left[\frac{(A_{ent}+\varepsilon)A_k^{\frac{\tau}{p}}\|\nabla_g(u_k\eta_{\sigma,k})\|_p^\tau + D_k A_k^{\frac{\tau}{p}}\|(u_k\eta_{\sigma,k})\|_p^\tau}{\left(\frac{\|u_k\eta_{\sigma,k}\|_{q_k}}{\|u_k\|_{q_k}}\right)^\tau}\right]. \quad (1.62)$$

Estudemos, inicialmente, o lado esquerdo de (1.62). Pelo Teorema do Valor Médio,

$$\begin{aligned}
\log(\|u_k\eta_{\sigma,k}\|_r) - \log\left(\frac{\|u_k\eta_{\sigma,k}\|_{q_k}}{\|u_k\|_{q_k}}\right) &= \frac{1}{r}\left[\log(\|u_k\eta_{\sigma,k}\|_r^r) - \log\left(\frac{\|u_k\eta_{\sigma,k}\|_{q_k}^{q_k}}{\|u_k\|_{q_k}^{q_k}}\right)\right] \\
&+ \frac{q_k-r}{q_k r}\log\left(\frac{\|u_k\eta_{\sigma,k}\|_{q_k}^{q_k}}{\|u_k\|_{q_k}^{q_k}}\right) \\
&= \frac{1}{rY_{\sigma,k}}\left[\|u_k\eta_{\sigma,k}\|_r^r - \frac{\|u_k\eta_{\sigma,k}\|_{q_k}^{q_k}}{\|u_k\|_{q_k}^{q_k}}\right] \\
&+ \frac{q_k-r}{q_k r}\log\left(\frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k} \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g}\right),
\end{aligned}$$

onde $Y_{\sigma,k}$ está entre $\|u_k\eta_{\sigma,k}\|_r^r$ e $\dfrac{\|u_k\eta_{\sigma,k}\|_{q_k}^{q_k}}{\|u_k\|_{q_k}^{q_k}}$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
\frac{\tau}{\theta_k}\log\left[\frac{\|u_k\eta_{\sigma,k}\|_r}{\left(\frac{\|u_k\eta_{\sigma,k}\|_{q_k}}{\|u_k\|_{q_k}}\right)}\right] &= \frac{\tau(q_k(p-n)+np)}{np(r-q_k)}\frac{1}{Y_{\sigma,k}}\left[\int_M u_k^r\eta_{\sigma,k}^r\,dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k}\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}\right]\\
&- \frac{\tau(q_k(p-n)+np)}{npq_k}\log\left(\frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k}\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}\right)
\end{aligned}
$$

Tomando $\sigma, k\to\infty$ na desigualdade acima,

$$
\lim_{\sigma,k\to\infty}\frac{\tau}{\theta_k}\log\left[\frac{\|u_k\eta_{\sigma,k}\|_r}{\left(\frac{\|u_k\eta_{\sigma,k}\|_{q_k}}{\|u_k\|_{q_k}}\right)}\right] = \frac{\tau(r(p-n)+np)}{nprY}\lim_{\sigma,k\to\infty}\frac{r}{r-q_k}\left[\int_M u_k^r\eta_{\sigma,k}^r\,dv_g - \right.
$$

$$
\left. - \frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k}\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}\right] - \frac{\tau(r(p-n)+np)}{npr}\log\left(\lim_{\sigma,k\to\infty}\frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k}\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}\right), \tag{1.63}
$$

onde Y é tal que valem os seguintes limites

$$
Y = \lim_{\sigma,k\to\infty} Y_{\sigma,k} = \lim_{\sigma,k\to\infty}\frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k}\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g} = \lim_{\sigma,k\to\infty}\int_M u_k^r\eta_{\sigma,k}^r\,dv_g.
$$

Com efeito, reescrevendo Y em termos de φ_k,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k}\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g} - \int_M u_k^r\eta_{\sigma,k}^r\,dv_g\right| &= \left|\int_{B(0;\sigma)}\varphi_k^{q_k}\tilde{\eta}_{\sigma,k}^{q_k}\,dh_k - \int_{B(0;\sigma)}\varphi_k^r\tilde{\eta}_{\sigma,k}^r\,dh_k\right|\\
&\le \left|\int_{B(0;\sigma)}\varphi_k^{q_k}\,dh_k - \int_{B(0;\sigma)}\varphi_k^r\,dh_k\right|,
\end{aligned}
$$

onde $\tilde{\eta}_{\sigma,k}(x) = \eta_{\sigma,k}(\exp_{x_k}(t_k x))$. Tomando $\sigma, k\to\infty$ na desigualdade acima e utilizando que $q_k\to r$ e $\varphi_k\to\varphi$ em $C^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ quando $k\to\infty$, obtemos o resultado desejado.

Façamos agora uma análise do lado direito de (1.62). Da desigualdade ε-Young e da desigualdade $(x+y)^p \le x^p + cx^{p-1}y + cy^p$, válida para $x, y\ge 0$ temos, para $0<\varepsilon<1$,

$$
A_k\int_M |\nabla_g(u_k\eta_{\sigma,k})|^p\,dv_g \le (1+\varepsilon)A_k\int_M |\nabla_g u_k|^p\eta_{\sigma,k}^p\,dv_g + c(\varepsilon)A_k\int_M u_k^p|\nabla_g\eta_{\sigma,k}|^p dv_g.
$$

Tomando $\sigma, k\to\infty$, após isto $\varepsilon\to 0$ e por (1.48),

$$
\lim_{\sigma,k\to\infty}\lambda_k A_k\int_M |\nabla_g(u_k\eta_{\sigma,k})|^p\,dv_g \le \lim_{\sigma,k\to\infty}\lambda_k A_k\int_M |\nabla_g u_k|^p\eta_{\sigma,k}^p\,dv_g. \tag{1.64}
$$

Finalmente, tomando $\sigma, k \to \infty$ e após isto $\varepsilon \to 0$ em (1.62) e por (1.59), (1.61), (1.63) e (1.64),

$$\frac{r(p-n)+np}{nrY} \lim_{\sigma,k\to\infty} \frac{r}{r-q_k}\left[\int_M u_k^r \eta_{\sigma,k}^r \, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k}\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right] \leq$$

$$\leq \log\left(\lim_{\sigma,k\to\infty} \lambda_k A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta_{\sigma,k}^p \, dv_g\right) + \left(\frac{r(p-n)+np}{nr} - \frac{p}{r}\right)\times$$

$$\times \log\left(\lim_{\sigma,k\to\infty} \frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k}\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right). \tag{1.65}$$

Escrevendo

$$X = \lim_{\sigma,k\to\infty}\left(\lambda_k A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta_{\sigma,k}^p dv_g\right), \quad Y = \lim_{\sigma,k\to\infty} \frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g}$$

e

$$Z = \lim_{\sigma,k\to\infty} \frac{r}{r-q_k}\left[\int_M u_k^r \eta_{\sigma,k}^r \, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k}\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right],$$

temos que $X, Y, Z \leq 1$ e podemos reescrever (1.60) e (1.65) como

$$\begin{cases} X - Y = \frac{n(p-r)+pr}{np} Z, \\ \frac{n(p-r)+pr}{nr} Z \leq Y \log X + \left(\frac{n(p-r)+pr}{nr} - \frac{p}{r}\right) Y \log Y. \end{cases} \tag{1.66}$$

Observe que provar que u_k concentra em $L^r(M)$ (1.34) é demonstrar que $Y = 1$. Como $\|u_k\|_r = 1$, provaremos que Y se anula no complementar do seu domínio, isto é, estudaremos o comportamento de u_k no complementar de $B(x_k; \sigma t_k)$.

Seja $\xi_{\sigma,k} = 1 - \eta_{\sigma,k}$, onde $\eta_{\sigma,k}$ foi definida anteriormente. De forma análoga a qual procedemos acima, verificamos que (1.60) e (1.65) valem com $\xi_{\sigma,k}$ no lugar de $\eta_{\sigma,k}$, isto é,

$$\lim_{\sigma,k\to\infty} \lambda_k A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \xi_{\sigma,k}^p \, dv_g - \lim_{\sigma,k\to\infty}\left(\frac{\int_M u_k^{q_k}\xi_{\sigma,k}^{q_k}\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right) = \frac{r(p-n)+np}{np}\times$$

$$\times \lim_{\sigma,k\to\infty} \frac{r}{r-q_k}\left[\int_M u_k^r \xi_{\sigma,k}^r \, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k}\xi_{\sigma,k}^{q_k}\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right],$$

e

$$\frac{r(p-n)+np}{nrY}\lim_{\sigma,k\to\infty}\frac{r}{r-q_k}\left[\int_M u_k^r\xi_{\sigma,k}^r\, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k}\xi_{\sigma,k}^{q_k}\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right] \leq$$

$$\leq \log\left(\lim_{\sigma,k\to\infty}\lambda_k A_k\int_M |\nabla_g u_k|^p\xi_{\sigma,k}^p\, dv_g\right)+\left(\frac{r(p-n)+np}{nr}-\frac{p}{r}\right)\log\left(\lim_{\sigma,k\to\infty}\frac{\int_M u_k^{q_k}\xi_{\sigma,k}^{q_k}\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right).$$

Similarmente, escrevendo

$$\tilde{X}=\lim_{\sigma,k\to\infty}\left(\lambda_k A_k\int_M |\nabla_g u_k|^p\xi_{\sigma,k}^p dv_g\right),\quad \tilde{Y}=\lim_{\sigma,k\to\infty}\frac{\int_M u_k^{q_k}\xi_{\sigma,k}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g},$$

e

$$\tilde{Z}=\lim_{\sigma,k\to\infty}\frac{r}{r-q_k}\left[\int_M u_k^r\xi_{\sigma,k}^r\, dv_g-\frac{\int_M u_k^{q_k}\xi_{\sigma,k}^{q_k}\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right],$$

obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases}\tilde{X}-\tilde{Y}=\frac{n(p-r)+pr}{np}\tilde{Z},\\ \frac{n(p-r)+pr}{nr}\tilde{Z}\leq \tilde{Y}\log\tilde{X}+\left(\frac{n(p-r)+pr}{nr}-\frac{p}{r}\right)\tilde{Y}\log\tilde{Y}.\end{cases} \tag{1.67}$$

Afirmamos que

$$Y+\tilde{Y}=X+\tilde{X}=1. \tag{1.68}$$

Provaremos inicialmente que $Y+\tilde{Y}=1$. Com efeito,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\int_M u_k^{q_k}(1-\eta_{\sigma,k}^{q_k})\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}-\frac{\int_M u_k^{q_k}\xi_{\sigma,k}^{q_k}\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right| &\leq \frac{1}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\int_M u_k^{q_k}|1-(\eta_{\sigma,k}^{q_k}+\xi_{\sigma,k}^{q_k})|\, dv_g\\ &\leq \frac{1}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\int_{B(x_k;\sigma t_k)\setminus B(x_k;\sigma t_k/2)} u_k^{q_k}\, dv_g\\ &= \int_{B(0;\sigma)\setminus B(0;\sigma/2)}\varphi_k^{q_k}\, dh_k.\end{aligned}$$

Disto,

$$\lim_{\sigma,k\to\infty}\frac{\int_M u_k^{q_k}(1-\eta_{\sigma,k}^{q_k})\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}=\lim_{\sigma,k\to\infty}\frac{\int_M u_k^{q_k}\xi_{\sigma,k}^{q_k}\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g},$$

e de,

$$1=\frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k}\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}+\frac{\int_M u_k^{q_k}(1-\eta_{\sigma,k}^{q_k})\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g},$$

obtemos $Y+\tilde{Y}=1$. Mostremos agora que $X+\tilde{X}=1$. Como

$$\lambda_k A_k\left|\int_M |\nabla_g u_k|^p\xi_{\sigma,k}^p\, dv_g-\int_M |\nabla_g u_k|^p(1-\eta_{\sigma,k}^p)\, dv_g\right|\leq$$

$$\leq cA_k \int_M |\nabla_g u_k|^p |1 - (\eta^p_{\sigma,k} + \xi^p_{\sigma,k})| \, dv_g \leq cA_k \int_{B(x_k;\sigma t_k)\setminus B(x_k;\sigma t_k/2)} |\nabla_g u_k|^p \, dv_g \leq$$

$$\leq c \int_{B(0;\sigma)\setminus B(0;\sigma/2)} |\nabla_{h_k} \varphi_k|^p \, dh_k.$$

Portanto,

$$\lim_{\sigma,k\to\infty} \lambda_k A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \xi^p_{\sigma,k} \, dv_g = \lim_{\sigma,k\to\infty} \lambda_k A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p (1 - \eta^p_{\sigma,k}) \, dv_g. \tag{1.69}$$

Agora, usando u_k como função teste em (1.29),

$$\begin{aligned}
1 &= \lambda_k A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \, dv_g + D_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \|u_k\|_p^{\tau-p} \int_M u_k^p \, dv_g \\
&= \left(\lambda_k A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta^p_{\sigma,k} \, dv_g + D_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \|u_k\|_p^{\tau-p} \int_M u_k^p \eta^r_{\sigma,k} \, dv_g \right)
\end{aligned}$$

$$+\lambda_k A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p (1 - \eta^p_{\sigma,k}) \, dv_g + D_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \|u_k\|_p^{\tau-p} \int_M u_k^p (1 - \eta^r_{\sigma,k}) \, dv_g.$$

Usando isto, (1.69) e (1.59), temos que $X + \tilde{X} = 1$.

Finalmente, mostremos que $Y = 1$. Por (1.66), (1.67) e (1.68), $Z + \tilde{Z} = 0$. Consequentemente,

$$\begin{cases} Z \geq 0 \text{ e } \tilde{Z} \leq 0, \text{ ou} \\ Z \leq 0 \text{ e } \tilde{Z} \geq 0. \end{cases}$$

Suponhamos, inicialmente, que $\tilde{Z} \geq 0$. Disto e por $r \leq p$ em (1.67), segue que

$$0 \leq \tilde{Y} - \tilde{X} + \tilde{Y} \log \tilde{X} + \left(\frac{n(p-r) + pr}{nr} - \frac{p}{r} \right) \tilde{Y} \log \tilde{Y}.$$

Definimos $f : (0,1]\times(0,1] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y) = y - x + y\log x + \left(\frac{n(p-r)+pr}{nr} - \frac{p}{r}\right) y \log y$. Fixado $y \in (0,1]$, os pontos de máximo de f são os pontos do tipo $y = x$. Portanto,

$$\tilde{Y} - \tilde{Y} + \tilde{Y} \log \tilde{Y} + \left(\frac{n(p-r) + pr}{nr} - \frac{p}{r} \right) \tilde{Y} \log \tilde{Y} \geq$$

$$\geq \tilde{Y} - \tilde{X} + \tilde{Y} \log \tilde{X} + \left(\frac{n(p-r) + pr}{nr} - \frac{p}{r} \right) \tilde{Y} \log \tilde{Y} \geq 0,$$

isto é,

$$\left(1 + \frac{n(p-r) + pr}{nr} - \frac{p}{r} \right) \tilde{Y} \log \tilde{Y} = \frac{p}{n} \tilde{Y} \log \tilde{Y} \geq 0. \tag{1.70}$$

Consequentemente,

$$\tilde{Y} \log \tilde{Y} \geq 0.$$

Como $\tilde{Y} < 1$, já que $Y > 0$, teremos que $\tilde{Y} = 0$ e por (1.68), $Y = 1$.

Para o caso $\tilde{Z} \leq 0$, teremos que $Z = 0$ e procedendo analogamente ao que fizemos acima com Z ao invés de $\tilde{Z}$, temos que $Y \log Y \geq 0$. Como $Y > 0$, garantimos que $\log Y \geq 0$, e assim, $Y = 1$. Portanto,

$$\lim_{\sigma,k\to\infty} \int_{B(x_k;\sigma t_k)} u_k^r \, dv_g = \lim_{\sigma,k\to\infty} \int_M u_k^r \eta_{\sigma,k}^r \, dv_g = Y = 1,$$

o que prova (1.34).

Argumento final: Para finalizarmos o Capítulo 1, provaremos que vale a igualdade entre as constantes ótimas, ao obtermos uma contradição. Necessitaremos do resultado de concentração combinado com a desigualdade ótima Euclidiana de r-entropia e, para isto, teremos que estimar X e Z do passo anterior.

Como $Y = 1$, temos que $\tilde{Y} = 0$. Por (1.67),

$$0 \leq \tilde{X} \leq \frac{n(p-r)+pr}{np} \tilde{Z} \leq 0,$$

isto é, $\tilde{X} = 0$. Por (1.68), $X = 1$. Ainda, por (1.66), $Z = 0$. Agora, observamos que

$$X = \lim_{\sigma,k\to\infty} \lambda_k A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta_{\sigma,k}^p \, dv_g = \lim_{\sigma,k\to\infty} \lambda_k A_k \int_{B(x_k;\sigma t_k)} |\nabla_g u_k|^p \, dv_g = 1,$$

$$Y = \lim_{\sigma,k\to\infty} \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{\sigma,k}^{q_k} \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} = \lim_{\sigma,k\to\infty} \int_M u_k^r \eta_{\sigma,k}^r \, dv_g = 1,$$

e

$$Z = \lim_{\sigma,k\to\infty} \frac{r}{r-q_k} \left[\int_M u_k^r \eta_{\sigma,k}^r \, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{\sigma,k}^{q_k} \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} \right] = 0.$$

Da reparametrização feita em (1.36) e por (1.32),

$$\lambda_k A_k \int_{B(x_k;\sigma t_k)} |\nabla_g u_k|^p \, dv_g = \lambda_k \int_{B(0;\sigma)} |\nabla_{h_k} \varphi_k|^p \, dh_k.$$

Tomando em conta (1.44) e que $X = 1$, temos do limite sobre $\lambda_k^{\frac{\tau}{p}}$ estimado em (1.61), da expansão de Cartan e dos resultados de regularidade de Tolksdorf ao tomarmos o limite $k \to \infty$ e a seguir $\sigma \to \infty$,

$$A_{ent}^{\frac{p}{\tau}} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^p \, dx = 1. \tag{1.71}$$

Por uma análise similar,

$$1 = Y = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^r \, dx \tag{1.72}$$

e, pelo Teorema do Valor Médio,

$$\begin{aligned}
0 = Z &= \lim_{\sigma,k\to\infty} \frac{r}{r-q_k}\left[\int_M u_k^r \eta_{\sigma,k}^r \, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k}\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right] \\
&= \lim_{\sigma,k\to\infty} \frac{r}{r-q_k}\left[\int_{B(0;\sigma)} \varphi_k^r \, dh_k - \int_{B(0;\sigma)} \varphi_k^{q_k}\, dh_k\right] \\
&= \lim_{\sigma,k\to\infty} r \int_{B(0;\sigma)} \varphi_k^{\rho_k} \log\varphi_k \, dh_k \\
&= \lim_{\sigma,k\to\infty} \int_{B(0;\sigma)} \varphi_k^{\rho_k} \log\varphi_k^r \, dh_k \\
&= \lim_{\sigma,k\to\infty} \int_{B(0;\sigma)} \varphi_k^{r} \log\varphi_k^r \, dh_k \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^r \log\varphi^r \, dx,
\end{aligned}$$

onde $\rho_k \in (q_k, r)$. Por (1.72), $\|\varphi\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = 1$ e por (1.44), $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Logo, pela desigualdade ótima Euclidiana de r-entropia, de (1.71) e da última igualdade, segue que

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^r \log\varphi^r \, dx \le \frac{nr}{r(p-n)+np}\log\left(A_e(p,r)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi|^p \, dx\right),$$

isto é,

$$0 \le \log\left(\frac{A_e(p,r)}{A_{ent}^{\frac{p}{\tau}}} A_{ent}^{\frac{p}{\tau}} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi|^p \, dx\right) = \log\left(\frac{A_e(p,r)}{A_{ent}^{\frac{p}{\tau}}}\right).$$

Como $\log\left(\frac{A_e(p,r)}{A_{ent}^{\frac{p}{\tau}}}\right) \ge 0$, o argumento no logaritmo natural deve ser maior ou igual que 1, ou seja,

$$A_e(p,r) \ge A_{ent}^{\frac{p}{\tau}},$$

o que contraria a nossa suposição inicial, que foi supor que $A_e(p,r) < A_{ent}^{\frac{p}{\tau}}$. Portanto,

$$A_e(p,r)^{\frac{\tau}{p}} = A_{ent}, \tag{1.73}$$

o que finaliza a demonstração do Teorema 1.1 e encerra este capítulo.

Capítulo 2

A DESIGUALDADE ÓTIMA RIEMANNIANA DE ENTROPIA

Neste capítulo, provaremos a validade da desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia. Para tal, veremos a desigualdade de r-entropia como um caso limite da desigualdade ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg. Por sua vez, a desigualdade ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg afirma que dados $1 \leq q_k < r \leq p < n$, onde $q_k = r - \frac{1}{k}$ e $1 \leq \tau \leq \min\{2, p\}$,

$$\left(\int_M |u|^r \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{r\theta_k}} \leq \left[A(p,q_k,r)\left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} + B(p,q_k,r)\left(\int_M |u|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}\right] \times$$

$$\times \left(\int_M |u|^{q_k} \, dv_g\right)^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}}, \qquad (\mathrm{GN}_R(A(p,q_k,r), B(p,q_k,r)))$$

para toda função $u \in H^{1,p}(M)$ e $\theta_k = \frac{np(r-q_k)}{r(q_k(p-n)+np)} \in (0,1)$, onde $A(p,q_k,r)$ é a primeira constante ótima desta desigualdade e $B(p,q_k,r)$ a segunda constante ótima. A validade dessa desigualdade pode ser encontrada em [14].

Reorganizando os termos da desigualdade acima, obtemos

$$\frac{\tau}{\theta_k}\log\left(\frac{\|u\|_r}{\|u\|_{q_k}}\right) \leq \log\left(\frac{A(p,q_k,r)\|\nabla_g u\|_p^\tau + B(p,q_k,r)\|u\|_p^\tau}{\|u\|_{q_k}^\tau}\right).$$

Ao tomarmos $k \to \infty$, estamos fazendo $q_k \to r^-$. Procedendo no mesmo sentido que em (1.18), segue que

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\tau}{\theta_k}\log\left(\frac{\|u\|_{L^r(M)}}{\|u\|_{L^{q_k}(M)}}\right) = \frac{\tau(r(p-n)+np)}{npr}\int_M \frac{|u|^r}{\|u\|_{L^r(M)}^r}\log\left(\frac{|u|^r}{\|u\|_{L^r(M)}^r}\right) dv_g.$$

Além disto, temos que $A_e(p,q_k,r) = A(p,q_k,r)^{\frac{\tau}{p}}$ (trabalho em Preprint de Ceccon et al) e que $A_{ent} = A_e(p,r)^{\frac{\tau}{p}}$, onde $A_e(p,q_k,r)$ é a constante ótima Euclideana de

Gagliardo-Nirenberg, $A(p, q_k, r)$ é a primeira constante ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg, $A_e(p, r)$ é a constante ótima Euclideana de r-entropia e A_{ent} é a primeira constante ótima Riemanniana de r-entropia. Ainda, como demonstramos no Capítulo 1,

$$\lim_{k \to \infty} A(p, q_k, r) = A_{ent}.$$

Portanto, para obtermos a validade da desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia, devemos mostrar que, a menos de subsequência, $(B(p, q_k, r))$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$, tema principal deste capítulo e todos os resultados que seguem neste capítulo são consequência disto.

A demonstração que esta sequência é limitada seguirá por absurdo, ao supormos que a sequência de segundas constantes ótimas Riemannianas de Gagliardo-Nirenberg é não limitada, o que faremos na seção 2.1. Esta seção está distribuída em quatro subseções: Na primeira, iremos supor que a subsequência de segundas constantes ótimas Riemannianas de Gagliardo-Nirenberg é ilimitada e combinaremos com a desigualdade ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg para obtermos um funcional. Tal funcional será minimizado para obtermos uma equação de Euler-Lagrange - no mesmo sentido que fizemos no capítulo anterior -, o que faremos na subseção 2.1.1.

Na subseção 2.1.2 utilizaremos a equação de Euler-Lagrange para obter uma sequência de pontos que concentram em $L^r(M)$, de forma similar ao que fizemos no capítulo anterior. Como antes, a demonstração dos resultados de concentração utilizam técnicas clássicas de EDP's elípticas como teoria de regularidade de Tolksdorf e técnica de iteração de Moser.

A partir daqui começam as diferenças em relação ao Capítulo 1. Para criarmos um absurdo com as suposições iniciais, um resultado importante será provar que uma sequência de funções obtidas na subseção 2.1.2 - que concentram em torno de uma bola em $L^r(M)$ - convergem para 0 pontualmente a partir da métrica em M. Traremos este resultado como um lema, denomidado Lema da Distância, sendo este o tema da subseção 2.1.3. Argumentaremos a validade desse lema por contradição.

Encerrando a seção 2.1, a partir da desigualdade ótima Euclideana de Gagliardo-Nirenberg, do Lema da Distância e da expansão de Cartan da métrica g em coordenadas normais argumentaremos que $(B(p, q_k, r))$ é uma sequência limitada.

Na seção 2.2, provamos a existência da desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia ao obtermos a respectiva desigualdade como um caso limite quando $k \to \infty$ na desigualdade ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg $(GN_R(A(p, q_k, r), B(p, q_k, r)))$. Com isto poderemos definir a primeira e a segunda desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia, da mesma forma que mencionamos na introdução deste trabalho em $(L_R(A_{ent}, B))$ e em (31).

Por fim, na seção 2.3 provamos a existência de funções extremais, isto é, que vale a igualdade na segunda desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia, para os casos $1 \leq \tau < \min\{2, p\}$ ou $\tau = p < 2$. Utilizaremos os mesmos argumentos da seção 2.1 para concluírmos que uma sequência de funcionais convergem para 0 em norma em $L^{q_k}(M)$. Com isto e com argumentos de minimização obteremos a igualdade desejada.

2.1 A limitação de uma família de segundas constantes ótimas Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg

Graças aos resultados do Capítulo 1, vimos que $A_{ent} = A_e(p, r)^{\frac{\tau}{p}}$, onde A_{ent} é a constante ótima Riemanniana de r-entropia e $A_e(p, r)$ é a constante ótima Euclideana de r-entropia. Em particular, $(A(p, q_k, r))$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$. A primeira desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia afirma que existe $B \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $u \in H^{1,p}(M)$ com $\|u\|_{L^r(M)} = 1$,

$$Ent_{dv_g}(|u|^r) \leq$$

$$\leq \frac{npr}{\tau(r(p-n)+np)} \log \left(A_{ent} \left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right), \qquad (2.1)$$

onde definimos

$$Ent_{dv_g}(|u|^r) = \int_M |u|^r \log |u|^r \, dv_g.$$

Como na desigualdade acima a expressão A_{ent} é dada por um ínfimo, não necessariamente a desigualdade vale se fizermos os valores de A se aproximarem de A_{ent} em

$(L_R(A,B))$, pois os respectivos valores de B na desigualdade poderiam estar tendendo ao infinito. Para demonstrarmos a validade de (2.1), derivaremos a desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia como um caso limite da desigualdade ótima Riemanniana de Gagliardo Nirenberg, como mencionamos na introdução deste capítulo e na introdução desta tese. Como q_k varia, obtemos uma sequência de primeiras e segundas constantes ótimas Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg.

No Capítulo 1, demonstramos que a sequência de primeiras constantes ótimas Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg é convergente. Disto, resta demonstrar que a sequência de segundas constantes ótimas Riemannianas de Gagliardo-Nirenberg é convergente e, para isto, demonstraremos que tal sequência é limitada. Disto e do Teorema de Bolsano-Weierstrass, a menos de subsequência, $(B(p,q_k,r))$ é uma sequência convergente. Logo, devemos provar o seguinte teorema:

Teorema 2.1. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana compacta, suave, sem bordo e de dimensão $n \geq 2$. Consideremos $1 \leq \tau \leq \min\{2,p\}$, $1 \leq q_k < r \leq p < n$, onde $q_k = r - \frac{1}{k}$ e $B(p,q_k,r)$ a segunda constante ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg. Então $(B(p,q_k,r))$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$.*

Prova: Como constantes positivas pertencem a $H^{1,p}(M)$, tomando uma constante positiva $c \in H^{1,p}(M)$ na desigualdade ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg,

$$B(p,q_k,r) \geq |M|^{-\frac{\tau}{n}}. \tag{2.2}$$

Com efeito, se $u = c$, onde $c > 0$ é uma constante, o termo gradiente na desigualdade ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg se anula, e assim,

$$c^{\frac{\tau}{\theta_k}} |M|^{\frac{\tau}{r\theta_k}} \leq B(p,q_k,r) c^{\tau} |M|^{\frac{\tau}{p}} c^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{\theta_k}} |M|^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}},$$

isto é,

$$B(p,q_k,r) \geq |M|^{\frac{\tau}{p}\left(\frac{p}{r\theta_k} - \frac{p(1-\theta_k)}{q_k\theta_k} - 1\right)}.$$

Como,

$$\frac{p}{r\theta_k} - \frac{p(1-\theta_k)}{q_k\theta_k} - 1 = \frac{p}{r}\frac{r(q_k(p-n)+np)}{np(r-q_k)} - \frac{r(p-n)+np}{n(r-q_k)} - 1 = -\frac{p}{n},$$

obtemos

$$B(p, q_k, r) \geq |M|^{-\frac{\tau}{n}}.$$

De (2.2), caso $B(p, q_k, r) = |M|^{-\frac{\tau}{n}}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então $(B(p, q_k, r))$ é limitado e não há nada a fazer. No que segue, supomos que

$$B(p, q_k, r) > |M|^{-\frac{\tau}{n}}. \tag{2.3}$$

2.1.1 A equação de Euler-Lagrange

A partir de (2.3) e da desigualdade ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg, minimizaremos um funcional para obtermos uma equação de Euler-Lagrange que será o norte para o desenvolvimento deste capítulo, assim como fizemos no Capítulo 1. Seja $(\gamma_k) \subset \mathbb{R}$ uma sequência positiva tal que, para k suficientemente grande,

$$B(p, q_k, r) - \gamma_k > |M|^{-\frac{\tau}{n}}, \tag{2.4}$$

onde $\gamma_k \to 0$ quando $k \to \infty$.

Definimos $\mathscr{H} = \{u \in H^{1,p}(M);\ \|u\|_p = 1\}$ e o funcional $\mathscr{I}_k : \mathscr{H} \to \mathbb{R}$, dado por

$$\mathscr{I}_k(u) = \left[A(p, q_k, r) \left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + (B(p, q_k, r) - \gamma_k) \right] \left(\int_M |u|^{q_k} \, dv_g \right)^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}} \times$$

$$\times \left(\int_M |u|^r \, dv_g \right)^{-\frac{\tau}{r\theta_k}}. \tag{2.5}$$

Como a segunda constante ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg é dada por um ínfimo e por $\gamma_k > 0$, existe uma função $u_0 \in \mathscr{H}$ tal que $\mathscr{I}_k(u_0) < 1$. Consideremos uma sequência $(u_j) \subset \mathscr{H}$ tal que

$$\mathscr{I}_k(u_j) \to i_k = \inf_{u \in \mathscr{H}} \mathscr{I}_k(u) \text{ quando } j \to \infty.$$

Como existe $u_0 \in \mathscr{H}$ tal que $\mathscr{I}_k(u_0) < 1$, o ínfimo acima também deve ser menor que 1. Consideremos $\sigma > 1$ tal que $i_k < \sigma i_k < 1$. Disto,

$$\mathscr{I}_k(u_j) < \sigma i_k, \text{ para } j \text{ suficientemente grande.} \tag{2.6}$$

Por outro lado, da desigualdade ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg e por $u_j \in \mathscr{H}$,

$$-\sigma i_k \geq \left[-A(p,q_k,r)\sigma i_k \left(\int_M |\nabla_g u_j|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} - B(p,q_k,r)\sigma i_k\right] \left(\int_M |u_j|^{q_k} \, dv_g\right)^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}} \times$$

$$\times \left(\int_M |u_j|^r \, dv_g\right)^{-\frac{\tau}{r\theta_k}}. \tag{2.7}$$

Combinando (2.6) com (2.7),

$$(1-\sigma i_k)A(p,q_k,r)\left(\int_M |\nabla_g u_j|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} + (1-\sigma i_k)B(p,q_k,r) \leq \gamma_k.$$

Como $(1-\sigma i_k) > 0$, obtemos que (u_j) é limitado em $H^{1,p}(M)$. Portanto,

$$u_j \rightharpoonup \tilde{u}_k \text{ em } H^{1,p}(M) \text{ quando } j \to \infty.$$

Ainda, da imersão compacta de $H^{1,p}(M)$ em $L^s(M)$, para todo $1 < s < p^*$,

$$u_j \to \tilde{u}_k \text{ em } L^s(M) \text{ quando } j \to \infty.$$

Em particular,

$$u_j \to \tilde{u}_k \text{ em } L^{q_k}(M) \cap L^r(M) \cap L^p(M) \text{ quando } j \to \infty.$$

Consequentemente,

$$1 = \lim_{j\to\infty} \|u_j\|_p = \|\tilde{u}_k\|_p,$$

e assim, $\tilde{u}_k \in \mathscr{H}$. Portanto,

$$\mathscr{I}_k(\tilde{u}_k) \leq \liminf_j \mathscr{I}_k(u_j) = \lim_{j\to\infty} \mathscr{I}_k(u_j) = i_k,$$

ou seja

$$i_k = \mathscr{I}_k(\tilde{u}_k). \tag{2.8}$$

Por isto e por $\nabla_g|\tilde{u}_k| = \pm\nabla_g \tilde{u}_k$ quase todo ponto em $\mathscr{H}$, podemos supor que $\tilde{u}_k \geq 0$. Afirmamos que

$$\int_M |\nabla_g \tilde{u}_k|^p \, dv_g \neq 0. \tag{2.9}$$

Procederemos por absurdo, isto é, que $\tilde{u}_k$ é uma constante positiva. Por $\|\tilde{u}_k\|_p =$ 1,

$$1 = \left(\int_M \tilde{u}_k^p \, dv_g\right)^{\frac{1}{p}} = \tilde{u}_k |M|^{\frac{1}{p}},$$

ou seja, $\tilde{u}_k = |M|^{-\frac{1}{p}}$. Por isto e por $1 > i_k = \mathscr{I}_k(\tilde{u}_k)$,

$$\begin{aligned} 1 &> (B(p,q_k,r) - \gamma_k) \cdot \tilde{u}_k^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{\theta_k} - \frac{\tau}{\theta_k}} |M|^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k} - \frac{\tau}{r\theta_k}} \\ &= (B(p,q_k,r) - \gamma_k) \cdot \tilde{u}_k^{-\tau} |M|^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k} - \frac{\tau}{r\theta_k}} \\ &= (B(p,q_k,r) - \gamma_k) |M|^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k} - \frac{\tau}{r\theta_k} + \frac{\tau}{p}} \\ &= (B(p,q_k,r) - \gamma_k) |M|^{\frac{\tau}{n}}, \end{aligned}$$

o que contraria (2.4). Portanto, $\tilde{u}_k$ não é constante e podemos considerar

$$v_k = \frac{\tilde{u}_k}{\|\nabla_g \tilde{u}_k\|_p} \geq 0.$$

Por $i_k = \mathscr{I}_k(\tilde{u}_k)$ e $\|\tilde{u}_k\|_p = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, obtemos

$$\|v_k\|_{q_k}^{-\frac{\tau(1-\theta_k)}{\theta_k}} \|v_k\|_r^{\frac{\tau}{\theta_k}} - \frac{B(p,q_k,r) - \gamma_k}{i_k} \|v_k\|_p^{\tau} = \frac{A(p,q_k,r)}{i_k}. \tag{2.10}$$

Tendo em vista (2.10), consideramos o espaço $\mathscr{E} = \{u \in H^{1,p}(M);\ \|\nabla_g u\|_p = 1\}$ e o funcional $\mathscr{J}_k : \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 para k suficientemente grande, dado por

$$\mathscr{J}_k(u) = \left(\int_M |u|^r \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{r\theta_k}} \left(\int_M |u|^{q_k} \, dv_g\right)^{-\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}} - C_k \left(\int_M |u|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}, \tag{2.11}$$

onde

$$C_k = \frac{B(p,q_k,r) - \gamma_k}{i_k}. \tag{2.12}$$

Caso C_k seja limitado para alguma subsequência, considerando esta subsequência obtemos que $B(p,q_k,r)$ é limitado, e não há o que fazer. No que segue, supomos que C_k seja ilimitada, isto é,

$$\lim_{k\to\infty} C_k = \infty \text{ quando } k \to \infty.$$

Como $i_k \leq \mathscr{I}_k(u)$ para cada $u \in \mathscr{H} \cap \mathscr{E}$, temos que $\mathscr{J}_k(u) \leq \dfrac{A(p,q_k,r)}{i_k}$ pois, por $\mathscr{I}_k(u) \geq i_k$,

$$\left(\int_M |u|^r \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{r\theta_k}} \left(\int_M |u|^{q_k} \, dv_g\right)^{-\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}} \leq \frac{A(p,q_k,r)}{i_k} \left(\int_M |\nabla u|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} + C_k,$$

isto é,

$$\mathscr{J}_k(u) = \left(\int_M |u|^r \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{r\theta_k}} \left(\int_M |u|^{q_k} \, dv_g\right)^{-\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}} - C_k \left(\int_M |u|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} \leq \frac{A(p,q_k,r)}{i_k}.$$

Por (2.10), $\mathscr{J}_k(v_k) = \dfrac{A(p,q_k,r)}{i_k}$. Por isto, pela desigualdade anterior, por $i_k < 1$ e por $\mathscr{J}_k \in C^1$, segue que

$$\nu_k = \sup_{u\in\mathscr{E}} \mathscr{J}_k(u) = \mathscr{J}_k(v_k) > A(p,q_k,r). \tag{2.13}$$

Consequentemente, obtemos uma equação de Euler-Lagrange associada:

$$\nu_k \Delta_{p,g} v_k = \frac{1}{\theta_k} \|v_k\|_r^{\frac{\tau}{\theta_k}-r} \|v_k\|_{q_k}^{-\frac{\tau(1-\theta_k)}{\theta_k}} v_k^{r-1} - \frac{1-\theta_k}{\theta_k} \|v_k\|_r^{\frac{\tau}{\theta_k}} \|v_k\|_{q_k}^{-\frac{\tau(1-\theta_k)}{\theta_k}-q_k} v_k^{q_k-1} -$$
$$-C_k \|v_k\|_p^{\tau-p} v_k^{p-1} \tag{2.14}$$

no sentido fraco, onde $\Delta_{p,g} = -div_g(|\nabla_g|^{p-2}\nabla_g)$ é o operador p-Laplaciano com respeito a métrica g.

Escreveremos (2.14) de uma forma mais apropriada. Definindo

$$u_k = \frac{v_k}{\|v_k\|_r} \geq 0,$$

reescrevemos (2.14) em termos de u_k,

$$\lambda_k A_k \Delta_{p,g} u_k + C_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \|u_k\|_p^{\tau-p} u_k^{p-1} + \frac{1-\theta_k}{\theta_k} \|u_k\|_{q_k}^{-q_k} u_k^{q_k-1} = \frac{1}{\theta_k} u_k^{r-1}, \tag{2.15}$$

onde

$$\lambda_k = \nu_k \|v_k\|_r^{p-\tau} \|u_k\|_{q_k}^{\frac{(\tau-p)(1-\theta_k)}{\theta_k}} \text{ e } A_k = \left(\int_M u_k^{q_k} dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{\theta_k q_k}}. \tag{2.16}$$

Ao tomarmos v_k como função teste na equação (2.14),

$$\nu_k \leq \|v_k\|_r^{\frac{\tau}{\theta_k}} \|v_k\|_{q_k}^{-\frac{\tau(1-\theta_k)}{\theta_k}}. \tag{2.17}$$

Disto,

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \nu_k \|v_k\|_r^{p-\tau} \|v_k\|_{q_k}^{\frac{(\tau-p)(1-\theta_k)}{\theta_k}} \|v_k\|_r^{\frac{(p-\tau)(1-\theta_k)}{\theta_k}} \\
&= \nu_k \|v_k\|_r^{\frac{p-\tau}{\theta_k}} \|v_k\|_{q_k}^{-\frac{(p-\tau)(1-\theta_k)}{\theta_k}} \\
&= \nu_k \left(\|v_k\|_r^{\frac{\tau}{\theta_k}} \|v_k\|_{q_k}^{-\frac{\tau(1-\theta_k)}{\theta_k}} \right)^{\frac{p-\tau}{\tau}} \\
&= \nu_k^{1+\frac{p-\tau}{\tau}} \\
&= \nu_k^{\frac{p}{\tau}},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lambda_k \geq \nu_k^{\frac{p}{\tau}}. \tag{2.18}$$

Façamos, agora, uma análise sobre A_k, definido em (2.16). Da desigualdade de Hölder

$$1 = \|u_k\|_r^r \leq |M|^{1-\frac{r}{p}} \|u_k\|_p^r.$$

Considerando $c = |M|^{\tau\left(\frac{r}{p}-1\right)}$ e tomando u_k como função teste na forma fraca (2.15), para algum $c > 0$,

$$cC_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \leq C_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \|u_k\|_p^\tau \leq 1,$$

e tomando $k \to \infty$ na desigualdade acima, concluímos que

$$\lim_{k\to\infty} A_k = 0. \tag{2.19}$$

Como dito no Capítulo 1, pela teoria de regularidade de Tolksdorf, temos que toda u_k que é solução de (2.15) é de classe $C^1(M)$. Por M ser uma variedade Riemanniana compacta, existe $x_k \in M$ tal que

$$u_k(x_k) = \|u_k\|_\infty.$$

Definimos agora

$$t_k = A_k^{\overline{\frac{r}{n(p-r)+pr}}}. \tag{2.20}$$

Observamos que $t_k \to 0$ quando $k \to \infty$ por (2.19) e por $\frac{r}{n(p-r)+pr} > 0$. Afirmamos que

$$\|u_k\|_\infty t_k^{\frac{n}{r}} \geq 1. \tag{2.21}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} 1 &= \|u_k\|_r^r \\ &\leq \|u_k\|_r^{r-q_k} \int_M u_k^{q_k}\, dv_g \\ &= \|u_k\|_r^{r-q_k} t_k^{\frac{n}{r}(r-q_k)} \\ &= \left(\|u_k\|_r t_k^{\frac{n}{r}}\right)^{r-q_k}. \end{aligned}$$

2.1.2 Resultados de concentração

Nesta seção provaremos que u_k concentra em $L^r(M)$ em torno do ponto $x_k \in M$ - resultado fundamental para obtermos um lema relativo a distância que tais x_k cumprem em M, o que faremos na subseção seguinte -, isto é,

Lema 2.1. *Se $x_k \in M$ é tal que $u_k(x_k) = \|u_k\|_\infty$, então*

$$\lim_{\sigma,k\to\infty} \int_{B(x_k;\sigma t_k)} u_k^r \, dv_g = 1.$$

Prova: Observamos que $t_k \to 0$, quando $k \to \infty$ e assim, para k suficientemente grande, σt_k é pequeno o suficiente para cumprir o raio de injetividade de $\exp_{x_k} : B(0;\rho) \to M$. Como antes, façamos a seguinte reparametrização:

$$\begin{cases} h_k = g(\exp_{x_k}(t_k x)), \\ \varphi_k = t_k^{\frac{n}{r}} u_k(\exp_{x_k}(t_k x)). \end{cases} \tag{2.22}$$

Escrevendo (2.15) em termos de h_k e φ_k, obtemos

$$\lambda_k \Delta_{p,h_k} \varphi_k + C_k A_k^{\frac{\tau}{p}-1} \|u_k\|_p^{\tau-p} t_k^p \varphi_k^{p-1} + \frac{1-\theta_k}{\theta_k} \varphi_k^{q_k-1} = \frac{1}{\theta_k} \varphi_k^{r-1} \text{ em } B(0;\sigma)\,. \tag{2.23}$$

Ainda, pelo Teorema do Valor Médio em (2.23) e da definição de θ_k,

$$\begin{aligned} \lambda_k \Delta_{p,h_k} \varphi_k + C_k A_k^{\frac{\tau}{p}-1} \|u_k\|_p^{\tau-p} t_k^p \varphi_k^{p-1} &= \frac{1}{\theta_k} \left(\varphi_k^{r-1} - \varphi_k^{q_k-1} \right) + \varphi_k^{q_k-1} \\ &= \frac{r(q_k(p-n)+np)}{np} \varphi_k^{\rho_k} \log(\varphi_k) + \varphi_k^{q_k-1}, \end{aligned}$$

em $B(0;\sigma)$, onde $\rho_k \in (q_k - 1, r-1)$. Consideremos $\varepsilon > 0$. Como vale a desigualdade $\varphi_k^{\rho_k} \log(\varphi_k^\varepsilon) \le \varphi_k^{r-1+\varepsilon}$ em $B(0;\sigma)$, segue que

$$\lambda_k \Delta_{p,h_k} \varphi_k + C_k A_k^{\frac{\tau}{p}-1} \|u_k\|_p^{\tau-p} t_k^p \varphi_k^{p-1} \le \frac{r(q_k(p-n)+np)}{np\varepsilon} \varphi_k^{r-1+\varepsilon} + \varphi_k^{q_k-1}. \tag{2.24}$$

Tomando $r + \varepsilon \le p^*$, pela técnica de iteração de Moser [35] em (2.24), para k suficientemente grande,

$$t_k^n \|u_k\|_\infty^r = \sup_{B(0;\frac{\sigma}{2})} \varphi_k^r \le c \int_{B(0;\sigma)} \varphi_k^r \, dh_k = c \int_{B(x_k,\sigma t_k)} u_k^r \, dv_g \le c, \tag{2.25}$$

sendo c uma constante positiva que não depende de k. Por (2.21),

$$1 \leq t_k^{\frac{n}{r}} \|u_k\|_\infty \leq c, \tag{2.26}$$

Por (2.26), pela teoria de regularidade de Tolksdorf [39] e pelo argumento da diagonal de Cantor, concluímos que $\varphi_k \to \varphi$ em $C^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ quando $k \to \infty$. Ainda, por (2.21)

$$\varphi_k(0) = t_k^{\frac{n}{r}} u_k(x_k) = t_k^{\frac{n}{r}} \|u_k\|_\infty \geq 1,$$

temos que $\varphi > 0$ em uma vizinhança da origem.

Seja $\eta \in C^1_0(\mathbb{R})$ uma função de corte tal que $\eta = 1$ em $[0, \frac{1}{2}]$, $\eta = 0$ em $[1, \infty)$ e $0 \leq \eta \leq 1$. Definindo $\eta_{\sigma,k}(x) = \eta((\sigma t_k)^{-1} d_g(x, x_k))$ e tomando $u_k \eta^r_{\sigma,k}$ como função teste em (2.15),

$$\begin{aligned}
&\lambda_k A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta^r_{\sigma,k}\, dv_g + \lambda_k A_k \int_M |\nabla_g u_k|^{p-2} \nabla_g u_k \cdot \nabla_g(\eta^r_{\sigma,k}) u_k\, dv_g + \\
&+ C_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \|u_k\|_p^{\tau-p} \int_M u_k^p \eta^r_{\sigma,k}\, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta^r_{\sigma,k}\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} = \frac{1}{\theta_k} \left[\int_M u_k^r \eta^r_{\sigma,k}\, dv_g - \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta^r_{\sigma,k}\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g} \right].
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Como antes, reescreveremos a igualdade acima de uma forma mais adequada. Inicialmente, afirmamos que

$$\lim_{\sigma,k \to \infty} A_k \int_M |\nabla_g u_k|^{p-2} \nabla_g u_k \cdot \nabla_g(\eta^r_{\sigma,k}) u_k\, dv_g = 0\,. \tag{2.28}$$

Ora, tomando u_k como função teste em (2.15), por (2.18), (2.13) e pela primeira constante ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg ser limitada, obtemos

$$A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p dv_g \leq \lambda_k^{-1} \leq \nu_k^{-\frac{p}{\tau}} \leq A(p, q_k, r)^{-\frac{p}{\tau}} \leq c\,. \tag{2.29}$$

Agora, por (2.26), (2.29) e pela Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned}
A_k \int_M u_k^p |\nabla_g \eta_{\sigma,k}|^p\, dv_g &= \|u_k\|_\infty^{p-r} A_k \int_{B(x_k;\sigma t_k) \setminus B(x_k;\sigma t_k/2)} u_k^r |\nabla_g \eta_{\sigma,k}|^p\, dv_g \\
&\leq \frac{c}{\sigma^p} \left(\|u_k\|_\infty t_k^{\frac{n}{r}} \right)^{p-r} \int_M u_k^r\, dv_g \\
&\leq \frac{c}{\sigma^p}.
\end{aligned}$$

Assim, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$A_k \int_M u_k^p |\nabla_g \eta_{\sigma,k}|^p \, dv_g \leq \frac{c}{\sigma^p}\,. \tag{2.30}$$

Utilizando agora a desigualdade de Hölder, (2.29) e (2.30), teremos

$$\begin{aligned}
\left| A_k \int_M |\nabla_g u_k|^{p-2} \nabla_g u_k \cdot \nabla_g(\eta^r_{\sigma,k}) u_k \, dv_g \right| &\leq \left(A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p dv_g \right)^{\frac{p-1}{p}} \times \\
&\times \left(A_k \int_M u_k^p |\nabla_g \eta^r_{\sigma,k}|^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq c \left(A_k \int_M u_k^p |\nabla_g \eta_{\sigma,k}|^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{c}{\sigma},
\end{aligned}$$

o que prova (2.28). Afirmamos agora que

$$\lim_{k\to\infty} C_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \|u_k\|_p^\tau = 0. \tag{2.31}$$

Para provarmos (2.31), observe que se tomarmos u_k como função teste na equação de Euler-Lagrange em (2.15) e por (2.18),

$$A(p, q_k, r)^{\frac{p}{\tau}} \int_M |\nabla_g u_k|^p \, dv_g \leq A_k^{-1} - C_k A_k^{\frac{\tau}{p}-1} \left(\int_M u_k^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}}. \tag{2.32}$$

Agora, da definição da desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia, existe $B_\varepsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_M |u|^r \log |u|^r \, dv_g \leq & \frac{npr}{\tau(r(p-n)+np)} \log\Bigg((A_{ent} + \varepsilon) \left(\int_M |\nabla_g u_k|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + \\
& + B_\varepsilon \left(\int_M u_k^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \Bigg).
\end{aligned}$$

Fazendo uma construção inteiramente análoga à feita em (1.15),

$$1 \leq \left((A_{ent} + \varepsilon) \left(\int_M |\nabla_g u_k|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B_\varepsilon \left(\int_M u_k^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right) \left(\int_M u_k^{q_k} \, dv_g \right)^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}}.$$

Uma consequência direta do Teorema 1.1 do Capítulo 1 é que $\lim_{k\to\infty} A(p, q_k, r) = A_{ent}$. Disto, dado $\varepsilon > 0$, para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos que $A_{ent} \leq A(p, q_k, r) + \varepsilon$. Logo,

$$1 \leq \left((A(p, q_k, r) + 2\varepsilon) \left(\int_M |\nabla_g u_k|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B_\varepsilon \left(\int_M u_k^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right) \times$$

$$\times\left(\int_M u_k^{q_k}\,dv_g\right)^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}}. \tag{2.33}$$

Utilizando (2.32) em (2.33),

$$\begin{aligned}
1 &\leq \left[\frac{A(p,q_k,r)+2\varepsilon}{A(p,q_k,r)}\left(A(p,q_k,r)^{\frac{p}{\tau}}\int_M |\nabla_g u_k|^p\,dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} + B_\varepsilon\left(\int_M u_k^p\,dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}\right]A_k^{\frac{\tau}{p}}\\
&\leq \left[\frac{A(p,q_k,r)+2\varepsilon}{A(p,q_k,r)}\left(A_k^{-1}-C_kA_k^{\frac{\tau}{p}-1}\left(\int_M u_k^p\,dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}\right)^{\frac{\tau}{p}} + B_\varepsilon\left(\int_M u_k^p\,dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}\right]A_k^{\frac{\tau}{p}}\\
&= \left[\frac{A(p,q_k,r)+2\varepsilon}{A(p,q_k,r)}\left(1-C_kA_k^{\frac{\tau}{p}}\left(\int_M u_k^p\,dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}\right)^{\frac{\tau}{p}} + B_\varepsilon A_k^{\frac{\tau}{p}}\left(\int_M u_k^p\,dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}\right]
\end{aligned}$$

Observamos que B_ε é limitado, já que o mesmo provém da desigualdade de r-entropia, que não depende de k. Ainda, tomando u_k como função teste em (2.15),

$$A_k^{\frac{\tau}{p}}\|u_k\|_p^\tau \leq \frac{1}{C_k},$$

e assim, $\lim\limits_{k\to\infty} A_k^{\frac{\tau}{p}}\|u_k\|_p^\tau = 0$, pois $\lim\limits_{k\to\infty} C_k = \infty$. Logo,

$$\lim_{k\to\infty} B_\varepsilon A_k^{\frac{\tau}{p}}\left(\int_M u_k^p\,dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} = 0.$$

Tomando isto em conta, fazendo $k\to\infty$ e a seguir $\varepsilon\to 0$, obtemos

$$1 \leq \left(1-\lim_{k\to\infty} C_kA_k^{\frac{\tau}{p}}\left(\int_M u_k^p\,dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}\right)^{\frac{\tau}{p}},$$

isto é,

$$\lim_{k\to\infty} C_kA_k^{\frac{\tau}{p}}\left(\int_M u_k^p\,dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} = 0,$$

o que prova (2.31).

Observamos ainda que

$$\lim_{k\to\infty} C_kA_k^{\frac{\tau}{p}}\|u_k\|_p^{\tau-p}\left(\int_M u_k^p\eta_{\sigma,k}^r\,dv_g\right) = 0, \tag{2.34}$$

já que

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} C_kA_k^{\frac{\tau}{p}}\|u_k\|_p^{\tau-p}\left(\int_M u_k^p\eta_{\sigma,k}^r\,dv_g\right) \leq \lim_{k\to\infty} C_kA_k^{\frac{\tau}{p}}\left(\int_M u_k^p\,dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} = 0.$$

Consequentemente, de (2.28) e (2.34) em (2.27),

$$\lim_{\sigma,k\to\infty}\left(\lambda_k A_k\int_M|\nabla_g u_k|^p\eta_{\sigma,k}^r\,dv_g\right)-\lim_{\sigma,k\to\infty}\left(\frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^r\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}\right)=$$

$$=\frac{r(p-n)+np}{np}\lim_{\sigma,k\to\infty}\frac{r}{r-q_k}\left[\int_M u_k^r\eta_{\sigma,k}^r\,dv_g-\frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^r\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}\right]. \tag{2.35}$$

Seguiremos reescrevendo (2.35) em outros termos. Agora,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^r\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}-\frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k}\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}\right| &\leq \frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k}|\eta_{\sigma,k}^{r-q_k}-1|dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}\\ &\leq \frac{\int_{B(x_k,\sigma t_k)\setminus B(x_k,\sigma t_k/2)}u_k^{q_k}\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}\\ &= \int_{B(0;\sigma)\setminus B(0;\sigma/2)}\varphi_k^{q_k}\,dh_k.\end{aligned}$$

Disto, e por $\varphi_k\to\varphi$ em $C^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, segue que

$$\lim_{\sigma,k\to\infty}\frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^r\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}=\frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k}\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}. \tag{2.36}$$

Agora, de forma similar a que procedemos acima,

$$\begin{aligned}A_k\left|\int_M|\nabla_g u_k|^p\eta_{\sigma,k}^r\,dv_g-\int_M|\nabla_g u_k|^p\eta_{\sigma,k}^p\,dv_g\right| &\leq A_k\int_M|\nabla_g u_k|^p\eta_{\sigma,k}^r|1-\eta_{\sigma,k}^{p-r}|\,dv_g\\ &\leq A_k\int_{B(x_k;\sigma t_k)\setminus B(x_k;\sigma t_k/2)}|\nabla_g u_k|^p\,dv_g\\ &= \int_{B(0;\sigma)\setminus B(0;\sigma/2)}|\nabla_{h_k}\varphi_k|^p\,dh_k.\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{\sigma,k\to\infty}A_k\int_M|\nabla_g u_k|^p\eta_{\sigma,k}^r\,dv_g=\lim_{\sigma,k\to\infty}A_k\int_M|\nabla_g u_k|^p\eta_{\sigma,k}^p\,dv_g. \tag{2.37}$$

Por fim, pelo Teorema do Valor Médio,

$$\begin{aligned}\frac{r}{r-q_k}\left|\frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k}\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}-\frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^r\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}\right| &\leq \frac{r}{r-q_k}\frac{\int_M u_k^{q_k}|\eta_{\sigma,k}^{q_k}-\eta_{\sigma,k}^r|dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}\\ &\leq r\frac{\int_M u_k^{q_k}|\log(\eta_{\sigma,k})|\eta_{\sigma,k}^{\xi_k}\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}\\ &\leq c\frac{\int_{B(x_k,\sigma t_k)\setminus B(x_k,\sigma t_k/2)}u_k^{q_k}\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}\\ &= c\int_{B(0;\sigma)\setminus B(0;\sigma/2)}\varphi_k^{q_k}\,dh_k,\end{aligned}$$

onde $c > 0$ é uma constante positiva e $\xi_k \in (q_k, r)$. Disto,

$$\lim_{\sigma,k\to\infty} \frac{r}{r-q_k} \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{\sigma,k}^r \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} = \lim_{\sigma,k\to\infty} \frac{r}{r-q_k} \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{\sigma,k}^{q_k} \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g}. \tag{2.38}$$

Substituindo (2.36), (2.37), (2.38) em (2.35),

$$\lim_{\sigma,k\to\infty} \lambda_k A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta_{\sigma,k}^p \, dv_g - \lim_{\sigma,k\to\infty} \left(\frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{\sigma,k}^{q_k} \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} \right)$$

$$= \frac{r(p-n)+np}{np} \lim_{\sigma,k\to\infty} \frac{r}{r-q_k} \left[\int_M u_k^r \eta_{\sigma,k}^r \, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{\sigma,k}^{q_k} \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} \right]. \tag{2.39}$$

Trabalhemos agora na desigualdade ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg para obtermos os mesmos termos da igualdade acima. Pela definição de A_k,

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{\theta_k} \log \left[\frac{\|u_k \eta_{\sigma,k}\|_r}{\|u_k \eta_{\sigma,k}\|_{q_k}} \right] &\leq \log \left[\frac{A(p,q_k,r) \|\nabla_g (u_k \eta_{\sigma,k})\|_p^\tau + B(p,q_k,r) \|u_k \eta_{\sigma,k}\|_p^\tau}{\|u_k \eta_{\sigma,k}\|_{q_k}^\tau} \right] \\ &= \log \left[\frac{A(p,q_k,r) A_k^{\frac{\tau}{p}} \|\nabla_g (u_k \eta_{\sigma,k})\|_p^\tau + B(p,q_k,r) A_k^{\frac{\tau}{p}} \|u_k \eta_{\sigma,k}\|_p^\tau}{\|u_k \eta_{\sigma,k}\|_{q_k}^\tau \cdot \frac{\|u_k\|_{q_k}^{\frac{\tau}{\theta_k}}}{\|u_k\|_{q_k}^\tau}} \right] \end{aligned}$$

Por (2.18) e (2.13),

$$\frac{\tau}{\theta_k} \log \left[\frac{\|u_k \eta_{\sigma,k}\|_r}{\left(\frac{\|u_k \eta_{\sigma,k}\|_{q_k}}{\|u_k\|_{q_k}} \right)} \right] \leq \log \left[\frac{\lambda_k^{\frac{\tau}{p}} A_k^{\frac{\tau}{p}} \|\nabla_g (u_k \eta_{\sigma,k})\|_p^\tau + B(p,q_k,r) A_k^{\frac{\tau}{p}} \|(u_k \eta_{\sigma,k})\|_p^\tau}{\left(\frac{\|u_k \eta_{\sigma,k}\|_{q_k}}{\|u_k\|_{q_k}} \right)^\tau} \right]. \tag{2.40}$$

Estudemos o lado esquerdo de (2.40). Pelo Teorema do Valor Médio,

$$\begin{aligned} \log(\|u_k \eta_{\sigma,k}\|_r) - \log \left(\frac{\|u_k \eta_{\sigma,k}\|_{q_k}}{\|u_k\|_{q_k}} \right) &= \frac{1}{r} \left[\log(\|u_k \eta_{\sigma,k}\|_r^r) - \log \left(\frac{\|u_k \eta_{\sigma,k}\|_{q_k}^{q_k}}{\|u_k\|_{q_k}^{q_k}} \right) \right] \\ &+ \frac{q_k - r}{q_k r} \log \left(\frac{\|u_k \eta_{\sigma,k}\|_{q_k}^{q_k}}{\|u_k\|_{q_k}^{q_k}} \right) \\ &= \frac{1}{r Y_{\sigma,k}} \left[\|u_k \eta_{\sigma,k}\|_r^r - \frac{\|u_k \eta_{\sigma,k}\|_{q_k}^{q_k}}{\|u_k\|_{q_k}^{q_k}} \right] \\ &+ \frac{q_k - r}{q_k r} \log \left(\frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{\sigma,k}^{q_k} \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} \right), \end{aligned}$$

onde $Y_{\sigma,k}$ está entre $\|u_k \eta_{\sigma,k}\|_r^r$ e $\dfrac{\|u_k \eta_{\sigma,k}\|_{q_k}^{q_k}}{\|u_k\|_{q_k^{q_k}}}$. Logo,

$$\frac{\tau}{\theta_k} \log \left[\frac{\|u_k \eta_{\sigma,k}\|_r}{\left(\frac{\|u_k \eta_{\sigma,k}\|_{q_k}}{\|u_k\|_{q_k}} \right)} \right] = \frac{\tau(q_k(p-n)+np)}{np(r-q_k)} \frac{1}{Y_{\sigma,k}} \left[\int_M u_k^r \eta_{\sigma,k}^r \, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_{\sigma,k}^{q_k} \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} \right]$$

$$-\frac{\tau(q_k(p-n)+np)}{npq_k}\log\left(\frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k}\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}\right).$$

Tomando $\sigma, k \to \infty$ na desigualdade acima,

$$\lim_{\sigma,k\to\infty}\frac{\tau}{\theta_k}\log\left[\frac{\|u_k\eta_{\sigma,k}\|_r}{\left(\frac{\|u_k\eta_{\sigma,k}\|_{q_k}}{\|u_k\|_{q_k}}\right)}\right] = \frac{\tau(r(p-n)+np)}{nprY}\lim_{\sigma,k\to\infty}\frac{r}{r-q_k}\left[\int_M u_k^r\eta_{\sigma,k}^r\,dv_g - \right.$$

$$\left.-\frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k}\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}\right] - \frac{\tau(r(p-n)+np)}{npr}\log\left(\lim_{\sigma,k\to\infty}\frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k}\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}\right), \quad (2.41)$$

onde

$$Y = \lim_{\sigma,k\to\infty} Y_{\sigma,k} = \lim_{\sigma,k\to\infty}\frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k}\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g} = \lim_{\sigma,k\to\infty}\int_M u_k^r\eta_{\sigma,k}^r\,dv_g. \quad (2.42)$$

Estudaremos agora o lado direito de (2.40). Ora,

$$A_k\int_M |\nabla_g(u_k\eta_{\sigma,k})|^p\,dv_g \le (1+\mu)A_k\int_M |\nabla_g u_k|^p\eta_{\sigma,k}^p\,dv_g + c(\mu)A_k\int_M u_k^p|\nabla_g\eta_{\sigma,k}|^p dv_g.$$

Tomando $\mu \to 0$ e $\sigma, k \to \infty$, bem como por (2.30),

$$\lim_{\sigma,k\to\infty}\lambda_k A_k\int_M |\nabla_g(u_k\eta_{\sigma,k})|^p\,dv_g \le \lim_{\sigma,k\to\infty}\lambda_k A_k\int_M |\nabla_g u_k|^p\eta_{\sigma,k}^p\,dv_g. \quad (2.43)$$

Agora, da definição de C_k e por $i_k < 1$,

$$B(p,q_k,r)A_k^{\frac{\tau}{p}}\left(\int_M u_k^p\eta_{\sigma,k}^p\,dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} \le C_k A_k^{\frac{\tau}{p}}\left(\int_M u_k^p\eta_{\sigma,k}^p\,dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} +$$

$$+\gamma_k A_k^{\frac{\tau}{p}}\left(\int_M u_k^p\eta_{\sigma,k}^p\,dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}. \quad (2.44)$$

Porém, de (2.15), tomando u_k como função teste,

$$(B(p,q_k,r)-\gamma_k)A_k^{\frac{\tau}{p}}\left(\int_M u_k^p\eta_{\sigma,k}^p\,dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} \le i_k < 1,$$

isto é

$$A_k^{\frac{\tau}{p}}\left(\int_M u_k^p\eta_{\sigma,k}^p\,dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} \le c.$$

Por isto, (2.44) e por (2.34),

$$\lim_{\sigma,k\to\infty} B(p,q_k,r)A_k^{\frac{\tau}{p}}\|u_k\eta_{\sigma,k}\|_p^\tau = 0. \quad (2.45)$$

Finalmente, tomando $\sigma, k \to \infty$ em (2.40) e tomando (2.41), (2.43) e (2.45) em conta,

$$\frac{r(p-n)+np}{nrY} \lim_{\sigma,k\to\infty} \frac{r}{r-q_k}\left[\int_M u_k^r \eta_{\sigma,k}^r \, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k}\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right] \leq$$

$$\leq \log\left(\lim_{\sigma,k\to\infty} \lambda_k A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta_{\sigma,k}^p \, dv_g\right) + \left(\frac{r(p-n)+np}{nr} - \frac{p}{r}\right) \times$$

$$\times \log\left(\lim_{\sigma,k\to\infty} \frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k}\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right). \tag{2.46}$$

Considerando

$$X = \lim_{\sigma,k\to\infty}\left(\lambda_k A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta_{\sigma,k}^p dv_g\right), \quad Y = \lim_{\sigma,k\to\infty} \frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k} dv_g}{\int_M u_k^{q_k} dv_g},$$

e

$$Z = \lim_{\sigma,k\to\infty} \frac{r}{r-q_k}\left[\int_M u_k^r \eta_{\sigma,k}^r \, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k}\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right],$$

reescrevemos (2.39) e (2.46) como

$$\begin{cases} X - Y = \frac{n(p-r)+pr}{np} Z, \\ \frac{n(p-r)+pr}{nr} Z \leq Y \log X + \left(\frac{n(p-r)+pr}{nr} - \frac{p}{r}\right) Y \log Y. \end{cases} \tag{2.47}$$

Seja $\xi_{\sigma,k} = 1 - \eta_{\sigma,k}$, onde $\xi_{\sigma,k}$ foi definida no complementar da bola $B(x_k; \sigma t_k)$. De forma análoga a qual procedemos acima, verificamos que (2.39) e (2.46) valem com $\xi_{\sigma,k}$ no lugar de $\eta_{\sigma,k}$, isto é,

$$\lim_{\sigma,k\to\infty} \lambda_k A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \xi_{\sigma,k}^p \, dv_g - \lim_{\sigma,k\to\infty}\left(\frac{\int_M u_k^{q_k}\xi_{\sigma,k}^{q_k}\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right)$$

$$= \frac{r(p-n)+np}{np} \lim_{\sigma,k\to\infty} \frac{r}{r-q_k}\left[\int_M u_k^r \xi_{\sigma,k}^r \, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k}\xi_{\sigma,k}^{q_k}\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right],$$

e a estimativa

$$\frac{r(p-n)+np}{nrY} \lim_{\sigma,k\to\infty} \frac{r}{r-q_k}\left[\int_M u_k^r \xi_{\sigma,k}^r \, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k}\xi_{\sigma,k}^{q_k}\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right] \leq$$

$$\leq \log\left(\lim_{\sigma,k\to\infty} \lambda_k A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \xi_{\sigma,k}^p \, dv_g\right) + \left(\frac{r(p-n)+np}{nr} - \frac{p}{r}\right) \times$$

$$\times \log\left(\lim_{\sigma,k\to\infty}\frac{\int_M u_k^{q_k}\xi_{\sigma,k}^{q_k}\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}\right).$$

Similarmente, escrevendo

$$\tilde{X}=\lim_{\sigma,k\to\infty}\left(\lambda_k A_k\int_M |\nabla_g u_k|^p\xi_{\sigma,k}^p dv_g\right),\quad \tilde{Y}=\lim_{\sigma,k\to\infty}\frac{\int_M u_k^{q_k}\xi_{\sigma,k}^{q_k}dv_g}{\int_M u_k^{q_k}dv_g},$$

e

$$\tilde{Z}=\lim_{\sigma,k\to\infty}\frac{r}{r-q_k}\left[\int_M u_k^r\xi_{\sigma,k}^r\,dv_g-\frac{\int_M u_k^{q_k}\xi_{\sigma,k}^{q_k}\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}\right],$$

obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases}\tilde{X}-\tilde{Y}=\frac{n(p-r)+pr}{np}\tilde{Z},\\ \frac{n(p-r)+pr}{nr}\tilde{Z}\le \tilde{Y}\log\tilde{X}+\left(\frac{n(p-r)+pr}{nr}-\frac{p}{r}\right)\tilde{Y}\log\tilde{Y}.\end{cases}\tag{2.48}$$

Como no Capítulo 1, para demonstrarmos o Lema 2.1 e por (2.42), precisamos mostrar que $Y=1$. Para tal, demonstremos que

$$Y+\tilde{Y}=X+\tilde{X}=1.\tag{2.49}$$

Com efeito, vejamos inicialmente que $Y+\tilde{Y}=1$. Ora,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\int_M u_k^{q_k}(1-\eta_{\sigma,k}^{q_k})\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}-\frac{\int_M u_k^{q_k}\xi_{\sigma,k}^{q_k}\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}\right| &\le \frac{1}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}\int_M u_k^{q_k}|1-(\eta_{\sigma,k}^{q_k}+\xi_{\sigma,k}^{q_k})|\,dv_g\\ &\le \frac{1}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}\int_{B(x_k;\sigma t_k)\setminus B(x_k;\sigma t_k/2)} u_k^{q_k}\,dv_g\\ &= \int_{B(0;\sigma)\setminus B(0;\sigma/2)}\varphi_k^{q_k}\,dh_k.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{\sigma,k\to\infty}\frac{\int_M u_k^{q_k}(1-\eta_{\sigma,k}^{q_k})\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}=\lim_{\sigma,k\to\infty}\frac{\int_M u_k^{q_k}\xi_{\sigma,k}^{q_k}\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}.\tag{2.50}$$

Ainda, por

$$1=\frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_{\sigma,k}^{q_k}\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g}+\frac{\int_M u_k^{q_k}(1-\eta_{\sigma,k}^{q_k})\,dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\,dv_g},$$

vale $Y+\tilde{Y}=1$. Provemos agora que $X+\tilde{X}=1$. Como

$$\begin{aligned}
\lambda_k A_k \left| \int_M |\nabla_g u_k|^p \xi^p_{\sigma,k}\, dv_g - \int_M |\nabla_g u_k|^p (1-\eta^p_{\sigma,k})\, dv_g \right| &\leq cA_k \int_M |\nabla_g u_k|^p |1-(\eta^p_{\sigma,k}+\xi^p_{\sigma,k})|\, dv_g \\
&\leq cA_k \int_{B(x_k;\sigma t_k)\setminus B(x_k;\sigma t_k/2)} |\nabla_g u_k|^p\, dv_g \\
&= c\int_{B(0;\sigma)\setminus B(0;\sigma/2)} |\nabla_{h_k}\varphi_k|^p\, dh_k,
\end{aligned}$$

então,

$$\lim_{\sigma,k\to\infty} \lambda_k A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \xi^p_{\sigma,k}\, dv_g = \lim_{\sigma,k\to\infty} \lambda_k A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p (1-\eta^p_{\sigma,k})\, dv_g. \tag{2.51}$$

Agora, tomando u_k como função teste em (2.15),

$$\begin{aligned}
1 &= \lambda_k A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p\, dv_g + C_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \|u_k\|_p^{\tau-p} \int_M u_k^p\, dv_g \\
&= \left(\lambda_k A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta^p_{\sigma,k}\, dv_g + C_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \|u_k\|_p^{\tau-p} \int_M u_k^p \eta^r_{\sigma,k}\, dv_g \right) \\
&+\lambda_k A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p (1-\eta^p_{\sigma,k})\, dv_g + C_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \|u_k\|_p^{\tau-p} \int_M u_k^p (1-\eta^r_{\sigma,k})\, dv_g.
\end{aligned}$$

Usando isto, (2.51) e (2.31), temos que $X+\tilde{X}=1$. Finalmente, mostremos que $Y=1$. Por (2.47), (2.48) e (2.49), $Z+\tilde{Z}=0$. Logo, as possibilidades para Z são:

$$\begin{cases} Z\geq 0 \text{ e } \tilde{Z}\leq 0, \text{ ou} \\ Z\leq 0 \text{ e } \tilde{Z}\geq 0. \end{cases}$$

Suponhamos, inicialmente, que $\tilde{Z}\geq 0$. Por $r\leq p$ e por (2.48), obtemos

$$0\leq \tilde{Y}-\tilde{X}+\tilde{Y}\log\tilde{X}+\left(\frac{n(p-r)+pr}{nr}-\frac{p}{r}\right)\tilde{Y}\log\tilde{Y}.$$

Defina $f:(0,1]\times(0,1]\to\mathbb{R}$, por $f(x,y)=y-x+y\log x+\left(\frac{n(p-r)+pr}{nr}-\frac{p}{r}\right)y\log y$. Fixado $y\in(0,1]$, os pontos de máximo de f são os $y=x$. Portanto,

$$\left(1+\frac{n(p-r)+pr}{nr}-\frac{p}{r}\right)\tilde{Y}\log\tilde{Y}=\frac{p}{n}\tilde{Y}\log\tilde{Y}\geq 0, \tag{2.52}$$

isto é,

$$\tilde{Y}\log\tilde{Y}\geq 0.$$

Como $\tilde{Y} < 1$, já que $Y > 0$, teremos que $\tilde{Y} = 0$, o que implica em $Y = 1$.

Caso $\tilde{Z} \leq 0$ e $Z \geq 0$, procedendo como fizemos acima, teremos $Y \log Y \geq 0$. Como $Y > 0$, segue que $\log Y \geq 0$, e assim, $Y = 1$. Portanto,

$$\lim_{\sigma,k\to\infty} \int_{B(x_k;\sigma t_k)} u_k^r \, dv_g = \lim_{\sigma,k\to\infty} \int_M u_k^r \eta_{\sigma,k}^r \, dv_g = Y = 1,$$

o que encerra a prova do Lema 2.1.

2.1.3 O Lema da Distância

Nesta seção, provaremos que a sequência (u_k) que obtivemos na subseção 2.1.1 converge pontualmente para 0. Para isto, demonstraremos o seguinte lema

Lema 2.2. ***(Lema da Distância).*** *Para cada $\lambda > 0$, existe uma constante $C_\lambda > 0$, independente de $k \in \mathbb{N}$ que cumpre, para todo $x \in M$,*

$$d_g(x, x_k)^\lambda u_k(x) \leq C_\lambda t_k^{\lambda - \frac{n}{r}}. \tag{2.53}$$

Prova: Procederemos, no que segue, por contradição. Suponha que existem $\lambda_0 > 0$ e $y_k \in M$ tal que $f_k(y_k) \to \infty$ quando $k \to \infty$, onde

$$f_k(x) = d_g(x, x_k)^{\lambda_0} u_k(x) t_k^{-\lambda_0 + \frac{n}{r}}.$$

Ainda, como f_k explode para tal sequência, assumiremos sem perda de generalidade que $f_k(y_k) = \|f_k\|_\infty$. Da estimativa em (2.26),

$$\begin{aligned} f_k(y_k) &\leq c\frac{u_k(y_k)}{\|u_k\|_\infty} d_g(x_k, y_k)^{\lambda_0} t_k^{-\lambda_0} \\ &\leq c d_g(x_k, y_k)^{\lambda_0} t_k^{-\lambda_0}, \end{aligned}$$

ou seja

$$d_g(x_k, y_k) t_k^{-1} \to \infty \text{ quando } k \to \infty. \tag{2.54}$$

Agora, fixado $\sigma > 0$ suficientemente grande e dado $\varepsilon \in (0, 1)$, afirmamos que

$$B(y_k, \varepsilon d_g(x_k, y_k)) \cap B(x_k; \sigma t_k) = \emptyset. \tag{2.55}$$

Com efeito, por $1-\varepsilon>0$ e por (2.54), para k suficientemente grande,

$$d_g(x_k,y_k)(1-\varepsilon)t_k^{-1}>\sigma,$$

isto é,

$$d_g(x_k,y_k)>\sigma t_k+\varepsilon d_g(x_k,t_k),$$

o que prova (2.55).

Provemos que existe uma constante $c>0$ tal que, para todo $x\in B(y_k,\varepsilon d_g(x_k,y_k))$ e k suficientemente grande,

$$u_k(x)\leq cu_k(y_k). \tag{2.56}$$

De fato, para todo $x\in B(y_k,\varepsilon d_g(x_k,y_k))$,

$$d_g(x,x_k)\geq d_g(x_k,y_k)-d_g(x,y_k)\geq(1-\varepsilon)d_g(x_k,y_k).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
d_g(y_k,x_k)^{\lambda_0}u_k(y_k)t_k^{-\lambda_0+\frac{n}{r}} &= f_k(y_k)\\
&\geq f_k(x)\\
&= d_g(x,x_k)^{\lambda_0}u_k(x)t_k^{-\lambda_0+\frac{n}{r}}\\
&\geq (1-\varepsilon)^{\lambda_0}d_g(y_k,x_k)^{\lambda_0}u_k(x)t_k^{-\lambda_0+\frac{n}{r}}.
\end{aligned}$$

Da desigualdade acima, para todo $x\in B(y_k,\varepsilon d_g(x_k,y_k))$ e k suficientemente grande,

$$u_k(x)\leq\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^{\lambda_0}u_k(y_k),$$

o que prova (2.56). Façamos agora uma renormalização de (2.15) para obtermos uma sequência que irá gerar a contradição que buscamos. Seja

$$\begin{cases}\widehat{h}_k=g(\exp_{y_k}(t_kx)),\\ \widehat{\varphi}_k=t_k^{\frac{n}{r}}u_k(\exp_{y_k}(t_kx)),\end{cases} \tag{2.57}$$

onde $x\in B(0;3)$. Disto em (2.15),

$$\lambda_k\Delta_{p,\widehat{h}_k}\widehat{\varphi}_k+C_kA_k^{\frac{\tau}{p}-1}\|u_k\|_p^{\tau-p}t_k^p\widehat{\varphi}_k^{p-1}+\frac{1-\theta_k}{\theta_k}\widehat{\varphi}_k^{q_k-1}=\frac{1}{\theta_k}\widehat{\varphi}_k^{r-1}\ \text{ em }\ B(0;3)\,. \tag{2.58}$$

Agora, pelo Teorema do Valor Médio em (2.58) e da definição de θ_k,

$$\begin{aligned}
\lambda_k \Delta_{p,\widehat{h}_k} \widehat{\varphi}_k + C_k A_k^{\frac{\tau}{p}-1} \|u_k\|_p^{\tau-p} t_k^p \widehat{\varphi}_k^{p-1} &= \frac{1}{\theta_k}\left(\widehat{\varphi}_k^{r-1} - \widehat{\varphi}_k^{q_k-1}\right) + \widehat{\varphi}_k^{q_k-1} \\
&= \frac{r(q_k(p-n)+np)}{np} \widehat{\varphi}_k^{\rho_k} \log(\widehat{\varphi}_k) + \widehat{\varphi}_k^{q_k-1} \text{ em } B(0;3),
\end{aligned}$$

onde $\rho_k \in (q_k - 1, r - 1)$. Fixado $\varepsilon > 0$ tal que $r + \varepsilon < p^*$, por

$$\widehat{\varphi}_k^{\rho_k} \log(\widehat{\varphi}_k^{\varepsilon}) \leq \widehat{\varphi}_k^{r-1+\varepsilon},$$

obtemos

$$\lambda_k \Delta_{p,\widehat{h}_k} \widehat{\varphi}_k + C_k A_k^{\frac{\tau}{p}-1} \|u_k\|_p^{\tau-p} t_k^p \widehat{\varphi}_k^{p-1} \leq \frac{r(q_k(p-n)+np)}{np\varepsilon} \widehat{\varphi}_k^{r-1+\varepsilon} + \widehat{\varphi}_k^{q_k-1}. \tag{2.59}$$

Aplicando a técnica de Moser [35] em (2.59), para k suficientemente grande,

$$\mu_k^{\frac{r}{r-q_k}} = \left(u_k(y_k) t_k^{\frac{n}{r}}\right)^r \leq \sup_{B(0;1)} \widehat{\varphi}_k^r \leq c \int_{B(0;2)} \widehat{\varphi}_k^r \, d\widehat{h}_k = c \int_{B(y_k, 2t_k)} u_k^r \, dv_g \leq c, \tag{2.60}$$

onde

$$\mu_k = u_k(y_k)^{r-q_k} \int_M u_k^{q_k} \, dv_g. \tag{2.61}$$

Portanto, $(\mu_k^{\frac{r}{r-q_k}})$ é limitado. Neste caso, podem ocorrer duas situações, a saber

(A) $\mu_k \geq 1 - \theta_k$, para alguma subsequência, ou

(B) $\mu_k < 1 - \theta_k$, para k suficientemente grande.

Em ambos os casos geraremos uma contradição, o que provará o Lema 2.2. Suponhamos que o item (A) seja válido. Pela definição de θ_k e como $e = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$,

$$\begin{aligned}
\liminf_k \mu_k^{\frac{r}{r-q_k}} &\geq \lim_{k\to\infty} (1-\theta_k)^{\frac{r}{r-q_k}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{np(r-q_k)}{r(q_k(p-n)+np)}\right)^{\frac{r}{r-q_k}\left[\frac{q_k(p-n)+np}{-np}\right]\left[\frac{-np}{q_k(p-n)+np}\right]} \\
&= e^{-\frac{np}{q_k(p-n)+np}},
\end{aligned} \tag{2.62}$$

isto é,

$$\liminf_k \mu_k^{\frac{r}{r-q_k}} \geq e^{-\frac{np}{q_k(p-n)+np}} \tag{2.63}$$

Por outro lado, para k suficientemente grande,

$$B(y_k;t_k) \subset B(y_k;\varepsilon d_g(x_k.y_k)), \tag{2.64}$$

pois, por (2.54)

$$t_k \leq \varepsilon d_g(x_k,y_k) \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \leq d_g(x_k,y_k)t_k^{-1}.$$

Portanto de (2.63), (2.60), (2.64), (2.55) e do Lema 2.1,

$$0 < e^{-\frac{np}{q_k(p-n)+np}} \leq \liminf_k \mu_k^{\frac{r}{r-q_k}} \leq c \lim_{k\to\infty} \int_{B(y_k;t_k)} u_k^r\, dv_g \leq c \lim_{k\to\infty} \int_{B(y_k;\varepsilon d_g(x_k,y_k))} u_k^r\, dv_g = 0,$$

o que é um absurdo, logo (A) não ocorre.

Suponhamos agora (B). Para k suficientemente grande, definimos a seguinte reparametrização:

$$\begin{cases} \widetilde{h}_k(x) = g(\exp_{y_k}(A_k^{\frac{1}{p}} u_k(y_k)^{\frac{p-r}{p}} x)), \\ \psi_k(x) = u_k(y_k)^{-1} u_k(\exp_{y_k}(A_k^{\frac{1}{p}} u_k(y_k)^{\frac{p-r}{p}} x)), \end{cases} \tag{2.65}$$

com $x \in B(0;3)$. Observamos que (2.65) está bem definido já que, por (2.26), para k suficientemente grande,

$$\begin{aligned} A_k^{\frac{1}{p}} u_k(y_k)^{\frac{p-r}{p}} &\leq A_k^{\frac{1}{p}} \|u_k\|_\infty^{\frac{p-r}{p}} \\ &= t_k^{\frac{n}{r}\frac{p-r}{p}} \|u_k\|_\infty^{\frac{p-r}{p}} t_k \\ &= \left(t_k^{\frac{n}{r}} \|u_k\|_\infty\right)^{\frac{p-r}{p}} t_k \\ &\leq ct_k, \end{aligned}$$

e $t_k \to 0$ quando $k \to \infty$. Escrevendo (2.15) em termos de (2.65),

$$\lambda_k \Delta_{p,\widetilde{h}_k} \psi_k + C_k A_k^{\frac{\tau}{p}-1} \|u_k\|_p^{\tau-p} u_k(y_k)^{p-r} \psi_k^{p-1} + \frac{1-\theta_k}{\theta_k} \cdot \frac{1}{\mu_k} \psi_k^{q_k-1} = \frac{1}{\theta_k} \psi_k^{r-1}, \tag{2.66}$$

em $B(0;3)$, onde $\mu_k = u_k(y_k)^{r-q_k} \int_M u_k^{q_k}\, dv_g$. Pelo Teorema do Valor Médio,

$$\lambda_k \Delta_{p,\widetilde{h}_k} \psi_k + C_k A_k^{\frac{\tau}{p}-1} \|u_k\|_p^{\tau-p} u_k(y_k)^{p-r} \psi_k^{p-1} + \frac{1}{\theta_k} \left(\frac{1-\theta_k}{\mu_k} - 1 \right) \psi_k^{q_k-1} =$$

$$= \frac{r(q_k(p-n)+np)}{np(r-q_k)} \left(\psi_k^{r-1} - \psi_k^{q_k-1}\right) = \frac{r(q_k(p-n)+np)}{np} \log(\psi_k) \psi^{\rho_k}, \tag{2.67}$$

onde $\rho_k \in (q_k - 1, r - 1)$. Agora, por (2.56),

$$\begin{aligned}
\int_{B(0;3)} \psi_k^p \, d\widetilde{h}_k &= u_k(y_k)^{-p} \left(A_k^{\frac{1}{p}} u_k(y_k)^{\frac{p-r}{p}} \right)^{-n} \int_{B(y_k; 3A_k^{\frac{1}{p}} u_k(y_k)^{\frac{p-r}{p}})} u_k^p \, dv_g \\
&\leq u_k(y_k)^{-p} \left(A_k^{\frac{1}{p}} u_k(y_k)^{\frac{p-r}{p}} \right)^{-n} c \left(3A_k^{\frac{1}{p}} u_k(y_k)^{\frac{p-r}{p}} \right)^{n} c u_k(y_k)^p \\
&\leq c. \qquad (2.68)
\end{aligned}$$

Consideremos então ω uma função em $C_0^1(B(0;3))$ tal que $w \equiv 1$ em $B(0;2)$, $\omega \geq 0$. Considerando $\psi_k \omega^p$ como função teste em (2.67), segue que

$$\lambda_k \int_{B(0;3)} |\nabla_{\widetilde{h}_k} \psi_k|^p \omega^p \, d\widetilde{h}_k + \frac{1}{\theta_k} \left(\frac{1-\theta_k}{\mu_k} - 1 \right) \int_{B(0;3)} \psi_k^{q_k} \omega^p \, d\widetilde{h}_k \leq \frac{r(q_k(p-n)+np)}{np} \times$$
$$\times \int_{B(0;3)} \psi_k^{\rho_k+1} \log(\psi_k) \omega^p \, d\widetilde{h}_k - \lambda_k \int_{B(0;3)} |\nabla_{\widetilde{h}_k} \psi_k|^{p-1} |\nabla_{\widetilde{h}_k} \omega^p| \psi_k \, d\widetilde{h}_k, \qquad (2.69)$$

onde $\rho_k \in (q_k - 1, r - 1)$.

Estudemos o lado direito de (2.69). Para o primeiro termo, temos

$$\frac{r(q_k(p-n)+np)}{np} \to \frac{r(r(p-n)+np)}{np} \text{ quando } k \to \infty.$$

Por outro lado, como $\rho_k \in (q_k - 1, r - 1)$, de $r \leq p$ e de (2.68) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{B(0;3)} \psi_k^{\rho_k+1} \log(\psi_k) \omega^p \, d\widetilde{h}_k &= \int_{\{x \in B(0;3);\ \psi_k(x) \leq 1\} \cup \{x \in B(0;3);\ \psi_k(x) \geq 1\}} \psi_k^{\rho_k+1} \log(\psi_k) \omega^p \, d\widetilde{h}_k \\
&\leq c \int_{B(0;3)} \psi_k^p \, d\widetilde{h}_k \\
&\leq c. \qquad (2.70)
\end{aligned}$$

Para o segundo termo do lado direito de (2.69), sendo $|\nabla_{\widetilde{h}_k} \omega^p| \leq c\omega^{p-1}$, obtemos que

$$\lambda_k \int_{B(0;3)} |\nabla_{\widetilde{h}_k} \psi_k|^{p-1} |\nabla_{\widetilde{h}_k} \omega^p| \psi_k \, d\widetilde{h}_k \leq c\lambda_k \int_{B(0;3)} |\nabla_{\widetilde{h}_k} \psi_k|^{p-1} \omega^{p-1} \psi_k \, d\widetilde{h}_k. \qquad (2.71)$$

Ainda, da limitação de λ_k e pelas desigualdades de ε-Young e de Hölder,

$$\begin{aligned}
\lambda_k \int_{B(0;3)} |\nabla_{\widetilde{h}_k} \psi_k|^{p-1} |\nabla_{\widetilde{h}_k} \omega^p| \psi_k \, d\widetilde{h}_k &\leq c\varepsilon\lambda_k \int_{B(0;3)} |\nabla_{\widetilde{h}_k} \psi_k|^{p-1} \omega^p \, d\widetilde{h}_k + c\lambda_k c(\varepsilon) \int_{B(0;3)} \psi_k^p \, d\widetilde{h}_k \\
&\leq c\varepsilon\lambda_k \int_{B(0;3)} |\nabla_{\widetilde{h}_k} \psi_k|^{p-1} \omega^p \, d\widetilde{h}_k + c. \qquad (2.72)
\end{aligned}$$

De (2.70), (2.71) e (2.72) em (2.69), obtemos

$$\lambda_k(1-c\varepsilon)\int_{B(0;3)}|\nabla_{\widetilde{h}_k}\psi_k|^p\omega^p\,d\widetilde{h}_k+\frac{1}{\theta_k}\left(\frac{1-\theta_k}{\mu_k}-1\right)\int_{B(0;3)}\psi_k^{q_k}\omega^p\,d\widetilde{h}_k\leq c.$$

Tomando $\varepsilon>0$ pequeno tal que $0<1-c\varepsilon$, pela limitação de λ_k e por $\frac{1-\theta_k}{\mu_k}-1>0$,

$$c\int_{B(0;3)}|\nabla_{\widetilde{h}_k}\psi_k|^p\omega^p\,d\widetilde{h}_k+\frac{1}{\theta_k}\left(\frac{1-\theta_k}{\mu_k}-1\right)\int_{B(0;3)}\psi_k^{q_k}\omega^p\,d\widetilde{h}_k\leq c, \tag{2.73}$$

isto é, por $w\in C_0^1(B(0;3))$,

$$\int_{B(0;3)}|\nabla_{\widetilde{h}_k}\psi_k|^p\,d\widetilde{h}_k\leq c. \tag{2.74}$$

Portanto isto e por (2.68), (ψ_k) é limitado em $W^{1,p}(B(0;2))$. Consequentemente, existe $\psi\in W^{1,p}(B(0;2))$ tal que, a menos de subsequência, $\psi_k\rightharpoonup\psi$ em $W^{1,p}(B(0;2))$.

Agora, pela técnica de iteração de Moser aplicada em (2.67), ψ não se anula numa vizinhança da origem, pois

$$1=\psi_k(0)\leq\sup_{B(0;1)}\psi_k^p\leq c\int_{B(0;2)}\psi_k^p\,d\widetilde{h}_k\leq c.$$

Por (2.73) e pela imersão compacta de $W^{1,p}(B(0;2))$ em $L^{q_k}(B(0;2))$,

$$\limsup_k\frac{1}{\theta_k}\left(\frac{1-\theta_k}{\mu_k}-1\right)\leq c,$$

e disto, a menos de subsequência,

$$\limsup_k\frac{1}{\theta_k}\left(\frac{1-\theta_k}{\mu_k}-1\right)=\gamma\geq 0. \tag{2.75}$$

Definindo $\frac{1}{\theta_k}\left(\frac{1-\theta_k}{\mu_k}-1\right)=\gamma_k$, observamos que $\mu_k=\frac{1-\theta_k}{\gamma_k\theta_k+1}$. Logo,

$$\lim_{k\to\infty}\mu_k=1.$$

Ainda, da conta feita em (2.62),

$$\lim_{k\to\infty}(1-\theta_k)^{\frac{r}{r-q_k}}=e^{-\frac{np}{n(p-r)+pr}}.$$

Portanto,

$$\lim_{k\to\infty} \mu_k^{\frac{r}{r-q_k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(1-\theta_k)^{\frac{r}{r-q_k}}}{(1+\gamma_k\theta_k)^{\frac{r}{r-q_k}}} = e^{-(1+\gamma)\frac{np}{n(p-r)+pr}}.$$

Disto, de (2.60), (2.64) e do Lema 2.1,

$$\begin{aligned}
0 &< e^{-(1+\gamma)\frac{np}{q_k(p-n)+np}} \\
&\leq \liminf_{k} \mu_k^{\frac{r}{r-q_k}} \\
&\leq c \lim_{k\to\infty} \int_{B(y_k;t_k)} u_k^r \, dv_g \\
&\leq c \lim_{k\to\infty} \int_{B(y_k;\varepsilon d_g(x_k,y_k))} u_k^r \, dv_g \\
&= 0,
\end{aligned}$$

o que é um absurdo, logo (B) também não ocorre. Isto encerra a prova do Lema da Distância.

2.1.4 Limitação da segunda constante ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg

Nesta seção provaremos que (C_k) é limitado o que, pela sua definição, prova a limitação de $(B(p,q_k,r))$. A nossa suposição é que (C_k) é uma sequência ilimitada, portanto, produziremos um absurdo.

Consideremos uma função de corte $\eta \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\eta \equiv 1$ em $[0,1)$, $n \equiv 0$ em $[2,\infty)$ e $0 \leq \eta \leq 1$. Definindo $\eta_k(x) = \eta(d_g(x,x_k))$ obtemos, pela desigualdade ótima Euclideana de Gagliardo-Nirenberg,

$$\left(\int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r \, dx\right)^{\frac{p}{r\theta_k}} \leq A_e(p,q_k,r) \left(\int_{B(0;2)} |\nabla(u_k\eta_k)|^p \, dx\right) \left(\int_{B(0;2)} u_k^{q_k}\eta_k^{q_k} \, dx\right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}},$$

onde $A_e(p,q_k,r)$ é a constante ótima Euclideana de tal desigualdade. Dada a invariância escalar da desigualdade ótima Euclidiana de Gagliardo-Nirenberg, assumiremos sem perda de generalidade que o raio de injetividade da carta exponencial $\exp_{x_k} : B(0;\rho) \to M$ é maior que 2.

Como a constante ótima Euclidiana e a primeira constante ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg são tais que $A(p,q_k,r)^{\frac{p}{\tau}} = A_e(p,q_k,r)$, teremos

$$\left(\int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r \, dx\right)^{\frac{p}{r\theta_k}} \leq A(p,q_k,r)^{\frac{p}{\tau}} \left(\int_{B(0;2)} |\nabla(u_k\eta_k)|^p \, dx\right) \times$$

$$\times \left(\int_{B(0;2)} u_k^{q_k}\eta_k^{q_k} \, dx\right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}}. \tag{2.76}$$

Denotemos

$$X_k = A_k \int_M \eta_k^r |\nabla_g u_k|^p d_g(x,x_k)^2 \, dv_g \text{ e } Y_k = A_k \int_M |\nabla_g u_k|^{p-1} |\nabla_g \eta_k| u_k \, dv_g.$$

Pela expansão de Cartan da métrica g em coordenadas normais,

$$(1 - cd_g(x,x_k)^2)dv_g \leq dx \leq (1 + cd_g(x,x_k)^2)dv_g, \tag{2.77}$$

$$|\nabla(u_k\eta_k)|^p \leq |\nabla_g(u_k\eta_k)|^p(1 + cd_g(x,x_k)^2)dv_g, \tag{2.78}$$

e de $(x+y)^p \leq x^p + cx^{p-1}y + cy^p$,

$$|\nabla_g(u_k\eta_k)|^p \leq |\nabla_g u_k|^p \eta_k^p + c|\eta_k \nabla_g u_k|^{p-1}|u_k \nabla_g \eta_k| + c|u_k \nabla_g \eta_k|^p. \tag{2.79}$$

Disto, da definição de A_k e de (2.76), obtemos

$$\left(\int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r \, dx\right)^{\frac{p}{r\theta_k}} \leq$$

$$\leq \left(A(p,q_k,r)^{\frac{p}{\tau}} A_k \left(\int_{B(x_k;2)} |\nabla_g u_k|^p \eta_k^r \, dv_g\right) + cX_k + cY_k + cA_k \left(\int_{B(x_k;2)\setminus B(x_k;1)} u_k^p \, dv_g\right)\right) \times$$

$$\times \left(\frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k}\eta_k^{q_k} \, dx}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g}\right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}}. \tag{2.80}$$

Estimemos o primeiro termo do lado direito de (2.80). Tomando $u_k\eta_k^r$ como função teste na Equação de Euler-Lagrange em (2.15),

$$A(p,q_k,r)^{\frac{p}{\tau}} A_k \int_M |\nabla_g u_k|^p \eta_k^r \, dv_g \leq \frac{1}{\theta_k}\left(\int_M u_k^r \eta_k^r \, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_k^r \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g}\right)$$

$$-C_k \left(A_k \int_{B(x_k;1)} u_k^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} + \frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_k^r \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} + cA_k \int_M |\nabla_g u_k|^{p-1} |\nabla_g \eta_k| u_k \, dv_g$$

$$\leq 1 - C_k \left(A_k \int_{B(x_k;1)} u_k^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + \frac{1}{\theta_k} \left(\int_M u_k^r \eta_k^r \, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^r \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} \right) + cY_k. \qquad (2.81)$$

Defina

$$Z_k = \frac{1}{\theta_k} \left(\int_M u_k^r \eta_k^r \, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} \right).$$

Pelo Teorema do Valor Médio e do Lema 2.2,

$$\begin{aligned} \left| Z_k - \frac{1}{\theta_k} \left(\int_M u_k^r \eta_k^r \, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^r \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} \right) \right| &\leq \frac{1}{\theta_k} \frac{\int_M u_k^{q_k} |\eta_k^r - \eta_k^{q_k}| \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} \\ &\leq \frac{r(q_k(p-n)+np)}{np} \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{\sigma_k} |\log \eta_k| \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} \\ &\leq c t_k^{-\frac{n}{r}(r-q_k)} \int_{B(x_k;2)\setminus B(x_k;1)} u_k^{q_k} \, dv_g. \end{aligned}$$

Ainda, em $B(x_k;2) \setminus B(x_k;1)$ vale $d_g(x,x_k)^{\lambda q_k} \geq 1$, para todo $\lambda > 0$. Pelo Lema 2.2, $\big(u_k(x) d_g(x,x_k)^\lambda\big)^{q_k} \leq C_\lambda t_k^{\lambda q_k - \frac{n}{r} q_k}$. Disto,

$$\left| Z_k - \frac{1}{\theta_k} \left(\int_M u_k^r \eta_k^r \, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^r \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} \right) \right| \leq c t_k^{\lambda q_k - n}.$$

Tomando $\lambda > \frac{n+2}{q_k}$ e como $t_k \leq 1$, para k suficientemente grande,

$$t_k^{\lambda q_k - n} \leq t_k^2.$$

Consequentemente,

$$\left| Z_k - \frac{1}{\theta_k} \left(\int_M u_k^r \eta_k^r \, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^r \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} \right) \right| \leq c t_k^2 \qquad (2.82)$$

para k suficientemente grande. Por (2.81) e (2.82) em (2.80),

$$\left(\int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r \, dx \right)^{\frac{p}{r\theta_k}} \leq$$

$$\leq \left(1 - C_k \left(A_k \int_{B(x_k;1)} u_k^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + Z_k + c t_k^2 + cX_k + cY_k + cA_k \left(\int_{B(x_k;2)\setminus B(x_k;1)} u_k^p \, dv_g \right) \right) \times$$

$$\times \left(\frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} \, dx}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}}. \qquad (2.83)$$

Estimemos agora X_k. Tomando $u_k d_g(x,x_k)^2\eta_k^r$ como função teste em (2.15),

$$
\begin{aligned}
X_k &= A_k \int_M \eta_k^r |\nabla_g u_k|^p d_g(x,x_k)^2 \, dv_g \\
&\leq \frac{c}{\theta_k}\left(\int_M u_k^r \eta_k^r d_g(x,x_k)^2 \, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_k^r d_g(x,x_k)^2 \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g}\right) \\
&+ cA_k \int_M u_k \eta_k^r |\nabla_g u_k|^{p-1} d_g(x,x_k) \, dv_g + c\frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_k^{q_k} d_g(x,x_k)^2 \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} + cY_k. \quad (2.84)
\end{aligned}
$$

Analisemos os dois primeiros termos do lado direito de (2.84). Pelo Teorema do Valor Médio,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\theta_k}\left|\int_M u_k^r \eta_k^r d_g(x,x_k)^2 \, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_k^r d_g(x,x_k)^2 \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g}\right| &= \frac{1}{\theta_k}\left| t_k^2 \int_{B(0;2t_k^{-1})} (\varphi_k^r - \varphi_k^{q_k})\widetilde{\eta}_k^r |x|^2 \, dh_k\right| \\
&\leq \frac{t_k^2}{\theta_k}\int_{B(0;2t_k^{-1})} |\varphi_k^r - \varphi_k^{q_k}|\widetilde{\eta}_k^r |x|^2 \, dh_k \\
&\leq ct_k^2 \int_{B(0;2t_k^{-1})} |\log\varphi_k|\varphi_k^{\rho_k}|x|^2 \, dh_k,
\end{aligned}
$$

onde $\rho_k \in (q_k, r)$ e $\widetilde{\eta}_k(x) = \eta_k(exp_{x_k}(t_k x))$. Como

$$
\begin{aligned}
ct_k^2 \int_{B(0;2t_k^{-1})} |\log\varphi_k|\varphi_k^{\rho_k}|x|^2 \, dh_k &= ct_k^2 \int_{\{x\in B(0;2t_k^{-1});\varphi_k(x)\leq 1\}} |\log\varphi_k|\varphi_k^{\rho_k}|x|^2 \, dh_k \\
&+ ct_k^2 \int_{\{x\in B(0;2t_k^{-1});\varphi_k(x)\geq 1\}} |\log\varphi_k|\varphi_k^{\rho_k}|x|^2 \, dh_k,
\end{aligned}
$$

no que segue, estudaremos as duas integrais do lado direito da igualdade acima. Comecemos com a primeira. Por $\varphi_k(x) \leq 1$, $\varphi_k^{\rho_k} \leq \varphi_k$. Ainda, pelo Lema 2.2, $|x|^\lambda\varphi_k(x) \leq C_\lambda$, para k suficientemente grande e, para $\sigma > 0$ fixado,

$$\begin{aligned}
\int_{\{x \in B(0;2t_k^{-1});\varphi_k(x)\leq 1\}} |\log \varphi_k|\varphi_k^{\rho_k}|x|^2 \, dh_k &\leq \int_{B(0;\sigma)} |\log \varphi_k|\varphi_k|x|^2 \, dh_k \\
&+ \int_{B(0;2t_k^{-1})\setminus B(0;\sigma)} |\log \varphi_k|\varphi_k|x|^2 \, dh_k \\
&\leq C_\lambda \int_{B(0;\sigma)} |\log \varphi_k||x|^{2-\lambda} \, dh_k \\
&+ C_\lambda \int_{B(0;2t_k^{-1})\setminus B(0;\sigma)} |\log \varphi_k||x|^{2-\lambda} \, dh_k \\
&\leq C_\lambda \int_{B(0;\sigma)} \varphi_k(x)|x|^\lambda |x|^{2-2\lambda} \, dh_k \\
&+ C_\lambda \int_{B(0;2t_k^{-1})\setminus B(0;\sigma)} \varphi_k(x)|x|^\lambda |x|^{2-2\lambda} \, dh_k \\
&\leq C_\lambda \Big[\int_{B(0;\sigma)} |x|^{2(1-\lambda)} \, dh_k + \\
&+ \int_{B(0;2t_k^{-1})\setminus B(0;\sigma)} |x|^{2(1-\lambda)} \, dh_k \Big] \\
&\leq c
\end{aligned}$$

onde tomamos λ tal que $2(\lambda - 1) < n$ e k é suficientemente grande. Com um processo inteiramente similar obtemos a limitação da segunda integral, com a diferença que nesse caso $\varphi_k^{\rho_k} \leq \varphi_k^r$. Consequentemente,

$$\frac{1}{\theta_k} \left| \int_M u_k^r \eta_k^r d_g(x, x_k)^2 \, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^r d_g(x, x_k)^2 \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} \right| \leq c t_k^2, \tag{2.85}$$

para k suficientemente grande.

Analisemos agora o terceiro termo do lado direito de (2.84). Pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_M u_k \eta_k^r |\nabla_g u_k|^{p-1} d_g(x, x_k) \, dv_g &\leq \left(\int_M |\nabla_g u_k|^p \, dv_g \right)^{\frac{p-1}{p}} \times \\
&\times \left(\int_{B(x_k;2)} u_k^p d_g(x, x_k)^p \, dv_g \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Agora, tomando u_k como função teste em (2.15) e por (2.18),

$$\int_M |\nabla_g u_k|^p \, dv_g \leq \lambda_k^{-1} A_k^{-1} \leq c A_k^{-1}.$$

Tomando isto em (2.86) e pelo Lema 2.2,

$$
\begin{aligned}
A_k \int_M u_k \eta_k^r |\nabla_g u_k|^{p-1} d_g(x,x_k)\, dv_g &\leq cA_k^{\frac{1-p}{p}+1} \left(\int_{B(x_k;2)} u_k^p d_g(x,x_k)^p \, dv_g \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq cA_k^{\frac{1-p}{p}+1} \left(t_k^{-\frac{n}{r}p+n+p} \int_{B(0;2t_k^{-1})} \varphi_k^p(x)|x|^p \, dh_k \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq cA_k^{\frac{1-p}{p}+1} t_k^{\frac{n(r-p)+pr}{pr}} \\
&= ct_k^{\frac{n}{pr}(p-r)+1-\frac{n}{pr}(p-r)+1} \\
&= ct_k^2, \qquad (2.87)
\end{aligned}
$$

para k suficientemente grande. De (2.87) e (2.85) em (2.84),

$$
X_k \leq c \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} d_g(x,x_k)^2 \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} + cY_k + ct_k^2, \qquad (2.88)
$$

para k suficientemente grande. Ainda pelo Lema 2.2,

$$
\begin{aligned}
\frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} d_g(x,x_k)^2 \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} &\leq ct_k^{-\frac{n}{r}(r-q_k)-\frac{n}{r}(q_k-r)+2} \int_{B(0;2t_k^{-1})} \varphi_k(x)^{q_k} |x|^2 dh_k \\
&\leq ct_k^2 \int_{B(0;2t_k^{-1})} |x|^{-(\lambda q_k+2)} dh_k \\
&\leq 2ct_k^{2+\lambda q_k+2-n} \\
&= ct_k^2, \qquad (2.89)
\end{aligned}
$$

onde $\lambda q_k + 2 - n = 0$ e k é suficientemente grande. Procedendo como em (2.86),

$$
\begin{aligned}
Y_k &\leq cA_k \left(\int_M |\nabla_g u_k|^p \, dv_g \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_M u_k^p \, dv_g \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq cA_k^{\frac{1-p}{p}+1} t_k^{\frac{n(r-p)+pr}{pr}} \\
&= ct_k^2. \qquad (2.90)
\end{aligned}
$$

De (2.90), (2.89) e (2.88) em (2.83), segue que

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r \, dx \right)^{\frac{p}{r\theta_k}} &\leq \left(1 - C_k \left(A_k \int_{B(x_k;1)} u_k^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + Z_k + ct_k^2 + \right. \\
&\left. + cA_k \left(\int_{B(x_k;2)\setminus B(x_k;1)} u_k^p \, dv_g \right) \right) \left(\frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} \, dx}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}},
\end{aligned}
$$

para k suficientemente grande. Ainda, do Lema 2.2 e como $p > 1$,

$$\begin{aligned} A_k \int_{B(x_k;2)\setminus B(x_k;1)} u_k^p \, dv_g &\leq cA_k t_k^{-\frac{n}{r}p+p+n} \int_{B(0;2t_k^{-1})\setminus B(0;t_k^{-1})} \varphi_k(x)^p |x|^{\lambda p} dh_k \\ &\leq ct_k^{2p} \\ &\leq ct_k^2, \end{aligned}$$

para k suficientemente grande. Portanto,

$$\left(\int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r \, dx\right)^{\frac{p}{r\theta_k}} \leq \left(1 - C_k \left(A_k \int_{B(x_k;1)} u_k^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} + Z_k + ct_k^2\right) \times$$
$$\times \left(\frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} \, dx}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g}\right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}}.$$

Aplicando log na desigualdade acima e por $\dfrac{p(1-\theta_k)}{q_k\theta_k} = \dfrac{p}{r\theta_k} - \dfrac{n-p}{n}$,

$$\frac{p}{r\theta_k}\left[\log\left(\int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r \, dx\right) - \log\left(\frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} \, dx}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g}\right)\right] \leq \log\Bigg(1 - C_k \left(A_k \int_{B(x_k;1)} u_k^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}$$
$$+ Z_k + ct_k^2 - \frac{n-p}{n} \log\left(\frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} \, dx}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g}\right)\Bigg). \tag{2.91}$$

Estudemos o lado esquerdo de (2.91). Pelo Teorema do Valor Médio, existe ξ_k entre

$$\int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r \, dx \text{ e } \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} \, dx}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g}$$

tal que

$$\log\left(\int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r \, dx\right) - \log\left(\frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} \, dx}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g}\right) = \frac{1}{\xi_k}\Bigg(\int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r \, dx -$$
$$- \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} \, dx}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g}\Bigg). \tag{2.92}$$

Agora, da expansão de Cartan da métrica g em torno de x_k e pelo Lema 2.2,

$$\max\left\{\left|\int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r \, dx - \int_M u_k^r \eta_k^r \, dv_g\right|, \left|\frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} \, dx}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g}\right|\right\} \leq$$

$$\leq ct_k^2, \tag{2.93}$$

para k suficientemente grande. Com efeito,

$$\begin{aligned}\left|\int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r \, dx - \int_M u_k^r \eta_k^r \, dv_g\right| &\leq c \int_{B(x_k;2)} u_k^r \eta_k^r d_g(x, x_k)^2 \, dv_g \\ &\leq ct_k^2 \int_{B(0;2t_k^{-1})} \varphi_k(x)^r |x|^2 \, dh_k \\ &\leq ct_k^2,\end{aligned}$$

para k suficientemente grande. Agora,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} \, dx}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} - \frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g}\right| &\leq c\frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} d_g(x, x_k)^2 \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} \\ &\leq ct_k^2,\end{aligned}$$

para k suficientemente grande, o que prova (2.93). Provemos agora que

$$\max\left\{\left|\int_M u_k^r \eta_k^r \, dx - 1\right|, \left|\frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} \, dx}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} - 1\right|\right\} \leq ct_k^2, \tag{2.94}$$

para k suficientemente grande. Ora, pelo Lema da Distância,

$$\begin{aligned}\left|\int_M u_k^r \eta_k^r \, dv_g - 1\right| &= \left|\int_M u_k^r \eta_k^r \, dv_g - \int_M u_k^r \, dv_g\right| \\ &\leq \int_{M\setminus B(x_k;1)} u_k^r \, dv_g \\ &\leq \int_{M\setminus B(x_k;1)} u_k^r d_g(x, x_k)^{\lambda r} \, dv_g \\ &\leq ct_k^{\lambda r - n} \\ &\leq ct_k^2,\end{aligned}$$

onde $\lambda r - n > 2$. Ainda,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\int_M u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} - 1\right| &\leq \frac{\int_{M\setminus B(x_k;1)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} \, dv_g}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} \\ &\leq ct_k^2,\end{aligned}$$

para k suficientemente grande, o que prova (2.94). Por consequência de (2.93) e (2.94), $\xi_k^{-1} = 1 + O(t_k^2)$. Por (2.92),

$$\frac{p}{r\theta_k}\left[\log\left(\int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r \, dx\right) - \log\left(\frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k} \eta_k^{q_k} \, dx}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g}\right)\right] =$$

$$= \frac{p}{r\theta_k}\left(\int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r \, dx - \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k}\eta_k^{q_k}\, dx}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right)(1+O(t_k^2)). \tag{2.95}$$

Agora, novamente pela expansão de Cartan da métrica g em coordenadas normais,

$$\begin{aligned}
\frac{p}{r\theta_k}\left(\int_{B(0;2)} u_k^r \eta_k^r \, dx - \frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k}\eta_k^{q_k}\, dx}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right) &= \frac{p}{r\theta_k}\int_{B(0;2)}\left(u_k^r\eta_k^r - \frac{u_k^{q_k}\eta_k^{q_k}}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right) dx \\
&= \frac{p}{r\theta_k}\int_{B(0;2)}\left(u_k^r\eta_k^r - \frac{u_k^{q_k}\eta_k^{q_k}}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right) dv_g \\
&+ \frac{c}{\theta_k}\int_{B(0;2)}\left(u_k^r\eta_k^r - \frac{u_k^{q_k}\eta_k^{q_k}}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right) o(d_g(x,x_k)^2)\, dv_g \\
&= \frac{p}{r}Z_k + O(t_k^2).
\end{aligned}$$

Substituindo a igualdade acima em (2.95),

$$\frac{p}{r\theta_k}\left[\log\left(\int_{B(0;2)} u_k^r\eta_k^r\, dx\right) - \log\left(\frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k}\eta_k^{q_k}\, dx}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right)\right] \geq \frac{p}{r}Z_k - ct_k^2,$$

para k suficientemente grande. Tomando isto em conta em (2.91),

$$\frac{p}{r}Z_k - ct_k^2 \leq \log\left(1 - C_k\left(A_k\int_{B(x_k;1)} u_k^p\, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} + Z_k + ct_k^2\right) - \frac{n-p}{n}\left|\log\left(\frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k}\eta_k^{q_k}\, dx}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right)\right|,$$

para k suficientemente grande. Pela expansão de Cartan da métrica em torno x_k, da expansão de Taylor de log e pelo Lema 2.2,

$$\begin{aligned}
\left|\log\left(\frac{\int_{B(0;2)} u_k^{q_k}\eta_k^{q_k}\, dx}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right)\right| &\leq \frac{\int_{M\setminus B(x_k;1)} u_k^{q_k}\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g} + c\frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_k^{q_k} d_g(x,x_k)^2\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g} \\
&\leq ct_k^2.
\end{aligned}$$

Novamente por $\log x \leq x - 1$,

$$\frac{p}{r}Z_k - ct_k^2 \leq -C_k\left(A_k\int_{B(x_k;1)} u_k^p\, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} + Z_k + ct_k^2.$$

Observamos ainda que, para k suficientemente grande,

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_k;1)} u_k^p\, dv_g &\geq \int_{B(x_k;t_k)} u_k^p\, dv_g \\
&= t_k^{\frac{n}{r}(r-p)}\int_{B(0;1)} \varphi_k^p\, dh_k \\
&\geq ct_k^{\frac{n}{r}(r-p)}.
\end{aligned}$$

Como $t_k^{\frac{n}{r}(r-p)}A_k = t_k^p$,

$$C_k t_k^\tau \leq \left(1 - \frac{p}{r}\right) Z_k + ct_k^2, \tag{2.96}$$

para k suficientemente grande.

Por fim, estimaremos Z_k. Definindo $\xi_k = 1 - \eta_k$, afirmamos que

$$Z_k + R_k + S_k = 0, \tag{2.97}$$

onde

$$R_k = \frac{1}{\theta_k}\left(\int_M u_k^r(\eta_k - \eta_k^r)\, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k}(\eta_k - \eta_k^{q_k})\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right),$$

e

$$S_k = \frac{1}{\theta_k}\left(\int_M u_k^r \xi_k\, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k}\xi_k\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right).$$

Ainda, podemos reescrever R_k em outros termos, $R_k = R_k^{(1)} + R_k^{(2)}$, onde

$$R_k^{(1)} = \frac{1}{\theta_k}\left(\int_M u_k^r \eta_k\, dv_g - \frac{\int_M u_k^{q_k}\eta_k\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right),$$

e

$$R_k^{(2)} = \frac{1}{\theta_k}\left(\int_M (u_k\eta_k)^r\, dv_g - \frac{\int_M (u_k\eta_k)^{q_k}\, dv_g}{\int_M u_k^{q_k}\, dv_g}\right).$$

Estimemos $R_k^{(1)}$ e $R_k^{(2)}$. Fazendo uma mudança de variáveis,

$$R_k^{(1)} = \frac{1}{\theta_k}\int_{B(0;2t_k^{-1})\setminus B(0;t_k^{-1})} (\varphi_k^r - \varphi_k^{q_k})\widetilde{\eta}_k\, dh_k,$$

e

$$R_k^{(2)} = \frac{1}{\theta_k}\int_{B(0;2t_k^{-1})\setminus B(0;t_k^{-1})} [(\varphi_k\widetilde{\eta}_k)^r - (\varphi_k\widetilde{\eta}_k)^{q_k}]\, dh_k,$$

onde $\widetilde{\eta}_k(x) = \eta_k(\exp_{x_k}(t_kx)) = \eta(d_g(\exp_{x_k}(t_kx), x_k)$ em $\mathbb{R}^n$ e φ foi definido em (2.22). Pelo Teorema do Valor Médio e pelo Lema 2.2,

$$\begin{aligned}
|R_k^{(1)}| &\leq \frac{r(q_k(p-n)+np)}{np}\int_{B(0;2t_k^{-1})\setminus B(0;t_k^{-1})} \varphi_k^{\rho_k}|\log\varphi_k|\widetilde{\eta}_k\, dh_k \\
&\leq c\int_{B(0;2t_k^{-1})} \varphi_k^{\rho_k}|\log\varphi_k||x|^2\, dh_k \\
&\leq ct_k^2,
\end{aligned}$$

onde k é suficientemente grande e $\rho_k \in (q_k, r)$. De forma inteiramente análoga,

$$\begin{aligned}
|R_k^{(2)}| &\leq \frac{r(q_k(p-n)+np)}{np} \int_{B(0;2t_k^{-1})\setminus B(0;t_k^{-1})} (\varphi_k \widetilde{\eta}_k)^{\rho_k} |\log(\varphi_k \widetilde{\eta}_k)| \, dh_k \\
&\leq ct_k^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|R_k| \leq ct_k^2. \tag{2.98}$$

Agora, afirmamos que

$$S_k \leq 0, \text{ para } k \text{ suficientemente grande.} \tag{2.99}$$

Com efeito, por $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = 0$, para k suficientemente grande, $\displaystyle\int_M u_k^{q_k} \, dv_g \leq 1$. Consequentemente, pelo Teorema do Valor Médio, com $\rho_k \in (q_k, r)$,

$$\begin{aligned}
S_k &= \frac{1}{\theta_k} \frac{1}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} \left[\left(\int_M u_k^{q_k} \, dv_g \right) \left(\int_M u_k^{q_k} \xi_k \, dv_g \right) - \int_M u_k^{q_k} \xi_k \, dv_g \right] \\
&\leq \frac{r(q_k(p-n)+np)}{np} \frac{1}{\int_M u_k^{q_k} \, dv_g} \int_{M\setminus B(x_k;1)} u_k^{\rho_k} \log(u_k) \xi_k \, dv_g.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.2, $u_k(x) \leq 1$, para todo $x \in M\setminus B(x_k;1)$ e k suficientemente grande, o que prova (2.99). Substituindo (2.98) e (2.99) em (2.97), para k suficientemente grande,

$$Z_k = -R_k - S_k \geq -R_k \geq -ct_k^2,$$

ou seja, por (2.96) e por (2.4),

$$|M|^{-\frac{\tau}{n}} < C_k \leq ct_k^{2-\tau}, \text{ para } k \text{ suficientemente grande.} \tag{2.100}$$

Como $\tau \leq 2$, obtemos uma contradição quando $k \to \infty$, pois $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = 0$. Portanto, C_k é limitada e assim, a menos de subsequência, existe $B_0(p,r) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} B(p, q_k, r) = B_0(p, r), \tag{2.101}$$

o que prova o Teorema 2.1.

2.2 A validade da desigualdade ótima Riemanniana de entropia

Como definimos no Capítulo 1, A_{ent} é dado por um ínfimo na Definição 1.1. Estamos em condições de demonstrarmos que A_{ent} na verdade, um mínimo. Definimos

Definição 2.1. *A primeira desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia afirma que, para toda função $u \in H^{1,p}(M)$ tal que $\|u\|_r = 1$, existe $B \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\int_M |u|^r \log |u|^r \, dv_g \leq \frac{npr}{\tau(r(p-n)+np)} \log \left(A_{ent} \left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right).$$

Provemos agora a validade da primeira desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia

Teorema 2.2. *Para toda função $u \in H^{1,p}(M)$ tal que $\|u\|_r = 1$, existe $B \in \mathbb{R}$ tal que a primeira desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia*

$$Ent_{dv_g}(|u|^r) \leq$$

$$\leq \frac{npr}{\tau(r(p-n)+np)} \log \left(A_{ent} \left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right) \quad (\mathrm{L}_R(A_{ent}, B))$$

é válida, onde

$$Ent_{dv_g}(|u|^r) = \int_M |u|^r \log |u|^r \, dv_g.$$

Prova: Nosso ponto de partida é a família de desigualdades ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg, cuja validade foi demonstrada por Ceccon e Dúran em [14],

$$\left(\int_M |u|^r \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{r\theta_k}} \leq \left[A(p,q_k,r) \left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B(p,q_k,r) \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right] \times$$

$$\times \left(\int_M |u|^{q_k} \, dv_g \right)^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}},$$

onde $1 \leq q_k < r \leq p < n$, $k \in \mathbb{N}$, $q_k = r - \frac{1}{k}$ e $\theta_k = \frac{np(r-q_k)}{r(q_k(p-n)+np)}$. Rearranjando os termos da equação acima, obtemos

$$\frac{\tau}{\theta_k} \log \left(\frac{\|u\|_r}{\|u\|_{q_k}} \right) \leq \log \left(\frac{A(p,q_k,r)\|\nabla_g u\|_p^\tau + B(p,q_k,r)\|u\|_p^\tau}{\|u\|_{q_k}^\tau} \right). \quad (2.102)$$

Estudemos, inicialmente, o lado esquerdo de (2.102). Aplicando duas vezes o Teorema do Valor Médio,

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{\|u\|_r}{\|u\|_{q_k}}\right) &= \frac{1}{r}\left[\log(\|u\|_r^r) - \log(\|u\|_{q_k}^{q_k})\right] + \frac{q_k - r}{r}\log(\|u\|_{q_k}) \\
&= \frac{1}{r\xi_k}\left[\|u\|_r^r - \|u\|_{q_k}^{q_k}\right] + \frac{q_k - r}{r}\log(\|u\|_{q_k}) \\
&= \frac{1}{r\xi_k}\int_M |u|^{\rho_k}\log|u|(r - q_k)\, dv_g + \frac{q_k - r}{r}\log(\|u\|_{q_k}),
\end{aligned}$$

onde ξ_k está entre $\|u\|_{q_k}^{q_k}$ e $\|u\|_r^r$ e $\rho_k \in (q_k, r)$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\frac{1}{r - q_k}\log\left(\frac{\|u\|_r}{\|u\|_{q_k}}\right) &= \frac{1}{r\|u\|_r^r}\int_M |u|^r\log|u|\, dv_g - \frac{1}{r}\log(\|u\|_r) \\
&= \frac{1}{r}\left(\int_M \frac{|u|^r}{\|u\|_r^r}\log|u|\, dv_g - \int_M \frac{|u|^r}{\|u\|_r^r}\log\|u\|\, dv_g\right) \\
&= \frac{1}{r^2}\int_M \frac{|u|^r}{\|u\|_r^r}\log\left(\frac{|u|^r}{\|u\|_r^r}\right)\, dv_g.
\end{aligned}$$

Portanto, para toda $u \in H^{1,p}(M)$ tal que $\|u\|_r = 1$,

$$\frac{\tau r(r(p-n)+np)}{np}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{r - q_k}\log\left(\frac{\|u\|_r}{\|u\|_{q_k}}\right) = \frac{\tau r(r(p-n)+np)}{npr^2}\int_M |u|^r\log|u|^r\, dv_g.$$

Da desigualdade acima, da igualdade entre as constantes ótimas Riemanniana e Euclidiana de r-entropia demonstrada no Teorema 1.1 do Capítulo 1 e da convergência, possivelmente a menos de subsequência, das segundas constantes ótimas Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg obtida em (2.101),

$$Ent_{dv_g}(|u|^r) \leq \frac{npr}{\tau(r(p-n)+np)}\log\left(A_e(p,r)^{\frac{\tau}{p}}\left(\int_M |\nabla_g u|^p\, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} + B_0(p,r)\left(\int_M |u|^p\, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}\right).$$

Pelo Teorema 1.1 do Capítulo 1, $A_{ent} = A_e(p,r)^{\frac{\tau}{p}}$, o que demonstra o Teorema 2.2.

Da validade da primeira desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia, podemos considerar a menor das constantes $B \in \mathbb{R}$ que fazem valer ($\mathrm{L}_R(A_{ent}, B)$), ou seja,

Definição 2.2. *A segunda constante ótima Riemanniana de r-entropia*

$$B_{ent} = \inf\{B \in \mathbb{R};\ (L_R(A_{ent}, B))\ \textit{é válida}\}.$$

Uma consequência imediata desta definição e da última desigualdade é que

$$B_{ent} \leq B_0(p,r). \tag{2.103}$$

Ainda, podemos considerar

Definição 2.3. *A segunda desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia, válida para toda função $u \in H^{1,p}(M)$ tal que $\|u\|_r = 1$, afirma que*

$$\int_M |u|^r \log |u|^r \, dv_g \leq \frac{npr}{\tau(r(p-n)+np)} \log\left(A_{ent} \left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B_{ent} \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right).$$

É imediato da definição da primeira desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia que a segunda desigualdade ótima Riemannina de r-entropia é válida, ao isolarmos a segunda constante ótima nesta equação. Observe que essa desigualdade é a melhor versão da desigualdade Riemanniana de r-entropia, no sentido que não podemos diminuir as constantes $A, B \in \mathbb{R}$ que aparecem na desigualdade Riemanniana de r-entropia ($\mathrm{L}_R(A,B)$).

2.3 Existência de função extremal

Uma questão que surge na segunda desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia é quando uma função faz valer a igualdade na desigualdade em questão. A tais funções chamamos de função extremal para a desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia. Com os argumento utilizados na seção 2.1, demonstraremos que em alguns casos de $1 \leq \tau \leq \min\{2, p\}$ existem funções extremais. Antes disso, definiremos formalmente as funções extremais em questão.

Definição 2.4. *Uma função $u_0 \in H^{1,p}(M)$ com $\|u_0\|_r = 1$ é dita ser uma função extremal se*

$$\int_M |u_0|^r \log |u_0|^r \, dv_g = \frac{npr}{\tau(r(p-n)+np)} \log\left(A_{ent} \left(\int_M |\nabla_g u_0|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B_{ent} \left(\int_M |u_0|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right).$$

Provemos a existência de função extremal para a desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia ao demonstrarmos o seguinte teorema

Teorema 2.3. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana compacta, suave, sem bordo e de dimensão $n \geq 2$ e os parâmetros $1 < r \leq p < n$ e $1 \leq \tau < \min\{2,p\}$ ou $\tau = p < 2$. Então a segunda desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia admite função extremal e $B_0(p,r) = B_{ent}$.*

Prova: Como provamos no inicio da seção 2.1, $B(p,q_k,r) \geq |M|^{-\frac{\tau}{n}}$. Logo, $B_0(p,r) \geq |M|^{-\frac{\tau}{n}}$. Caso $B_0(p,r) = |M|^{-\frac{\tau}{n}}$, aplicando $u = |M|^{-\frac{1}{r}}$ na segunda desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia, vemos que u é uma função extremal.

Agora, caso $B_0(p,r) > |M|^{-\frac{\tau}{n}}$, como fizemos anteriormente, seja $(\gamma_k) \subset \mathbb{R}$ uma sequência tal que, para k suficientemente grande,

$$B(p,q_k,r) - \gamma_k > |M|^{-\frac{\tau}{n}}, \tag{2.104}$$

onde $\gamma_k \to 0$ quando $k \to \infty$. Repetindo a minimização feita na seção 2.1.1, obtemos a equação de Euler-Lagrange

$$\lambda_k A_k \Delta_{p,g} u_k + C_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \|u_k\|_p^{\tau-p} u_k^{p-1} + \frac{1-\theta_k}{\theta_k} \|u_k\|_{q_k}^{-q_k} u_k^{q_k-1} = \frac{1}{\theta_k} u_k^{r-1}, \tag{2.105}$$

sendo

$$\lambda_k = \nu_k \|v_k\|_r^{p-\tau} \|u_k\|_{q_k}^{\frac{(\tau-p)(1-\theta_k)}{\theta_k}}$$

e

$$A_k = \left(\int_M u_k^{q_k} dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{\theta_k q_k}}. \tag{2.106}$$

Façamos uma análise sobre A_k. Da desigualdade de Hölder, existe uma constante $c > 0$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq A_k \leq c,$$

pois

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left(\int_M u_k^{q_k} \, dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}} \\
&= \left(\int_M u_k^{r} \, dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{r \theta_k}} \left(\int_M 1 \, dv_g \right)^{\frac{r-q_k}{q_k} \cdot \frac{p(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}} \\
&= \|u_k\|_r^{\frac{p(1-\theta_k)}{r\theta_k}} \cdot |M|^{\frac{r-q_k}{q_k} \cdot \frac{p(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}} \\
&\leq c,
\end{aligned}$$

pois $\|u_k\|_r = 1$ e $\frac{r-q_k}{q_k} \cdot \frac{p(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}$ é limitado, visto que

$$\frac{r-q_k}{q_k} \cdot \frac{p(1-\theta_k)}{q_k\theta_k} = \frac{r-q_k}{q_k} \cdot \frac{np-nr+pr}{n(r-q_k)} = \frac{np-nr+pr}{nq_k} \to \frac{np-nr+pr}{nr} \text{ quando } k \to \infty.$$

Caso

$$\lim_{k\to\infty} A_k = 0, \tag{2.107}$$

então repetindo a demonstração do Teorema 2.1, concluímos que

$$0 < c < C_k \leq c t_k^{2-\tau},$$

o que é um absurdo quando $k \to \infty$ para $1 \leq \tau < \min\{p, 2\}$ ou $\tau = p < 2$. Portanto, $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = 0$ não ocorre. Uma consequência disto é $\lim\limits_{k\to\infty} A_k > 0$. Tomando u_k como função teste em (2.105), para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_M |\nabla_g u_k|^p \, dv_g + \left(\int_M u_k^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \leq c.$$

Logo, a menos de subsequência, $u_k \rightharpoonup u_0$ em $H^{1,p}(M)$. Ainda, pela imersão compacta de $H^{1,p}(M)$ em $L^r(M)$,

$$\|u_0\|_r = \lim_{k\to\infty} \|u_k\|_r = 1.$$

Agora, pela técnica de iteração de Moser em (2.15),

$$\sup_{x\in M} u_k \leq c \left(\int_M u_k^r \, dv_g \right)^{\frac{1}{r}} \leq c,$$

para todo $k \in N$. Ainda, como $u_k \in L^\infty(M)$, pelos resultados de regularidade de Tolksdorf as funções u_k são de classe $C^1(M)$ e pela desigualdade acima (u_k) forma uma sequência equilimitada. Consequentemente, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, $u_k \to u_0$ em $C^1(M)$.

Pela minimização feita na subseção 2.1.1 em (2.13), $\mathscr{J}_k(v_k) > A(p, q_k, r)$. Ainda, como $\|\nabla_g v_k\|_p = 1$,

$$\left(\frac{\|v_k\|_r}{\|v_k\|_{q_k}} \right)^{\frac{\tau}{\theta_k}} \geq \frac{A(p, q_k, r)\|\nabla_g v_k\|_p^\tau + (B(p, q_k, r) - \gamma_k)\|v_k\|_p^\tau}{\|v_k\|_{q_k}^\tau}.$$

Agora, por $u_k = \dfrac{v_k}{\|v_k\|_r}$,

$$\left(\frac{1}{\|u_k\|_{q_k}}\right)^{\frac{\tau}{\theta_k}} \geq \frac{A(p,q_k,r)\|\nabla_g u_k\|_p^\tau + (B(p,q_k,r)-\gamma_k)\|u_k\|_p^\tau}{\|u_k\|_{q_k}^\tau}.$$

Aplicando o mesmo raciocício que em (2.102), obtemos

$$\int_M |u_0|^r \log |u_0|^r \, dv_g \geq$$

$$\geq \frac{npr}{\tau(r(p-n)+np)} \log\left(A_{ent}\left(\int_M |\nabla_g u_0|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} + B_0(p,r)\left(\int_M |u_0|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}\right).$$

Portanto, u_0 é função extremal para a equação de r-entropia e, neste caso, $B_0(p,r) = B_{ent}$, o que encerra a demonstração do Teorema 2.3 e conclui o Capítulo 2.

Capítulo 3

ESTIMATIVAS SOBRE A SEGUNDA CONSTANTE ÓTIMA DE ENTROPIA

Como mencionamos na introdução, o programa AB em constantes ótimas visa responder algumas questões. Até aqui, respondemos no primeiro capítulo que a primeira constante ótima Riemanniana de r-entropia não depende da métrica g da variedade Riemanniana M em questão e vale a primeira desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia. Como consequência imediata disso, podemos considerar a segunda constante ótima Riemanniana de r-entropia e, a partir disto, obtivemos a segunda desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia. Concluíndo os estudos sobre as constantes ótimas Riemannianas de r-entropia, estimaremos a segunda constante ótima Riemanniana de r-entropia. Estimativas do tipo podem ser encontradas em [28] para a desigualdade ótima Riemanniana de Sobolev.

Na seção 3.1, inspirados nas contas feitas em [16], faremos uma estimativa por baixo da segunda constante ótima. Utilizaremos a existência de função extremal para a desigualdade ótima Euclidiana de r-entropia, o que pode ser verificada seguindo as estimativas presentes em [33] ou [1]. Com as constantes ótimas faremos uma reparametrização das mesmas no sentido das bolhas gaussianas e combinaremos isto com as expansões de Cartan da métrica g para obtermos a desigualdade desejada.

Na seção 3.2, encerraremos este trabalho ao estimarmos por cima a segunda constante ótima, ao supormos que a desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia no caso $\tau = 2 \leq p$ não possui função extremal. Tais estimativas foram inspiradas nas contas em [12] ao combinarmos a desigualdade ótima Riemanniana de Gagliardo-Nirenberg com a sequência de pontos (u_k) obtidos na equação de Euler-Lagrange da subseção 2.1.1 e com o Lema da Distância que obtivemos na subseção 2.1.3. Como na seção 3.1, utilizaremos fortemente as expansões de Cartan de métrica g.

3.1 Estimativa por baixo da segunda constante ótima de entropia

Façamos uma estimativa por baixo de B_{ent}. Para isto, precisaremos de uma função extremal $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ para a desigualdade ótima Euclidiana de r-entropia, isto é, se $1 < r \leq p < n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^r \log \varphi^r \, dx = \frac{nr}{n(p-r)+pr} \log\left(A_e(p,r) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^p \, dx \right), \tag{3.1}$$

com $\|\varphi\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = 1$. Observamos que tal φ existe e decorre da existência de função extremal para a desigualdade ótima Euclidiana de Gagliardo-Nirenberg

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_q|^r \, dx \right)^{\frac{p}{r\theta}} = A_e(p,q,r) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi_q|^p \, dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_q|^q \, dx \right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}, \tag{3.2}$$

onde $1 \leq q < r \leq p < n$. Como mencionado em [1], sempre existe $\varphi_q \in D^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ para a desigualdade acima nestes parâmetros e tal função extremal surge ao resolvermos a respectiva equação de Euler-Lagrange

$$-\Delta_p u + u^{q-1} = \lambda u^{r-1} \tag{3.3}$$

na forma fraca, onde λ é o multiplicador de Lagrange para o limitador $\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = 1$ e $\Delta_p u = div\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \right)$ denota pelo operador p-Laplaciano. Tal funcional φ_q pode ser escolhido não-negativo, radialmente simétrico, decrescente e $\varphi_q \to 0$ quando $|x| \to \infty$.

Observamos que existe $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_q \to \varphi$ quando $q \to r^-$. Com efeito, pela técnica de iteração de Moser [35] em (3.3),

$$\varphi_q^r \leq c \int_{B(x_0;2R)} \varphi_q^r \, dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_q^r \, dx \leq c,$$

isto é, $\|\varphi_q\|_{L^\infty(B(0;r))} \leq c$ para todo parâmetro q tal que $1 \leq q < r \leq p < n$, e assim, a sequência $(\varphi_q)_q$ é equilimitada. Ainda, tal sequência é equicontínua, pois aplicando o Teorema 1 de Tolksdorf [39] na equação de Euler-Lagrange (3.3), para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|\nabla \varphi_q(x) - \nabla \varphi_q(y)| \leq C(r)|x-y|^\lambda.$$

Consequentemente, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli e pela técnica da diagonal de Cantor, existe $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_q \to \varphi$ quando $q \to r^-$. Ainda,

$$1 = \lim_{q \to r^-} \|\varphi_q\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}.$$

Disto, arrumando (3.2) como em (2.102), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^r \log \varphi^r \, dx = \frac{nr}{n(p-r)+pr} \log\left(A_e(p,r) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^p \, dx \right),$$

ou seja, φ é função extremal para a desigualdade ótima Euclidiana de r-entropia.

Observamos ainda que, no caso $1 < r < p < n$, a função extremal para a desigualdade ótima Euclidiana de r-entropia possui suporte compacto e é radial. Com efeito, se φ é uma função extremal, então podemos definir $H = \{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n);\ \|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = 1\}$ e o funcional $E : H \to \mathbb{R}$ dado por

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^r \log |u| \, dx - \frac{n}{n(p-r)+pr} \log\left(A_e(p,r) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx \right).$$

Temos que E é um funcional de classe C^1 e o mesmo atinge o seu máximo justamente nas funções extremais φ para a desigualdade ótima Euclidiana de r-entropia. Consequentemente, podemos obter a seguinte equação de Euler-Lagrange

$$\varphi^{r-1} \log \varphi + \left(\frac{1}{r} - \lambda \right) \varphi^{r-1} + \frac{n}{r(n(p-r)+pr)} \frac{1}{\|\nabla \varphi\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}} \Delta_p \varphi = 0,$$

na forma fraca para funções teste não negativas, onde Δ_p denota o operador p-Laplaciano e λ o multiplicador de Lagrange associado. Denotando

$$\alpha = \frac{1}{r} - \lambda,$$

$$\beta = \frac{n}{r(n(p-r)+pr)} \frac{1}{\|\nabla \varphi\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}}$$

e reescrevendo a equação de Euler-Lagrange em termos de

$$w(x) = \lambda^{\overline{\log(\lambda)}^{\alpha}} \varphi\left((\beta + \lambda^{\frac{\alpha}{\log(\lambda)}(p-r)}) x \right),$$

obtemos que toda função extremal para a desigualdade ótima Euclidiana de r-entropia satisfaz, após uma reparametrização, a seguinte equação de Euler-Lagrange

$$\Delta_p w + w^{r-1} \log w = 0. \tag{3.4}$$

Utilizando o Teorema 3 de Serrin e Tang em [36], toda solução da equação acima tem suporte compacto se considerarmos

$$f(u) = \begin{cases} u^{r-1}\log u, \text{ se } u \geq 0, \\ 0, \text{ se } u = 0. \end{cases}$$

(H1) f é contínua em $(0,\infty)$ com $f(u) \leq 0$ em $(0,1]$ e $f(u) > 0$ em $u > 1$;

(H2) $f \in C^1(1,\infty)$ com $g(u) = u\dfrac{f'(u)}{f(u)} = r - 1 + \dfrac{1}{\log u}$ não crescente em $(1,\infty)$; e

(H3) $\displaystyle\int_0 |f(s)|ds < \infty$ próximo de 0 e $F(u) = \displaystyle\int_0^u f(s)ds < 0$ para $u < \exp\left(\dfrac{1}{r}\right)$, pois

$$F(u) = \frac{u^r}{r^2}(r\log u - 1),$$

com $q = \lim\limits_{u\to\infty} F(u) = r - 1 < p^*$, $\gamma = \sup\{s;\ F(s) \leq 0\} = \exp\left(\dfrac{1}{r}\right) < \infty$ e $\lim\limits_{t\to 0^+} F(t) = 0$.

Por fim, a integral abaixo existe próximo de zero, pois

$$\begin{aligned} \int_0 |F(s)|^{-\frac{1}{p}}ds &= r^{\frac{2}{p}}\int_0 s^{-\frac{r}{p}}(1 - r\log s)^{-\frac{1}{p}}ds \\ &= \lim_{t\to 0^+}\left[-\frac{p^{1-\frac{1}{p}}r^{\frac{2}{p}}(p-r)^{\frac{1}{p}}\exp\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{p-1}{p},\frac{(p-r)(1-r\log t)}{pr}\right)}{r^{\frac{1}{p}}(r-p)}\right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde $\Gamma(s,x) = \displaystyle\int_x^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$ denota a função gama incompleta superior. Observamos que vale a estimativa acima, pois $\lim\limits_{t\to 0^+} -r\log t = +\infty$ e $r < p$, assim da definição da função gama incompleta superior,

$$\lim_{t\to 0^+}\Gamma\left(\frac{p-1}{p},\frac{(p-r)(1-r\log t)}{pr}\right) = 0.$$

Como toda função extremal φ para a desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia possui suporte compacto para $1 < r < p < n$ e pelas contas em [17] para $r = p$, ficam bem definidas as seguintes integrais

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi^r\log\varphi^r\ dx,\ I_2 = \int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\varphi|^p\ dx,\ I_3 = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi^p\ dx,$$

e

$$J_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^r |x|^2 \, dx, \;\; J_2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^p |x|^2 \, dx, \;\; J_3 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^r \log \varphi^r |x|^2 \, dx.$$

No que segue, faremos a primeira estimativa para a segunda constante ótima Riemannina de r-entropia

Teorema 3.1. *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana suave, compacta, sem bordo e de dimensão $n \geq 2$, os parâmetros $1 < r \leq p < n$, $\tau = 2 \leq p$ e $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ uma função extremal para a desigualdade ótima Euclidiana de r-entropia. Então vale a seguinte estimativa para a segunda constante ótima Riemanniana de r-entropia,*

$$\sup_{x \in M} \frac{Scal_g(x)}{6n} A_{ent} \frac{I_2^{\frac{\tau}{p}}}{I_3^{\frac{\tau}{p}}} \frac{\tau}{p} \left(\frac{p-n}{n} J_1 + \frac{J_2}{I_2} - \frac{n(p-r)+pr}{nr} J_3 \right) \leq B_{ent}.$$

Prova: Consideremos $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ uma função extremal para a desigualdade ótima Euclideana de r-entropia. Definimos para $\varepsilon > 0$,

$$\varphi_\varepsilon(\exp_{x_0}(x)) = \eta(x) \varepsilon^{-\frac{n}{r}} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

onde $\eta \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ é uma função de corte tal que $\eta \equiv 1$ em $B_{\frac{\delta}{2}}(0)$, $\eta \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)$, $0 \leq \eta \leq 1$ e $B_\delta(0)$ é uma bola geodésica.

Lembramos ainda da expansão de Cartan do elemento de volume na carta exponencial em torno de x_0,

$$\sqrt{\det g(x)} = 1 - \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^{n} Ric_{ij}(x_0) x^i x^j + o(|x|^3).$$

A segunda desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia é equivalente à desigualdade

$$\frac{1}{\|u\|_r^r} \int_M |u|^r \log |u|^r \, dv_g + \left(\frac{np}{r(p-n)+np} - 1 \right) \log \|u\|_r^r \leq$$

$$\leq \frac{npr}{\tau(r(p-n)+np)} \log\left(A_{ent} \left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B_{ent} \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right), \qquad (3.5)$$

para toda função $u \in C_0^\infty(M)$. Pela expansão de Cartan da métrica g,

$$\int_M \varphi_\varepsilon^p \, dv_g \;\; \leq \;\; \varepsilon^{-\frac{np}{r}} \int_{\mathbb{R}^n} \eta^p(x) \varphi^p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx + c\varepsilon^{-\frac{np}{r}} \int_{\mathbb{R}^n} \eta^p(x) \varphi^p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) |x|^2 \, dx.$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = \dfrac{x}{\varepsilon}$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \eta^p(x)\varepsilon^{-\frac{np}{r}}\varphi^p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx &= \varepsilon^{n-\frac{np}{r}}\int_{\mathbb{R}^n} \eta^p(\varepsilon y)\varphi^p(y)\, dy \\ &\leq \varepsilon^{n-\frac{np}{r}}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^p(y)\, dy \\ &= \varepsilon^{n-\frac{np}{r}} I_3.\end{aligned}$$

Agora, por φ ter suporte compacto para $1 < p < r < n$ e pelas contas em [17] para $r = p$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \eta^p(x)\varepsilon^{-\frac{np}{r}}\varphi^p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)|x|^2\, dx &\leq c\varepsilon^{2+n-\frac{np}{r}}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^p(x)\, dx \\ &= \varepsilon^{n-\frac{np}{r}} o(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_M \varphi_\varepsilon^p\, dv_g \leq \varepsilon^{n-\frac{np}{r}}\Big(I_3 + o(\varepsilon^2)\Big). \tag{3.6}$$

Seguiremos utilizando a expansão de Cartan do elemento de volume nos outros termos em (3.5). Para o primeiro termo do lado esquerdo

$$\begin{aligned}\int_M \varphi_\varepsilon^r \log\varphi_\varepsilon^r\, dv_g &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon^r \log\varphi_\varepsilon^r\, dx - \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^n Ric_{ij}(x_0)\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon^r \log\varphi_\varepsilon^r x^i x^j\, dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon^r \log\varphi_\varepsilon^r o(|x|^3)\, dx.\end{aligned}$$

Estudemos o primeiro termo do lado direito. Por $\|\varphi\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = 1$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon^r \log\varphi_\varepsilon^r\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \eta^r(x)\varepsilon^{-n}\varphi^r\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\log\left(\eta^r(x)\varepsilon^{-n}\varphi^r\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) dx \\ &= \varepsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \eta^r(x)\varphi^r\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\log\left(\eta^r(x)\varphi^r\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) dx \\ &+ \varepsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \eta^r(x)\varphi^r\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\log\Big(\varepsilon^{-n}\Big)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \eta^r(\varepsilon x)\varphi^r(x)\log\Big(\eta^r(\varepsilon x)\varphi^r(x)\Big)\, dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \eta^r(\varepsilon x)\varphi^r(x)\log\Big(\varepsilon^{-n}\Big)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^r\log\varphi^r\, dx - n\log\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^r\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^r\log\varphi^r\, dx - n\log\varepsilon.\end{aligned}$$

Como mencionado em [12], para toda função radial $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) x^i x^j \, dx = \frac{\delta_{ij}}{n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)|x|^2 \, dx,$$

e de forma análoga ao que fizemos anteriormente,

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^{n} Ric_{ij}(x_0) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon^r \log \varphi_\varepsilon^r x^i x^j \, dx = -\frac{1}{n} Scal_g(x_0)\varepsilon^2 \Bigg[& \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^r \log \varphi^r |x|^2 \, dx \\ & - n \log \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^r |x|^2 \, dx \Bigg] \end{aligned}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon^r \log \varphi_\varepsilon^r o(|x|^3) \, dx = o(\varepsilon^3 \log \varepsilon).$$

Portanto,

$$\int_M \varphi_\varepsilon^r \log \varphi_\varepsilon^r \, dv_g = I_1 - n \log \varepsilon - \frac{Scal_g(x_0)}{6n} J_3 \varepsilon^2 + \frac{Scal_g(x_0)}{6} J_1 \varepsilon^2 \log \varepsilon + o(\varepsilon^3 \log \varepsilon). \quad (3.7)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon^r \, dv_g &= 1 - \frac{1}{6n} Scal_g(x_0)\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^r |x|^2 \, dx + o(\varepsilon^3) \\ &= 1 - \frac{1}{6n} Scal_g(x_0)\varepsilon^2 J_1 + o(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Como anteriormente, pela expansão de Cartan,

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla_g \varphi_\varepsilon|^p \, dv_g \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_g \varphi_\varepsilon|^p \, dx - \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^{n} Ric_{ij}(x_0) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_g \varphi_\varepsilon|^p x^i x^j \, dx + \\ + c \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_g \varphi_\varepsilon|^p o(|x|^3) \, dx. \end{aligned}$$

Pela definição de $\varphi_\varepsilon(\exp_{x_0}(x))$,

$$\nabla_g \varphi_\varepsilon(\exp_{x_0}(x)) = \varepsilon^{-\frac{n}{r}} \left[\eta(x) \nabla_g \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla_g \eta(x) \right],$$

e assim,

$$\begin{aligned} |\nabla_g \varphi_\varepsilon|^p \leq \varepsilon^{-\frac{np}{r}} \Bigg[& \eta(x)^p \left| \nabla_g \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^p + c \left(\eta(x) \left| \nabla_g \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| \right)^{p-1} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) |\nabla_g \eta(x)| \\ & + c \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^p \left| \nabla_g \eta(x) \right|^p \Bigg]. \end{aligned}$$

Sendo φ uma função radial, na carta exponencial,

$$|\nabla_g \varphi| = |\nabla \varphi|.$$

Logo, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_g \varphi_\varepsilon|^p \, dx \;\; &\leq \;\; \varepsilon^{-\frac{np}{r}} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\nabla \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^p dx + c\varepsilon^{-\frac{np}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\nabla \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \times \\ &\times \;\; \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^p |\nabla_g \eta(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} + c\varepsilon^{-\frac{np}{r}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^p \left|\nabla_g \eta(x)\right|^p dx.\end{aligned}$$

Ainda, φ e $|\nabla \varphi|$ são funções em $L^p(\mathbb{R}^n)$ com suporte compacto. Consequentemente, pelo Teorema da Mudança de Variáveis,

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\nabla \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^p |\nabla_g \eta(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} + \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^p \left|\nabla_g \eta(x)\right|^p dx \leq \\ \leq c\varepsilon^{n+1} + c\varepsilon^{n+p} \leq c\varepsilon^3.\end{aligned}$$

Por $n - \frac{np}{r} - p$ ser um valor negativo, para ε suficientemente pequeno obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_g \varphi_\varepsilon|^p \, dx \leq \varepsilon^{n-\frac{np}{r}-p} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi(x)|^p \, dx + c\varepsilon^3\right],$$

e assim,

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla_g \varphi_\varepsilon|^p \, dv_g \leq \varepsilon^{n-\frac{np}{r}-p} \Bigg[\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^p \, dx - \frac{\varepsilon^2}{6} Scal_g(x_0) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^p |x|^2 \, dx \\ + c\varepsilon^3 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^p o(|x|^3) \, dx + c\varepsilon^3\Bigg].\end{aligned}$$

Utilizando que $|\nabla \varphi| \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_M |\nabla_g \varphi_\varepsilon|^p \, dv_g \leq \varepsilon^{n-\frac{np}{r}-p} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^p \, dx - \frac{\varepsilon^2}{6} Scal_g(x_0) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^p |x|^2 \, dx + o(\varepsilon^3)\right].$$

Por fim, pelo Teorema do Valor Médio, existe σ_ε entre

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^p \, dx \text{ e } \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^p \, dx - \frac{\varepsilon^2}{6} Scal_g(x_0) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^p |x|^2 \, dx + o(\varepsilon^3)$$

tal que

$$\begin{aligned}\left(\int_M |\nabla_g \varphi_\varepsilon|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} \leq \left(\varepsilon^{n-\frac{np}{r}-p}\right)^{\frac{\tau}{p}} \Bigg[\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^p \, dx\right)^{\frac{\tau}{p}} - \\ - \frac{\tau}{p} (\sigma_\varepsilon)^{\frac{\tau}{p}-1} \frac{\varepsilon^2}{6} Scal_g(x_0) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^p |x|^2 \, dx + o(\varepsilon^3)\Bigg],\end{aligned}$$

isto é,

$$\left(\int_M |\nabla_g \varphi_\varepsilon|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} \leq \left(\varepsilon^{n-\frac{np}{r}-p}\right)^{\frac{\tau}{p}} \left[I_2^{\frac{\tau}{p}} - \frac{\tau}{p}\left(\sigma_\varepsilon\right)^{\frac{\tau}{p}-1} \frac{\varepsilon^2}{6} Scal_g(x_0) J_2 + o(\varepsilon^3)\right] \tag{3.9}$$

Por $A_{opt} = A_e(p,r)^{\frac{\tau}{p}}$ e por (3.6), (3.7), (3.8) e (3.9) em (3.5), obtemos

$$\frac{I_1 - n\log\varepsilon - \frac{Scal_g(x_0)}{6n} J_3\varepsilon^2 + \frac{Scal_g(x_0)}{6} J_1 \varepsilon^2 \log\varepsilon + o(\varepsilon^3\log\varepsilon)}{1 - \frac{Scal_g(x_0)}{6n}\varepsilon^2 J_1 + o(\varepsilon^3)} + \left(\frac{np}{r(p-n)+np} - 1\right)\times$$

$$\times \log\left(1 - \frac{Scal_g(x_0)}{6n}\varepsilon^2 J_1 + o(\varepsilon^3)\right) \leq \left(n - \frac{np}{r} - p\right)\frac{\tau}{p}\frac{npr}{\tau(r(p-n)+np)}\log\varepsilon +$$

$$+\frac{npr}{\tau(r(p-n)+np)}\log\left[A_e(p,r)^{\frac{\tau}{p}} I_2^{\frac{\tau}{p}} - A_{ent}\frac{Scal_g(x_0)}{6n}\frac{\tau}{p}(\sigma_\varepsilon)^{\frac{\tau}{p}-1}\varepsilon^2 J_2 + \varepsilon^{\frac{\tau(r(p-n)+np)}{pr}} B_{ent} I_3^{\frac{\tau}{p}}\right.$$
$$\left. + o(\varepsilon^3)\right].$$

Como

$$\left(n - \frac{np}{r} - p\right)\frac{\tau}{p}\frac{npr}{\tau(r(p-n)+np)} = -n,$$

e

$$2 \leq \frac{\tau(r(p-n)+np)}{pr},$$

colocando em evidência o termo $A_e(p,r)^{\frac{\tau}{p}} I_2^{\frac{\tau}{p}}$ e por $\log(a+b) = \log(a) + \log\left(1 + \frac{b}{a}\right)$, para a e b reais positivos,

$$I_1 - n\log\varepsilon - \frac{Scal_g(x_0)}{6n}J_3\varepsilon^2 + \frac{Scal_g(x_0)}{6}J_1\varepsilon^2\log\varepsilon + \frac{Scal_g(x_0)}{6n}I_1 J_1\varepsilon^2 - \frac{Scal_g(x_0)}{6}J_1\varepsilon^2\log\varepsilon +$$

$$+\left(\frac{np}{r(p-n)+np} - 1\right)\log\left(1 - \frac{Scal_g(x_0)}{6n}\varepsilon^2 J_1 + o(\varepsilon^3)\right) +$$

$$+o(\varepsilon^3\log\varepsilon) \leq -n\log\varepsilon + \frac{np}{r(p-n)+np}\log\left(A_e(p,r) I_2\right) +$$

$$+\frac{npr}{\tau(r(p-n)+np)}\log\left(1 - \frac{Scal_g(x_0)}{6n}\frac{\tau}{p}(\sigma_\varepsilon)^{\frac{\tau}{p}-1}\varepsilon^2 J_2 I_2^{-\frac{\tau}{p}} + \varepsilon^2\frac{B_{ent}}{A_{ent}} I_3^{\frac{\tau}{p}} I_2^{-\frac{\tau}{p}} + o(\varepsilon^3)\right).$$

Utilizando agora que $\log(x) \leq x - 1$, e como I_1, J_1 são valores finitos que não dependem de ε,

$$\frac{Scal_g(x_0)}{6n} I_1 J_1 \varepsilon^2 = o(\varepsilon^2),$$

para ε suficientemente pequeno e que φ é uma função extremal para a desigualdade ótima Euclidiana de r-entropia, isto é, $I_1 = \dfrac{nr}{np - nr + pr}\log\Big(A_e(p,r)I_2\Big)$, obtemos

$$-\frac{Scal_g(x_0)}{6n}J_3\varepsilon^2 + \left(1 - \frac{np}{r(p-n)+np}\right)\frac{Scal_g(x_0)}{6n}\varepsilon^2 J_1 + o(\varepsilon^3\log\varepsilon) \leq$$

$$\leq -\frac{nr}{r(p-n)+np}\frac{Scal_g(x_0)}{6n}(\sigma_\varepsilon)^{\frac{\tau}{p}-1}\varepsilon^2 J_2 I_2^{-\frac{\tau}{p}} + \frac{npr}{\tau(r(p-n)+np)}\varepsilon^2\frac{B_{ent}}{A_{ent}}I_3^{\frac{\tau}{p}}I_2^{-\frac{\tau}{p}} + o(\varepsilon^3).$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, lembrando que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\sigma_\varepsilon = I_2$ e arrumando os termos acima,

$$\frac{Scal_g(x_0)}{6n}A_{ent}\frac{I_2^{\frac{\tau}{p}}}{I_3^{\frac{\tau}{p}}}\frac{\tau}{p}\left(\frac{p-n}{n}J_1 + \frac{J_2}{I_2} - \frac{n(p-r)+pr}{nr}J_3\right) \leq B_{ent}.$$

Como a desigualdade acima vale para qualquer $x_0 \in M$, segue que

$$\sup_{x\in M}\frac{Scal_g(x)}{6n}A_{ent}\frac{I_2^{\frac{\tau}{p}}}{I_3^{\frac{\tau}{p}}}\frac{\tau}{p}\left(\frac{p-n}{n}J_1 + \frac{J_2}{I_2} - \frac{n(p-r)+pr}{nr}J_3\right) \leq B_{ent},$$

o que demonstra o Teorema 3.1.

3.2 Relação entre a segunda constante ótima e a existência de funções extremais para a desigualdade Riemanniana de entropia

No caso onde a segunda desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia não possui função extremal, podemos obter uma igualdade para a segunda constante ótima Riemanniana de r-entropia. Demonstraremos isso no que segue

Teorema 3.2. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana compacta, suave, sem bordo e de dimensão $n \geq 2$. Consideremos $\tau = 2 \leq p$, $1 < r \leq p < n$ e B_{ent} a segunda constante ótima Riemanniana de r-entropia. Então, vale das duas uma: A desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia tem função extremal; ou existe $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ função extremal para a desigualdade ótima Euclidiana de r-entropia tal que*

$$B_{ent} = \sup_{x\in M}\frac{Scal_g(x)}{6n}A_{ent}\frac{I_2^{\frac{\tau}{p}}}{I_3^{\frac{\tau}{p}}}\frac{\tau}{p}\left(\frac{p-n}{n}J_1 + \frac{J_2}{I_2} - \frac{n(p-r)+pr}{nr}J_3\right).$$

Prova: Como mencionado na seção 2.3, caso $B(p, q_k, r) = |M|^{-\frac{\tau}{n}}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, então a desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia possui função extremal, e assim, iremos supor que a desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia não possui função extremal. Consequentemente,

$$B(p, q_k, r) > |M|^{-\frac{\tau}{n}}. \tag{3.10}$$

Como antes, seja $(\gamma_k) \subset \mathbb{R}$ uma sequência tal que, para k suficientemente grande,

$$B(p, q_k, r) - \gamma_k > |M|^{-\frac{\tau}{n}}, \tag{3.11}$$

onde $\gamma_k \to 0$ quando $k \to \infty$. Como fizemos no capítulo anterior, consideramos o espaço $H = \{u \in H^{1,p}(M);\ \|u\|_p = 1\}$ e o funcional $f_k : H \to \mathbb{R}$, definido por

$$f_k(u) = \left[A(p, q_k, r)\left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}} + (B(p, q_k, r) - \gamma_k)\left(\int_M |u|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}\right] \times$$
$$\times \left(\int_M |u|^{q_k} \, dv_g\right)^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}} \left(\int_M |u|^r \, dv_g\right)^{-\frac{\tau}{r\theta_k}}, \tag{3.12}$$

onde $f_k(u) \leq 1$. Caso $\lim\limits_{k\to\infty} A_k \neq 0$, pelas contas feitas na seção 2.1, a desigualdade ótima Riemanniana de r-entropia tem função extremal. Desta forma, $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = 0$, e repetindo as contas feitas no capítulo anterior, garantimos a existência da seguinte equação de Euler-Lagrange:

$$\lambda_k A_k \Delta_{p,g} u_k + C_k A_k^{\frac{\tau}{p}} \|u_k\|_p^{\tau-p} u_k^{p-1} + \frac{1-\theta_k}{\theta_k} \|u_k\|_{q_k}^{-q_k} u_k^{q_k-1} = \frac{1}{\theta_k} u_k^{r-1}, \tag{3.13}$$

em que

$$\lambda_k = \nu_k \|v_k\|_r^{p-\tau} \|u_k\|_{q_k}^{\frac{(\tau-p)(1-\theta_k)}{\theta_k}},$$
$$A_k = \left(\int_M u_k^{q_k} dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta_k)}{\theta_k q_k}},$$

e u_k é tal que $\|u_k\|_r = 1$. Das contas feitas no Lema 2.1, concluímos que se $x_k \in M$ é tal que $u_k(x_k) = \|u_k\|_\infty$, então fazendo o reescalonamento

$$\begin{cases} h_k = g(\exp_{x_k}(t_k x)), \\ \varphi_k = t_k^{\frac{n}{r}} u_k(\exp_{x_k}(t_k x)), \end{cases}$$

temos que existe $\varphi \in L^r(\mathbb{R}^n) \cap C_0^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|\varphi\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = 1$ e φ positiva em uma vizinhança da origem. Além disto, provamos no Lema da Distância (2.53) que, para cada constante real positiva λ, existe outra constante positiva C_λ que independe de $k \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $x \in M$,

$$|x|^\lambda \varphi_k(x) \leq C_\lambda.$$

Observamos agora que φ é uma função extremal para a desigualdade ótima Euclideana de r-entropia, pois da minimização feita na subseção 2.1.1 em (2.13), tinhamos $f_k(v_k) > A(p, q_k, r)$. Ainda, por $\|\nabla_g v_k\|_p = 1$,

$$\left(\frac{\|v_k\|_r}{\|v_k\|_{q_k}}\right)^{\frac{\tau}{\theta_k}} \geq \frac{A(p,q_k,r)\|\nabla_g v_k\|_p^\tau + (B(p,q_k,r) - \gamma_k)\|v_k\|_p^\tau}{\|v_k\|_{q_k}^\tau} \geq A(p,q_k,r)\frac{\|\nabla_g v_k\|_p^\tau}{\|v_k\|_{q_k}^\tau}.$$

Por $u_k = \dfrac{v_k}{\|v_k\|_r}$,

$$\left(\frac{\|u_k\|_r}{\|u_k\|_{q_k}}\right)^{\frac{\tau}{\theta_k}} \geq A(p,q_k,r)\frac{\|\nabla_g u_k\|_p^\tau}{\|u_k\|_{q_k}^\tau}.$$

Reescrevendo a equação acima em termos de φ_k e h_k,

$$t_k^{\frac{\tau}{p}\left(\frac{n(q_k-p)-pq_k}{q_k}\right)}\left(\frac{\|\varphi_k\|_{L^r(B(0;\sigma))}}{\|\varphi_k\|_{L^{q_k}(B(0;\sigma))}}\right)^{\frac{\tau}{\theta_k}} \geq t_k^{\frac{\tau}{p}\left(\frac{n(q_k-p)-pq_k}{q_k}\right)} A(p,q_k,r)\frac{\|\nabla_{h_k}\varphi_k\|_{L^p(B(0;\sigma))}^\tau}{\|\varphi_k\|_{L^{q_k}(B(0;\sigma))}^\tau},$$

ou seja,

$$\left(\frac{\|\varphi_k\|_{L^r(B(0;\sigma))}}{\|\varphi_k\|_{L^{q_k}(B(0;\sigma))}}\right)^{\frac{\tau}{\theta_k}} \geq A(p,q_k,r)\frac{\|\nabla_{h_k}\varphi_k\|_{L^p(B(0;\sigma))}^\tau}{\|\varphi_k\|_{L^{q_k}(B(0;\sigma))}^\tau}.$$

Aplicando o mesmo raciocício que em (2.102), ao tomarmos $k \to \infty$, a seguir $\sigma \to \infty$, por $\lim\limits_{k\to\infty} A(p,q_k,r) = A_e(p,r)^{\frac{\tau}{p}}$ e por $\|\varphi\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = 1$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^r \log \varphi^r \, dx \geq \frac{nr}{n(p-r)+pr}\log\left(A_e(p,r)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\varphi|^p \, dx\right).$$

Como φ satisfaz a desigualdade ótima Euclideana de entropia, temos que vale a igualdade na desigualdade acima. Portanto, φ é função extremal para a desigualdade ótima Euclidiana de r-entropia.

Definimos o funcional $I_{g,k} : H \to \mathbb{R}$, dado por

$$I_{g,k}(u) = A(p,q_k,r)\left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g\right)^{\frac{\tau}{p}}\left(\int_M |u|^{q_k}\, dv_g\right)^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}}\left(\int_M |u|^r \, dv_g\right)^{-\frac{\tau}{r\theta_k}}.$$

Da definição de f_k e por $f_k(u) \leq 1$

$$I_{g,k}(u_k) + (B(p, q_k, r) - \gamma_k)\|u_k\|_p^\tau A_k^{\frac{\tau}{p}} \leq 1.$$

Disto e por (2.103), a menos de subsequência,

$$B_{ent} \leq \lim_{k\to\infty} B(p, q_k, r) \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1 - I_{g,k}(u_k)}{\|u_k\|_p^\tau A_k^{\frac{\tau}{p}}}. \tag{3.14}$$

Observamos que, se ξ representa a métrica Euclidiana, pela definição de $I_{g,k}$ temos que $I_{\xi,k}(u_k) \geq 1$. Se provarmos que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{I_{\xi,k}(u_k) - I_{g,k}(u_k)}{\|u_k\|_p^\tau A_k^{\frac{\tau}{p}}} \leq \frac{Scal_g(x_0)}{6n} A_{ent} \frac{I_2^{\frac{\tau}{p}}}{I_3^{\frac{\tau}{p}}} \frac{\tau}{p} \left(\frac{p-n}{n} J_1 + \frac{J_2}{I_2} - \frac{n(p-r)+pr}{nr} J_3 \right), \tag{3.15}$$

obtemos por (3.14)

$$\begin{aligned} B_{ent} &\leq \lim_{k\to\infty} B(p, q_k, r) \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \frac{1 - I_{g,k}(u_k)}{A_k^{\frac{\tau}{p}} \|u_k\|_p^\tau} \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \frac{I_{\xi,k}(u_k) - I_{g,k}(u_k)}{A_k^{\frac{\tau}{p}} \|u_k\|_p^\tau} \\ &\leq \frac{Scal_g(x_0)}{6n} A_{ent} \frac{I_2^{\frac{\tau}{p}}}{I_3^{\frac{\tau}{p}}} \frac{\tau}{p} \left(\frac{p-n}{n} J_1 + \frac{J_2}{I_2} - \frac{n(p-r)+pr}{nr} J_3 \right) \\ &\leq \sup_{x\in M} \frac{Scal_g(x)}{6n} A_{ent} \frac{I_2^{\frac{\tau}{p}}}{I_3^{\frac{\tau}{p}}} \frac{\tau}{p} \left(\frac{p-n}{n} J_1 + \frac{J_2}{I_2} - \frac{n(p-r)+pr}{nr} J_3 \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$B_{ent} \leq \sup_{x\in M} \frac{Scal_g(x)}{6n} A_{ent} \frac{I_2^{\frac{\tau}{p}}}{I_3^{\frac{\tau}{p}}} \frac{\tau}{p} \left(\frac{p-n}{n} J_1 + \frac{J_2}{I_2} - \frac{n(p-r)+pr}{nr} J_3 \right) \tag{3.16}$$

Demonstremos (3.15) no que segue. Com efeito,

$$I_{\xi,k}(u_k) - I_{g,k}(u_k) = I_{g,k}(u_k)\frac{\left(\frac{\int_M |\nabla_\xi u_k|^p\, dv_\xi}{\int_M |\nabla_g u|^p\, dv_g}\right)^{\frac{\tau}{p}}\left(\frac{\int_M |u_k|^{q_k}\, dv_\xi}{\int_M |u_k|^{q_k}\, dv_g}\right)^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}}}{\left(\frac{\int_M |u_k|^r\, dv_\xi}{\int_M |u_k|^r\, dv_g}\right)^{\frac{\tau}{r\theta_k}}} - I_{g,k}(u_k)$$

$$= I_{g,k}(u_k)\frac{\left(\frac{\int_M |\nabla_\xi u_k|^p\, dv_\xi}{\int_M |\nabla_g u|^p\, dv_g}\right)^{\frac{\tau}{p}}\left(\frac{\int_M |u_k|^{q_k}\, dv_\xi}{\int_M |u_k|^{q_k}\, dv_g}\frac{\int_M |u_k|^r\, dv_g}{\int_M |u_k|^r\, dv_\xi}\right)^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}}}{\left(\frac{\int_M |u_k|^r\, dv_\xi}{\int_M |u_k|^r\, dv_g}\right)^{\frac{\tau}{r\theta_k}-\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}}} -$$

$$- I_{g,k}(u_k). \tag{3.17}$$

Estimaremos as integrais acima. Inicialmente, relembramos a expansão do vetor gradiente em coordenadas normais:

$$|\nabla u_k|^p = |\nabla_\xi u_k|^p = |\nabla_g u_k|^p + \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^n Rm_g(x_k)(\nabla u_k, x, x, \nabla u_k) + |\nabla_g u_k|^p o(|x|^3),$$

onde x^i é a i-ésima coordenada da aplicação exponencial em x_0 e Rm_g é o tensor curvatura de Riemann. Da identidade de Bianchi e da expansão da métrica g, obtemos

$$\int_M Rm_g(x_k)(\nabla_g u_k, x, x, \nabla_g u_k)\, dv_g = 0.$$

Disto, das expansões do vetor gradiente e da expansão da métrica g em coordenadas normais, segue que

$$\int_M |\nabla_\xi u_k|^p\, dv_\xi = \int_M |\nabla_g u_k|^p\, dv_g + \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^n \int_M |\nabla_g u_k|^p Ric_{ij}(x_k)x^i x^j\, dv_g$$
$$+ \int_M |\nabla_g u_k|^p o(|x|^3)\, dv_g.$$

Reescrevendo a igualdade acima em termos de φ_k,

$$\frac{\int_M |\nabla_\xi u_k|^p\, dv_\xi}{\int_M |\nabla_g u_k|^p\, dv_g} = 1 + \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^n \frac{\displaystyle\int_{B(0,\sigma)} |\nabla_{h_k}\varphi_k|^p Ric_{ij}(x_k)x^i x^j\, dh_k}{\displaystyle\int_{B(0,\sigma)} |\nabla_{h_k}\varphi_k|^p\, dh_k} + o(t_k^2),$$

e de forma similar

$$\frac{\int_M u_k^p \, dv_\xi}{\int_M u_k^p \, dv_g} = 1 + \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\displaystyle\int_{B(0,\sigma)} \varphi_k^p Ric_{ij}(x_k) x^i x^j \, dh_k}{\displaystyle\int_{B(0,\sigma)} \varphi_k^p \, dh_k} + o(t_k^2),$$

Por fim, utilizando a desigualdade $(1+x)^a \leq e^{ax}$,

$$\left(\frac{\int_M |u_k|^{q_k} \, dv_\xi}{\int_M |u_k|^{q_k} \, dv_g} \frac{\int_M |u_k|^r \, dv_g}{\int_M |u_k|^r \, dv_\xi} \right)^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \frac{\int_M |u_k|^r \, dv_g}{\int_M |u_k|^r \, dv_\xi} \left(\frac{\int_M |u_k|^{q_k} \, dv_\xi}{\int_M |u_k|^{q_k} \, dv_g} - \frac{\int_M |u_k|^r \, dv_\xi}{\int_M |u_k|^r \, dv_g} \right) \right)^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}} \\
&\leq \exp\left(\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k \theta_k} \frac{\int_M |u_k|^r \, dv_g}{\int_M |u_k|^r \, dv_\xi} \left(\frac{\int_M |u_k|^{q_k} \, dv_\xi}{\int_M |u_k|^{q_k} \, dv_g} - \frac{\int_M |u_k|^r \, dv_\xi}{\int_M |u_k|^r \, dv_g} \right) \right) \\
&= \exp\left(\frac{\int_M |u_k|^r \, dv_g}{\int_M |u_k|^r \, dv_\xi} \frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k \theta_k} \int_M \left(\left(\frac{u_k}{t_k^{-\frac{n}{r}}} \right)^{q_k} - \left(\frac{u_k}{t_k^{-\frac{n}{r}}} \right)^r \right) t_k^{-n} \, dv_\xi \right).
\end{aligned}$$

Utilizando o Lema da Distância (2.53) e as estimativas feitas na subseção 2.1.3, garantimos as seguintes limitações:

$$\left| \frac{1}{r - q_k} \int_{B(0,\sigma)} (\varphi_k^{q_k} - \varphi_k^r) |x|^3 \, dh_k \right| < c,$$

e

$$\left| \frac{1}{r - q_k} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{B(0,\sigma)} (\varphi_k^{q_k} - \varphi_k^r) Ric_{ij}(x_k) x^i x^j \, dh_k \right| < c.$$

Disto e utilizando novamente a expansão do elemento de volume em coordenadas exponenciais, temos a seguinte estimativa

$$\int_M \left(\left(\frac{u_k}{t_k^{-\frac{n}{r}}} \right)^{q_k} - \left(\frac{u_k}{t_k^{-\frac{n}{r}}} \right)^r \right) t_k^{-n} \, dv_\xi = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{t_k^2}{6} \int_{B(0,\sigma)} (\varphi_k^{q_k} - \varphi_k^r) \, Ric_{ij}(x_k) x^i x^j \, dh_k + o(t_k^2).$$

Disto e da expansão de Taylor da função exp,

$$\left(\frac{\int_M |u_k|^{q_k} \, dv_\xi}{\int_M |u_k|^{q_k} \, dv_g} \frac{\int_M |u_k|^r \, dv_g}{\int_M |u_k|^r \, dv_\xi} \right)^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k \theta_k}} \leq$$

$$\leq \exp\left(\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{t_k^2}{6}\int_{B(0,\sigma)}(\varphi_k^{q_k}-\varphi_k^r)Ric_{ij}(x_k)x^ix^j\,dh_k+o(t_k^2)\right)$$
$$\leq 1+\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{t_k^2}{6}\int_{B(0,\sigma)}(\varphi_k^{q_k}-\varphi_k^r)Ric_{ij}(x_k)x^ix^j\,dh_k+o(t_k^2).$$

Com estimativas análogas, concluímos que

$$\frac{\left(\frac{\int_M|\nabla_\xi u_k|^p\,dv_\xi}{\int_M|\nabla_g u|^p\,dv_g}\right)^{\frac{\tau}{p}}\left(\frac{\int_M|u_k|^{q_k}\,dv_\xi}{\int_M|u_k|^{q_k}\,dv_g}\frac{\int_M|u_k|^r\,dv_g}{\int_M|u_k|^r\,dv_\xi}\right)^{\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}}}{\left(\frac{\int_M|u_k|^r\,dv_\xi}{\int_M|u_k|^r\,dv_g}\right)^{\frac{\tau}{r\theta_k}-\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}}}\leq 1+\frac{t_k^2}{6}X_k+o(t_k^2), \tag{3.18}$$

onde

$$X_k=\frac{\tau}{p}\frac{\int_{B(0;\sigma)}|\nabla\varphi_k|^pRic_{ij}(x_k)x^ix^j\,dh_k}{\int_{B(0;\sigma)}|\nabla\varphi_k|^p\,dh_k}-\left(\frac{\tau}{r\theta_k}-\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}\right)\frac{\int_{B(0;\sigma)}\varphi_k^rRic_{ij}(x_k)x^ix^j\,dh_k}{\int_{B(0;\sigma)}\varphi_k^r\,dh_k}+$$
$$+\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}\int_{B(0;\sigma)}(\varphi_k^{q_k}-\varphi_k^r)Ric_{ij}(x_k)x^ix^j\,dh_k.$$

Para o último termo da igualdade acima, usando o Teorema do Valor Médio,

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}\frac{r}{r-q_k}\int_{B(0,\sigma)}(\varphi_k^{q_k}-\varphi_k^r)Ric_{ij}(x_k)x^ix^j\,dh_k=\\&=-\lim_{k\to\infty}\int_{B(0,\sigma)}\varphi_k^r\log\varphi_k^rRic_{ij}(x_k)x^ix^j\,dh_k\\&=-\frac{Scal_g(x_k)}{n}J_3,\end{aligned}$$

e por

$$\frac{\tau(1-\theta_k)}{q_k\theta_k}=\frac{p-n}{n},$$

segue que

$$\lim_{k\to\infty}X_k=\frac{Scal_g(x_0)}{n}\frac{\tau}{p}\left(\frac{p-n}{n}J_1+\frac{J_2}{I_2}-\frac{n(p-r)+pr}{nr}J_3\right).$$

Disto, pela definição de $I_{g,k}$ combinada com (3.18), por $\lim\limits_{k\to\infty}A(p,q_k,r)=A_{ent}$ e pelo reescalonamento em termos de φ_k e h_k, concluímos

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{I_{\xi,k}(u_k) - I_{g,k}(u_k)}{\|u_k\|_p^\tau A_k^{\frac{\tau}{p}}} &\leq \lim_{k\to\infty} \frac{t_k^2}{6} \frac{1}{A_k^{\frac{\tau}{p}} \|u_k\|_p^\tau} I_{g,k}(u_k) X_k \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{t_k^2}{6} \frac{1}{A_k^{\frac{\tau}{p}} \|u_k\|_p^\tau} A(p,q_k,r) \|\nabla_g u_k\|_p^\tau A_k^{\frac{\tau}{p}} X_k \\
&\leq \lim_{k\to\infty} A(p,q_k,r) t_k^2 \frac{\|\nabla_g u_k\|_p^\tau}{\|u_k\|_p^\tau} \frac{Scal_g(x_0)}{6n} \frac{\tau}{p} \times \\
&\times \left(\frac{p-n}{n} J_1 + \frac{J_2}{I_2} - \frac{n(p-r)+pr}{nr} J_3 \right) \\
&= \lim_{k\to\infty} A(p,q_k,r) t_k^{2-2} \frac{\|\nabla_{h_k} \varphi_k\|_p^\tau}{\|\varphi_k\|_p^\tau} \frac{Scal_g(x_0)}{6n} \frac{\tau}{p} \times \\
&\times \left(\frac{p-n}{n} J_1 + \frac{J_2}{I_2} - \frac{n(p-r)+pr}{nr} J_3 \right) \\
&= \frac{Scal_g(x_0)}{6n} A_{ent} \frac{I_2^{\frac{\tau}{p}}}{I_3^{\frac{\tau}{p}}} \frac{\tau}{p} \left(\frac{p-n}{n} J_1 + \frac{J_2}{I_2} - \frac{n(p-r)+pr}{nr} J_3 \right).
\end{aligned}
$$

Por fim, como toda função extremal é solução de (3.4) e por toda função extremal ser invariante por translação, pois se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = 1$ é uma função extremal e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |u(x-\bar{x})|^r \log |u(x-\bar{x})|^r \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^r \log |u(x)|^r \, dx \\
&= \frac{nr}{np - nr + pr} \log \left(A_e(p,r) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p \, dx \right) \\
&= \frac{nr}{np - nr + pr} \log \left(A_e(p,r) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x-\bar{x})|^p \, dx \right),
\end{aligned}
$$

temos, independente da função extremal escolhida a validade de (3.16). Por isto e pelo Teorema 3.1, temos demonstrado o teorema em questão.

REFERÊNCIAS

[1] AGUEH, M. Sharp Gagliardo-Nirenberg Inequalities via p-laplacian type equations. *Nonlinear Diff. Eq. Appl. 15, 457-472*, 2008.

[2] ALVES, M. Desigualdades Ótimas de Entropia e Moser em Variedades Riemannianas: três contribuições em Análise Geométrica. *Tese de doutorado*, 2016.

[3] ALVES, M.; CECCON, J.; OQUENDO, H. P. Hypercontractivity Property and General Optimal L^p-Entropy Inequalities on Riemannian Manifolds. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series 49, 339–367*, 2018.

[4] AUBIN., T. Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire. *J. Math. Pures Appl. 55, 269-296*, 1976.

[5] AUBIN, T. Some nonlinear problems in Riemannian geometry. *Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin*, 1998.

[6] BAKRY, D.; COULHON, T.; LEDOUX, M.; SALLOF-COSTE., D. Sobolev inequalities in disguise. *Indiana J. Math. 44, 1033-1074*, 1995.

[7] BECKNER., W. Geometric asymptotics and the logarithmic Sobolev inequality. *Forum Math. 11, (1), 105-137*, 1999.

[8] BOBKOV, S.; GENTIL, I.; LEDOUX., M. Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi equations. *J. Math. Pures Appl. 80, 669-696*, 2001.

[9] BOBKOV, S.; GENTIL, I.; LEDOUX., M. Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi equations. Inhomogeneous random systems, Markov process, 233-235. *Related Fields 8*, 2002.

[10] BREZIS, H.; NIRENBERG., L. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Communs pure appl. Math. 36, 437-477*, 1983.

[11] BROUTTELANDE, C. The best-constant problem for a family of Gagliardo-Nirenberg inequalities on a compact Riemannian manifolds. *Proc. R. Soc. Edimb. 46, 147-157*, 2003.

[12] BROUTTELANDE., C. On the second best constant in logarithmic Sobolev inequalities on complete Riemannian manifolds. *Bull. Sci. Math. 127, 292-312*, 2003.

[13] CARLEN., E. Superadditivity of Fisher's information and logarithmic inequalities. *J. Funct. Anal. 101 (1), 194-211*, 1991.

[14] CECCON, J.; DURAN., C. Sharp constant in Riemannian L^p-Gagliardo-Nirenberg inequalities. *Journal of Math. Analysis and Appl. 433, 260-281*, 2016.

[15] CECCON, J.; MONTENEGRO., M. Optimal L^p-Riemannian Gagliardo-Nirenberg inequalities. *Math. Z. 258, 851-873*, 2008.

[16] CECCON, J.; MONTENEGRO., M. Optimal Riemannian L^p-Gagliardo-Nirenberg inequalities revisited. *J. Differential Equations 254, 6, 2532-2555*, 2013.

[17] CECCON, J.; MONTENEGRO., M. Sharp L^p-entropy inequalities on manifolds. *Journal of Functional Analysis 269, 1591-1619*, 2015.

[18] CHAVEL, I. *Riemannian Geometry - a modern introduction.* Cambridge University Press, 1996.

[19] CORDERO-ERAUSQUIN, D.; NAZARET, B.; VILLANI., C. A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities. *Adv. Math. 182, 307-332*, 2003.

[20] DRUET., O. Optimal Sobolev inequalities of arbitrary order on compact Riemannian manifolds. *J. Funct. Anal. 159, 217-242*, 1998.

[21] DRUET., O. The best constants problem in Sobolev inequalities. *Math. Ann. 314, 327-346*, 1999.

[22] DRUET, O.; HEBEY., E. The ab program in geometric analysis: sharp Sobolev inequalities and related problems. *Mem. Amer. Math. Soc. 160*, 2002.

[23] DRUET, O.; HEBEY, E.; VAUGON, M. Optimal Nash's Inequalities on Riemannian Manifolds: The Influence of Geometry. *IMRN, 735-779, nº 14*, 1999.

[24] GAGLIARDO., E. Proprietà di alcune classi difunzioni in piu variabili. *Ricerche Mat. 7, 102-137*, 1958.

[25] GENTIL., I. Ultracontractive bounds on Hamilton-Jacobi solutions. *Bull. Sci. Math., 126, 507-524*, 2002.

[26] GENTIL., I. The general optimal L^p-Euclidean logarithmic Sobolev inequality by Hamilton-Jacobi equations. *J. Funct. Anal. 202, 591-599*, 2003.

[27] GROSS., L. Logarithmic Sobolev inequalities. *Amer. J. Math. 97, 1061-1083*, 1975.

[28] HEBEY, E. Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev Spaces and Inequalities. *Courant Institute of Mathematical Sciences. Lecture Notes in Mathematics, 5*, 1995.

[29] LEDOUX., M. Isoperimetry and Gaussian analysis. *Lecture on Probability Theory and Statistiques, Ecole d'été de probabilités de St-Flour Springer, Berlin, 165-294*, 1996.

[30] LEDOUX., M. Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities. *Séminaire de Probabilités XXXIII, Lecture Notes in Mathematics 1709, Springer, 120-216*, 1999.

[31] NIRENBERG., L. On elliptic partial differential equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 3-13, 115-162*, 1959.

[32] PERELMAN., G. The entropy formula for the ricci flow and its geometric applications. *arXiv:math/0211159vl.*

[33] PINO, M. D.; DOLBEAULT., J. The optimal Euclidean L^p-Sobolev logarithmic inequality. *J. Funct. Anal. 197, 151-161*, 2003.

[34] PINO, M. D.; DOLBEAULT, J.; GENTIL., I. Nonlinear diffusions, hipercontractivity and the optimal L^p-euclidean logarithmic Sobolev inequality. *J. Math. Anal. Appl. 293, 375-388*, 2004.

[35] SERRIN., J. Local Behavior of solutions of quasilinear equations. *Acta Math. 111, 247-302*, 1964.

[36] SERRIN., J.; TANG, M. Uniqueness of ground states for quasilinear elliptic equations. *Indiana Univ. Math. J 49 (3), 897-923*, 2000.

[37] SOBOLEV., S. On a Theorem of functional analysis. *Math. Sb. 46, 471-496*, 1938.

[38] TALENTI., G. Best constant in Sobolev inequality. *Ann. Math. Pura Appl. (iv) 110, 353-372*, 1976.

[39] TOLKSDORF., P. Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations. *J. Differential Equations, 51 (1), 126-150*, 1984.

[40] USTUNEL., A. Analysis on Wiener Space and Applications. *arXiv:1003.1649.*

[41] WEISSLER., F. Logarithmic Sobolev inequalities for the heat-diffusion semigroup. *Trans. Amer. Math. Soc. 237, 255-269*, 1978.

[42] YAMABE., H. On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds. 1960.