

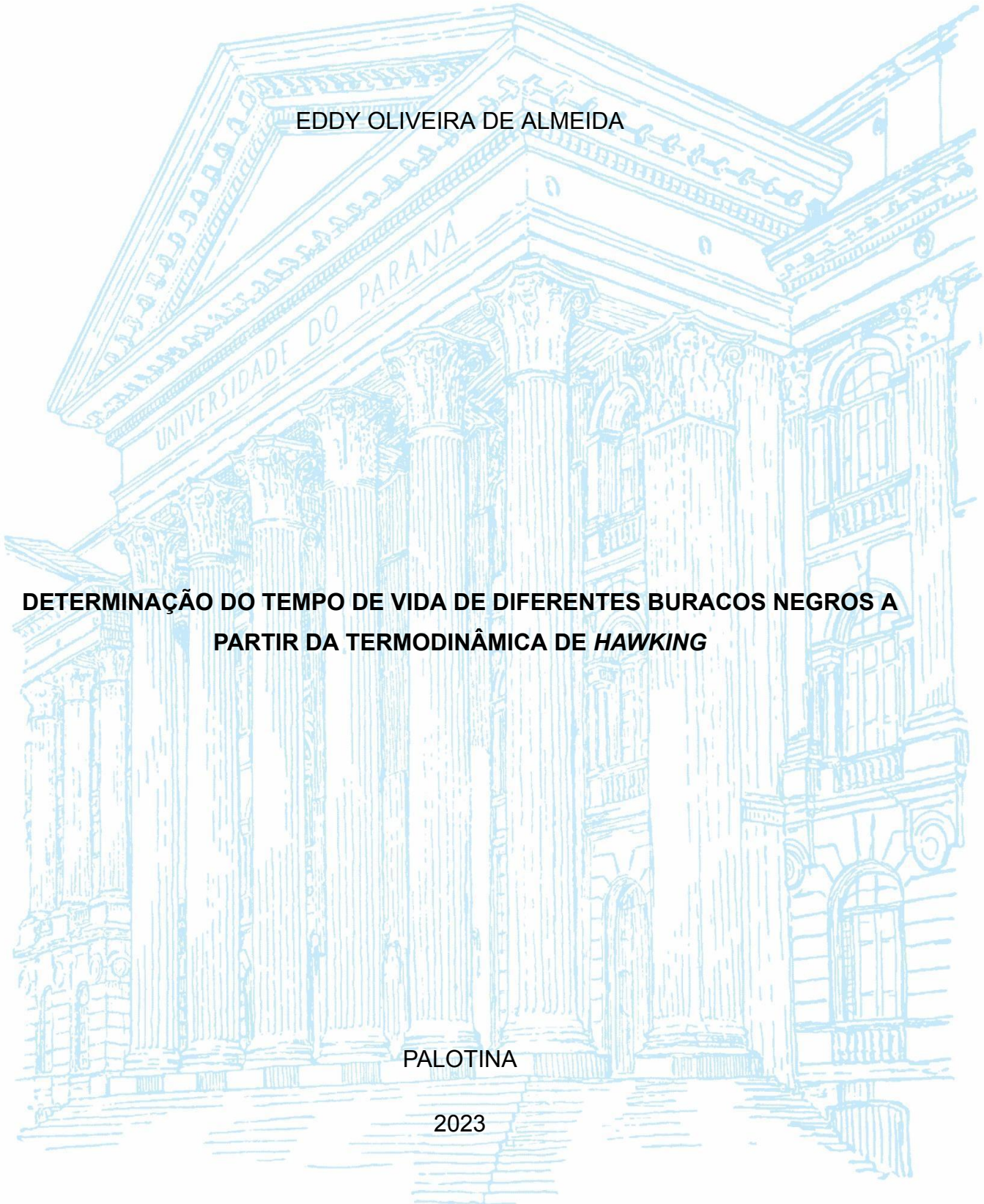
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EDDY OLIVEIRA DE ALMEIDA

**DETERMINAÇÃO DO TEMPO DE VIDA DE DIFERENTES BURACOS NEGROS A
PARTIR DA TERMODINÂMICA DE *HAWKING***

PALOTINA

2023



EDDY OLIVEIRA DE ALMEIDA

**DETERMINAÇÃO DO TEMPO DE VIDA DE DIFERENTES BURACOS NEGROS A
PARTIR DA TERMODINÂMICA DE HAWKING**

Artigo apresentado como requisito parcial à conclusão do Trabalho de Conclusão de Curso 2 de Licenciatura em Ciência Exatas, Setor de Palotina, Universidade Federal do Paraná.

Orientador(a)/Professor(a): Prof(a). Dr(a). Carlos Henrique Coimbra Araújo.

PALOTINA

2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

INFORMAÇÃO Nº 222/2023/UFPR/R/PL/DEE

TERMO DE APROVAÇÃO

NOME COMPLETO DO ALUNO: Eddy Oliveira de Almeida

TÍTULO COMPLETO DO TRABALHO FINAL DE CURSO 2: DETERMINAÇÃO DO TEMPO DE VIDA DE DIFERENTES BURACOS NEGROS A PARTIR DA TERMODINÂMICA DE HAWKING

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Ciências Exatas na Universidade Federal do Paraná como requisito para a obtenção de Licenciatura em Ciências Exatas com habilitação em Física e aprovado pela seguinte banca avaliadora:

Carlos Henrique Coimbra Araújo
Orientador(a)

Rita de Cássia dos Anjos
Membro da banca

Abraão Jesse Capistrano de Souza
Membro da banca

Palotina, 05 de dezembro de 2023.



Documento assinado eletronicamente por **CARLOS HENRIQUE COIMBRA ARAUJO, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 05/12/2023, às 15:04, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



Documento assinado eletronicamente por **RITA DE CASSIA DOS ANJOS, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 05/12/2023, às 15:04, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



Documento assinado eletronicamente por **ABRAAO JESSE CAPISTRANO DE SOUZA, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 05/12/2023, às 15:07, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



A autenticidade do documento pode ser conferida [aqui](#) informando o código verificador **6245393** e o código CRC **F46A42C7**.

RESUMO

A Radiação *Hawking* é um fenômeno intrigante e de importância fundamental no estudo dos buracos negros, uma vez que está diretamente relacionada à resolução do enigmático paradoxo da informação, bem como à compreensão da vida útil, temperatura e dimensões dessas entidades cósmicas. Este trabalho tem como principal objetivo determinar a longevidade de quatro tipos diferentes de buracos negros - o buraco negro primordial - que se trata de um objeto teórico, o buraco negro estelar, o buraco negro intermediário e o buraco negro supermassivo. Além disso, a pesquisa visa analisar as características físicas desses buracos negros, incluindo propriedades energéticas e estruturais, com base na teoria inovadora de *Hawking* e na Teoria da Relatividade de *Einstein*. Para atingir esse objetivo, serão realizadas análises teóricas e cálculos matemáticos, permitindo uma exploração abrangente das implicações da radiação *Hawking* na evolução temporal e energética desses misteriosos objetos cósmicos. Os resultados obtidos, esperamos que auxiliem na compreensão e o entendimento tanto da teoria engloba o presente tópico quanto dos buracos negros, propriamente dito.

Palavras-chave: Relatividade. Radiação *Hawking*. *Schwarzschild*.

ABSTRACT

Hawking Radiation is an intriguing phenomenon of importance in the study of black holes, as it is directly related to resolving the enigmatic information paradox and understanding the lifespan, temperature, and dimensions of these cosmic entities. This work aims to determine the longevity of four different types of black holes - the primordial black hole, which is a theoretical object, the stellar black hole, the intermediate black hole, and the supermassive black hole. Additionally, the research seeks aims at analyzing the physical characteristics of these black holes, including energetic and structural properties, based on Hawking's innovative theory and Einstein's Theory of Relativity. To achieve this goal, theoretical analyses and mathematical calculations will be conducted, allowing for a comprehensive exploration of the implications of Hawking radiation on the temporal and energetic evolution of these mysterious cosmic objects. The results obtained are expected to contribute to the understanding of both the theory encompassing the current topic and black holes themselves.

Keywords: Relativity. Hawking Radiation. Schwarzschild.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	6
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	8
2.1. Elementos de Relatividade Restrita.....	8
2.2. Solução de Minkowski.....	10
2.3. Solução de Schwarzschild.....	12
2.4. Classificação de Buracos Negros.....	13
2.5. Segunda Lei da Termodinâmica.....	16
3. MATERIAIS E MÉTODOS.....	17
5. RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	20
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	38
7. REFERÊNCIA.....	39

1. INTRODUÇÃO

A teoria da Relatividade desenvolvida por *Einstein* revolucionou nossa compreensão do universo. Em 1919, a expedição liderada por *Arthur Eddington* foi realizada nas ilhas do Príncipe, no Oeste da África, e em Sobral, no Brasil, para verificar as previsões da teoria durante um eclipse solar, o que foi crucial para sua comprovação. (SAA, 2016). Além disso, o físico e astrônomo alemão *Karl Schwarzschild* encontrou uma solução peculiar nas equações de campo de *Einstein*, que descreve um objeto fascinante e enigmático: os buracos negros (*Black Holes - BHs*). (SAA, 2016).

A existência de buracos negros foi confirmada em duas ocasiões distintas. A primeira confirmação ocorreu em 2015, quando a equipe do **Observatório de Ondas Gravitacionais por Interferômetro Laser (LIGO)** dos Estados Unidos e o **Virgo** na Itália detectaram ondas gravitacionais resultantes da colisão de dois buracos negros. Apesar de ter sido detectado em 2015, estima-se que essa colisão ocorreu há cerca de 7 bilhões de anos. Os objetos envolvidos na colisão tinham massas de aproximadamente 66 e 85 vezes a massa do Sol, formando um buraco negro com 142 massas solares. (OLIVEIRA, 2022).

A segunda confirmação veio em 2019, quando o **Event Horizon Telescope** capturou a primeira imagem direta de um buraco negro supermassivo localizado no centro da galáxia *Messier 87*. (OLIVEIRA, 2022; SCHINZEL, 2022). Essas descobertas históricas forneceram evidências robustas da existência de buracos negros e reacenderam o interesse no estudo desses objetos cósmicos.

Inicialmente, acreditava-se que os buracos negros eram estruturas eternas que preservavam todas as informações dos objetos que caíam em seu interior. Em busca de compreender mais sobre o comportamento das partículas ao redor do buraco negro. O físico britânico *Stephen Hawking*, em 1974, propôs a *Radiação Hawking*, onde através de flutuações energéticas no vácuo quântico próximo ao horizonte de eventos, este vácuo, gera pares de partículas virtuais e o buraco negro captura uma partícula

desse par, logo, a partícula que vai em direção ao espaço e a energia liberada pela que cai no horizonte de eventos, são a radiação *Hawking*. (OLIVEIRA, 2022).

Partículas virtuais não possuem massas, são partículas fundamentais opostas, são formadas no vácuo quântico e se tornam reais quando recebem energia suficiente para separá-las. Imaginemos o surgimento de um par de partícula virtual, sendo ela um elétron e um pósitron - por exemplo, podem se tornarem reais se, de alguma forma, receberem suprimento de energia suficientemente, fazendo com que não haja colisão entre elas, porém, caso a energia não for suficiente, a mesma se desaparecerá rapidamente. (MOREIRA, 2009).

Além disso, um outro fenômeno ligado aos buracos negros é o paradoxo da informação - “A descrição de *Hawking* sobre o paradoxo da informação nos informa que, quando o estado inicial da radiação é um estado puro $|\Psi^{inicial}\rangle$, então a evaporação do buraco negro faz com que, no final do processo, tal estado seja misto”. (AIRES, 2021, p. 17) -, e à vida útil desses objetos.

Uma prévia sobre esse grande físico teórico, cosmólogo e autor *Stephen William Hawking*. Nasceu em 8 de janeiro de 1942, em *Oxford*, Inglaterra. Graduou-se em *Oxford* em 1962 e, no ano seguinte, foi diagnosticado com esclerose lateral amiotrófica (ELA), uma doença neurodegenerativa progressiva. Apesar do diagnóstico, concluiu seu doutorado em 1966 e ocupou a prestigiosa Cátedra Lucasiana de Matemática na Universidade de *Cambridge* de 1979 a 2009. Posteriormente, em 1988, publicou o livro 'Uma Breve História do Tempo', no qual explica alguns conceitos de física para pessoas dentro e fora do âmbito acadêmico. (ARANTES, 2006).

Este trabalho está estruturado da seguinte maneira: A Seção 2 aborda uma revisão bibliográfica abrangente, cobrindo os seguintes tópicos: Elementos de Relatividade Restrita; Solução de *Minkowski*; Solução de *Schwarzschild*; Classificação de Buracos Negros; e A Segunda Lei da Termodinâmica. A Seção 3 detalha as teorias empregadas para entender a Radiação *Hawking*, juntamente com o modelo matemático e o *software* usado para calcular a mesma. Finalmente, a Seção 4 apresenta os resultados obtidos a partir desses objetos teóricos, explicando também seus significados.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Elementos de Relatividade Restrita

Antes de chegar na relatividade de *Einstein*, acreditava-se que no universo o espaço e o tempo eram absolutos e imutáveis, ou seja, um objeto de estudo em repouso terá a mesma influência, no espaço e no tempo, se o mesmo estivesse em uma velocidade perto da luz. Porém, essa concepção com o tempo foi se quebrando até a chegada da teoria da relatividade, desenvolvida por *Einstein* em 1905, onde teve como objetivo solucionar o impasse entre princípios fundamentais da mecânica clássica e as leis do eletromagnetismo, mais especificamente na Transformada de *Galileu* e nas equações de *Maxwell*. As equações resultantes dessa solução são conhecidas como Transformadas de *Lorentz*. (OLIVEIRA, 2016).

Essas transformadas são representadas pelas equações:

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \\y' &= y; \\z' &= z; \\t' &= \frac{t-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.\end{aligned}$$

Essas equações relaciona os eventos S' com S, onde x', y', z' e t' representam as informações da posição e do tempo, em S', enquanto x, y, z e t representam as informações da posição e do tempo, em S. c é a velocidade da luz no vácuo e v é a velocidade - caso a velocidade igual a zero, temos x=x'; y'=y; z'=z; e t'=t. Pode-se ainda ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt); \\y' &= y;\end{aligned}$$

$$z' = z;$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right).$$

Onde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

e é conhecida como fator de *Lorentz* - responsável, nesse caso, contração e dilatação do espaço-tempo.

Este resultado está relacionado ao primeiro postulada da relatividade restrita, que afirma que os fenômenos físicos envolvendo objetos inerciais e acelerados devem ser descritos da mesma forma matemática. Em outras palavras, *Einstein* percebeu que, quando dois observadores - um em movimento e outro em repouso - analisam o mesmo evento, tanto o tempo quanto o espaço são percebidos de maneira diferente. Isso desafia a noção de espaço e tempo absolutos.

Para que o observador encontre os mesmos resultados de um determinado fenômeno, deveremos analisar a seguinte igualdade:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$$

Substituindo os valores do observador em S' pelo os valores encontrados na transformada de *Lorentz*, temos:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = (\gamma(x - vt))^2 + y^2 + z^2 - c^2\left(\gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)\right)^2$$

logo,

$$x^2 - c^2t^2 = (\gamma x - \gamma vt)^2 - c^2\left(\gamma t - \gamma \frac{vx}{c^2}\right)^2$$

abrindo e simplificando-a, temos:

$$x^2 - c^2t^2 = \gamma^2x^2 - 2\gamma^2xvt + \gamma^2v^2t^2 - c^2\gamma^2t^2 + 2\gamma^2vxt - \gamma^2\frac{v^2x^2}{c^2}$$

$$x^2 - c^2t^2 = \frac{x^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{v^2t^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{c^2t^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{v^2x^2}{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})}$$

$$x^2 - c^2t^2 = \frac{c^2x^2 + c^2v^2t^2 - c^4t^2 - c^2v^2x^2}{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})}$$

$$x^2 - c^2t^2 = \frac{x^2(c^2-v^2) - c^2t^2(c^2-v^2)}{(c^2-v^2)}$$

portanto,

$$x^2 - c^2t^2 = x^2 - c^2t^2.$$

Assim, temos a chamada “Invariância de *Lorentz*”, onde a partícula possui as mesmas características da transformada de Galileu.

2.2. Solução de *Minkowski*

Utilizando o mesmo princípio que foi demonstrado na seção anterior, consideremos dois eventos arbitrários, A e B, no espaço de Minkowski (M^4). O espaço de Minkowski é o conjunto de todos os eventos possíveis.

Neste caso, o evento A está localizado nas coordenadas (x_A, y_A, z_A, ct_A) e o evento B está localizado nas coordenadas (x_B, y_B, z_B, ct_B) . Além disso, temos um observador, S, que está fixo em um ponto específico.

A métrica de Minkowski, também conhecida como solução de Minkowski ou espaço de Minkowski, é expressa da seguinte forma:

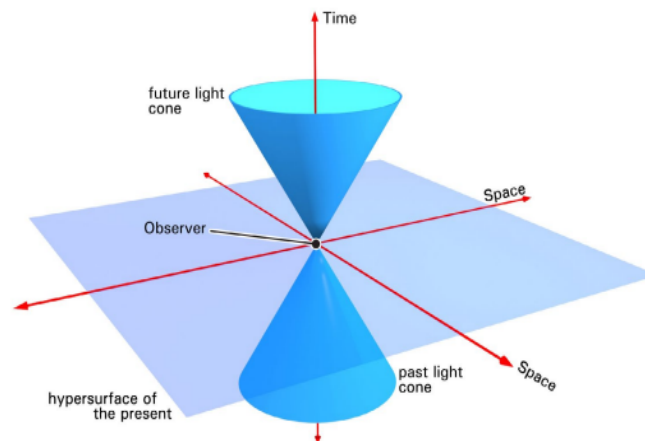
$$\Delta S^2 = c^2(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2$$

onde ΔS^2 é denominada como o **intervalo espaço-temporal** entre os eventos A e B. Além disso, pode ser analisado três situações:

- $\Delta S^2 > 0$: quando isso ocorre, temos um ΔS^2 do tipo temporal, ou linha de mundo do “tipo-tempo”, ou seja, $c^2(\Delta t^2) > (\Delta \bar{r}^2) - \Delta \bar{r}^2$ representa a coordenada espacial ($\Delta \bar{r}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$), e, ainda, “A pode comunicar um sinal com velocidade $v = \frac{|\Delta \bar{r}|}{\Delta t} < c$ a um observador em B. Dizemos que os eventos A e B são causalmente conectados”. (OLIVEIRA, 2016, p.21);
- $\Delta S^2 = 0$: este caso representa um tipo luminoso (nulo, “tipo-luz” ou, ainda, linha de mundo do fóton). Além disso, A pode se comunicar com B com uma velocidade $v = c$ e esses eventos são causalmente conectados. Apesar do termo ‘causalmente conectados’, não, necessariamente, um causa o outro. (OLIVEIRA, 2016, p.21);
- $\Delta S < 20$: dizemos que ele é do tipo espacial, ou linha de mundo do “tipo-espaco”, ou seja, $c^2(\Delta t^2) < (\Delta \bar{r}^2)$, neste caso, A não pode se comunicar com B, pois na teoria da relatividade (restrita e geral) nenhum objeto pode percorrer mais rápido que c , já que c é o limite superior de velocidade que um objeto pode percorrer (fisicamente). (OLIVEIRA, 2016, p.21).

Através desses resultados, tem-se o seguinte análise na figura 1:

FIGURA 1 - CONE DE LUZ COM SUAS OBSERVAÇÕES.



FONTE: ROBERTO, RHEINLANDER (2017).

Tanto o cone superior e o inferior do plano representam - toda a sua região interna com o limite até as bordas - a região onde o objeto percorre uma em uma velocidade inferior à da luz, ou seja, o primeiro caso apresentado. Porém, a região

superior é o futuro (*future light cone* - cone de luz futura), no centro é o observador (*observer* - localizado na hipersuperfície do presente (*hypersurface of the present*) representa o presente e a região inferior representa o passado (*past light cone* - cone de luz passado). As bordas do cone representam a linha de mundo do fóton, ou seja, a maior velocidade possível ser alcançada - velocidade da luz no vácuo -, qualquer velocidade superior a isso, representa a região fora dos cones, logo, é a região que não é possível interagir e, de acordo com a relatividade desenvolvida por *Einstein*. (ARANTES, 2006).

A solução de *Minkowski* é significativa, pois aborda a descrição das propriedades de uma estrutura em um espaço local, mais especificamente, em uma região onde as distorções do espaço provocadas pelo objeto de estudo são tão pequenas que podem ser consideradas planas. Alternativamente, refere-se a uma área do espaço onde a interferência entre dois exemplares é extremamente pequena ou nula. Essa abordagem é valiosa em contextos que exigem uma análise detalhada, especialmente em campos como a física e a geometria, onde a compreensão das características locais do espaço é crucial.

2.3. Solução de *Schwarzschild*

Em 1783, o astrônomo britânico *John Michell* fez a primeira proposta de um *BH*, afirmando com as teorias da época, newtoniana, que poderia existir um objeto tão denso que nem a luz poderia escapar dela. Porém, essa hipótese não foi levada a sério pelos físicos da época. Contudo, após a *Einstein* ter desenvolvido a teoria da relatividade e, conseqüentemente, ter mudado a concepção da estrutura do universo, essa ideia volta a ser considerada, principalmente, quando o astrônomo e físico alemão *Karl Schwarzschild* conseguiu demonstrar que existe um objeto que possui um volume muito próximo de zero e uma densidade tendendo ao infinito, localizada na origem do sistema, chamando-a de singularidade.

Apesar desse objeto aparentar ser extremamente complicado, com base nos estudos de *John A. Wheeler* e seus colaboradores, ao analisarem a solução de

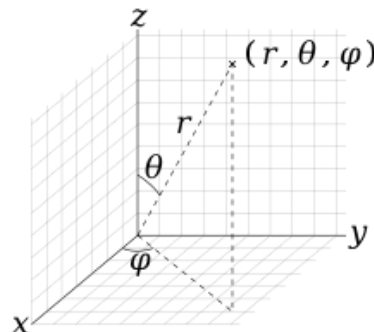
Schwarzschild, apresentada logo abaixo, foi afirmado que esse objeto é mais simples do que se pensava, uma vez que depende apenas de um único parâmetro, r_s , que por sua vez depende exclusivamente da massa total, M , do buraco negro, além da constante gravitacional de *Newton*, G , e da velocidade da luz, c . Além disso, esse tipo de buraco negro é estático e não possui cargas elétricas livres, portanto, seu momento angular, J , é nulo e suas cargas, Q , também são nulas. Apesar de existirem mais três, o foco deste trabalho se dará no buraco negro de *Schwarzschild*, possuindo a seguinte solução:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (1)$$

- Obs.: $r_s = \frac{2GM}{c^2}$, conhecido como raio de *Schwarzschild*;
- A métrica está na assinatura -+++;
- Os ângulos θ e φ , são ângulos sólidos - denotado em algumas literatura por ω e a sua unidade é sr (*steradian*). De maneira geral, o ângulo sólido é a medida da área da superfície em uma esfera de raio unitário, sendo equivalente em magnitude ao ângulo sólido subtendido (ambos totalizando 4π para uma esfera com raio $r=1$). (ÇENGEL; GHAJAR, 2012).

A ilustração abaixo denota as coordenadas que foram utilizadas pela métrica:

FIGURA 2 - coordenadas da métrica.



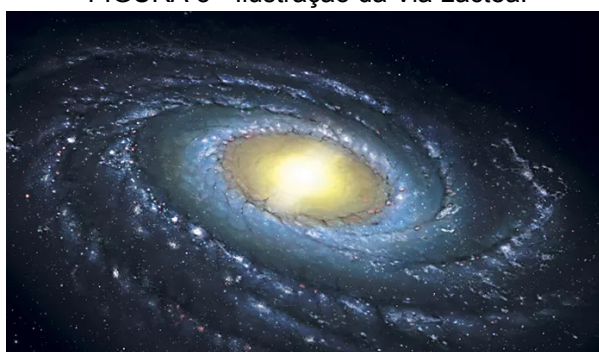
Fonte: [Wikipédia](#).

2.4. Classificação de Buracos Negros

De início, iremos classificar os *BHs* de acordo com a **massa**. Além disso, iremos supor que esse objeto é do tipo *Schwarzschild*, ou seja, ele é estático e sem carga.

Analisando de forma decrescente, primeiro temos os “Buracos Negros Supermassivo” (SMBH - sigla em inglês que significa *Supermassive Black Holes*) estão localizados no centro das galáxias, possuindo uma massa de $10^6 M_{\odot}$ - massas soláres (equivalente a $1,988 \times 10^{36}$ kg). (PORTO. C.; PORTO; M., 2008).

FIGURA 3 - Ilustração da Via Láctea.



Fonte: NASA.

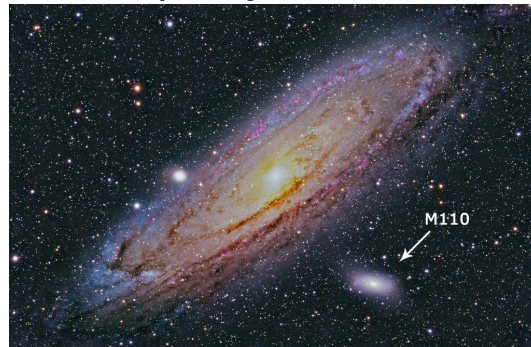
obs.: $1 M_{\odot} \sim 1,988 \times 10^{30}$ kg.

Um exemplo de um *SMBH*, é o Sagitário A*, localizado no centro da nossa galáxia (Via Láctea) a cerca de 26.000 anos-luz (8 quiloparsecs) e com massa na ordem de $10^6 M_{\odot}$ (equivalente a $1,988 \times 10^{36}$ kg).

O segundo tipo de *BHs* são os Buracos Negros de Massa Intermédia (*IMBH* - sigla em inglês que significa *Intermediate-Mass Black Holes*). Esse tipo de objeto possui uma massa que varia entre $10^2 M_{\odot}$ (equivalente a $1,988 \times 10^{32}$ kg) até próximo ao de um *SMBH*. Além disso, eles podem ser formados pela fusão de buracos negros estelares.

Logo abaixo, na figura 4, é apresentado uma ilustração da galáxia de Andromeda e o seu satélite natural o M110 (*Messier 110*), acreditasse que possa ter um buraco negro em seu núcleo com a massa entorno de $10^4 M_{\odot}$ (equivalente a $1,988 \times 10^{34}$ kg). (PORTO. C.; PORTO; M., 2008).

FIGURA 4 - Ilustração da galáxia de Andrômeda e M110.

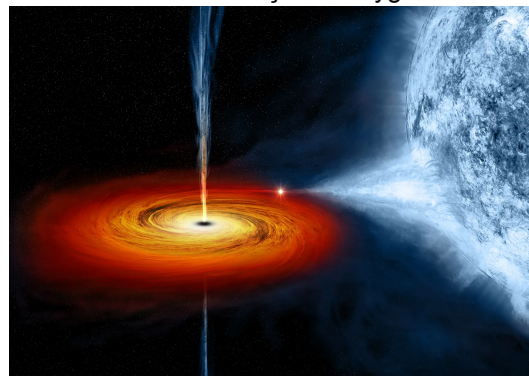


FONTE: NASA.

O próximo *BH* é o buraco negro estelar, presente em sistemas binários ou resultante do fenômeno em que uma estrela de nêutrons absorve sua estrela vizinha. Esse processo aumenta sua massa, ultrapassando o limite crítico e transformando-a em um buraco negro. (PORTO. C.; PORTO; M., 2008). Além disso, há a possibilidade desse tipo de objeto estar vagando sozinho no universo, gerando as famosas lendas gravitacionais. Este tipo de objeto possui uma massa inferior a $10^2 M_{\odot}$, tendo um mínimo de até $10^{-18} M_{\odot}$ (cerca de $1,988 \times 10^{12}$ kg).

A figura 5, representa uma ilustração do buraco negro Cygnus X-1 “devorando” a sua vizinha. Este *BH* está localizado em uma região considerada ativa na Via Láctea, a cerca de 700 anos-luz.

FIGURA 5 - Ilustração de Cygnus X-1.

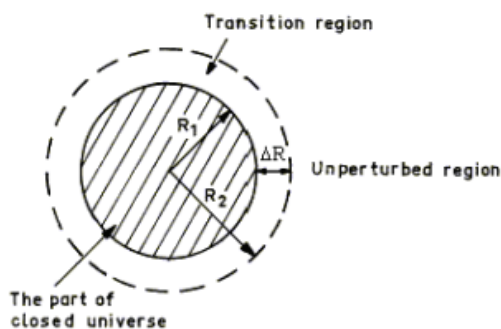


FONTE: NASA.

Por fim, os buracos negros com massas inferiores a $10^{-18} M_{\odot}$ são denominados buracos negros primordiais. Essa categoria de buracos negros pode ter se formado nos

instantes subsequentes ao Big Bang, devido à intensa pressão exercida pela matéria presente no meio. Abaixo, na figura 6, é apresentado um esquema ilustrativo que descreve o possível processo de formação desse objeto.

FIGURA 6 - Ilustração das perturbações que geraram os buracos negros primordiais.



FONTE: SOBRINHO (2014)

Aqui, R_1 representa o raio da área de perturbação em si (*the part of closed universe* - a parte do universo fechado), enquanto ΔR indica a região de transição (em inglês *'transition region'*) entre a área perturbada e a área não perturbada (ou região imperturbável - *unperturbed region*). Quando $R_1/R_2 \approx 1$, a região para de se expandir juntamente com o universo, resultando na formação de um buraco negro. A hipótese da existência desse objeto surge da observação de que, sem essa diferença de densidade, o universo seria uniforme, o que implicaria na ausência de estruturas complexas, como galáxias.

Em outra perspectiva de classificar os buracos negros, no artigo "Diagramas de Carter-Penrose em Relatividade Geral: buracos negros e outros exemplos explícitos", desenvolvido por Carlos Henrique Coimbra Araújo, temos da seguinte forma:

- **Buraco Negro de Schwarzschild:** não possuem cargas elétricas - carga resultante igual a zero - e simetricamente esférico, ou seja, não possuem rotação;
- **Buraco Negro de Reissner-Nordström:** possuem cargas elétricas, porém, não possuem rotação;
- **Buraco Negro de Kerr:** de forma contrária a anterior, estes possuem rotação, mas não possuem cargas;
- **Buraco Negro de Kerr-Newman:** possuem cargas elétricas e rotação.

Reforçando, apesar de existir outras soluções, visamos apenas a solução de schwarzschild.

2.5. Segunda Lei da Termodinâmica

Na dissertação de Almeida, intitulada 'Segunda Lei da Termodinâmica: Recursos Digitais e Ensino de Química', são apresentados conceitos históricos relacionados às três leis da termodinâmica. No contexto da segunda lei, destaca-se a contribuição de Clausius, que, baseando-se nas ideias desenvolvidas por Carnot, formulou tanto a primeira quanto a segunda lei da termodinâmica. Clausius afirmou que é impossível ocorrer uma transferência de energia de um meio de menor energia para um de maior energia - de forma cíclica -. Além disso, enfatizou a equivalência entre trabalho e energia.

Em 1854, introduziu o conceito da 'equivalência' entre calor (q) e temperatura (T), propondo ideias sobre processos reversíveis e irreversíveis. Como sugere a nomenclatura, esses processos referem-se à capacidade de uma solução retornar ou não ao seu estado inicial. Somente em 1865, o termo 'entropia' (do grego entropé, significando mudança ou volta) foi apresentado, representado por 'S', substituindo o termo 'equivalência' utilizado em 1854.

3. MATERIAIS E MÉTODOS

As equações de *Einstein* foram desenvolvidas, pelo mesmo, entre os anos de 1914 a 1916 e são expressas pelas seguintes equações (COIMBRA-ARAÚJO, 2016):

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de *Einstein*, G é a constante gravitacional de Newton e $T_{\mu\nu}$ é o tensor de estresse, representado na figura 7, logo abaixo.

FIGURA 7 - Componentes do Tensor Energia-Momento.

$$T_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{Densidade} \\ \text{de Energia} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Fluxo de Energia} \\ \text{Fluxo de Momento} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|ccc} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ \hline T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{array} \right] \\ \begin{array}{c} \text{Densidade} \\ \text{de Momento} \end{array} \end{array}$$

FONTE: Daher, 2008.

O Tensor Energia-Momento desempenha um papel fundamental na teoria da Relatividade Geral, sendo comparável à densidade na teoria formulada por Newton. Este tensor não apenas fornece percepções cruciais sobre a distribuição de massa e energia no espaço-tempo, mas também descreve de maneira abrangente a densidade e o fluxo de energia e momento associados a esses objetos. (DAHER et al, 2008).

De acordo com Soares (2013, p. 3), no seu artigo 'Os fundamentos físico-matemáticos da cosmologia relativista', os componentes presentes na figura 7, são descritos da seguinte forma:

- T_{00} = densidade de energia e matéria;
- T_{0j} = fluxo de energia - energia por unidade de área, por unidade de tempo - na direção v ; com $v \neq 0$;
- T_{i0} = densidade de momento na direção i , com $i \neq 0$;
- T_{ij} = fluxo da componente i do momento na direção j (tensão de cisalhamento); com $i, j \neq 0$;
- T_{ii} = fluxo da componente i do momento na direção i - força sobre a área perpendicular, que difere de "tensão de cisalhamento", por levar em conta a componente da força perpendicular à superfície sobre a qual atua -; com $i \neq 0$.

Apesar de haver quatro (ou cinco se levar em consideração o T_{ii}) possibilidades de analisar o tensor, porém iremos trabalhar apenas com a densidade de energia. Podendo ser expressa por duas formas:

- A primeira relação de energia e temperatura desenvolvida por Boltzmann, temos que:

$$T_{00} = -c^2 \rho_E = -\frac{c^2 k_B T}{V}$$

$$T_{00} = -\frac{3c^2 k_B T}{4\pi v^3} \quad (3)$$

Nesse contexto, ρ_E denota a densidade energética, $\frac{k_B T}{V}$, k_B representada pela constante de Boltzmann (ANTUNES, 2012), T é a temperatura e v simboliza o volume, que, neste caso, corresponde ao de uma esfera. Além disso, perceba que essa é uma visão clássica no entendimento da energia (comportamento das partículas).

- A segunda sendo um pouco mais sofisticado, relacionando intensidade total da radiação emitida por um corpo negro com a temperatura, logo:

$$E = I = \sigma T^4,$$

onde σ é a constante de Stephan-Boltzmann, sendo:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2}$$

a constante de Planck, h , pode ser escrita como:

$$h = 2\pi\hbar,$$

assim, a constante de Stephan-Boltzmann pode ser escrita como:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15(2\pi\hbar)^3 c^2} = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2},$$

logo,

$$T_{00} = -\frac{c^2 \sigma T^4}{V} = -\frac{3c^2 \sigma T^4}{4\pi r^3}$$

$$T_{00} = -\frac{3c^2 T^4}{4\pi r^3} \frac{\pi^2 k_B^4}{60h^3 c^2} = -\frac{\pi k_B^4 T^4}{80h^3 r^3}$$

$$T_{00} = -\frac{\pi k_B^4 T^4}{80h^3 r^3} \quad (4)$$

A lei de Stefan-Boltzmann relaciona a emissão de radiação por cada unidade de área com a temperatura elevada à quarta potência, utilizando essa ideia, iremos denominá-la como “semi-clássica”. (ANTUNES, 2012).

Retornando ao tensor de *Einstein*, $G_{\mu\nu}$, podemos reescrevê-lo como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} R \quad (5)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de curvatura, $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico e R é o escalar de curvatura que pode ser reescrito como:

$$R = g_{ab} R^{ab} = g^{ab} R_{ab} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} \quad (6)$$

Assim, substituindo (6) em (5), temos:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} (g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33}) \quad (7)$$

O tensor de curvatura, $R_{\mu\nu}$, conhecido como *Tensor de Ricci*, pode ser escrito da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon\nu}^{\lambda} \quad (8)$$

- O símbolo de *Christoffel*, representa a seguinte igualdade:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\varepsilon} (g_{\mu\varepsilon,\nu} + g_{\nu\varepsilon,\mu} - g_{\mu\nu,\varepsilon}) \quad (9)$$

- $g_{\mu\varepsilon,\nu}$, significa a derivada do elemento $\mu\varepsilon$ em relação a ν ;
- as derivadas são em relação à t , r , θ e Φ , que estão, respectivamente, na ordem 0, 1, 2 e 3;

obs.: todas as variáveis, $\mu, \nu, \varepsilon, \lambda$ e, entre outras que aparecerem nos índices, variam de 0 a 3.

As matrizes logo abaixo, representam os tensores métricos genéricos em forma de matriz, o que vai ajudar na visualização durante a resolução.

Matriz 1 - Tensor métrico genérico.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

FONTE: Autor, 2023.

Matriz 2 - Inversa do Tensor Métrico genérico.

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g^{00} & g^{01} & g^{02} & g^{03} \\ g^{10} & g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{20} & g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{30} & g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix}$$

FONTE: Autor, 2023.

Além da equação de campo proposta por *Einstein*, é fundamental levar em consideração o efeito Unruh para uma compreensão mais completa da radiação emitida pelos *BHs*. Este fenômeno sugere que, mesmo em um vácuo quântico, uma

região teoricamente sem partículas, a presença de partículas virtuais pode ser percebida pelo observador em movimento acelerado. Essas partículas, conhecidas como um 'banho térmico de Unruh', criam uma dinâmica onde a percepção do conteúdo do vácuo quântico varia em relação à velocidade do observador, destacando a complicada interação entre a teoria quântica e a relatividade em contextos astrofísicos. (CORRÊA et al, 2010).

Agora, em relação ao tempo de vida dos buracos negros, propriamente dito, iremos utilizar a segunda lei da termodinâmica, onde temos a seguinte equação:

$$dS_H = \frac{dQ}{T_H} \quad (10)$$

onde S_H é a entropia utilizando a temperatura *Hawking*, dQ é a variação de energia ($dQ = c^2 dM$) - alguns autores podem utilizar $dQ = dM$, ou seja, a constante c sendo igual a 1 -, e T_H é a temperatura *Hawking*.

Integrando em ambos lados da igualdade da equação (10), temos:

$$\int_0^S dS_H = \int_0^M \frac{dQ}{T_H}$$

O leitor deverá chegar em:

$$S_H = \frac{4\pi G k_B M^2}{\hbar c} \quad (11)$$

Realizando algumas manipulações algébricas, podemos reescrever a equação acima, como:

$$S_H = \frac{A c k_B}{4 \hbar G} \quad (12)$$

Ao utilizar $dQ = dM$, o resultado fica, $S_H = \frac{A c^3 k_B}{4 \hbar G}$;

onde A é a área do buraco negro, $A = 4\pi r^2$.

Essa pequena demonstração nos dá algumas informações interessantes, como:

- $dS_H \propto \frac{1}{T_H}$, a entropia é inversamente proporcional a temperatura;
- $S_H \propto A$, a entropia é diretamente proporcional a área do objeto.

Podemos, agora, determinar o tempo de evaporação dos BH , utilizando a variação da luminosidade desses objetos, expressa por:

$$L_h = t_{ev} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = A\sigma T_H^4$$

Ao realizar as substituições, o leitor deverá chegar em:

$$t_{ev} = \frac{5120\pi G^2 M^3}{\hbar c^4} \quad (13)$$

Por ser uma teoria complexa e com grandes quantidades de cálculos, foi utilizado o *software* gratuito chamado *wxMaxima*, disponível em: <https://sourceforge.net/projects/wxmaxima/>. De acordo com o próprio site, o *wxMaxima* é uma interface gráfica versátil que funciona em várias plataformas, projetada para o sistema de álgebra computacional Maxima e construída com base na estrutura wxWidgets. Sua interface oferece uma apresentação visualmente limpa dos resultados matemáticos e facilita o acesso às funcionalidades do Maxima por meio de menus intuitivos e caixas de diálogo.

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Antes de utilizar o *wxMaxima*, iremos analisar a equação de *Schwarzschild* (1) de acordo com a equação de *Einstein* (2). Porém, como foi mencionado anteriormente, o presente estudo se dará na análise na densidade de energia do objeto para se determinar o tempo de vida de diferentes tipo de buracos negros, logo, iremos analisar quando $\mu = \nu = 0$. Com isso em mente, podemos começar colocando (1) na forma de matriz:

Matriz 3 – Tensor métrico, em matriz, de Schwarzschild, do tipo -+++.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2GM-rc^2}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{rc^2-2GM}{rc^2})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2(\theta) \end{pmatrix}$$

FONTE: Autor, 2023.

Matriz 4 – Inversa do tensor métrico, em matriz, de Schwarzschild, do tipo -+++.

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g^{00} & g^{01} & g^{02} & g^{03} \\ g^{10} & g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{20} & g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{30} & g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r}{2GM-rc^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{rc^2-2GM}{rc^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \text{sen}^2(\theta)} \end{pmatrix}$$

FONTE: Autor, 2023.

Em sequência, utilizaremos a equação (5) substituindo μ e ν por 0 (zero), logo, temos:

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R \quad (14)$$

Utilizando a equação (8), tensor de curvatura, com as devidas substituição dos índices, temos:

$$R_{00} = \Gamma_{00,\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{0\lambda,0}^{\lambda} + \Gamma_{00}^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{0\lambda}^{\varepsilon} \Gamma_{0\varepsilon}^{\lambda} \quad (15)$$

Utilizando a equação (9) mudando os índices, iremos resolver a primeira parte da soma da equação (11), $\Gamma_{00,\lambda}^{\lambda}$, assim temos:

$$\Gamma_{00,\lambda}^{\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{1}{2} g^{\lambda\varepsilon} (g_{0\varepsilon,0} + g_{0\varepsilon,0} - g_{00,\varepsilon}) \right]$$

Assim como foi dito anteriormente, λ varia de 0 até 3, logo temos:

$$\Gamma_{00,0}^0 = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} g^{00} (g_{00,0} + g_{00,0} - g_{00,0}) \right]$$

$$\Gamma_{00,1}^1 = \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{2} g^{11} (g_{01,0} + g_{01,0} - g_{00,1}) \right]$$

$$\Gamma_{00,2}^2 = \frac{d}{d\theta} \left[\frac{1}{2} g^{22} (g_{02,0} + g_{02,0} - g_{00,2}) \right]$$

$$\Gamma_{00,3}^3 = \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{1}{2} g^{33} (g_{03,0} + g_{03,0} - g_{00,3}) \right]$$

Perceba que $\lambda = \varepsilon$, pois o $g^{\lambda\varepsilon}$ tem que pertencer a diagonal principal, pois é nela que os elementos são diferentes de zero.

Assim, o leitor deverá chegar nos seguintes resultados:

$$\Gamma_{00,0}^0 = 0$$

$$\Gamma_{00,1}^1 = \frac{6G^2M^2}{r^4c^2} - \frac{2GM}{r^3}$$

$$\Gamma_{00,2}^2 = 0$$

$$\Gamma_{00,3}^3 = 0,$$

logo,

$$\Gamma_{00,\lambda}^\lambda = \frac{6G^2M^2}{r^4c^2} - \frac{2GM}{r^3} \quad (15.1)$$

Resolvendo a segunda parte da equação (15), temos:

$$-\Gamma_{0\lambda,0}^\lambda = - \left(\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} g^{\lambda\varepsilon} (g_{0\varepsilon,\lambda} + g_{\lambda\varepsilon,0} - g_{0\lambda,\varepsilon}) \right] \right)$$

O leitor deverá perceber que iremos derivar uma constante, já que não possuímos a variável tempo, ou seja,

$$-\Gamma_{0\lambda,0}^\lambda = 0 \quad (15.2)$$

Continuando na terceira parte, temos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^\varepsilon \Gamma_{\varepsilon\lambda}^\lambda &= \Gamma_{00}^0 (\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) + \Gamma_{00}^1 (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + \\ &+ \Gamma_{00}^2 (\Gamma_{20}^0 + \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3) + \Gamma_{00}^3 (\Gamma_{30}^0 + \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^3) \end{aligned}$$

Devido à presença de multiplicação entre os Símbolos de *Christoffel*, torna-se necessário analisar todas as possibilidades, empregando o que é conhecido como 'soma de *Einstein*' - exceto quando diz ao contrário. Como o leitor pode perceber, foi colocado os termos em evidência, Γ_{00}^0 , Γ_{00}^1 , Γ_{00}^2 e Γ_{00}^3 , assim, iremos verificar se eles zeram ou não, evitando cálculos desnecessários, com isso, deve-se chegar nos seguintes resultados:

$$\Gamma_{00}^0 = 0$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{GM}{r^2} \left(\frac{rc^2 - 2GM}{rc^2} \right)$$

$$\Gamma_{00}^2 = 0$$

$$\Gamma_{00}^3 = 0$$

Como foi apresentado, apenas os termos multiplicados por Γ_{00}^1 precisam ser calculados, logo temos:

$$\Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (g_{10,0} + g_{00,1} - g_{10,0}) = \frac{GM}{r(rc^2 - 2GM)}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}) = -\frac{GM}{r(rc^2 - 2GM)}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(g_{12,2} + g_{22,1} - g_{12,2}) = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(g_{13,3} + g_{33,1} - g_{13,3}) = \frac{1}{r}$$

Então,

$$\Gamma_{00}^\varepsilon \Gamma_{\varepsilon\lambda}^\lambda = \Gamma_{00}^1 = \frac{GM}{r^2} \left(\frac{rc^2 - 2GM}{rc^2} \right) \left(\frac{GM}{r(rc^2 - 2GM)} - \frac{GM}{r(rc^2 - 2GM)} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right)$$

$$\Gamma_{00}^\varepsilon \Gamma_{\varepsilon\lambda}^\lambda = \frac{2GM}{r^4} - \frac{4G^2M^2}{r^3c^2} \quad (15.3)$$

A última parte é um pouco mais trabalhosa, porém, segue a mesma ideia, ou seja:

$$\begin{aligned} -\Gamma_{0\lambda}^\varepsilon \Gamma_{0\varepsilon}^\lambda = & -\Gamma_{00}^0 \Gamma_{00}^0 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{00}^2 \Gamma_{02}^0 - \Gamma_{00}^3 \Gamma_{03}^0 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 - \Gamma_{01}^1 \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{01}^2 \Gamma_{02}^1 - \Gamma_{01}^3 \Gamma_{03}^1 - \\ & - \Gamma_{02}^0 \Gamma_{00}^2 - \Gamma_{02}^1 \Gamma_{01}^2 - \Gamma_{02}^2 \Gamma_{02}^2 - \Gamma_{02}^3 \Gamma_{03}^2 - \Gamma_{03}^0 \Gamma_{00}^3 - \Gamma_{03}^1 \Gamma_{01}^3 - \Gamma_{03}^2 \Gamma_{03}^2 - \Gamma_{03}^3 \Gamma_{03}^3 \end{aligned}$$

Ao calcular cada um dos termos, o leitor deverá chegar em:

$$-\Gamma_{0\lambda}^\varepsilon \Gamma_{0\varepsilon}^\lambda = -\frac{2G^2M^2}{r^4c^2} \quad (15.4)$$

Assim, juntando os resultados (15.1), (15.2), (15.3) e (15.4) em (15), temos:

$$R_{00} = \frac{6G^2M^2}{r^4c^2} - \frac{2GM}{r^3} + \frac{2GM}{r^3} - \frac{4G^2M^2}{r^3c^2} - \frac{2G^2M^2}{r^4c^2} = 0 \quad (16)$$

Depois de calcular o R_{00} , falta calcular o escalar de curvatura - presente na equação (6):

$$R = g_{ab}R^{ab} = g^{ab}R_{ab} = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}$$

O leitor deverá chegar no seguinte resultado:

$$R_{11} = 0$$

$$R_{22} = 0$$

$$R_{33} = 0$$

ou seja,

$$R = 0 \quad (17)$$

portanto, substituindo os resultados (16) e (17) em (14)

$$G_{00} = 0 - \frac{1}{2}g_{00}(0) = 0 \quad (18)$$

Com o tensor de *Einstein* obtido, podemos analisar as duas variações do tensor métrico citadas anteriormente - na visão clássica e semi-clássica -, portanto, substituindo o resultado de (18) e (3) em (2), temos:

$$0 = \frac{8\pi G}{c^4} \left(- \frac{3c^2 k_B T}{4\pi r^3} \right) \quad (19)$$

$$T = 0$$

O resultado encontrado era o esperado, pois o mesmo se trata de uma radiação na visão clássica, onde a radiação depende inteiramente da massa do objeto e essa radiação não conseguiria sair de dentro do horizonte de eventos.

Na segunda variação temos que substituir o resultado de (18) e (4) em (2), formando:

$$0 = \frac{8\pi G}{c^4} \left(- \frac{\pi k_B^4 T^4}{80h^3 r^3} \right) \quad (20)$$

$$T = 0$$

Na visão semi-clássica, temos um problema semelhante, pois apesar de levar em considerações quânticas, o objeto não consegue energizar o suficiente o vácuo,

logo, as partículas virtuais não conseguem se tornar “reais”, ou seja, elas se formam e se destroem sem serem detectadas.

Agora, um caso para que a temperatura *Hawking* seja diferente de zero, é utilizando a métrica interior de *Schwarzschild*, pois, apesar de também ser um objeto estático e sem carga, o mesmo está sendo banhado por energia (ARNOWITT; DESER; MISNER, 1960), logo temos:

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left(3\sqrt{1 - \frac{r_s}{r_g}} - \sqrt{1 - \frac{r_s^2}{r_g^3}} \right)^2 c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s^2}{r_g^3} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Onde:

- r_s é raio de *Schwarzschild*;
- r_g é o raio gravitacional do objeto, que é igual a metade do r_s , ou seja, $r_g = \frac{GM}{c^2}$.

Para resolver essa métrica, utilizaremos o *wxMaxima*, pois se trata de uma métrica mais complexa.

Obs.: Neste programa, o termo T_{00} é substituído por T_{44} , resultando na modificação de todos os outros parâmetros, isto é, $r=1$, $\Theta=2$, $\varphi=3$ e $t=4$.

Na figura 8 é apresentado a interface do programa juntamente com a matriz da equação.

Figura 8 - Matriz da solução interna de *Schwarzschild*.

```

→ csetup0;
Enter the dimension of the coordinate system: 4;
Do you wish to change the coordinate names? n;
Do you want to
1. Enter a new metric?
2. Enter a metric from a file?
3. Approximate a metric with a Taylor series? 1;
Is the matrix 1. Diagonal 2. Symmetric 3. Antisymmetric 4. General
Answer 1, 2, 3 or 4 :1;
Row 1 Column 1: (1-(2·x^2·c^4)/(G^2·M^2))^(-1);
Row 2 Column 2: x^2;
Row 3 Column 3: x^2·sin(y)^2;
Row 4 Column 4: (-(c^2)/4)·((G^2·M^2-2·x^2·c^4)/(G^2·M^2)-3-(6·sqrt(2·x^2·c^4-G^2·M^2)/(G·M)));
Matrix entered.
Enter functional dependencies with DEPENDS or 'N' if none N;
Do you wish to see the metric? y;

```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \frac{2c^4x^2}{G^2M^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \sin(y)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{c^2 \left(-\left(\frac{6\sqrt{2c^4x^2 - G^2M^2}}{GM} \right) + \frac{G^2M^2 - 2c^4x^2}{G^2M^2} - 3 \right)}{4} \right) \end{pmatrix}$$

```

(%o2) done

```

FONTE: Autor, 2023

Em seguida, o leitor pode pedir quais os símbolos de *Christoffel* são diferentes de zero, escrevendo:

- `christof(mcs);`

Depois os tensores *Ricci* e quais variáveis na equação de campo de *Einstein* são diferentes de zero, solicitando, conseqüentemente:

- `ricci(true);`
- `einstein(true).`

Dessa forma, chegamos ao seguinte resultado:

$$G_{00} = G_{44} = -\frac{6c^4}{G^2 M^2} \quad (21)$$

No final da referência, incluiremos o link para o arquivo em PDF contendo a resolução completa da métrica, proporcionando ao leitor a oportunidade de examinar todos os resultados disponíveis.

Prosseguindo, iremos analisar na forma clássica e a semiclássica, temos:

- Clássica:

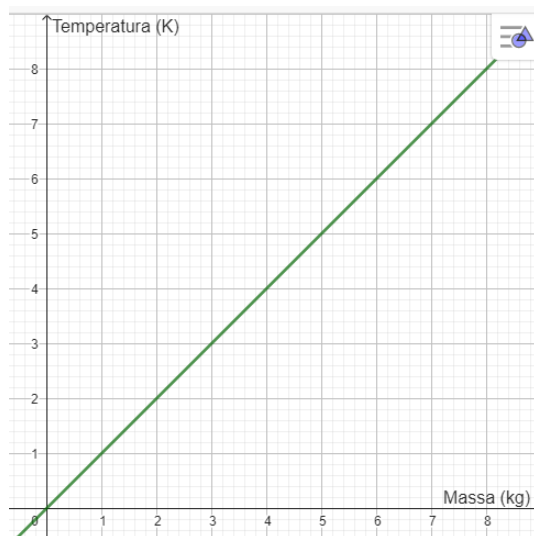
$$-\frac{6c^4}{G^2 M^2} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(-\frac{3c^2 k_B T}{4\pi r^3} \right)$$

Realizando algumas manipulações algébricas e utilizando o raio de Schwarzschild, $r_s = \frac{2GM}{c^2}$, temos:

$$T = \frac{8M}{k_B} \quad (22)$$

Podemos gerar o seguinte gráfico:

Gráfico 1: Temperatura por massa.



FONTE: Autor, 2023.

- Semiclássica:

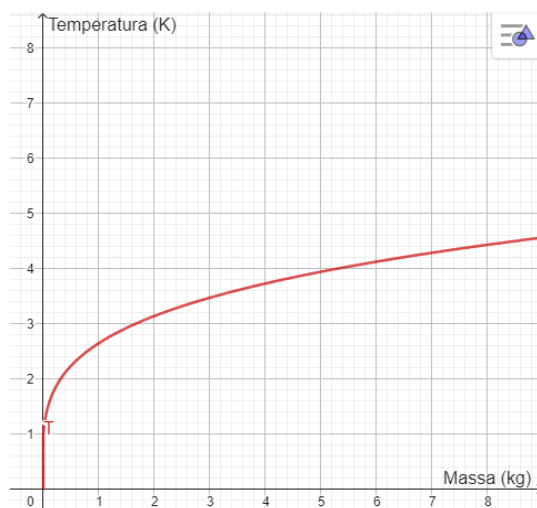
$$-\frac{6c^4}{G^2 M^2} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(-\frac{\pi k_B^4 T^4}{80\hbar^3 r^3} \right)$$

Isolando o T, temos:

$$T = \sqrt[4]{\frac{48c^2 \hbar^3 M}{\pi^2 k_B^4}} \quad (23)$$

Graficamente, temos:

Gráfico 2: Temperatura por massa.



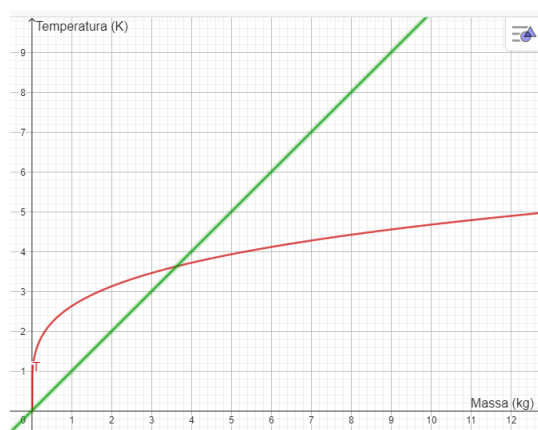
FONTE: Autor, 2023.

Para facilitar a visualização do comportamento da função, utilizaremos o sistema de unidades naturais, basicamente, igualamos as constantes universais por 1, ou seja:

- $k_B = 1$
- $\hbar = 1$
- $c = 1$

Colocando ambas no mesmo gráfico, temos:

Gráfico 3: Comparando ambos os resultados.

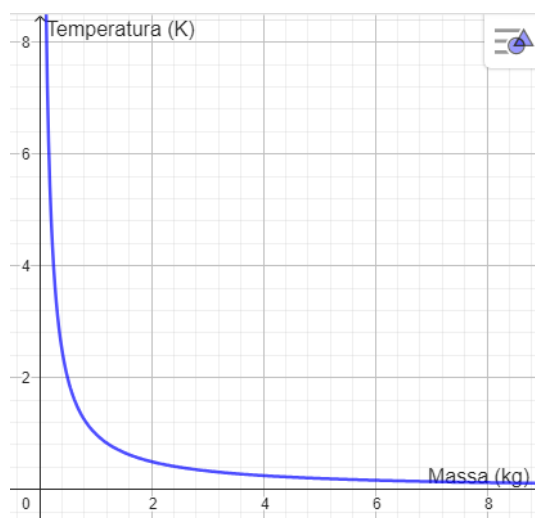


FONTE: Autor, 2023.

Agora, da própria equação desenvolvida por *Hawking* (PINOCHET, 2019), temos:

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M} \quad (24)$$

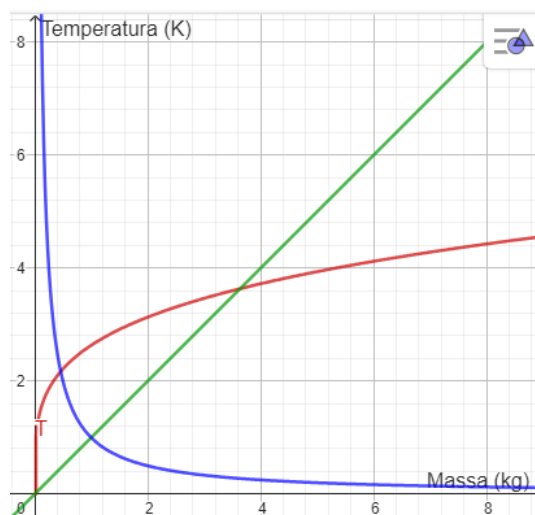
Que assim como as outras, iremos igualar as constantes a 1, logo:

Gráfico 4: comportamento da função da Temperatura de *Hawking*.

FONTE: Autor, 2023.

Relacionando com o gráfico 3, temos:

Gráfico 5: Comparação dos resultados obtidos.



FONTE: Autor, 2023.

De acordo com os dados de *Hawking*, quando menor for a massa do buraco negro, maior será a sua temperatura. O que é bem diferente da visão clássica e semiclássica encontrada.

Neste ponto, sabendo que a radiação Radiação Cósmica de Fundo - RCF (VILLELA; FERREIRA; WUENSCHÉ, 2004) - tem, aproximadamente, 2,726 +/- 0,010 K, podemos determinar a massa, aproximada, que um objeto tem que ter para ser possível detectar essa radiação. Além disso, podemos comparar com as três equações encontradas. Logo, a tabela abaixo apresenta esses resultados.

Tabela 1: Massa mínima do buraco negro em kg para a detecção da radiação *Hawking*.

Temperatura (K)	Clássica (kg)	semiclássica (kg)	<i>Hawking</i> (kg)
2,716	$4,687 \times 10^{-24}$	$3,851 \times 10^{-6}$	$4,527 \times 10^{22}$
2,726	$4,705 \times 10^{-24}$	$3,908 \times 10^{-6}$	$4,510 \times 10^{22}$
2,736	$4,722 \times 10^{-24}$	$3,966 \times 10^{-6}$	$4,493 \times 10^{22}$

FONTE: Autor, 2023.

Como pode ser observado na tabela acima, buracos negros com massa inferior a uma escala de 10^{22} kg, emite uma temperatura, em K, superior a RCF, e como vimos, eles estão na escala buracos primordiais, que são extremamente pequenos e difíceis de serem localizados. Três exemplos de objetos que possuem, aproximadamente, essa massa, são:

- Europa (satélite natural de Júpiter): $4,8 \times 10^{22}$ kg;
- Lua: $7,349 \times 10^{22}$ kg;
- Plutão: $1,305 \times 10^{22}$ kg.

Portanto, podemos empregar o raio de *Schwarzschild*, r_s , como um indicativo do tamanho dos Buracos Negros com base na massa identificada. Assim, obtemos:

Tabela 2: Raio de *Schwarzschild* de acordo com a massa dos objetos citados.

Objetos	Europa	Lua	Plutão
r_s (m)	$7,119 \times 10^{-5}$	$1,090 \times 10^{-4}$	$1,935 \times 10^{-5}$

FONTE: Autor, 2023.

Assim, podemos notar que estamos falando de objetos muito pequenos e que, provavelmente, estão extremamente longe.

Utilizando alguns exemplos de *BH*, podemos determinar o tempo de acordo com a equação (13), portanto, temos:

Tabela 3: Tempo de vida dos buracos negros.

$t_{ev} = \frac{5120\pi G^2 M^3}{hc^4}$			
Tipo de BH: Massa (M_\odot)	Tempo (s. M_\odot)	Tempo (s)	Tempo (anos)
Primordial: $\sim 10^{12}$ kg $\sim 10^{-18}M_\odot$	$8,388 \times 10^{-71}$	$6,590 \times 10^{20}$	$2,090 \times 10^{13}$
SBH: $\sim 8,7 M_\odot$ - Cygnus X-1	$5,52 \times 10^{-14}$	$4,340 \times 10^{76}$	1.376×10^{69}
IMBH: $\sim 10^4 M_\odot$ - M110 NGC 205	$8,388 \times 10^{-5}$	$6,590 \times 10^{86}$	$2,090 \times 10^{79}$
SMBH: $\sim 10^{12} M_\odot$ - Via Láctea	$8,388 \times 10^{19}$	$6,590 \times 10^{110}$	$2,090 \times 10^{103}$

FONTE: Autor, 2023.

Podemos perceber que quanto maior for a massa, maior será o tempo de vida desses objetos.

Analisando os objetos de exemplos citados, que possuem uma temperatura igual ou maior que RCF, podemos verificar o tempo que eles teriam.

Tabela 4: Tempo de vida dos *BHs* de acordo com os exemplos citados.

Plantas	Europa	Lua	Plutão
$t_{ev} = \frac{5120\pi G^2 M^3}{hc^4} \text{ (s)}$	$9,276 \times 10^{51}$	$3,329 \times 10^{52}$	$1,864 \times 10^{50}$

FONTE: Autor, 2023.

O leitor deve se perguntar “é muito tempo?”, transformando esse tempo em anos, temos, respectivamente: 3×10^{44} anos, 1×10^{45} anos e 6×10^{42} anos, é uma quantidade extremamente alta, o universo tem, em grandeza, cerca de 1×10^{10} anos, logo, podemos dizer que eles são, quase, eternos. Podemos ainda, pensar em um *BH* que seja possível analisá-lo em um período de tempo, relativamente, curto. Então, iremos ver algumas características.

Tabela 5: Características de buracos negros com tempo de vida baixos.

Tempo de vida	Massa (kg)	r_s (m)	T_H (K)
1 s	$2,284 \times 10^5$	$3,388 \times 10^{-22}$	$5,382 \times 10^{17}$
3600 s = 1 hora	$3,501 \times 10^6$	$5,193 \times 10^{-21}$	$3,512 \times 10^{16}$
86400 s = 1 dia	$1,010 \times 10^7$	$1,498 \times 10^{-20}$	$1,217 \times 10^{16}$
31557600 s = 1 ano	$7,219 \times 10^7$	$10,707 \times 10^{-18}$	$1,703 \times 10^{15}$
315576000 s = 10 anos	$1,555 \times 10^8$	$23,063 \times 10^{-18}$	$7,907 \times 10^{14}$
788940000 s = 25 anos	$2,111 \times 10^8$	$31,309 \times 10^{-18}$	$5,824 \times 10^{14}$
1577880000 s = 50 anos	$2,660 \times 10^8$	$39,451 \times 10^{-18}$	$4,622 \times 10^{14}$

FONTE: Autor, 2023.

Como podemos ver, o tempo de vida de um *BH* é proporcional ao seu tamanho e massa (volume) e inversamente a sua temperatura. Por mais que fosse possível criarmos um buraco negro teríamos o problema da temperatura irradiada pelo mesmo.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo dos buracos negros revela-se uma jornada contínua de descobertas e transformações conceituais. Ao longo deste texto, testemunhamos a evolução das ideias sobre esses objetos intrigantes, desde a sua influência no espaço-tempo até a reconsideração do seu tempo de vida. Antes considerados como depósitos eternos de informações, agora compreendemos que, embora levem um tempo significativo para evaporar completamente, os buracos negros eventualmente se dissipam. Isso deixa ao observador a habilidade de inferir apenas a massa, rotação e carga. Assim, destaca-se a importância de classificar e compreender adequadamente a aplicação da teoria que determina a temperatura (temperatura de *Hawking*), especialmente em conjunto com o tipo de buraco negro a ser considerado, como no caso do buraco negro de *Schwarzschild*.

Apesar da natureza enigmática desses astros - especialmente dada a incerteza sobre o comportamento da matéria na singularidade - conseguimos extrair informações valiosas sobre o seu exterior ao longo do tempo, à medida que a física avança. Embora nosso enfoque tenha sido no buraco negro de *Schwarzschild*, novas pesquisas aguardam exploração nos demais - buraco negro de *Reissner-Nordström*, buraco negro de *Kerr* e buraco negro de *Kerr-Newman* - e talvez, até mesmo, na singularidade em si. O fascínio e o mistério que envolvem os buracos negros continuam a inspirar investigações e questionamentos, perpetuando a busca pelo entendimento completo desses fenômenos cósmicos.

7. REFERÊNCIA

SAA, A. **Cem anos de buracos negros: o centenário da solução de Schwarzschild**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 38, 2016.

OLIVEIRA, R. F. de. **A história da investigação dos buracos negros**. 2022. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

SCHINZEL, G. H. **Buracos negros: uma proposta de sequência didática em forma de UEPS para o Ensino Médio**. 2022.

MOREIRA, M. A. **O modelo padrão da física de partículas**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 31, p. 1306.1-1306.11, 2009. (partículas virtuais).

AIRES, J. V. F. L. **Evaporação unitária de buracos negros**. 2021. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

ARANTES, J. T. **Gênios da Ciência: Stephen Hawking - Em busca do segredo do cosmos**. *Scientific American*, São Paulo SP, v. 11, p. 98, 2006.

OLIVEIRA, C. C. de. **Transformação de Lorentz sem invariância da velocidade da luz e o princípio da inércia em espaços não-euclidianos**. 2016.

ÇENGEL, Y. A.; GHAJAR, A. J. **Transferência de Calor e Massa: uma abordagem prática**. 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012.

PORTO, C. M.; PORTO, M. **Uma visão do espaço na mecânica newtoniana e na teoria da relatividade de Einstein**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 30, p. 1603.1-1603.8, 2008.

SOBRINHO, J. L. G. **Possibilidade de detecção directa de Buracos Negros por radiação electromagnética**. 2003. Tese de Doutorado. Tese submetida nas Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica para habilitação a categoria de Assistente, Universidade da Madeira [see Appendix P for a summary in English].

COIMBRA-ARAÚJO, C. H. **Diagramas de Carter-Penrose em Relatividade Geral: buracos negros e outros exemplos explícitos**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 38, 2016.

ALMEIDA, D. M. **Segunda Lei da Termodinâmica: Recursos Digitais e Ensino de Química**. 2003.

DAHER, I. M. et al. **Soluções das Equações de Campo de Einstein para fluidos perfeitos estáticos com simetria esférica**. 2008.

SOARES, D. **Os fundamentos físico-matemáticos da cosmologia relativista.** Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 35, p. 3302, 2013.

ANTUNES, L. C. S. **Radiação de corpo negro: lei de Stefan-Boltzmann, lei do deslocamento de Wien.** 2012. Tese de Doutorado.

CORRÊA, E. B. S. et al. **Quantização canônica do campo de Proca no espaço-tempo de Rindler e interação de uma fonte uniformemente acelerada com o banho térmico de Unruh.** 2010.

SourceForge. 26/09/2019. Disponível em:
<https://sourceforge.net/projects/wxmaxima/>. Acesso em: 27 de novembro de 2023.

ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C. W. **Interior Schwarzschild solutions and interpretation of source terms.** Physical Review, v. 120, n. 1, p. 321, 1960.

PINOCHET, J. **Stephen Hawking and the quantum black holes/Stephen Hawking y los agujeros negros cuanticos.** arXiv preprint arXiv:1909.12776, 2019.

VILLELA, T.; FERREIRA, I.; WUENSCHÉ, C. A. **Cosmologia observacional: a radiação cósmica de fundo em microondas.** Revista USP, n. 62, p. 104-115, 2004.

Link da solução da métrica interna de *Schwarzschild*:
<file:///C:/Users/Usuario/Desktop/eddy/teste%201.pdf>