

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

LUIZ OTAVIO RIGOBELLO MURARO

MÉTODOS ITERATIVOS DE SUBESPAÇO DE KRYLOV APLICADOS NA ANÁLISE
DE SISTEMAS DINÂMICOS COM NÚMERO ELEVADO DE GRAUS DE LIBERDADE
E PARÂMETROS DEPENDENTES DA FREQUÊNCIA

CURITIBA

2023

LUIZ OTAVIO RIGOBELLO MURARO

MÉTODOS ITERATIVOS DE SUBESPAÇO DE KRYLOV APLICADOS NA ANÁLISE
DE SISTEMAS DINÂMICOS COM NÚMERO ELEVADO DE GRAUS DE LIBERDADE
E PARÂMETROS DEPENDENTES DA FREQUÊNCIA

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações, Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Jucélio Tomás Pereira

Coorientadora: Prof. Dra. Simone de Fátima Tomazzoni Gonçalves

CURITIBA

2023

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Muraro, Luiz Otavio Rigobello

Métodos iterativos de subespaço de Krylov aplicados na análise de sistemas dinâmicos com número elevado de graus de liberdade e parâmetros dependentes da frequência / Luiz Otavio Rigobello Muraro. – Curitiba, 2023.

1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Orientador: Jucélio Tomás Pereira

Coorientador: Simone de Fátima Tomazzoni Gonçalves

1. Elastômeros. 2. Dinâmica estrutural. 3. Equações diferenciais lineares. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Pereira, Jucélio Tomás. IV. Gonçalves, Simone de Fátima Tomazzoni. V. Título.

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação ENGENHARIA MECÂNICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **LUIZ OTAVIO RIGOBELLO MURARO** intitulada: **MÉTODOS ITERATIVOS DE SUBESPAÇO DE KRYLOV APLICADOS NA ANÁLISE DE SISTEMAS DINÂMICOS COM NÚMERO ELEVADO DE GRAUS DE LIBERDADE E PARÂMETROS DEPENDENTES DA FREQUÊNCIA**, sob orientação do Prof. Dr. JUCÉLIO TOMÁS PEREIRA, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 18 de Dezembro de 2023.

Assinatura Eletrônica
18/12/2023 21:34:55.0
JUCÉLIO TOMÁS PEREIRA
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
11/01/2024 18:30:17.0
ANA PAULA DA SILVEIRA VARGAS
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
18/12/2023 18:04:51.0
MARCO ANTÔNIO LUERSEN
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
18/12/2023 22:36:16.0
CARLOS ALBERTO BAVASTRI
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida e por permitir que pessoas de bom coração estejam em meu caminho.

Aos meus pais, meu agradecimento eterno, por me ensinarem os valores importantes da vida, pelo amor incondicional e por sempre se esforçarem ao máximo para me garantir uma educação de qualidade.

Ao professor Dr. Jucélio Tomás Pereira, por todas as orientações neste trabalho e na vida acadêmica. Agradeço, também, pela paciência em explicar dos conceitos mais difíceis aos mais fáceis e pela parceria nas adversidades da vida.

À professora Dra. Simone de Fátima Tomazzoni Gonçalves por contribuir com conceitos importantes sobre análise numérica.

Ao professor Dr. Carlos Alberto Bavastri pelos diversos conhecimentos ensinados no laboratório e pelas contribuições como componente da banca de avaliação.

À professora Dra. Ana Paula da Silveira Vargas pelas contribuições como componente da banca de avaliação.

Ao professor Dr. Marco Antônio Luersen pelas contribuições como componente da banca de avaliação.

À colega de laboratório Sandmara Lanhi que, generosamente, ofereceu seu tempo e conhecimento para me ajudar a superar desafios e que sempre se colocou à disposição para me ajudar com minhas dificuldades para elaboração deste trabalho

Aos colegas de laboratório Bruno e Samuel, meu agradecimento por tornarem o ambiente de trabalho mais agradável e por compartilharem momentos divertidos

À minha amada Luana Ilenich, agradeço o apoio diário e por dividir comigo lado a lado as dificuldades deste trabalho.

À SIBI/UFPR pela disponibilização de cursos de capacitação que foram fundamentais para o aprimoramento dos meus conhecimentos na área acadêmica.

À CAPES pelo incentivo financeiro e pelo apoio contínuo, demonstrando a crença na importância da pesquisa e da ciência

“What I love about science is that as you learn, you don’t really get answers. You just get better questions.” – John Green

RESUMO

No controle passivo de vibrações, os materiais viscoelásticos (MVE's) são amplamente reconhecidos por sua notável capacidade de dissipar energia vibratória. Compreender o comportamento dinâmico de estruturas compostas por MVE's é fundamental. Frequentemente, isso exige a obtenção das funções de resposta em frequência (FRF's) da estrutura. No entanto, as análises dinâmicas dessas estruturas apresentam parâmetros dependentes da frequência, gerando problemas não lineares. Uma abordagem para resolver essas complicações é a transformação da equação diferencial do domínio do tempo para o domínio da frequência e a subsequente discretização em torno dessa variável. Esse processo demanda a resolução de um sistema de equações para cada frequência discretizada dentro do intervalo de interesse, tornando as formulações computacionalmente caras, especialmente em sistemas com muitos graus de liberdade. Nesse contexto, o objetivo deste estudo é avaliar numericamente dois métodos iterativos, baseados no subespaço de Krylov, para a solução de sistemas lineares complexos contidos nos cálculos de FRF's de estruturas dinâmicas compostas por materiais viscoelásticos e com um elevado número de graus de liberdade. Para isso, uma barra composta por MVE e material metálico foi modelada via método de elementos finitos (MEF) com elementos unidimensionais. As FRF's foram avaliadas numericamente empregando o método da decomposição LU (método utilizado como referência), dois métodos iterativos (Resíduo Mínimo e LQ Simétrico), um método baseado em truncamento modal já existente na literatura, e um método desenvolvido neste estudo a partir de modificações deste último. Esta avaliação se baseou, principalmente, nos tempos de processamento, e nas normas L_∞ e L_2 da diferença entre a solução obtida para cada método e a solução de referência. Além disso, uma análise gráfica das FRF's foi realizada. Os resultados revelaram que os métodos iterativos exibiram as menores normas das funções diferença em todos os casos. No entanto, em termos de tempo de processamento, esses métodos foram os mais demorados em comparação com os métodos baseados em truncamento, sugerindo que ainda não são uma alternativa viável para o cálculo dessas funções. Na análise gráfica, observou-se que o método baseado em truncamento modal apresentou um desvio de até 0,6 dB em relação ao pico da curva de referência. Apesar dessa desvantagem, este método ainda se mantém como a melhor opção para o cálculo de FRF's de estruturas compostas por materiais viscoelásticos considerando tempos de processamento.

Palavras-chave: Elastômero; Dinâmica estrutural; Receptância; Sistema linear de equações complexas.

ABSTRACT

Passive vibration control has been greatly enhanced by the use of viscoelastic materials (VEM's), renowned for their remarkable ability to dissipate vibrational energy. Understanding the dynamic behavior of structures composed of VEMs is paramount. This often necessitates obtaining the frequency response functions (FRF's) of the structure. However, the dynamic analyses of such structures involve frequency-dependent parameters, leading to nonlinear problems. One approach to address these complexities involves transforming the differential equation from the time domain to the frequency domain and subsequently discretizing around this variable. This process entails solving a system of equations for each discretized frequency within the range of interest, making the formulations computationally expensive, particularly for systems with numerous degrees of freedom. In this context, the aim of this study is to numerically evaluate two iterative methods, based on the Krylov subspace, for solving complex linear systems involved in the calculations of FRF's of dynamic structures composed of viscoelastic materials and with a high number of degrees of freedom. To achieve this, a bar composed of VEM and metallic material was modeled using the finite element method (FEM) with one-dimensional elements. The FRF's were numerically evaluated using the LU decomposition method (utilized as a reference), two iterative methods (Minimum Residual and Symmetric LQ), an existing modal truncation-based method from literature, and a method developed in this study based on modifications of the latter. This evaluation primarily focused on processing times and the L_∞ and L_2 norms of the difference between the solution obtained for each method and the reference solution. Additionally, a graphical analysis of the FRF's was conducted. The results revealed that the iterative methods exhibited the smallest norm differences in all cases. However, in terms of processing time, these methods were the slowest compared to truncation-based methods, suggesting they are not yet a viable alternative for calculating these functions. In the graphical analysis, it was observed that the modal truncation-based method showed a deviation of up to 0.6 dB from the peak of the reference curve. Despite this disadvantage, this method remains the best option for calculating FRF's of structures composed of viscoelastic materials considering processing times.

Keywords: Elastomer; Structural dynamics; Receptance; Complex linear system of equations.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - Modelo reológico de Zener.	47
FIGURA 2 - Representação da barra composta de material metálico e MVE utilizada nas análises do presente trabalho (dimensões em m).....	56
FIGURA 3 - Representação do método dos elementos finitos em elemento de barra.	57
FIGURA 4 - Geometria de um único elemento de barra.....	58
FIGURA 5 - Cinco primeiros modos de vibrar longitudinais do sistema primário.	70
FIGURA 6 - Componente n, n da matriz de funções receptâncias dos sistemas primário e composto da estrutura.	71
FIGURA 7 - Vista ampliada da região próxima da antirressonância das FRF's do modelo composto, resolvida utilizando o método iterativo MINRES e com diferentes vetores iniciais.	73
FIGURA 8 - Análise comparativa gráfica entre FRF's do sistema composto via método iterativo MINRES com diferentes tolerâncias.	75
FIGURA 9 - Análise comparativa gráfica entre FRF's do sistema composto via método iterativo SYMMLQ com diferentes tolerâncias.....	76
FIGURA 10 - Método Floody-Espíndola: FRF's do sistema composto, com diferentes números de modos de vibrar para o truncamento. 6501 pontos na frequência e malha com 262144 nós.	78
FIGURA 11 - Método Floody-Espíndola: Vista ampliada da região da primeira antirressonância das FRF's do sistema composto, utilizando diferentes números de modos de vibrar para o truncamento. 6501 pontos na frequência e malha com 262144 nós.	78
FIGURA 12 - Método Floody-Espíndola: Vista da região aproximada do terceiro pico das FRF's do sistema composto, com diferentes números de modos de vibrar para o truncamento. 6501 pontos na frequência e malha com 262144 nós.	79
FIGURA 13 - Método Floody-Espíndola: Vista ampliada da região aproximada do terceiro pico das FRF's do sistema composto, com diferentes números de modos de vibrar para o truncamento. 6501 pontos na frequência e malha com 262144 nós.	79
FIGURA 14 - Número de iterações em cada valor de frequência.....	82
FIGURA 15 - FRF'S dos métodos por truncamento modal. 6501 pontos na frequência e malha com 262144 nós.	85

FIGURA 16 - Comparação das FRF's dos métodos iterativos. 6501 pontos na frequência e malha com 262144 nós.	86
FIGURA 17 - Comparação entre as FRF's dos métodos SYMMLQ e Floody-Espíndola. 6501 pontos na frequência e malha com 262144 nós.	87
FIGURA 18 - Comparação entre as FRF's na regiões ampliadas dos picos para diferentes métodos. 32501 pontos na frequência e malha com 262144 nós.....	87
FIGURA 19 - Comparação entre as FRF's na regiões ampliadas dos picos para diferentes métodos. 32501 pontos na frequência e malha com 65536.	88
FIGURA 20 - Comparação entre as FRF's nas regiões ampliadas dos picos para diferentes métodos. Configuração: 32501 pontos na frequência e malha com 16384 nós..	88
FIGURA 21 - Ampliação da região da primeira antirressonância para diferentes condições e diferentes métodos.	89

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - Características dos métodos de subespaço de Krylov mais conhecidos.....	30
TABELA 2 - Parâmetros do material viscoelástico fictício (entre colchetes as unidades de medida).	57
TABELA 3 - Definição de parâmetros das simulações principais.....	67
TABELA 4 - Frequência naturais analíticas e numéricas do sistema primário e seu e o erro percentual.....	69
TABELA 5 - Tempos de processamento, em segundos, das FRF's do modelo composto, com discretização com 10000 nós, utilizando métodos iterativos com tolerância de 1.e-05 e para vetores iniciais diferentes.	72
TABELA 6 – Números médios, em segundos, das FRF's do modelo composto, com discretização com 10000 nós, utilizando métodos iterativos com tolerância de 1.e-05 e para vetores iniciais diferentes.	72
TABELA 7 - Análise dos tempos de processamento da FRF do sistema composto e da normas L_{∞} e L_2 , utilizando métodos iterativos com diferentes tolerâncias. 6501 pontos na frequência e malha com 16384 nós.	74
TABELA 8 - Análise dos tempos de processamento da FRF do sistema composto e da normas L_{∞} e L_2 , utilizando métodos iterativos com diferentes tolerâncias. 6501 pontos na frequência e malha com 65536 nós.	74
TABELA 9 - Análise dos tempos de processamento da FRF do sistema composto e da normas L_{∞} e L_2 , utilizando métodos iterativos com diferentes tolerâncias. 6501 pontos na frequência e malha com 262144 nós.	75
TABELA 10 - Método Floody-Espíndola: Normas L_{∞} e L_2 e tempo de processamento da FRF do sistema composto utilizando números diferentes de modos de vibrar para o truncamento. 6501 pontos na frequência e malha com 65536 nós.	77
TABELA 11 - Método Floody-Espíndola: Normas L_{∞} e L_2 e tempo de processamento da FRF do sistema composto utilizando números diferentes de modos de vibrar para o truncamento. 6501 pontos na frequência e malha com 262144 nós.	77
TABELA 12 - Tempos de processamento e tempos relativos do cálculo da FRF do sistema composto, considerando 6501 pontos discretos na frequência.	80
TABELA 13 - Tempos de processamento e tempos relativos do cálculo da FRF do sistema composto, considerando 32501 pontos discretos na frequência.	81

TABELA 14 - Norma L_∞ [m/N] da FRF do sistema composto, com discretização na frequência em 6501 pontos, para diferentes métodos e ordens de sistemas.	83
TABELA 15 - Norma L_∞ [m/N] da FRF do sistema composto, com discretização na frequência em 32501 pontos, para diferentes métodos e ordens de sistemas.	83
TABELA 16 - Norma L_2 [m/N] da FRF do sistema composto, com discretização na frequência em 6501 pontos, para diferentes métodos e ordens de sistemas.	83
TABELA 17 - Norma L_2 [m/N] da FRF do sistema composto, com discretização na frequência em 32501 pontos, para diferentes métodos e ordens de sistemas.	84

LISTA DE ABREVIATURAS

ADI	Método da Direção Implicitamente Alternada (do inglês, <i>Alternating Direction Implicit Method</i>);
BICG	Método do Gradiente Biconjugado (do inglês, <i>Bi-Conjugate Gradient</i>);
BICGSTAB	Método Gradiente Bi-Conjugado Estabilizado (do inglês, <i>Bi-Conjugate Gradient Stabilized</i>);
CG	Método do Gradiente Conjugado (do inglês, <i>Conjugate Gradient Method</i>);
CGS	Método dos Gradientes Conjugados Quadrados (do inglês, <i>Conjugate Gradients-Squared</i>);
CR	Método dos Resíduos Conjugados (do inglês, <i>Conjugate Residual</i>);
FGMRES	Método do Gradiente Mínimo Generalizado Flexível (do inglês, <i>Flexible Generalized Minimal Gradient Method</i>);
FOM	Método da Ortogonalização Completa (do inglês, <i>Full Orthogonalization Method</i>);
FRF	Função Resposta em Frequência;
GMRES	Método do Gradiente Mínimo Generalizado (do inglês, <i>Generalized Minimal Gradient Method</i>);
GMRESR	Método do Variante Recursiva do Gradiente Mínimo Generalizado Reiniciado (do inglês, <i>the Recursive variant Generalized Minimal Gradient Method</i>);
HSS	Método do Particionamento Hermitiano/Anti-Hermitiano (do inglês, <i>Hermitian/Skew-Hermitian Splitting Method</i>);
LTSCSP	Método do Particionamento em Escala de dois Passos Assimétrico (do inglês, <i>Lopsided Two-step Scale Splitting Method</i>);
MEF	Método dos Elementos Finitos;
MINRES	Método do Resíduo Mínimo (do inglês, <i>Minimum Residual Method</i>);
MTSS	Método do Particionamento em Escala Modificado (do inglês, <i>Modified Two-step Scale Splitting Method</i>);
MVE	Material Viscoelástico;
PBS	Método do Particionamento em Blocos Parametrizado (do inglês, <i>Parametrized Block Splitting Method</i>);

RGMRES Método do Gradiente Mínimo Generalizado Reiniciado (do inglês, *Restarted Generalized Minimal Gradient Method*);

SOR Método da Sobre-Relaxação Sucessiva Generalizada Acelerada (do inglês, *Accelerated Generalized Successive Over-Relaxation Method*);

SYMMLQ Método LQ Simétrico (do inglês, *Symmetric LQ*).

LISTA DE SÍMBOLOS

Alfabeto Latino

A	Matriz coeficiente, generalizada, de um sistema de equações lineares complexas;
A^*	Matriz complexa conjugada da matriz A ;
A_i	i -ésima matriz adjunta de A ;
A_m	Área transversal da parcela de material metálico de um elemento de barra;
A_{mve}	Área transversal da parcela de material viscoelástico de um elemento de barra;
A_t	Área transversal total de um elemento de barra;
B	Matriz de iteração da relação de recorrência de um método iterativo de equação de ponto fixo;
E_0	Módulo de elasticidade dinâmico, assíntota com $\Omega \rightarrow 0$;
E_∞	Módulo de elasticidade dinâmico, assíntota com $\Omega \rightarrow \infty$;
$E_c(\Omega)$	Módulo de elasticidade complexo dependente da frequência;
$E(\Omega_0)$	Módulo de elasticidade complexo dependente da frequência de referência Ω_0 ;
$F_s(\Omega)$	Força de excitação aplicada no grau de liberdade s ;
$H_{ks}(\Omega)$	Componente ks da matriz de inertância;
$I_{\hat{n} \times \hat{n}}$	Matriz identidade de ordem $\hat{n} \times \hat{n}$;
J_{ks}	Componente ks da matriz de inertância J ;
$[k_c]$	Matriz de rigidez elementar de uma estrutura composta por material metálico e MVE;
$[k_e]$	Matriz de rigidez elementar para uma barra genérica;
$[k_g]$	Matriz de rigidez global de uma barra composta por material metálico e MVE;
K_e	Parcela da matriz de rigidez referente ao material elástico;
$K_{mve}(\Omega_0)$	Parcela da matriz de rigidez referente ao MVE para a frequência de referência Ω_0 ;
K'_{mve}	Matriz de rigidez do MVE obtida considerando um módulo de elasticidade arbitrário e constante;

L^T	Matriz transposta de L ;
L_i	i -ésima linha do sistema de equações;
L_k	Matriz triangular inferior obtida por fatoração LQ;
$[m_c]$	Matriz de massa elementar de uma barra composta por material metálico e MVE;
$[m_e]$	Matriz de massa elementar para uma barra genérica;
$[m_g]$	Matriz de massa global de uma barra composta por material metálico e MVE;
M_p	Matriz de massa do sistema primário;
$[N(x)]$	Matriz de funções de forma;
N_Ω	Número total de valores discretos de frequências no intervalo de interesse;
$\hat{P}(\Omega)$	Vetor de coordenadas generalizadas no domínio da frequência e no subespaço modal truncado;
Q_k	Matriz ortogonal obtida por fatoração LQ;
T_0	Temperatura de referência;
T	Temperatura;
T_e	Energia cinética elementar;
\underline{T}_k	Matriz de transformação do método de Lanczos;
V_k	Matriz de vetores ortonormais formada com a base de Krylov;
$X_k(\Omega)$	Resposta em deslocamento generalizado obtido no grau de liberdade k ;
Y_{ks}	Componente ks da matriz de mobilidade;
a_{ij}	Componente da linha i e coluna j da matriz A ;
d_1, d_2	Coefficientes de amortecimento proporcional;
l_{ij}	Componente da linha i e coluna j , da matriz L ;
\hat{n}	Grau de liberdade truncado;
$\hat{p}(t)$	Vetor de coordenadas generalizadas no domínio do tempo e no subespaço modal truncado;
$p_m(z)$	Polinômio minimal de um vetor em relação à matriz;
u_{ij}	Componente da linha i e coluna j , da matriz U ;
w_m	Frequência natural do m -ésimo modo de vibrar;

e_1	Versor do primeiro eixo de coordenadas;
r_k	Vetor resíduo da k -ésima iteração;
r_0	Vetor resíduo inicial;
v_k	Vetor da base gerada de Krylov;
$\dot{x}(t)$	Vetor de velocidades;
$\ddot{x}(t)$	Vetor de acelerações;
x_0	Vetor inicial, conhecido;
y_k	Vetor intermediário na solução dos métodos de Krylov;
I	Matriz identidade;
$K(\Omega, T)$	Matriz de rigidez (dependente da frequência e da temperatura) do sistema composto;
$K(\Omega)$	Matriz de rigidez (dependente da frequência) do sistema composto;
L	Matriz triangular inferior do método da decomposição LU;
M	Matriz de massa do sistema composto;
$P(\Omega)$	Vetor de coordenadas generalizadas no domínio da frequência e no subespaço modal;
S	Matriz da parcela anti-Hermitiana da matriz A ;
U	Matriz diagonal superior da decomposição LU;
U_e	Energia de deformação total elementar;
a, b, m	Parâmetros dependentes do material;
i	Número imaginário;
$m(z)$	Polinômio mínimo de uma matriz;
$p(t)$	Vetor de coordenadas generalizadas no domínio do tempo e no subespaço modal;
t	Tempo;
u	Deslocamento de um ponto do elemento de barra;
$F(\Omega)$	Vetor de forças de excitação, no domínio da frequência, de um sistema sob vibração;
b	Vetor dos termos independentes;
$f(t)$	Vetor de forças de excitação (forças generalizadas) de um sistema sob vibração;
x	Vetor solução, generalizado, de um sistema de equações lineares complexas;

$x(t)$ Vetor de incógnitas (deslocamentos generalizados) de um sistema sob vibração.

Alfabeto Grego

α_T	Fator de translação temperatura-frequência;
α_k	Componente igual a componente $T_k (k, k + 1)$;
β_k	Componente igual a componente $T_k (k - 1, k + 1)$;
θ_1, θ_2	Constantes do modelo WLF dependentes do material;
$\Delta E(\Omega; \Omega_0)$	Incremento no módulo de elasticidade complexo considerando a frequência Ω a partir da frequência de referência Ω_0 ;
$\varepsilon(t)$	Deformação no domínio do tempo;
$\varepsilon(\Omega)$	Deformação no domínio da frequência;
Φ_j	j -ésimo autovetor da matriz modal;
Φ_0	Matriz modal avaliada na frequência de referência;
$\widehat{\Phi}_0$	Matriz modal truncada avaliada na frequência de referência;
λ_j	j -ésimo autovalor associado ao j -ésimo autovetor;
Λ	Matriz espectral;
Λ_0	Matriz espectral avaliada na frequência de referência;
$\Lambda_{\hat{n} \times \hat{n}}$	Matriz espectral truncada;
ξ	Parâmetro de derivada fracionária do modelo de Zener;
ρ_m	Massa específica do material metálico;
ρ_{mve}	Massa específica do MVE;
K	Representação do espaço de Krylov;
$\sigma(t)$	Tensão no domínio do tempo;
$\sigma(\Omega)$	Tensão no domínio da frequência;
γ_n	Razão de amortecimento modal do n -ésimo modo de vibrar;
Ω	Frequência;
Ω_r	Frequência reduzida;
Ω_0	Frequência de referência;
$\tau_{\hat{n} \times \hat{n}}$	Matriz de ordem $\hat{n} \times \hat{n}$ relacionada a matriz de amortecimento.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	21
1.1 OBJETIVOS	23
1.1.1 Objetivo Geral	23
1.1.2 Objetivos específicos	24
1.2 ESTRUTURA DO TEXTO	25
2 REVISÃO DE LITERATURA	26
2.1 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES	26
2.2 CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS COM PARÂMETROS DEPENDENTES DA FREQUÊNCIA	32
2.3 PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO	35
3 REVISÃO CONCEITUAL	37
3.1 MÉTODOS DIRETOS	37
3.1.1 Decomposição LU	38
3.2 MÉTODOS ITERATIVOS	39
3.2.1 Método de Ortogonalização de Lanczos	42
3.2.2 Métodos iterativos de solução de sistemas lineares baseados no método de Lanczos	43
3.2.3 Pré-condicionamento	45
3.3 MATERIAIS VISCOELÁSTICOS	46
3.4 FUNÇÃO RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DE UM SISTEMA ESTRUTURAL DINÂMICO COMPOSTO POR MVE	49
3.4.1 Metodologia de truncamento modal para o cálculo de FRF's em estruturas compostas por MVE	52
4 METODOLOGIA	55
4.1 PROBLEMA PROPOSTO	55
4.2 PARÂMETROS DE SIMULAÇÃO E MÉTODOS DE SOLUÇÃO	61
4.3 MÉTODOS DE OBTENÇÃO DAS FRF'S ANALISADOS	63
4.3.1 Método direto – Decomposição LU	63
4.3.2 Métodos iterativos	64
4.3.3 Metodo Floody- Espíndola	64
4.3.4 Método Floody-Espíndola Modificado	65
4.4 SIMULAÇÕES E OBTENÇÃO DOS RESULTADOS	67
5 RESULTADOS E DISCUSSÕES	69

5.1 VALIDAÇÃO DO MODELO DO SISTEMA PRIMÁRIO	69
5.2 APRESENTAÇÃO DA FRF NUMÉRICA DO SISTEMA COMPOSTO.....	70
5.3 AVALIAÇÃO DA INFLUÊNCIA DO VETOR INICIAL EM CADA PASSO NA CONVERGÊNCIA DOS MÉTODOS ITERATIVOS.....	71
5.4 AVALIAÇÃO DA INFLUÊNCIA DA TOLERÂNCIA NA CONVERGÊNCIA DOS MÉTODOS ITERATIVOS	74
5.5 AVALIAÇÃO DA INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE MODOS DE TRUCAMENTO NOS MÉTODOS BASEADOS EM TRUNCAMENTO MODAL	77
5.6 ANÁLISE COMPARATIVA DAS METODOLOGIAS IMPLEMENTADAS.....	79
5.6.1 Tempos de processamento.....	80
5.6.2 Normas L_{∞} e L_2	82
5.6.3 Análise gráfica das FRF's.....	84
6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	90
6.1 CONCLUSÕES.....	90
6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	91
REFERÊNCIAS	93

1 INTRODUÇÃO

Sistemas de equações diferenciais postos no domínio do tempo, que podem possuir algum parâmetro no domínio da frequência, estão presentes em diversas áreas do conhecimento. Dentre elas, encontram-se o controle de vibrações utilizando material viscoelástico (MVE) (DEHGHAN; HAJARIAN, 2014; FERIANI; PEROTTI; SIMONCINI, 2000), transporte de massa através de meios porosos (GAMBOLATI; PINI, 1998), mecânica quântica (DIJK; TOYAMA, 2007) e campos elétricos (CHRISTIANSEN, 2003).

Para o caso do controle de vibrações utilizando MVE, a dependência da frequência pode ser expressa pela matriz de rigidez do sistema. A equação do movimento considerando o amortecimento por MVE para um sistema genérico, posto no domínio do tempo, é dado pela equação

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + C\dot{\mathbf{x}}(t) + K(\Omega)\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (1.1)$$

onde M é a matriz de massa, C é a matriz de amortecimento e $K(\Omega)$ é a matriz de rigidez do sistema composto, a qual é dependente da frequência devido às propriedades do MVE. Os vetores $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{f}(t)$ representam, respectivamente, a resposta dinâmica e a força de excitação. De acordo com Floody *et al.* (2007), o sistema da equação (1.1) é dito não-linear, visto que o domínio da equação é o tempo e há uma variável, $K(\Omega)$, dependente da frequência e, portanto, do tempo. Crandall (1970) designa a equação (1.1) pelo termo em inglês “*non-equation*” e que para a sua resolução, deve ser transformada para o domínio da frequência.

Transformando a equação (1.1) para o domínio da frequência, sua forma final é expressa por

$$[K(\Omega) + i\Omega C - \Omega^2 M]\mathbf{X}(\Omega) = \mathbf{F}(\Omega). \quad (1.2)$$

O sistema apresentado na equação (1.2), possui a forma de um sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e precisa ser resolvido para cada frequência discreta do intervalo analisado. Isso torna o processo muito caro computacionalmente. Outra característica observada nesses sistemas, é a presença de termos com valores complexos, isto é, valores que possuem parte real e parte imaginária. Portanto, a resolução de sistemas de equações lineares complexos é importante nessa área de estudo.

Um sistema de equações linear complexo¹ genérico é dado por

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (1.3)$$

onde $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é a matriz de coeficientes e não singular. O vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ é conhecido e $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ é o vetor de incógnitas. A resolução do sistema linear complexo dado pela equação (1.2) era realizada, na década de 80, por exemplo, por softwares que utilizavam a biblioteca de rotinas baseada na álgebra linear, como por exemplo a biblioteca LAPACK (do inglês, *Linear Algebra Package*) (GOLUB; LOAN, 1996). Os principais métodos inclusos nessa biblioteca, são a decomposição LU, decomposição QR e decomposição de Cholesky. Estes métodos são classificados como métodos diretos.

Segundo Saad (2003), os métodos diretos possuem diversos problemas de instabilidade numérica, tais como a divisão por números próximos ao zero e arredondamento. Além disso, estes exigem um elevado número de operações aritméticas, o que pode não ser a melhor alternativa para certos casos. Uma alternativa aos métodos diretos é a utilização de métodos iterativos, os quais a partir de uma estimativa inicial geram uma sequência de aproximações que, sob condições, converge para um sistema linear. Isso permite reduzir significativamente o número de operações aritméticas, e tornar o processo mais rápido para os casos de sistemas com muitas equações.

Os métodos iterativos que utilizam o conceito de subespaço de Krylov estão entre os principais métodos desse tipo discutidos na literatura. Em suas etapas, esses métodos realizam cálculos de produto interno entre vetores e multiplicação matriz-vetor, resultando em um número significativamente menor de cálculos em comparação aos métodos diretos. Entre esses métodos, os métodos de resíduo mínimo (MINRES, do inglês *Minimum Residual* - MINRES) e LQ simétrico (do inglês, *Symmetric LQ* - SYMMLQ) se destacam, especialmente para sistemas de equações simétricas (SAAD; VORST, 2000). Com o objetivo de acelerar a convergência desses métodos iterativos na resolução de sistemas lineares complexos, vários estudos na área de álgebra linear foram desenvolvidos, incluindo a implementação de pré-condicionadores que modificam o sistema inicial para melhorar sua condição (SAAD; VORST, 2000).

Em um cenário de um mercado altamente competitivo, no qual as indústrias buscam estruturas ou componentes dinâmicos cada vez mais precisos e otimizados, a utilização de

¹ Neste estudo, entendem-se como equações lineares complexas aquelas que, além de lineares, envolvem números complexos, ou seja, números compostos pelas partes real e imaginária. Por exemplo, $y = c + di$, onde c e d são números reais e $i = \sqrt{-1}$.

MVE para o controle passivo se mostra muito eficaz (BRINSON; BRINSON, 2008). No entanto, os cálculos para representar o seu comportamento, e obter respostas essenciais nessa análise, como a receptância, mobilidade e inertância, são processos demorados e extensos. Uma alternativa para diminuir esse tempo, seria, então, a implementação de métodos iterativos baseados em subespaço de Krylov para obter soluções aproximada dessas funções.

1.1 OBJETIVOS

Após a exposição da seção anterior, compreende-se que o cálculo das FRF's para sistemas dinâmicos com parâmetros dependentes da frequência e com um elevado número de graus de liberdade é uma tarefa computacionalmente exigente. Como alternativa ao método direto de solução, que atualmente empregam técnicas como a decomposição LU para resolver sistemas de equações lineares, existe a opção de empregar métodos iterativos. Para sistemas de equações em que a matriz de coeficientes é complexa, simétrica e indefinida, tais como as apresentadas na matriz de coeficientes da matriz de rigidez de estruturas desse tipo, os métodos de subespaço de Krylov apropriados incluem os métodos SYMMLQ e MINRES, com a implementação de uma matriz de pré-condicionamento. Nesse contexto, este estudo avalia a eficácia de dois procedimentos iterativos na solução de sistemas lineares complexos, que desempenham um papel crucial nos cálculos das Funções de Resposta em Frequência (FRF) de estruturas compostas por material viscoelástico e compara com metodologias já existentes. Para tanto, nesta seção são expostos os objetivos gerais e específicos desta dissertação.

1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo do presente trabalho é apresentar uma metodologia incremental na frequência pela utilização dos métodos iterativos de subespaço de Krylov SYMMLQ e MINRES para a resolução de sistemas de equações lineares complexas, presentes nos cálculos da resposta dinâmica de estruturas com parâmetros dependentes da frequência, bem como apresentar uma modificação de um método baseado em truncamento modal e compará-los numericamente com métodos existentes.

1.1.2 Objetivos específicos

Com base no objetivo geral, os objetivos específicos deste trabalho são:

- Implementar um problema de vibrações unidimensional para uma estrutura composta de metal-MVE-metal, via MEF;
- Implementar uma rotina para o cálculo direto da FRF do sistema composto, de forma incremental na frequência;
- Implementar uma rotina para o cálculo da FRF do sistema composto, de forma incremental na frequência, com base no método apresentado por Floody *et al.*, (2007);
- Implementar uma formulação para o cálculo da FRF do sistema composto, de forma incremental na frequência, por meio da rotina baseada no método iterativo SYMMLQ;
- Implementar uma formulação para o cálculo da FRF do sistema composto, de forma incremental na frequência, por meio da rotina baseada no método iterativo MINRES;
- Implementar uma rotina para o cálculo da FRF do sistema composto, de forma incremental na frequência, por meio de modificações do método apresentado por Floody *et al.* (2007);
- Calcular a FRF do problema de vibrações unidimensional implementado, para diferentes número de graus de liberdade ($2^{14} = 16384$ nós, $2^{16} = 65536$ nós e $2^{18} = 26.2144$ nós) e diferentes discretizações na frequência (6501 e 32501 pontos) por meio das metodologias implementadas: Decomposição LU, SYMMLQ, MINRES, Floody-Espíndola e Floody-Espíndola modificada;
- Avaliar a influência de parâmetros de simulação dos métodos na solução e definir quais parâmetros serão utilizados;
- Avaliar numericamente o tempo de processamento das simulações;
- Avaliar numericamente a norma L_{∞} do vetor diferença entre a solução devido cada metodologia e a solução de referência;
- Avaliar numericamente a norma L_2 do vetor diferença entre a solução obtida aplicando cada metodologia e a solução de referência.
- Reproduzir e comparar visualmente os gráficos de FRF's.

1.2 ESTRUTURA DO TEXTO

Este trabalho busca apresentar uma metodologia iterativa aplicada na análise de sistemas dinâmicos com número elevado de graus de liberdade e parâmetros dependentes da frequência. Para tanto, a organização textual dessa dissertação busca apresentar as informações necessárias para a elaboração da metodologia testada.

No presente capítulo é apresentado, rapidamente, o problema do custo computacional para sistemas dinâmicos com número elevado de graus de liberdade e parâmetros dependentes da frequência e os objetivos do trabalho.

No segundo capítulo, são abordados a revisão dos métodos diretos para resolução de sistemas lineares complexos e o contexto desse tipo de problema no caso do controle de vibrações passivo. Além disso, é apresentado o estado da arte dos métodos iterativos desenvolvidos, para entender o que a literatura oferece para solucionar esse tipo de problema.

No capítulo 3, são apresentados os conceitos importantes para a compreensão dos métodos diretos e iterativos usados neste trabalho. Ainda, é discorrido sobre a teoria de vibrações para o cálculo da função resposta em frequência (FRF) de sistemas compostos envolvendo MVE's.

No quarto capítulo, é discutida a metodologia proposta nesse trabalho. Para isso, são apresentados os métodos implementados, as condições de simulação impostas, os materiais utilizados e quais tipos de análises são realizadas.

No capítulo 5, são mostrados os resultados deste estudo, bem como a discussão dos principais pontos encontrados.

No capítulo 6, são discutidas as conclusões do trabalho, assim como sugestões para pesquisas futuras.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo, inicialmente, é apresentada uma revisão da literatura, com ênfase ao estado da arte, referente aos métodos para solucionar sistemas de equações lineares complexos, destacando sua relevância em diversas áreas. Na sequência, é exemplificada uma aplicação deste tipo de sistema no comportamento dinâmico de estruturas com parâmetros dependentes da frequência. Para finalizar, são expostos os objetivos gerais, os objetivos específicos e as principais contribuições deste trabalho com base no que é descrito nas seções anteriores.

2.1 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

A resolução de sistemas de equações lineares está presente em problemas de diversas áreas do conhecimento, como a engenharia (SHAWAGFEH; KAYA, 2004), economia (MEERSCHAERT; SCALAS, 2006), biologia (KANG; KANG, 2019) e química (UDAWAT *et al.*, 2022). O estudo sobre métodos para resolver esses sistemas é muito antigo. Anton e Busby (2003) afirmam que essa temática foi abordada no ano 200 a.C., com o livro chinês “Nove Capítulos da Arte Matemática”. Esse livro ficou famoso após o matemático Carl F. Gauss² utilizar uma versão da eliminação Gaussiana para calcular a órbita do asteroide Ceres. Desde então, diversos métodos foram desenvolvidos com o intuito de resolver sistemas de equações lineares. Esses métodos podem ser divididos em dois grandes grupos: os métodos diretos e os métodos iterativos (DEMMELE, 1997).

Os métodos diretos buscam a solução do sistema de forma exata (exceto erros de arredondamento) em um número finito de passos e sua solução é alcançada após esse número ser atingido. Os principais exemplos dos métodos diretos são: Regra de Cramer (JI, 2012), Eliminação Gaussiana, Fatoração LU e Fatoração de Cholesky (PLATO, 2003). Entretanto, os métodos diretos se tornam impraticáveis ou muito demorados quando a ordem de grandeza dos sistemas é muito elevada e quando precisam ser resolvidos diversas vezes (DEMMELE, 1997). Nesse contexto, os métodos iterativos foram desenvolvidos.

² Carl Friedrich Gauss (1777-1855), conhecido como o príncipe da matemática, foi um astrônomo, físico e matemático alemão, e colaborou em várias áreas da ciência. Entre suas diversas contribuições para a humanidade estão a invenção do telégrafo e do magnetômetro. Além disso, foi capaz de elaborar um método para prever a órbita do planeta Ceres a partir de escassa informação.

Segundo Bodewig (1959), o interesse nesse tipo de método foi registrado em carta de Carl F. Gauss enviada a seu pupilo Christian L. Gerling³ em 23 de dezembro 1823 contendo a exibição de um processo iterativo para um sistema genérico. Os métodos iterativos, na construção de uma sequência de vetores solução que buscam convergir para uma solução aproximada do sistema a partir de uma estimativa inicial \mathbf{x}_0 e uma tolerância pré-estabelecida (ANTON; BUSBY, 2003).

De acordo com vários estudos na literatura, o Método de Jacobi, o Método de Gauss-Seidel e o Método de Sobre-Relaxação Sucessiva (ou Método SOR, do inglês *Successive Over-Relaxation Method*) são conhecidos por serem os primeiros métodos iterativos, nos quais, os últimos são variações do primeiro. Ainda, estes são considerados estacionários, pois cada solução aproximada é obtida da anterior sempre pelo mesmo processo, ou seja, a matriz de iteração não varia durante o processo. (ANTON; BUSBY, 2003).

Com base em Saad (2003), tais métodos iterativos demonstram robustez e eficácia para algumas aplicações onde a matriz coeficiente é não singular; entretanto, apresentam a limitação de requerer que a matriz dos coeficientes seja, também, estritamente diagonal dominante ou irredutivelmente diagonal dominante. Isso levou ao surgimento do enfoque para o desenvolvimento de uma nova classe de métodos, conhecida como métodos iterativos de subespaço de Krylov⁴. Anteriormente, estes eram conhecidos como métodos semi-iterativos ou métodos de aceleração polinomial (GUTKNECHT, 2007).

A classe dos métodos de Krylov destaca-se como uma das mais preeminentes no âmbito dos métodos numéricos (DONGARRA e SULLIVAN, 2000). Esses métodos se fundamentam em processos de projeção sobre subespaços de Krylov SAAD (2003). A origem desta modalidade de subespaço remonta ao ano de 1931, quando foi primeiramente apresentada em um artigo⁵ por Aleksei Nikolaevich Krylov⁶. Além disso, é possível categorizar essa classe de métodos com base na forma como geram seus subespaços, os quais

³ Christian Ludwig Gerling (1788-1864), matemático alemão, foi um discípulo famoso de Carl F. Gauss. Conhecido por um considerável trabalho nas áreas de geodésia e astronomia.

⁴ Não se sabe onde o termo métodos de subespaço de Krylov (do inglês, *Krylov subspace methods*) foi usado pela primeira vez. O termo surgiu no final da década de 1970. No entanto, ele ganhou popularidade, possivelmente, com o livro sobre autovalores de Parlett (1998).

⁵ Este artigo pode ser considerado como o precursor dos Métodos de Subespaço de Krylov, no qual o autor delineou um novo procedimento para o cálculo do polinômio característico de uma matriz quadrada arbitrária (KRYLOV, 1931).

⁶ Aleksei Nikolaevich Krylov (1863-1945), de nacionalidade russa, teve uma formação inicial como engenheiro marítimo, com contribuições significativas em campos como flutuação e estabilidade. No entanto, ao longo de sua carreira, revelou-se um matemático polivalente, com notáveis contribuições em diversas áreas do conhecimento, incluindo magnetismo, astronomia e geodésia. Krylov exerceu um papel de destaque como diretor do Instituto de Física-Matemática da Academia de Ciências da União Soviética de 1927 a 1932 e foi honrado com um "prêmio estatal" em 1943 em reconhecimento de suas contribuições teóricas relacionadas a bússolas.

se distribuem entre duas abordagens: a metodologia de ortogonalização de Arnoldi e a metodologia de ortogonalização de Lanczos.

O método de Arnoldi (ARNOLDI, 1951) é aplicável a matrizes não simétricas e não Hermitianas⁷ em geral. Este constrói uma base ortogonalizada para um subespaço de Krylov por meio de projeções ortogonais de vetores (usando um processo de Gram-Schmidt modificado⁸). Além disso, esse processo resulta em uma matriz de Hessenberg superior⁹ (SAAD, 2003).

Por outro lado, o método de Lanczos (LANCZOS, 1952) é adequado para matrizes simétricas ou Hermitianas. Esse processo emprega projeções ortogonais recursivas para construir a base do subespaço de Krylov e resulta em uma matriz tridiagonal simétrica, uma forma especial de matriz que possui zeros fora da diagonal principal e da primeira subdiagonal (SAAD; VORST, 2000). A seguir são abordados os principais métodos de Krylov.

O método dos Gradientes Conjugados (do inglês, *Conjugate Gradient* - CG) (HESTENES e STIEFEL, 1952) foi desenvolvido pouco tempo depois que o método de Lanczos foi publicado. Segundo Golub e Loan (1996), o CG é um caso particular do método de Lanczos e, também, baseia-se no método das direções conjugadas. Além disso, as direções de busca pertencem ao subespaço de Krylov e a cada iteração busca-se encontrar o resíduo ortogonal aos anteriores. Esse método é aplicável apenas aos casos em que a matriz de coeficientes A é Hermitiana, positiva-definida e não singular (BARRET; VORST, 1993).

Em contraste ao método CG, o qual emprega uma sequência ortogonal de resíduos, o método do gradiente biconjugado (do inglês, *Bi-Conjugate Gradient* - BiCG) (LANCZOS, 1952) adota duas sequências de resíduos mutuamente ortogonais¹⁰ e é viável mesmo em sistemas não simétricos. No contexto de sistemas simétricos, o método BiCG produz resultados análogos ao método CG, mas requer o dobro do número de iterações (BARRET, VORST, 1993).

Posteriormente, Paige e Saunders (1975) desenvolveram dois métodos para matrizes simétricas e indefinidas chamados de resíduo mínimo (MINRES, do inglês *Minimum Residual* - MINRES) e LQ simétrico (do inglês, *Symmetric LQ* - SYMMLQ). Ambos os métodos

⁷ Uma matriz Hermitiana é uma matriz quadrada complexa, a qual é igual à sua própria transposta conjugada. Por sua vez, uma matriz anti-Hermitiana é uma matriz quadrada complexa, a qual é igual ao negativo da sua própria transposta conjugada.

⁸ O processo de Gram-Schmidt permite transformar qualquer conjunto de vetores linearmente independentes em um novo conjunto ortogonal que tem a capacidade de gerar o mesmo espaço vetorial.

⁹ Matriz de Hessenberg superior: $a_{ij} = 0$ para cada par i, j tal que $i > j + 1$ (SAAD, 2003).

¹⁰ Essa forma de geração de subespaço é conhecida como Bi-Lanczos.

utilizam o método de Lanczos para gerar seus subespaços, entretanto, diferem quanto ao processo de busca da solução. O primeiro método, utiliza a abordagem de resíduo mínimo, o qual encontra a solução que “minimiza¹¹” a norma Euclidiana do vetor resíduo. Sob outra perspectiva, no método SYMMLQ, a solução é encontrada a partir da condição de Ritz-Galerkin¹². Segundo seus autores, os métodos apresentaram-se superiores em termos de implementação numérica em comparação aos métodos apresentados por Hestenes e Stiefel (1952); Fridman (1963) e Householder (1964).

Seguindo outra abordagem, o método da ortogonalização completa (do inglês, *Full Orthogonalization Method* - FOM) (SAAD, 1981) não se restringe a matrizes simétricas ou Hermitianas. Para alcançar esse objetivo, ele utiliza o método de Arnoldi para construir seu subespaço e a condição de Ritz-Galerkin para encontrar a solução. Não obstante, de acordo com Saad (2003), este método apresenta problemas relacionados ao critério de parada. Pode ocorrer que ele já tenha convergido devido a um valor reduzido de resíduo, mas isso pode passar despercebido, uma vez que o método não calcula o resíduo, resultando assim em iterações desnecessárias.

O método generalizado do resíduo mínimo (do inglês, *Generalized Minimal Residual Method* - GMRES) (SAAD e SCHULTZ, 1986) tem a propriedade de minimizar a cada passo a norma do vetor residual sobre um subespaço de Krylov e, dessa forma, superar o problema do método FOM. Segundo seus autores, este método pode ser considerado uma generalização do método MINRES, que ao invés de utilizar o algoritmo de Lanczos no caso de matrizes simétrica, utiliza o algoritmo de Arnoldi para matrizes não simétricas. O ponto negativo deste método, é o fato do número de operações aritméticas e da memória aumentarem linearmente com o número de iterações (SAAD; VORST, 2000). Apesar desta desvantagem, este método apresenta-se robusto e eficaz, e é considerado como o algoritmo padrão¹³ para sistemas lineares não simétricos por diversos autores (GREENBAUM, 1997; MEURANT, 1999; SAAD, 2003).

Os estudos de Shen *et al.* (2022), Jin *et al.* (2022) e Hansen *et al.* (2022) apresentaram aplicações recentes da utilização do GMRES. Além disso, no trabalho de Zou (2023) pode ser encontrada uma apresentação do estado da arte sobre este método e suas variações, tais como os métodos RGMRES (do inglês, *Restarted GMRES Method*), FGMRES

¹¹ A minimização em questão, na realidade, trata-se de um problema de mínimos quadrados, geralmente de baixa ordem, o que implica que não é computacionalmente custoso (SAAD, 2003).

¹² Esta condição pode ser encontrada, detalhadamente, em (GREENBAUM, 1997).

¹³ Saad e Vorst (2000) refere-se ao GMRES com o termo em inglês “*de facto standard*” dada a relevância do método.

(do inglês, *Flexible GMRES*) e GMRESR (do inglês, *the Recursive Variant of GMRES*). Com a finalidade de evitar padrões irregulares de convergência do método BiCG e um alto custo de memória do método GMRES para um elevado número de iterações o método gradiente bi-conjugado estabilizado (do inglês, *Bi-Conjugate Gradient Stabilized - BICGSTAB*) (VORST, 1992). De acordo com Barret e Vorst (1993), este método possui uma convergência mais estável em relação ao GMRES.

Para uma melhor visualização das características que distinguem os métodos de Krylov, a TABELA 1 classifica esses métodos com base na forma de geração de subespaço, na abordagem de solução adotada e na forma de matriz do sistema que eles podem resolver.

TABELA 1 - Características dos métodos de subespaço de Krylov mais conhecidos.

Métodos	Geração de subespaço	Abordagem de solução	Tipo de matriz
<i>Conjugate Gradients</i> (CG) (LANCZOS, 1952)	Lanczos	Ritz-Galerkin	Simétrica Positiva-Definida
<i>Bi-Conjugate Gradients</i> (BiCG) (LANCZOS, 1952)	Bi-Lanczos	Petrov-Galerkin	Não Simétrica indefinida
<i>Conjugate Residual</i> (CR) (STIEFEL, 1955)	Lanczos	Resíduo Mínimo	Simétrica Positiva-Definida
<i>Minimum Residual</i> (MINRES) (PAIGE e SAUNDERS, 1975)	Lanczos	Resíduo Mínimo	Simétrica Indefinida
<i>Symmetric LQ</i> (SYMMLQ) (PAIGE e SAUNDERS, 1975)	Lanczos	Ritz-Galerkin	Simétrica Indefinida
<i>Full Orthogonalization Method</i> (FOM) (SAAD, 1981)	Arnoldi	Ritz-Galerkin	Não Simétrica Indefinida
<i>Generalized Minimum Residual</i> (GMRES) (SAAD, 1986)	Arnoldi	Resíduo Mínimo	Não Simétrica Indefinida
<i>Conjugate Gradients-Squared</i> (CGS) (SONNEVELD, 1989)	Bi-Lanczos	Petrov-Galerkin	Não Simétrica Indefinida
<i>Biconjugate Gradients Stabilized</i> (BICGSTAB) (VORST, 1992)	Bi-Lanczos	Petrov-Galerkin	Não Simétrica Indefinida

FONTE: Autor (2023).

Na competitividade do mercado é exigido que os cálculos sejam efetuados de forma rápida e precisa com sistemas de equações possuindo ordens cada vez mais elevadas. Assim, a utilização dos métodos de subespaço de Krylov, unicamente, podem não ser suficientes ou possuir um alto custo computacional para sistemas de altas ordens. Por exemplo, como aqueles presentes em aplicações do Método dos Elementos Finitos (GUTKNECHT, 2007) ou em problemas que possuam um sistema linear complexo (CHRISTIANSEN, 2003; DEGHAN; HAJARIAN, 2014; GAMBOLATI; PINI, 1998; DIJK; TOYAMA, 2007). Nesse contexto, algumas técnicas, como o pré-condicionamento, a relaxação, o paralelismo, a deflação (do inglês, *deflation*) e o aumento (do inglês, *augmentation*) têm sido objeto de estudos no âmbito desses processos iterativos (ZOU, 2023). Além de técnicas de aceleração, como o *Multigrid*.

O pré-condicionamento de sistemas de equações lineares é empregado para aprimorar a convergência dos métodos de solução, o que, por sua vez, amplia a aplicabilidade dos métodos iterativos, como destacado em Zou (2023). De acordo com Bai (2015), a ênfase atual na área dos métodos de Krylov recai sobre a análise algébrica de pré-condicionadores. Além disso, Greenbaum (1997) observa que cada tipo específico de problema pode demandar um pré-condicionador próprio para melhorar a convergência em direção à solução, o que corrobora com o ponto de vista apresentado por Bai (2015).

Outra área de desenvolvimento atual são os métodos iterativos de particionamento HSS (do inglês, *HSS splitting methods*), os quais utilizam outro tipo de abordagem para convergir para a solução e, também, podem ser utilizados como métodos para obter uma matriz de pré-condicionamento para os métodos de Krylov. Na sequência desse texto, é exposta uma breve discussão a respeito desses métodos.

Bai, Golub e Ng (2003) propuseram o Método do Particionamento Hermitiano/Anti-Hermitiano (do inglês, *Hermitian/Skew-Hermitian Splitting - HSS*), o qual se baseia no particionamento da matriz característica do sistema, A (complexa e simétrica), na sua parte Hermitiana (H) e na parte anti-Hermitiana (S), da forma

$$A = H + S, \quad (2.1)$$

onde

$$H = \frac{A + A^*}{2}, \quad (2.2)$$

e

$$S = \frac{A - A^*}{2}, \quad (2.3)$$

sendo que A^* representa a matriz complexa conjugada de A . Segundo os autores, este método é baseado no Método da Direção Implicitamente Alternada (do inglês, *Alternating Direction Implicit Method - ADI*) usado na resolução de sistemas de equações diferenciais parciais (PEACEMAN; RACHFORD, JR., 1955). As análises teóricas apresentaram que o método converge, sob algumas condições relacionadas com as características de matrizes dependentes de H e S , para a solução única do sistema contido na equação (1.2).

Ao implementar técnicas de relaxação e de pré-condicionamento no HSS, diversos métodos baseados nesse particionamento foram desenvolvidos (BAI; BENZI; CHEN, 2010; BAI; GOLUB, 2007; BAI; GOLUB; LI, 2007; BAI; GOLUB; PAN, 2004; LI; WU, 2015; LI;

HUANG; LIU, 2007; NOORMOHAMMADI POUR; SADEGHI GOUGHERY, 2015) e, posteriormente, foram classificados como métodos de particionamento.

Alguns métodos recentes dessa linha de pesquisa destacam-se pela convergência acelerada, são eles: o Método do Particionamento em Escala de Dois Passos 1 Assimétrico (do inglês, *Lopsided Two-step Scale-Splitting Method 1* – LTSCSP1) (DEGHAN e SHIRLLORD, (2022)); o Método do Particionamento em Escala de Dois Passos Assimétrico 2 (do inglês, *Lopsided Two-step Scale-Splitting Method 2* – LTSCSP2) (DEGHAN e SHIRLLORD, 2022); o Método do Particionamento em Escala de Dois Passos Modificado (do inglês - *Modified Two-step Scale-Splitting Method* - MTSS) (HUANG, 2021b) e o Método de Particionamento em Blocos Parametrizado (do inglês, *Parameterized Block Splitting Method* - PBS) (HUANG, 2021a). No entanto, esses requerem uma condição específica, a de que algumas matrizes intermediárias do processo iterativo sejam positivo-definidas. Isso restringe o uso desses métodos e exige uma análise prévia das características das matrizes envolvidas.

2.2 CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS COM PARÂMETROS DEPENDENTES DA FREQUÊNCIA

Vibração é qualquer movimento oscilatório de um sistema mecânico em relação à sua posição de referência. Esse fenômeno pode ser observado no cotidiano em diversas maneiras, como nos relógios de pêndulo e nos instrumentos de corda. Em ambos os casos, as vibrações são desejadas, pois trazem vantagens à sociedade (RAO, 2007). No entanto, existem situações, em que os fenômenos oscilatórios são prejudiciais ao sistema, seja por provocar fadiga, a qual pode levar à fratura da estrutura, ou por ruídos excessivos que atrapalhem o desempenho do produto e, assim, sua competitividade no mercado (INMAN, 2014).

Desse modo, a vibração é um objeto de estudo que vem sendo constantemente considerado e aprimorado na elaboração de projetos mecânicos, em especial os que envolvem cargas dinâmicas. Diversos exemplos podem ser destacados, tais como a redução das vibrações geradas por cargas do vento e ondas marítimas em estruturas offshore (KANDASAMY *et al.*, 2016), e o controle de vibrações em torres de transmissão de energia elétrica (ROY; KUNDU, 2021). Xie, Feng e Aly (2020) realizam uma apresentação do estado da arte das técnicas mais recentes de análise de vibrações em turbinas eólicas. Ademais,

metamateriais e estruturas origamis vêm sendo aplicados em diversos sistemas para o controle de vibrações (JI; LUO; YE, 2021).

Dos textos citados, pode-se perceber que o conhecimento está concentrado em como medir, analisar e controlar as vibrações. No que se refere ao controle, existe uma classificação que divide os métodos em quatro grupos: controles passivo, ativo, semiativo e híbrido (RAO, 2007).

Métodos de controle passivo são aqueles em que não é empregada uma fonte externa de energia para o controle (NOCHEBUENA-MORA *et al.*, 2021). Por outro lado, os métodos ativos são aqueles em que é necessária uma fonte externa de energia e, geralmente, é caracterizado por possuir sensores e sistemas integrados à computadores (ABDELJABER; AVCI; INMAN, 2016). Já o controle semiativo é designado para métodos que gastam significativamente menos energia que os ativos e que podem ser abastecidos localmente por uma bateria (SAADABAD; MORADI; VOSSOUGH, 2014). Os métodos híbridos, por sua vez, combinam a robustez do controle passivo com o alto desempenho das classes ativa ou semiativa. Isso resulta em controles com amplas bandas de frequência, e que podem superar os métodos anteriores usados separadamente (GAO *et al.*, 2022).

No controle passivo de vibrações, a utilização de materiais viscoelásticos (MVE's) é notória devido a sua alta capacidade de dissipação de energia vibratória e de armazenamento de energia potencial elástica. Isso está relacionado à presença coexistente dos comportamentos viscoso e elástico no material (LAI, FINDLEY e ONARAN, 1989).

As primeiras tentativas de representar o comportamento dos MVE's foram com os modelos reológicos, os quais combinam elementos de mola com elementos de amortecedor. Os modelos reológicos mais simples são os de Maxwell¹⁴ e de Kelvin¹⁵-Voigt¹⁶. O primeiro combina uma mola ideal de Hooke e um elemento de amortecimento viscoso em série. Por outra perspectiva, o modelo de Kelvin-Voigt combina esses elementos em paralelo (BRINSON; BRINSON, 2008). Contudo, de acordo com Findley, Lai e Onaran (1989), essas representações não são precisas e possuem limitações. O modelo reológico de Zener, baseado em cálculo fracionário, em contrapartida, propicia uma boa representação do comportamento

¹⁴ James Clerk Maxwell (1831-1879), foi matemático e físico escocês, o qual ficou conhecido por contribuir de forma significativa com a teoria moderna do eletromagnetismo.

¹⁵ William Thomson (1824-1907), intitulado Lorde Kelvin, foi matemático, físico e engenheiro britânico, que ficou famoso por desenvolver a escala de temperatura absoluta. Também contribuiu com a segunda lei da termodinâmica.

¹⁶ Woldemar Voigt (1850-1919), foi um físico alemão que produziu diversos estudos na área da termodinâmica e eletro-óptica.

desses materiais para os testes de fluência¹⁷ e relaxação¹⁸ em uma ampla faixa de tempo e temperatura (MAINARDI, 2022).

Diversos estudos, relacionados a vibrações de estruturas compostas por material viscoelástico, foram realizados com a finalidade de prever a resposta dinâmica desse sistema que não é linear (REID, 1956; SCANLAN; MENDELSON, 1963; SKUDRZYK; LINDSAY, 1969; SOROKA, 1949). De acordo com Crandall (1970), nenhum desses estudos reproduziu de forma satisfatória o amortecimento produzido por esses materiais, pois não consideravam a dependência da frequência em suas formulações. Os MVE's têm rigidez dinâmica dependente da frequência e da temperatura. Isso faz com que as equações dinâmicas de sistemas que possuem esse tipo de material sejam não lineares (CRANDALL, 1970).

Segundo Floody (2010), um dos desafios neste tipo de problema é a obtenção de funções de resposta em frequência (FRF's). Para tanto, na tentativa de resolver problemas desse tipo, já foram utilizados o método da solução direta, o método da superposição modal e métodos baseados na resolução do problema de autovalores e autovetores, tais como o método de Lanczos (LANCZOS, 1950) e o método da iteração de subespaço (BATHE, 1996). No entanto, o método da superposição modal não leva em conta o fato da rigidez e do amortecimento material serem dependentes da frequência e, dessa forma, falha em reproduzir sistemas reais. Já os métodos de solução direta, para satisfazer as condições ditas por Crandall (1970), necessitam do cálculo exato, por meio da resolução de um sistema linear complexo, para cada valor de frequência discreta do intervalo de interesse. Consequentemente, isso pode ter um custo computacional muito elevado, em especial em problemas de otimização onde a obtenção de FRF's pode ocorrer dezenas de milhares de vezes.

Floody *et al.* (2007), com o objetivo de reduzir os custos computacionais envolvidos nos cálculos das FRF's de estruturas compostas por metal/MVE, apresentaram uma metodologia baseada no teorema da expansão truncada. Nesse método, em forma sucinta, a dimensão do problema principal é reduzida por meio de transformações adequadas baseadas em álgebra linear. Os autores obtiveram bons resultados e perceberam que a qualidade da aproximação depende da dimensão do subespaço escolhido e de quão significativa é a variação do módulo de cisalhamento complexo com a frequência.

¹⁷ O ensaio de fluência consiste em submeter um corpo de prova a uma carga ou tensão constante enquanto se mantém a temperatura constante. A deformação é medida e representada em função do tempo decorrido. Alguns testes chegam a 1000 horas (CALLISTER JR, 2002).

¹⁸ O ensaio de relaxação mostra a queda de tensão do corpo de prova ao longo do tempo provocada pela aplicação de uma deformação constante.

Bortolotto *et al.* (2013) modificaram a metodologia desenvolvida por Floody *et al.* (2007) para o controle de vibrações de estruturas metálicas parcialmente compostas com lâminas viscoelásticas restringidas e verificaram a dependência da qualidade da aproximação com a frequência de referência escolhida inicialmente no problema de autovalores associado.

Kanke (2017), no uso de otimização topológica de camadas viscoelásticas restritas aplicada ao controle de vibrações em placas semi-espessas, utilizou a metodologia proposta por Floody *et al.* (2007). Apesar dos promissores resultados obtidos quanto à otimização, o custo computacional ainda se mostrou elevado, devido à alta quantidade de sistemas lineares complexos que necessitam ser resolvidos. Dessa forma, uma linha de estudo para reduzir o custo computacional de estruturas dinâmicas dependentes da frequência, seria a aplicação de métodos iterativos de subespaço de Krylov, como aqueles expostos na Seção 2.1, na resolução dos sistemas de equações lineares complexos, que constituem o comportamento dinâmico dessas estruturas.

2.3 PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO

A partir da revisão de literatura (Capítulo 2) realizada, é possível inferir que o custo computacional dos métodos atuais para o cálculo das FRF's em sistemas compostos por MVE e com muitos graus de liberdade, pode ser muito elevado. Isso ocorre, devido à necessidade de utilizar um processo incremental na frequência, fazendo com que, para cada valor discreto de frequência do intervalo de observação, a solução de um sistema de equações lineares complexo deva ser executada.

Outro ponto analisado é que os métodos diretos e os métodos baseados na resolução do problema de autovetores/autovalores possuem um número elevado de operações aritméticas. Isso, também, contribui com o longo tempo de execução dos códigos para análise das FRF's de um sistema composto por MVE. Uma alternativa para esses métodos é a utilização de métodos iterativos na resolução de sistemas lineares complexos presentes no passo incremental, com a finalidade de aproximar a solução, realizando menos operações e, assim, reduzir o custo computacional.

Desta forma, este trabalho busca testar dois métodos iterativos na resolução de sistemas lineares complexos, os quais estão presentes nos cálculos das FRF's com parâmetros dependentes da frequência. Os métodos iterativos foram escolhidos por serem os mais notórios dentro dos métodos de subespaço de Krylov para sistemas com matrizes coeficiente complexas, simétricas e indefinidas (SYMMLQ e MINRES). Assim, é apresentada uma

análise comparativa quantitativa (em termos de tempo de processamento) e gráficas de métodos aplicáveis à solução harmônica de problemas de vibrações envolvendo materiais cujas propriedades mecânicas são dependentes da frequência. A importância deste estudo está em verificar a possibilidade de utilizar os métodos baseados em subespaço de Krylov dentro da metodologia incremental na frequência, bem como avaliar se a introdução nessa linha de pesquisa deve ser realizada.

3 REVISÃO CONCEITUAL

Este capítulo introduz conceitos essenciais para a compreensão do estudo em questão. Nele, são abordadas definições relativas aos métodos diretos e iterativos de subespaço de Krylov, utilizados na resolução de sistemas de equações lineares complexas. Além disso, são discutidos conceitos fundamentais relacionados à materiais viscoelásticos, bem como às metodologias empregadas no estudo de vibrações para calcular as funções de resposta em frequência (FRF's), especialmente em estruturas cuja matriz de rigidez varia com a frequência.

3.1 MÉTODOS DIRETOS

Nesta seção, são descritos alguns dos métodos diretos para a solução de sistemas lineares complexos encontrados na literatura.

Um sistema de equações linear complexo, em geral, é apresentado na forma

$$Ax = \mathbf{b}, \quad (3.1)$$

onde a matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, é não singular e os vetores \mathbf{b} e $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$. Este sistema, também, pode ser escrito

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (3.2)$$

Considerando os métodos de solução, podem ser citados como os mais conhecidos a regra de Cramer, a eliminação de Gauss, a decomposição LU e a decomposição de Cholesky (PLATO, 2003).

A regra de Cramer soluciona um sistema de equações lineares por meio do cálculo do determinante de $n + 1$ matrizes $n \times n$. Assim para um dado sistema de equações, como o exposto na equação (3.2), o qual possui n equações e n incógnitas, o sistema possui uma solução única se, e somente se, $\det(A) \neq 0$. Nesse caso, a solução é dada por

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \dots, x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}, \quad (3.3)$$

onde A_i é a matriz que resulta da substituição da i -ésima coluna de A pelo vetor \mathbf{b} (ANTON; BUSBY, 2006).

Diferente do método anterior, a técnica eliminação Gaussiana se baseia em operações elementares de matrizes e busca encontrar um sistema triangular equivalente e, em seguida, resolvê-lo por retrossubstituições a partir da última equação. As operações elementares, realizadas sobre a matriz aumentada do sistema linear dado em (3.1) são:

- Trocar de posição duas linhas ou colunas da matriz;
- multiplicar uma linha por uma constante não nula;
- adicionar uma linha de uma equação a outra linha.

Assim, ao final do procedimento, o sistema deve ter a seguinte configuração:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \vdots \\ a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{cases}, \quad (3.4)$$

onde o super índice k indica os valores atualizados em $a_{ij}^{(k)}$ e $b_i^{(k)}$ para a k -ésima linha. Assim, a solução \mathbf{x} é obtida realizando operações de retro-substituição na equação (3.4).

A regra de Cramer e o método da eliminação Gaussiana, brevemente apresentados, são mais eficazes em problemas com baixa ordem de grandeza (ANTON; BUSBY, 2003). Os softwares de manipulação algébrica mais modernos utilizam outros métodos. Por exemplo, o Matlab utiliza principalmente a decomposição LU e a decomposição de Cholesky para solução de sistemas lineares que envolvem números complexos.

3.1.1 Decomposição LU

O processo de fatoração LU (do inglês, *Lower – Upper factorization*) decompõe a matriz dos coeficientes, A , do sistema e de ordem $n \times n$, na forma

$$A = LU, \quad (3.5)$$

onde L é uma matriz triangular inferior e U é uma matriz triangular superior. Nesse método, inicialmente, substitui-se a equação (3.5) na equação (3.1), resultando em

$$LU\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (3.6)$$

Na sequência, é definida uma nova variável \mathbf{y} , como

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y}, \quad (3.7)$$

Assim, reescreve-se a equação (3.6)

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b}. \quad (3.8)$$

Posteriormente, calcula-se \mathbf{y} por substituição direta e, em seguida, resolve-se o sistema (3.7) por retro-substituição. Com isso, é obtido o vetor solução \mathbf{x} .

Segundo Anton e Busby (2006), a condição obrigatória, para que uma matriz quadrada A qualquer tenha uma decomposição LU, é que A possa ser reduzida à sua forma escalonada por linhas sem permuta de linhas. Os casos particulares mais conhecidos são a decomposição de Doolittle (na qual os termos da diagonal principal de L são iguais a um), a decomposição de Crout (onde os termos da diagonal principal de U têm o valores iguais a um) e a decomposição de Cholesky (onde a matriz U é igual à matriz transposta de L) (FRIEDMAN; KANDEL, 1994).

Os métodos diretos, apesar de resolverem todos os tipos de sistemas nos quais existam solução, possuem algumas desvantagens quando a ordem de grandeza do sistema é elevada. Dentre os problemas encontrados, estão as divisões por zero, os erros de arredondamento e o elevado tempo de processamento (DECHAUMPHAI; WANSOPHARK, 2020). Para tentar reduzir os erros de aproximação, técnicas de estabilização tais como pivoteamento e permutação foram introduzidas nos algoritmos modernos baseados em decomposição LU (MEURANT, 1999).

3.2 MÉTODOS ITERATIVOS

Nesta seção, é apresentada uma visão geral sobre os métodos iterativos de subespaço de Krylov. Posteriormente, são discutidos os métodos iterativos que foram testados numericamente no presente estudo, bem como seus pseudo-algoritmos.

Os métodos iterativos consistem na construção de uma sequência de vetores $\{\mathbf{x}_k\}$, em que $k = 0, 1, \dots$, os quais, sob condições, convergem em direção à solução exata a partir de um vetor inicial \mathbf{x}_0 e uma tolerância previamente definida. Nesse caso, cada etapa que gera um dos vetores \mathbf{x}_k dessa sequência corresponde a uma iteração. Desse modo, a partir de \mathbf{x}_0 , o método prossegue com iterações sucessivas, refinando a estimativa da solução até que o critério de convergência seja atingido (MEURANT, 1999).

Em geral, a estrutura de um método iterativo envolve a definição de uma matriz B e um vetor \mathbf{c} que resolvem o sistema de equações (3.1) na forma de um ponto fixo, dada por (ANTON; BUSBY, 2003)

$$\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{c}, \quad (3.9)$$

onde B é conhecida como matriz de iteração. Com isso, a relação de recorrência utilizada para a resolução do sistema de equações (3.1) é (ANTON; BUSBY, 2003)

$$\mathbf{x}_{k+1} = B\mathbf{x}_k + \mathbf{c}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

Os métodos em que a matriz de iteração permanece constante para todas as iterações são classificados como estacionários, sendo que os principais exemplos desses métodos são o Método de Jacobi, o Método de Gauss-Seidel e o Método de Sobre-Relaxação Sucessiva. A diferença entre os métodos pode ser observada pelas diferenças entre as matrizes B e entre os vetores \mathbf{c} .

A outra classe de métodos, conhecida como métodos não-estacionários, tem a sua matriz B não constante, portanto, não possui uma fórmula de recorrência como exposta na equação (3.10). Dentro desses métodos, estão compreendidos os métodos de Krylov. A seguir são mostradas algumas definições importantes para a compreensão desses métodos.

Definição 3.1. (GREEMBAUM, 1997) *Sejam $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ e $\mathbf{b} \neq \{\mathbf{0}\}$. Defina-se um espaço de Krylov associado à A e \mathbf{b} , como*

$$K(A, \mathbf{b}) = \text{span}\{\mathbf{b}, A\mathbf{b}, A^2\mathbf{b}, \dots\}. \quad (3.11)$$

Definição 3.2. (GREEMBAUM, 1997) *Sejam $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ e $\mathbf{b} \neq \{\mathbf{0}\}$. Defina-se um subespaço de Krylov de k -ésima ordem, associado à A e \mathbf{b} , por*

$$K_k(A, \mathbf{b}) = \text{span}\{\mathbf{b}, A\mathbf{b}, A^2\mathbf{b}, \dots, A^{k-1}\mathbf{b}\}. \quad (3.12)$$

Definição 3.3. (SAAD, 2003) *O polinômio mínimo de um vetor \mathbf{b} com relação a matriz A , denotado por $p_m(z)$, é o único polinômio mônico de menor grau tal que $p_m(A)\mathbf{b} = \mathbf{0}$.*

Definição 3.4. (MEYER, 2001) *O polinômio mínimo de uma matriz A , representado por $m(z)$, é definido como o único polinômio mônico de menor grau, de forma que $m(A) = \mathbf{0}$.*

Para uma matriz A , não singular, o cálculo do polinômio mínimo dessa matriz é dado por

$$m(z) = \sum_{i=0}^l \alpha_i z^i. \quad (3.13)$$

onde l é o grau mínimo desse polinômio e os coeficientes α_i são expressos em termos dos elementos da matriz A . Assim, por definição, $m(A) = 0$, e como A é não singular, A^{-1} existe, então

$$A^{-1}m(A) = A^{-1}(\alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + \alpha_l A^l) = 0. \quad (3.14)$$

Dessa forma, obtém-se a relação

$$\alpha_0 A^{-1} = - \sum_{i=1}^l \alpha_i A^{i-1} = 0. \quad (3.15)$$

De algumas propriedades de $m(A)$, que podem ser encontradas em Meyer (2001), α_0 é diferente de zero. Com isso,

$$A^{-1} = - \frac{1}{\alpha_0} \sum_{i=1}^l \alpha_i A^{i-1}, \quad (3.16)$$

a qual é uma forma de representar a matriz inversa de A . Desse modo, o vetor solução \mathbf{x} do sistema de equações (3.1), pode ser encontrado da seguinte forma

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = - \frac{1}{\alpha_0} \sum_{i=1}^l \alpha_i A^{i-1}\mathbf{b} = - \frac{1}{\alpha_0} (\alpha_1 \mathbf{b} + \alpha_2 A\mathbf{b} + \dots + \alpha_l A^{l-1}\mathbf{b}). \quad (3.17)$$

De acordo com Golub e Loan (1996), isso significa que $\mathbf{x} \in K_k(A, \mathbf{b})$, uma vez que esse vetor pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores que geram tal espaço. Dessa forma, é possível descrever a solução do sistema de equações $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, como uma combinação linear dos vetores do espaço de Krylov associado à A e \mathbf{b} . Segundo Björck e Paige (1992), a vantagem de buscar-se um vetor em \mathbf{x} no espaço de Krylov, é que este espaço pode ser muito menor que o espaço de busca completo. Assim, deve-se encontrar uma base para este espaço.

Nesse contexto, ao seguir a definição de subespaços de Krylov, $\mathbf{v}_1 = A\mathbf{b}$, $\mathbf{v}_2 = A^2\mathbf{b}$ e $\mathbf{v}_k = A^k\mathbf{b}$, a base gerada fica $K_k(A, \mathbf{b}) = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots\}$. Essa sequência é convergente para os autovetores associados ao maior autovalor da matriz e, pode estar mal-condicionada quando utilizada numa máquina com precisão finita. O método apresentado na sequência ortogonaliza os vetores da base com a finalidade de melhorar a estabilidade (GOLUB; LOAN, 1996).

3.2.1 Método de Ortogonalização de Lanczos

Ao aplicar o método de ortogonalização de Arnoldi sob a condição de que a matriz de coeficientes A seja simétrica, alguns autores (SAAD, 2003; MEURANT, 1999) destacam que isso resulta em um caso particular simplificado, conhecido como método de Lanczos. Nesse método, a matriz A passa por uma transformação, tornando-se uma matriz tridiagonal, \underline{T}_k , que inclui uma linha adicional na parte inferior. Portanto, esta matriz se configura como uma matriz de ordem $k + 1 \times k$, apresentando o seguinte formato (CHOI, 2006)

$$\underline{T}_k = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \beta_k & \\ & & & \beta_k & \alpha_k & \\ & & & & & \beta_{k+1} \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Definindo, $V_k = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_k]$, como uma matriz em que as colunas são vetores ortonormais entre si, onde o índice $k = 1, 2, \dots, l$, representa a k -ésima ordem do subespaço de Krylov e l é o grau mínimo do polinômio minimal do vetor \mathbf{b} associado à matriz A . Em suma, o método realiza, em forma matricial, o processo iterativo, dado por (CHOI, 2006)

$$AV_k = V_{k+1}\underline{T}_k. \quad (3.19)$$

De forma prática, o método de Lanczos termina, quando este encontra o valor zero para o escalar β_k (PAIGE; SAUNDERS, 1975). O pseudo-algoritmo 1 mostra, de forma genérica, como esse método é de fato implementado.

Pseudo-algoritmo 1 – Método de Lanczos

1. *Define* A e \mathbf{b}
2. *Define* $\beta_0 = 0$; $\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|_2}$; $\mathbf{v}_0 = \{0\}$; $k = 1$;
3. *While* $\beta_k \neq 0$; *Do*:
4. $\mathbf{v}_{k+1} = A\mathbf{v}_k$;
5. $\alpha_k = \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1} \rangle$;
6. $\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k - \alpha_k \mathbf{v}_k - \beta_{k-1} \mathbf{v}_{k-1}$;
7. $\beta_k = \|\mathbf{v}_{k+1}\|_2$;
8. $k = k + 1$;
9. *If* $\beta_k = 0$ *End While*

10. $\mathbf{v}_{k+1} = \frac{\mathbf{v}_{k+1}}{\beta_k};$
11. *End For;*
12. *End*

3.2.2 Métodos iterativos de solução de sistemas lineares baseados no método de Lanczos

Nesta Seção, são apresentados os métodos iterativos do subespaço de Krylov que utilizam o método de Lanczos para gerar o seu respectivo subespaço. Aqui, esses métodos são expostos, de forma conceitual. Para uma análise teórica das propriedades e da convergência, sugere-se uma leitura mais detalhada na literatura (PAIGE; SAUNDERS, 1975; SAUNDERS, 1995; GREENBAUM, 1997; SAAD, 2003).

Partindo de um vetor inicial arbitrário \mathbf{x}_0 , um método iterativo de subespaço de Krylov é definido como um método em que o subespaço K_k é gerado na forma

$$K_k(A, \mathbf{r}_0) = \text{span}\{\mathbf{r}_0, A\mathbf{r}_0, A^2\mathbf{r}_0, \dots, A^{k-1}\mathbf{r}_0\}, \quad (3.20)$$

onde $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$ (SAAD, 2003). Todos os métodos de Krylov aproximam a solução, conforme a equação

$$\mathbf{x}_k = V_k \mathbf{y}_k, \quad (3.21)$$

onde $V_k = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k]$ é obtido no processo de Lanczos durante a k -ésima iteração. Aqui, os vetores \mathbf{v}_k são obtidos por $\mathbf{v}_k = A^{k-1}\mathbf{r}_0$ e são linearmente independentes entre si. O vetor \mathbf{y}_k é determinado de modo a alcançar valores estacionários para a função

$$f_k(\mathbf{y}) = (AV_k \mathbf{y} - \mathbf{b})^T B (AV_k \mathbf{y} - \mathbf{b}), \quad (3.22)$$

onde B é uma matriz simétrica. A função possui valores estacionários para a condição

$$V_k^T A B A V_k \mathbf{y}_k = V_k^T A B \mathbf{b}. \quad (3.23)$$

De acordo com Paige e Saunders (1975), a equação (3.22) pode ser considerada uma ferramenta teórica, e a escolha de diferentes matrizes B leva ao desenvolvimento de diferentes métodos.

No método simétrico LQ (PAIGE; SAUNDERS, 1975), aqui denominado SYMMLQ, é considerado $B = A^{-1}$. Portanto, a equação (3.23) torna-se

$$V_k^T A V_k \mathbf{y}_k = V_k^T \mathbf{b}. \quad (3.24)$$

A partir de algumas propriedades da matriz que podem ser observadas em Paige e Saunders (1975), tem-se

$$V_k^T A V_k = T_k, \quad (3.25)$$

e

$$V_k^T \mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{e}_1. \quad (3.26)$$

sendo que T_k e β_1 são obtidos durante as iterações de Lanczos. Substituindo as equações (3.25) e (3.26) na equação (3.24), obtém-se

$$T_k \mathbf{y}_k = \beta_1 \mathbf{e}_1. \quad (3.27)$$

Entretanto, \mathbf{y}_k é determinado implicitamente por meio de uma fatoração LQ na matriz T_k , dada por

$$T_k = L_k Q_k, \quad (3.28)$$

onde L_k é uma matriz triangular inferior e Q_k é uma matriz ortogonal¹⁹.

Definindo

$$W_k = V_k Q_k^T, \quad (3.29)$$

e

$$\mathbf{z}_k = Q_k \mathbf{y}_k, \quad (3.30)$$

e substituindo na equação (3.21) e equação (3.27), é possível chegar em

$$L_k \mathbf{z}_k = \beta_1 \mathbf{e}_1, \quad (3.31)$$

e

$$\mathbf{x}_k = W_k \mathbf{z}_k. \quad (3.32)$$

Com isso, obtém-se, e, conseqüentemente, o vetor solução \mathbf{x}_k .

Por outra perspectiva, o método do resíduo mínimo (PAIGE; SAUNDERS, 1975), aqui denominado como MINRES, considera a matriz B como sendo igual à matriz identidade I e, ao aplicar a equação (3.23), resulta em

$$V_k^T A^2 V_k \mathbf{y}_k = V_k^T A \mathbf{b}. \quad (3.33)$$

¹⁹ Uma matriz ortogonal possui a propriedade $Q_k^T Q_k = I$

De algumas propriedades (PAIGE; SAUNDERS, 1975), é observado que

$$V_k^T A^2 V_k = T_k^2 + \beta_{k+1}^2 \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T, \quad (3.34)$$

e

$$V_k^T A \mathbf{b} = \beta_1 T_k \mathbf{e}_1. \quad (3.35)$$

Substituindo as equações (3.34) e (3.35) na equação (3.33), chega-se em

$$(T_k^2 + \beta_{k+1}^2 \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T) \mathbf{y}_k = \beta_1 T_k \mathbf{e}_1. \quad (3.36)$$

Realizando algumas manipulações da álgebra linear, apresentadas em Paige e Saunders (1975) e, considerando a equação (3.36), é equivalente a utilizar a solução do método dos mínimos quadrados do vetor \mathbf{y}_k , na forma

$$\mathbf{y}_k = \operatorname{argmin} \|\beta_1 \mathbf{e}_1 - T_k \mathbf{y}\|_2, \quad (3.37)$$

onde, conseqüentemente, é minimizada a norma do vetor resíduo, $\|\mathbf{r}_k\|$. Desse modo, encontrando o vetor \mathbf{y}_k , pode se encontrar a solução aproximada do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, substituindo na equação (3.21). Neste texto, não é apresentada uma abordagem numérica para os métodos, para este fim, recomendam-se os algoritmos apresentados por Choi (2006).

3.2.3 Pré-condicionamento

Nesta subseção é apresentada a técnica de pré-condicionamento. Esta técnica tem como finalidade principal melhorar o comportamento de convergência dos métodos iterativos (ZOW, 2023). Conforme Saad e Vorst (2000), os pré-condicionadores são um dos maiores objetos de estudo dentro dos métodos de Krylov pois, para cada área de aplicação, um tipo de pré-condicionador é recomendado.

A técnica de pré-condicionamento consiste em alterar o sistema de equações lineares original $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por um novo sistema que apresente melhor convergência. Esse processo deve ter baixo custo computacional em relação ao procedimento iterativo total (GOLUB; LOAN, 1996). O pré-condicionamento pode ser dado de três formas:

- Pelo lado esquerdo: $D^{-1}A\mathbf{x} = D^{-1}\mathbf{b}$;
- Pelo lado direito: $D^{-1}A\mathbf{y} = \mathbf{b} \therefore \mathbf{x} = D^{-1}\mathbf{y}$;
- Por ambos os lados: $D_2^{-1}AD_1^{-1} = D_2^{-1}\mathbf{b} \therefore \mathbf{x} = D_1^{-1}\mathbf{y}$.

Assim com diferentes escolhas de D , D_1 e D_2 , novos sistemas de matrizes de pré-condicionamento são gerados.

Neste estudo, será utilizada a fatoração incompleta LU (do inglês, *Incomplete LU factorization* – ILU), a qual consiste em decompor a matriz A em uma matriz triangular superior \hat{U} e numa matriz triangular inferior \hat{L} que resulte em $D = \hat{L}\hat{U} \approx A$. Não obstante, a fatoração é incompleta, pois alguns elementos não-nulos são truncados para zero. Isso é realizado para sistemas de ordem elevada e esparsos, tais como os produzidos em discretizações de sistemas de equações diferenciais parciais, tendo como finalidade de tornar as matrizes \hat{L} e \hat{U} mais esparsas. Para uma visão detalhada do método, o leitor pode consultar a literatura (GREENBAUM, 1997).

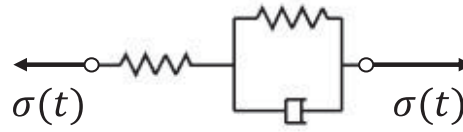
3.3 MATERIAIS VISCOELÁSTICOS

Nesta seção, é apresentado o comportamento mecânico constitutivo do material viscoelástico, bem como os modelos teóricos que procuram descrevê-lo.

Em um material com comportamento puramente elástico, toda a energia armazenada durante a aplicação de um carregamento é recuperada quando ocorre a remoção da carga. Em contraste, para um material puramente viscoso, a energia não é totalmente devolvida quando a carga é removida. Parte da energia de vibração é transformada em energia na forma de calor à medida em que ocorre o amortecimento. Dessa forma, nos materiais viscoelásticos (MVE's), parte da energia é recuperada após a remoção da carga, e a energia restante é dissipada na forma de calor ao longo do material (FLOODY et al. 2007).

O comportamento constitutivo dos MVE's pode ser representado por meio de modelos teóricos, os quais utilizam arranjos de elementos de mola (comportamento elástico) com elementos de amortecedor (comportamento viscoso). O modelo de Zener apresenta uma boa aproximação para os testes de fluência e relaxação. Nesse modelo, um elemento de mola está conectado em paralelo com um elemento de amortecedor, e ambos estão conectados em série com mais um elemento de mola (MAINARDI, 2022). A FIGURA 1 apresenta o modelo mecânico do modelo reológico de Zener.

FIGURA 1 - Modelo reológico de Zener.



FONTE: Autor (2023).

Nos modelos conceituais clássicos, utilizados para prever o comportamento dos MVE's, a relação entre tensão e deformação recai em uma equação diferencial de ordem inteira com coeficientes constantes e positivos, na forma (MAINARDI, 2022)

$$\left[1 + \sum_{j=1}^r a_j \frac{d^j}{dt^j} \right] \sigma(t) = \left[m + \sum_{j=1}^s b_j \frac{d^j}{dt^j} \right] \varepsilon(t), \quad (3.38)$$

onde as constantes $a_j (j = 1, \dots, r)$, $b_j (j = 1, \dots, s)$ e m dependem do material, $\sigma(t)$ e $\varepsilon(t)$ são a tensão e deformação do material, respectivamente, em função do tempo. As variáveis r e s dependem do modelo reológico e assumem valores inteiros, os quais podem ser $r = s$ ou $r = s + 1$ (MAINARDI, 2022; PRITZ, 1996).

Conforme Pritz (1996), a equação (3.38) necessita de uma grande quantidade de termos no somatório para representar, de forma precisa, o comportamento dos MVE's. Uma opção para isso, é a utilização de derivadas fracionárias²⁰. Isso permite a utilização de menos termos no somatório da equação (3.38). A generalização da equação (3.38), utilizando o conceito de derivadas fracionárias, é dada por

$$\left[1 + \sum_{j=1}^r a_j \frac{d^{\xi_j}}{dt^{\xi_j}} \right] \sigma(t) = \left[m + \sum_{j=1}^s b_j \frac{d^{\xi_j}}{dt^{\xi_j}} \right] \varepsilon(t), \quad (3.39)$$

sendo que a variável real ($\xi_j > 0$) é dependente do material.

Para o modelo mecânico de Zener fracionário ($r = s = 1$) a equação (3.39) recai na equação diferencial de ordem fracionária

$$\left[1 + a \frac{d^{\xi}}{dt^{\xi}} \right] \sigma(t) = \left[m + b \frac{d^{\xi}}{dt^{\xi}} \right] \varepsilon(t), \quad (3.40)$$

²⁰ Uma visão histórica do uso de cálculo fracionário na mecânica dos sólidos pode ser encontrada nos estudos de Rossikhin (2010) e Mainardi (2022).

onde os parâmetros a , b , ξ e m são constantes positivas e dependentes do material. Portanto, são necessários apenas quatro parâmetros, obtidos experimentalmente, para modelar com boa precisão o comportamento dinâmico de um MVE (BAGLEY; CALICO, 1989; BAGLEY. L.; TORVIK, 1986; PRITZ, 1996; ROGERS, 1983).

A equação (3.40) pode ser reescrita no domínio da frequência pela aplicação da transformada de Fourier, conforme

$$[1 + a(i\Omega)^\xi]\sigma(\Omega) = [m + b(i\Omega)^\xi]\varepsilon(\Omega). \quad (3.41)$$

onde i representa o número imaginário. Dividindo $\sigma(\Omega)$ por $\varepsilon(\Omega)$, é possível definir o módulo de elasticidade complexo do MVE, $E_c(\Omega)$, como

$$E_c(\Omega) = \frac{m + b(i\Omega)^\xi}{1 + a(i\Omega)^\xi}, \quad (3.42)$$

onde a variável a está relacionada ao tempo de relaxação do material. Definindo $m = E_0$ como sendo o módulo de elasticidade dinâmico, para uma frequência muito próxima a zero, e $b = aE_\infty$, onde E_∞ é o módulo de elasticidade limite quando a frequência tende ao infinito, a equação (3.42) pode ser reescrita como

$$E_c(\Omega) = \frac{E_0 + E_\infty a(i\Omega)^\xi}{1 + a(i\Omega)^\xi}. \quad (3.43)$$

É importante ressaltar que as propriedades dos MVE's, também, são dependentes da temperatura. De acordo com Gibson (2012), para evitar que sejam realizados muitos testes, são utilizadas equações analíticas que modelam um comportamento de deslocamento das curvas características do material ao longo do eixo da frequência, considerando diferentes temperaturas. Isso permite que as propriedades viscoelásticas de MVE's termorreologicamente simples, diferentes temperaturas, possam ser relacionadas entre si por alterações nos valores de frequência. Isso é expresso por meio de um coeficiente, conhecido como fator de translação α_T , dado por

$$\Omega_r = \alpha_T \Omega, \quad (3.44)$$

onde Ω_r é denominada frequência reduzida.

Nesse contexto, o modelo de Willian-Landel-Ferry (WLF) foi amplamente utilizado em diversos estudos (CEBON; CHEUNG, 2015; RATNA, 2012; TCHARKHTCHI *et al.*, 2015). Segundo Ferry (1980), esse modelo é baseado no método de redução de variáveis

(TOBOLSKY, 1956), e o fator de translação temperatura-frequência pode ser descrito pela equação

$$\log_{10} \alpha_T = \frac{-\theta_1(T - T_0)}{(\theta_2 + T - T_0)}, \quad (3.45)$$

onde θ_1 e θ_2 são constantes características do material e obtidas de forma experimental. T é a temperatura de trabalho do MVE e T_0 é a temperatura de referência.

Dessa forma, a frequência reduzida, Ω_r , é obtida por meio da equação (3.44) e substituindo na equação (3.43), resulta-se na seguinte expressão para o módulo de elasticidade complexo do MVE:

$$E_c(\Omega_r) = \frac{E_0 + E_\infty a(i\Omega_r)^\xi}{1 + a(i\Omega_r)^\xi}. \quad (3.46)$$

3.4 FUNÇÃO RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DE UM SISTEMA ESTRUTURAL DINÂMICO COMPOSTO POR MVE

Segundo Petyt (2010), a equação do movimento de um sistema dinâmico é dada, em forma matricial, por

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + C\dot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (3.47)$$

onde $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{f}(t)$ representam, respectivamente, o vetor resposta e o vetor excitação. Estes vetores estão no domínio do tempo e possuem ordem $n \times 1$, onde n é o número total de graus de liberdade do sistema. As matrizes M , C e K , são de dimensão $n \times n$ e são, respectivamente, a matriz de massa total, a matriz de amortecimento viscoso e a matriz de rigidez. No caso de materiais compostos contendo camadas de MVE e material metálico, o controle de vibrações ocorre pela dissipação de energia na forma de calor via MVE (CRANDALL, 1970).

Neste trabalho, a matriz C é obtida considerando um amortecimento proporcional do sistema primário, obtido da forma (PETYT, 2010)

$$C = d_1 M_p + d_2 K_e, \quad (3.48)$$

sendo que M_p é a matriz de massa do sistema primário (sem a inserção do material viscoelástico), K_e denota unicamente a parcela da matriz de rigidez do material elástico e os

coeficientes d_1 e d_2 são determinados por meio das frequências naturais (w_n) e razão de amortecimento modal (γ_n) dos dois primeiros modos de vibrar da estrutura primaria, por

$$d_1 = \frac{2w_1w_2(w_2\gamma_1 - w_1\gamma_2)}{(w_2^2 - w_1^2)}, \quad (3.49)$$

e

$$d_2 = \frac{2(w_2\gamma_2 - w_1\gamma_1)}{(w_2^2 - w_1^2)}. \quad (3.50)$$

Um aspecto importante a ser considerado é que a matriz de rigidez das estruturas compostas pela combinação de MVE's e materiais metálicos são caracterizadas por serem dependentes da frequência, Ω , e da temperatura de operação, T (CRANDALL, 1970). Assim, para esse tipo de estrutura, a equação (3.47) deve ser escrita na forma

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + C\dot{\mathbf{x}}(t) + K(\Omega, T)\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t). \quad (3.51)$$

Segundo Crandall (1970), a equação (3.51) pode ser chamada pelo termo em inglês “*non-equation*”. Essa equação pode ser utilizada apenas como uma ferramenta para análise de um somatório de forças, pois essa apresenta uma inconsistência matemática. O problema é que ela está no domínio do tempo, porém possui um termo dependente da frequência. Na essência, a equação é válida se é considerado que a força de excitação $\mathbf{f}(t)$ é do tipo harmônica com frequência Ω . Ou seja, na equação (3.51), Ω representa somente um parâmetro associado à frequência de excitação.

Para evitar problemas de interpretação e contemplar casos em que a excitação possua múltiplas frequências, é necessário escrever a equação (3.51) no domínio da frequência. Desse modo, aplicando a transformada de Fourier e fazendo algumas manipulações algébricas na equação (3.51), tem-se

$$[K(\Omega, T) + i\Omega C - \Omega^2 M]\mathbf{X}(\Omega) = \mathbf{F}(\Omega), \quad (3.52)$$

onde $\mathbf{X}(\Omega)$ é o vetor resposta e $\mathbf{F}(\Omega)$ é o vetor excitação, ambos descritos no domínio da frequência.

Neste estudo, a temperatura do MVE é mantida constante, portanto, a matriz $K(\Omega, T)$ pode ser representada apenas por $K(\Omega)$. Assim, a equação (3.52) pode ser reescrita como

$$[K(\Omega) + i\Omega C - \Omega^2 M]\mathbf{X}(\Omega) = \mathbf{F}(\Omega). \quad (3.53)$$

Segundo Inman (2014), uma forma de avaliar o comportamento do sistema é por meio da matriz de função resposta em frequência receptância, cujo elemento H_{ks} é definido como a resposta em deslocamentos generalizados da estrutura em movimento, sendo que k e s indicam o grau de liberdade de obtenção da resposta e o grau de liberdade de excitação, respectivamente. Essa FRF pode ser definida a partir da equação (3.53) como

$$H_{ks}(\Omega) = \frac{X_k(\Omega)}{F_s(\Omega)} = [K(\Omega) + i\Omega C - \Omega^2 M]_{ks}^{-1}. \quad (3.54)$$

A FRF relacionada à velocidade, $\dot{X}_k(\Omega)$, é conhecida como mobilidade e é dada por

$$Y_{ks}(\Omega) = \frac{\dot{X}_k(\Omega)}{F_s(\Omega)} = i\Omega \frac{X_k(\Omega)}{F_s(\Omega)} = i\Omega [K(\Omega) + i\Omega C - \Omega^2 M]_{ks}^{-1}. \quad (3.55)$$

Por sua vez, a FRF relacionada à aceleração, $\ddot{X}_k(\Omega)$, é denominada inertância, e é definida como

$$J_{ks}(\Omega) = \frac{\ddot{X}_k(\Omega)}{F_s(\Omega)} = -\Omega^2 \frac{X_k(\Omega)}{F_s(\Omega)} = -\Omega^2 [K(\Omega) + i\Omega C - \Omega^2 M]_{ks}^{-1}. \quad (3.56)$$

Uma outra forma de obter as FRF's de sistemas dinâmicos é por meio da análise modal, em que o vetor solução $\mathbf{X}(\Omega)$ é expresso como uma combinação linear dos modos normalizados do sistema. No caso de uma estrutura composta por MVE, inicialmente, deve-se resolver um problema não linear de autovalores e autovetores, dado por

$$[K(\Omega) - \lambda_j M] \boldsymbol{\phi}_j = \mathbf{0}, \quad (3.57)$$

onde λ_j é o j -ésimo autovalor associado ao autovetor $\boldsymbol{\phi}_j$. Para resolver esse problema não linear pode-se solucionar a equação (3.57) e se algum dos autovalores λ_j encontrado for igual a frequência Ω usada, então λ_j pode ser validado para encontrar-se a frequência natural daquele sistema e $\boldsymbol{\phi}_j$ pode ser anexado a sua matriz modal. Observa-se, que para cada frequência discretizada, dentro do intervalo desejado, é necessário resolver um problema de autovalores e autovetores.

Ambos os procedimentos apresentados necessários para a análise dinâmica de sistema compostos por MVE com um número elevado de graus de liberdade n demandam um elevado custo computacional. Dessa forma, esse tipo de problema é objeto de estudo na literatura. Na sequência, é apresentado um método baseado em truncamento modal, que

recentemente se mostrou capaz de representar o comportamento de estruturas compostas com MVE's e possuir um reduzido custo de processamento (FLOODY *et al.*, 2007).

3.4.1 Metodologia de truncamento modal para o cálculo de FRF's em estruturas compostas por MVE

Nesta Subseção é abordado o método proposto por Floody *et al.* (2007). Aqui, o método é denominado por Floody-Espíndola.

O método se inicia pela seleção de uma frequência de referência Ω_0 , geralmente escolhida dentro do intervalo de frequências em análise. Para essa frequência, é calculada a matriz de rigidez do sistema, a qual compreende a parcela referente ao material elástico (K_e) e a parcela referente ao MVE (K_{mve}). A matriz de rigidez do sistema composto pode então ser obtida na frequência de referência conforme a equação

$$K(\Omega_0) = K_e + K_{mve}(\Omega_0), \quad (3.58)$$

$K_{mve}(\Omega_0)$ denota unicamente a parcela da matriz de rigidez relativa ao MVE, avaliada na frequência de referência. Essa parcela pode ser calculada por

$$K_{mve}(\Omega_0) = E(\Omega_0)K'_{mve}, \quad (3.59)$$

onde K'_{mve} é a matriz de rigidez do MVE obtida considerando um módulo de elasticidade arbitrário e constante (por exemplo, 1 N/m²). Assim, a equação (3.58) passa a ser

$$K(\Omega_0) = K_e + E(\Omega_0)K'_{mve}. \quad (3.60)$$

Com a matriz de rigidez obtida para a frequência de referência Ω_0 , é possível resolver o problema de autovalores/autovetores de ordem n (número de graus de liberdade do sistema), dado por

$$K(\Omega_0)\boldsymbol{\phi}_j = \lambda_j M \boldsymbol{\phi}_j. \quad (3.61)$$

Com isso, é definida a matriz modal na frequência de referência como

$$\Phi_0 = [\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \boldsymbol{\phi}_3, \dots, \boldsymbol{\phi}_n]. \quad (3.62)$$

Floody *et al.* (2007) propõem o truncamento da matriz modal em \hat{n} ($\hat{n} \ll n$) modos de vibrar. Os autores usaram a premissa de que apenas esses \hat{n} modos possuem efeito significativo no cálculo das FRF's dentro do intervalo de frequência estudado. A partir desses modos, é definida a matriz modal truncada $\hat{\Phi}_0$ a qual possui ordem $n \times \hat{n}$. Ao organizar os

autovalores em ordem crescente, realizar a reordenação correspondente da matriz modal e fazer uma ortonormalização em relação à matriz de massa, as seguintes propriedades podem ser observadas

$$\widehat{\Phi}_0^T M \widehat{\Phi}_0 = I_{\hat{n} \times \hat{n}}, \quad (3.63)$$

e

$$\widehat{\Phi}_0^T K(\Omega_0) \widehat{\Phi}_0 = \Lambda_{\hat{n} \times \hat{n}}, \quad (3.64)$$

onde $\widehat{\Phi}_0^T$ representa a matriz modal truncada transposta. $I_{\hat{n} \times \hat{n}}$ e $\Lambda_{\hat{n} \times \hat{n}}$ correspondem, respectivamente, à matriz identidade e à matriz espectral de iguais dimensões $\hat{n} \times \hat{n}$.

Posteriormente, a matriz de rigidez é atualizada para cada valor discreto de frequência por meio de um processo incremental. Este método obtém um incremento no valor da propriedade do material, $\Delta E(\Omega; \Omega_0)$, com base no módulo de elasticidade calculado para a frequência de referência e isolando esse termo por meio da equação

$$\Delta E(\Omega; \Omega_0) = E(\Omega) - E(\Omega_0). \quad (3.65)$$

Dessa forma, a matriz de rigidez pode ser encontrada para cada valor discreto de frequência usando a equação (3.58) e a equação (3.60), como segue

$$K(\Omega) = K_e + E(\Omega)K'_{mve} = K_e + E(\Omega_0)K'_{mve} + \Delta E(\Omega; \Omega_0)K'_{mve}. \quad (3.66)$$

Observa-se que a soma dos dois primeiros termos da igualdade à direita corresponde à matriz de rigidez na frequência de referência. Nesse caso a equação (3.60) torna-se

$$K(\Omega) = K(\Omega_0) + \Delta E(\Omega; \Omega_0)K'_{mve}. \quad (3.67)$$

Realizando uma mudança de coordenadas do sistema físico para o espaço modal truncado, da forma

$$\mathbf{X}(\Omega) = \widehat{\Phi}_0 \mathbf{P}(\Omega), \quad (3.68)$$

e pré-multiplicando a equação (3.53) por $\widehat{\Phi}_0^T$, tem-se a relação

$$[-\Omega^2 \widehat{\Phi}_0^T M \widehat{\Phi}_0 + i\Omega \widehat{\Phi}_0^T C \widehat{\Phi}_0 + \widehat{\Phi}_0^T K(\Omega) \widehat{\Phi}_0] \mathbf{P}(\Omega) = \widehat{\Phi}_0^T \mathbf{F}(\Omega). \quad (3.69)$$

Substituindo a equação (3.67) na equação (3.69), chega-se em

$$[-\Omega^2 \widehat{\Phi}_0^T M \widehat{\Phi}_0 + i\Omega \widehat{\Phi}_0^T C \widehat{\Phi}_0 + \widehat{\Phi}_0^T K(\Omega_0) \widehat{\Phi}_0 + \Delta E(\Omega; \Omega_0) \widehat{\Phi}_0^T K'_{mve} \widehat{\Phi}_0] \mathbf{P}(\Omega) = \widehat{\Phi}_0^T \mathbf{F}(\Omega). \quad (3.70)$$

Ao aplicar as propriedades contidas nas equações (3.63) e (3.64), obtém-se

$$\left[-\Omega^2 I_{\hat{n} \times \hat{n}} + i\Omega \hat{\Phi}_0^T C \hat{\Phi}_0 + \Lambda_{\hat{n} \times \hat{n}} + \Delta E(\Omega; \Omega_0) \hat{\Phi}_0^T K'_{mve} \hat{\Phi}_0\right] \mathbf{P}(\Omega) = \hat{\Phi}_0^T \mathbf{F}(\Omega). \quad (3.71)$$

Designando as matrizes $\Lambda'_{mve \hat{n} \times \hat{n}} = \hat{\Phi}_0^T K'_{mve} \hat{\Phi}_0$ e $\tau_{\hat{n} \times \hat{n}} = \hat{\Phi}_0^T C \hat{\Phi}_0$, as quais são independentes da frequência, a equação (3.71) transforma-se em

$$\left[-\Omega^2 I_{\hat{n} \times \hat{n}} + i\Omega \tau_{\hat{n} \times \hat{n}} + \Lambda_{\hat{n} \times \hat{n}} + \Delta E(\Omega; \Omega_0) \Lambda'_{mve \hat{n} \times \hat{n}}\right] \mathbf{P}(\Omega) = \hat{\Phi}_0^T \mathbf{F}(\Omega). \quad (3.72)$$

Finalmente, voltando ao sistema de equações escrito em coordenadas físicas, a resposta em deslocamentos para uma estrutura composta de material metálico e MVE pode ser obtida para uma determinada frequência, expressa como

$$\mathbf{X}(\Omega) = \hat{\Phi}_0 \left[-\Omega^2 I_{\hat{n} \times \hat{n}} + i\Omega \tau_{\hat{n} \times \hat{n}} + \Lambda_{\hat{n} \times \hat{n}} + \Delta E(\Omega; \Omega_0) \Lambda'_{mve \hat{n} \times \hat{n}}\right]^{-1} \hat{\Phi}_0^T \mathbf{F}(\Omega), \quad (3.73)$$

onde $[\]^{-1}$ denota a matriz inversa do termo em colchetes. Observa-se, aqui, que de fato essa matriz não é invertida, sendo realizada somente a resolução do sistema de equações lineares.

Da definição de matriz de receptância, obtém-se o termo genérico $H_{ks}(\Omega)$ como

$$H_{ks}(\Omega) = \frac{\mathbf{X}_k}{\mathbf{F}_s} = \left\{ \hat{\Phi}_0 \left[-\Omega^2 I_{\hat{n} \times \hat{n}} + i\Omega \tau_{\hat{n} \times \hat{n}} + \Lambda_{\hat{n} \times \hat{n}} + \Delta E(\Omega; \Omega_0) \Lambda'_{mve \hat{n} \times \hat{n}}\right]^{-1} \hat{\Phi}_0^T \right\}_{ks}. \quad (3.74)$$

Os cálculos de mobilidade e de inertância são realizados com procedimentos análogos àqueles apresentados na Seção 3.4.

É possível perceber que, na equação (3.73), o termo entre colchetes possui uma ordem $\hat{n} \times \hat{n}$, a qual é muito menor do que a ordem original do sistema. Além disso, as matrizes $I_{\hat{n} \times \hat{n}}$, $\tau_{\hat{n} \times \hat{n}}$, $\Lambda_{\hat{n} \times \hat{n}}$ e $\Lambda'_{mve \hat{n} \times \hat{n}}$ são diagonais. Isso faz com que o custo computacional seja significativamente reduzido em relação ao sistema original. A metodologia apresentada nesta Seção tem a vantagem de resolver somente um único problema de autovalores/autovetores de ordem n , o qual é calculado para a frequência de referência. Para os demais valores de frequência a equação (3.73) é resolvida de maneira direta. Isso é possível devido às transformações lineares que reduziram a ordem do problema para \hat{n} ($\hat{n} \ll n$). Este procedimento reduz significativamente o custo computacional em relação ao método descrito no início da Seção 3.4, pois naquele método, para um sistema com matriz de rigidez dependente da frequência, a equação (3.53) de ordem n precisaria ser resolvida de forma direta para todo valor discreto da frequência dentro do intervalo de frequências analisado.

4 METODOLOGIA

Neste capítulo, são apresentadas inicialmente as características do problema proposto. Em seguida, são descritos os parâmetros de simulação considerados na abordagem deste estudo, bem como os métodos de resolução de sistemas de equações lineares complexos, os quais foram testados e comparados. Além disso, são detalhadas as variáveis que foram objeto de comparação e análise. Por fim, para cada método, é fornecido um pseudo-algoritmo sugerido.

4.1 PROBLEMA PROPOSTO

Esta seção tem como objetivo apresentar a aplicação prática da metodologia de solução que foi desenvolvida neste estudo. Desse modo, são descritas as dimensões físicas do problema, as propriedades mecânicas dos materiais e o procedimento de obtenção das matrizes de massa e rigidez da estrutura composta.

Neste trabalho, o principal tema discutido é a dificuldade de obtenção das FRF's de sistemas estruturais dinâmicos com parâmetros materiais dependentes da frequência, em decorrência do elevado custo computacional envolvido. No capítulo anterior, foi apresentada a equação (3.53), a qual é linear e, possui termos complexos, mas necessita ser resolvida centenas ou milhares de vezes para uma única análise. Para facilitar sua solução, é necessária uma discretização na frequência, geralmente, com um número elevado de pontos (na faixa de 500 a 10000 pontos, a depender da precisão requerida e da largura da faixa de frequências de interesse). Isso implica na resolução de um sistema de equações lineares complexas para cada frequência nesse intervalo de frequências em análise.

No caso de sistemas com muitos graus de liberdade, essa necessidade leva a um considerável aumento na quantidade de operações aritméticas necessárias nos métodos de resolução, resultando em um aumento significativo dos custos computacionais associados. Nesse contexto, pode-se definir alguns termos da equação (3.53), possibilitando evidenciar um sistema de equações linear complexo genérico, dado pela equação (1.3), na forma

$$A = A(\Omega) = [K(\Omega) + i\Omega C - \Omega^2 M], \quad \mathbf{x} = \mathbf{X}(\Omega), \quad (4.1)$$

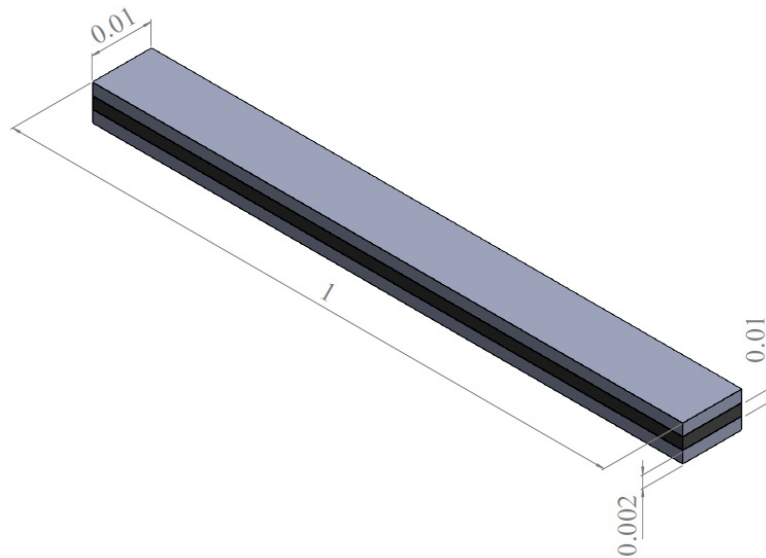
e

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}(\Omega). \quad (4.2)$$

A matriz coeficiente, $A(\Omega)$, desse sistema é complexa, não singular e, nos casos de vibrações harmônicas sem efeito giroscópico, é simétrica. No entanto, ela não é definida-positiva para toda a faixa de frequência. À medida que a frequência aumenta, o valor do termo $-\Omega^2 M$ da matriz $A(\Omega)$ torna-se cada vez mais elevado, resultando que essa não apresente mais essa característica a partir de uma certa frequência. Isso implica que a $A(\Omega)$ considerando um sistema qualquer não é necessariamente definida-positiva, o que impossibilita a utilização de métodos que aproveitam dessa característica, como o Método dos Gradientes Conjugados (CG). Dessa forma, considerando apenas as características conhecidas da matriz $A(\Omega)$, é possível utilizar os métodos iterativos de Krylov MINRES e SYMMLQ na resolução da equação (3.53), para uma coleção de valores de frequências discretizadas dentro da faixa de frequência de interesse.

Neste estudo numérico, para efeito de aplicação física do problema, é analisado o comportamento dinâmico (vibração longitudinal) de uma barra composta por material metálico e material viscoelástico. O MVE é posicionado entre duas camadas idênticas de material metálico. A FIGURA 2 mostra como essa estrutura é constituída.

FIGURA 2 - Representação da barra composta de material metálico e MVE utilizada nas análises do presente trabalho (dimensões em m).



FONTE: Autor (2023)

O material metálico é o aço ASTM A36, que possui um módulo de elasticidade aproximado de 200 GPa e massa específica de 7860 Kg/m³. Para o material viscoelástico é considerado um material fictício, cujas propriedades mecânicas estão apresentadas na

TABELA 2. Para o cálculo do fator de translação, α_T , foi considerada uma temperatura de referência de 285,15 K e uma temperatura de trabalho de 303,15 K.

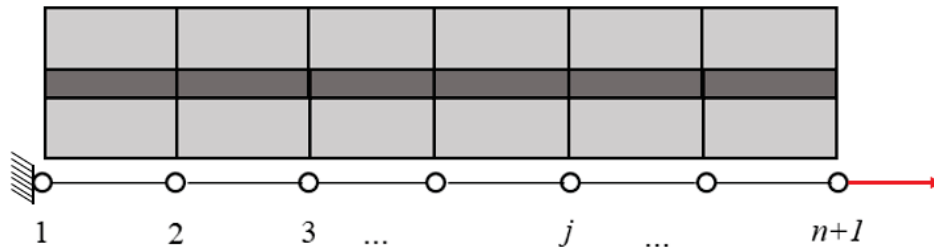
TABELA 2 - Parâmetros do material viscoelástico fictício (entre colchetes as unidades de medida).

Propriedades	ρ	E_0	E_∞	a	ξ	θ_1	θ_2
Unidades	[kg/m ³]	[MPa]	[GPa]	-	-	-	[K]
Valor	1289	1,927	2,706	2,089E-03	0,538	34,67	607,07

FONTE: Autor 2023.

Sem perda de generalidade, a análise dinâmica foi realizada utilizando MEF, sendo que a barra foi modelada em 1D. E, dessa forma, apenas os modos longitudinais foram considerados na análise. A FIGURA 3 mostra um exemplo genérico dessa discretização 1-D da estrutura composta, onde n indica o número de elementos finitos lineares, resultando em $n + 1$ nós. Além disso, foi considerada condição de contorno de Dirichlet homogênea correspondente à fixação da extremidade no nó 1, localizada no lado esquerdo da barra. Por outro lado, a condição de contorno de Neumann é caracterizada pela aplicação de uma força de tração axial $F(\Omega)$ no nó $n + 1$, na extremidade direita da barra.

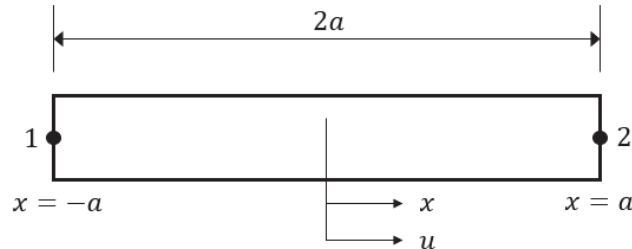
FIGURA 3 - Representação do método dos elementos finitos em elemento de barra.



FONTE: Autor (2023)

A partir da teoria apresentada por Petyt (2010), é possível verificar que o método de Rayleigh-Ritz é uma das técnicas disponíveis para aproximar soluções de problemas da dinâmica estrutural, tendo como base o princípio de Hamilton. Assim, por meio da aproximação da função de deslocamento longitudinal da barra via funções de forma elementares e calculando as energias cinética e de deformação, é possível obter as expressões para as matrizes de massa e de rigidez, para um elemento de barra, cuja geometria genérica é apresentada na FIGURA 4.

FIGURA 4 - Geometria de um único elemento de barra.



FONTE: Petyt (2010) - Modificado

Legenda: x representa a posição horizontal do ponto do elemento e u representa seu deslocamento

Obtenção da matriz de massa do elemento genérico

Seja a equação para a energia cinética elementar, T_e , dada por

$$T_e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T [m_e] \dot{\mathbf{u}}, \quad (4.3)$$

onde $[m_e]$ é a matriz de massa de um elemento finito e $\dot{\mathbf{u}}$ é a derivada em relação à variável tempo, t , do deslocamento de um ponto do elemento. Por outro lado, a equação para a energia cinética, para um elemento de barra onde a função de deslocamento é aproximada por um polinômio, conforme o método de Rayleigh-Ritz, é expressa por

$$T_e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \rho A_T \int_{-a}^a [N(x)]^T [N(x)] dx \dot{\mathbf{u}}, \quad (4.4)$$

onde ρ , A_T e $[N(x)]$ são a massa específica do material, a área da seção transversal da barra e a matriz de funções de forma do elemento, respectivamente. Assim, comparando a equação (4.3) com a equação (4.4), chega-se à expressão para o cálculo da matriz de massa elementar, da barra da FIGURA 4, definida por

$$[m_e] = \rho A_T \int_{-a}^a [N(x)]^T [N(x)] dx. \quad (4.5)$$

A demonstração da matriz elementar de massa presente na equação (4.5) pode ser verificada com maiores detalhes em Petyt (2010). Para esse caso, considerando um elemento 1D linear (com 2 graus de liberdade), tem-se

$$[m_e] = \frac{\rho A_T a}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Obtenção da matriz de rigidez no elemento genérico

Aqui, considera-se a equação da energia total de deformação elementar, U_e , dada por

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T [k_e] \mathbf{u}, \quad (4.7)$$

onde $[k_e]$ é a matriz de rigidez de um elemento generalizado e \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos generalizados nodais do elemento. Por outra perspectiva, a equação da energia de deformação, para um elemento de barra com função de deslocamento aproximada por um polinômio, conforme o método de Rayleigh-Ritz, é indicada por

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T EA_T \int_{-a}^a [N_{,x}(x)]^T [N_{,x}(x)] dx \mathbf{u}. \quad (4.8)$$

onde E , A_T e $[N_{,x}(x)]$ são o módulo de elasticidade, a área da seção transversal da barra e a derivada em relação a x da função de forma do elemento, respectivamente. Assim, comparando as equações (4.7) e (4.8), chega-se à expressão para o cálculo da matriz de rigidez elementar, da barra da FIGURA 4, na forma

$$[k_e] = EA_T \int_{-a}^a [N_{,x}(x)]^T [N_{,x}(x)] dx. \quad (4.9)$$

Em Petyt (2010) pode ser encontrada a demonstração da expressão final para a matriz elementar de rigidez presente na equação (4.9). Após seu desenvolvimento, tem-se

$$[k_e] = \frac{EA_T}{2a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Obtenção da matriz de massa global da estrutura composta

A FIGURA 4 apresenta uma barra homogênea de um único material, no entanto, a estrutura analisada neste estudo, contém uma camada de material viscoelástico entre duas camadas idênticas de material metálico. Os materiais estão em paralelo, portanto, a matriz elementar da barra composta, $[m_c]$, é calculada pelo somatório das matrizes elementares calculadas separadas das três camadas, chegando em

Ordem do sistema

A fim de entender o comportamento numérico dos métodos para diferentes ordens do sistema linear, foram testados três diferentes tamanhos de discretizações na barra. São eles: $2^{14} = 16384$ nós, $2^{16} = 65536$ nós e $2^{18} = 262144$ nós.

Parâmetros dos processos iterativos

Os métodos iterativos MINRES e SYMMLQ possuem parâmetros que podem ser modificados com o intuito de melhorar sua convergência. As funções do MATLAB que executam esses métodos, são o *minres()* e o *symmlq()*, respectivamente. Essas funções permitem alterar a tolerância, a estimativa inicial e a matriz de pré-condicionamento do processo iterativo. Foram testadas as tolerâncias com valores de 1.e-04, 1.e-05 e 1.e-06 e três diferentes estimativas iniciais, os quais são detalhados no Capítulo 5, juntamente com seus resultados.

A matriz de pré-condicionamento em ambos os métodos foi aquela obtida a partir da decomposição LU incompleta da matriz de amortecimento do sistema primário. Isso foi estabelecido, pois esta matriz não varia com a frequência, portanto é calculada apenas uma vez antes do processo incremental e é usada para todos os valores discretos de frequência compreendidos no intervalo de interesse. Assim, após a obtenção das matrizes L e U pelo processo descrito, ambas as funções executam o pré-condicionamento, na forma

$$(L^{-1}AU^{-1})Ux = L^{-1}b. \quad (4.15)$$

Parâmetros do método baseado em truncamento modal

O método baseado em truncamento modal desenvolvido por Floody *et. al* (2007) possui dois parâmetros importantes: a frequência de referência Ω_0 e o número de modos utilizados para truncar a matriz modal. O primeiro foi definido como a frequência central do intervalo, ou seja, a média aritmética entre 500 e 7000, resultando em $\Omega_0 = 3750$ Hz. Já para o número de modos truncados, foi realizada uma avaliação da influência desse parâmetro na convergência do método. Assim, foi avaliado o número de modos como sendo 10, 20, 30, 40, 50 e 100.

Processo incremental na frequência para obtenção da matriz de rigidez global

Como desenvolvido na Subseção 3.4.1, a matriz de rigidez de sistemas compostos por MVE depende da frequência e deve ser calculada para cada ponto discreto dessa variável. Assim, utilizando a equação (3.67) e partindo da frequência inicial do intervalo de interesse $\Omega_1 = 500$, pode-se construir a relação recursiva para atualização dessa variável na forma

$$[K(\Omega_{j+1})] = [K(\Omega_j)] + \Delta E(\Omega_{j+1}; \Omega_j)[K'_{mve}], \quad (j = 1, 2, \dots, N_\Omega). \quad (4.16)$$

4.3 MÉTODOS DE OBTENÇÃO DAS FRF'S ANALISADOS

Nesta dissertação, todas as matrizes foram declaradas de forma esparsa, com o propósito de aproveitar as propriedades da esparsidade e economizar memória. Dessa maneira, foram avaliados cinco métodos diferentes, para resolução da equação (3.53), que representa o comportamento dinâmico da estrutura ilustrada pela FIGURA 3. Na sequência, são expostos os métodos testados neste estudo, bem como os pseudo-algoritmos, que facilitam a compreensão da sequência de etapas dos métodos.

4.3.1 Método direto – Decomposição LU

O primeiro método consiste em resolver a equação (3.53), por meio de um método direto para cada frequência discreta. Este utiliza da decomposição LU, por ser o método, geralmente, escolhido pelos softwares de manipulação algébrica, para problemas desse tipo. Nesse sentido, tal método foi escolhido como a referência para este trabalho, pois resolve de forma exata o sistema de equações lineares complexas. O pseudo-algoritmo 2 descreve como este foi programado.

Pseudo-algoritmo 2 - Decomposição LU

1. *Define* $[M]$, $[K_e]$, $[K'_{mve}]$ e F ;
2. *Calcula* $[C]$;
3. *Tic* (Iniciar o contador de tempo);
4. *For* $j = 1, \dots, N_\Omega$; *Do*:
5. *Calcula* $[E_c(\Omega_j)]$; - equação (3.46);
6. *Calcula* $[\Delta E(\Omega_j; \Omega_1)]$; - equação (3.65);
7. *Calcula* $[K(\Omega_j)]$; - equação (3.66);
8. *Soluciona* $\{X(\Omega_j)\}$; - equação (3.53);

9. *EndFor;*
10. *Toc (Parar o Contador de tempo);*
11. *End*

4.3.2 Métodos iterativos

O segundo e o terceiro métodos são variações do primeiro. A diferença está na forma como a equação (3.53) é resolvida. Nesta variação, são utilizados os métodos iterativos do resíduo mínimo (MINRES) e o simétrico LQ (SYMMLQ). O pseudo-algoritmo 3 descreve como este foi programado, respectivamente.

Pseudo-algoritmo 3 – Métodos iterativos:

1. *Define $[M]$, $[K_e]$, $[K'_{mve}]$ and \mathbf{F} ;*
2. *Calcula $[C]$;*
3. *Calcula $[L]$ e $[U]$ - Decomposição LU incompleta;*
4. *Tic (Iniciar o contador de tempo);*
5. *For $j = 1, \dots, N_\Omega$; Do:*
6. *Calcula $E_c(\Omega_j)$; - equação (3.46);*
7. *Calcula $\Delta E(\Omega_j; \Omega_1)$; - equação (3.65);*
8. *Calcula $[K(\Omega_j)]$; - equação (3.66);*
9. *Define $\{X_0(\Omega_j)\}$;*
10. *For $k = 1, \dots$, até convergir:*
11. *Solucionar $\{X_k(\Omega_j)\}$; - sub-rotina (minres) ou sub-rotina(symmlq)*
12. *endFor;*
13. *EndFor;*
14. *Toc (Parar o Contador de tempo);*
15. *End*

No software MATLAB, existem funções que executam os métodos utilizados neste pseudo-algoritmo e as configurações destas são expressas em sua sintaxe. O método de decomposição LU incompleta foi realizado utilizando o comando $[L,U] = \text{ilu}(C, \text{options})$, onde sua configuração é $\text{options} = \text{struct}('type', 'ilutp', 'droptol', 1e-6)$.

4.3.3 Metodo Floody- Espíndola

O método desenvolvido em Floody et al. (2007), é aqui denominado como método Floody-Espíndola. Este método está apresentado na Subseção 3.4.1. O método é iniciado com a definição de uma frequência de referência definida como $\Omega_0 = 3750$ Hz, para qual é resolvido o problema de autovalores/autovetores da equação (3.61). É importante ressaltar que

é utilizada uma única frequência de referência para análise de todo o intervalo de frequências. Obtida a matriz de autovalores ortonormalizada (matriz modal) truncam-se as colunas em \hat{n} modos de vibrar significativos. Dessa forma, a equação (3.53) deve ser solucionada para cada frequência discretizada. O pseudo-algoritmo 4 descreve a sequência de passos a serem seguidos.

Pseudo-algoritmo 4 – Floody-Espíndola:

1. *Define* $[M], [K_e], [K'_{mve}]$ and \mathbf{F} ;
2. *Tic* (Iniciar o contador de tempo);
3. *Define* Ω_0 ;
4. *Calcula* $E_c(\Omega_0)$ - equação (3.46);
5. *Calcula* $[K(\Omega_0)]$ - equação (3.60);
6. *Resolve* $[\Phi_0], [\Lambda_0]$ - equação (3.61);
7. *Define* $[\hat{\Phi}_0]$;
8. *Calcula* $[I]_{\hat{n} \times \hat{n}}$; - equação (3.63);
9. *Calcula* $[\Lambda]_{\hat{n} \times \hat{n}}$; - equação (3.64);
10. *Calcula* $[\tau]_{\hat{n} \times \hat{n}}$;
11. *For* $j = 1, \dots, N_\Omega$; *Do*:
12. *Calcula* $\Delta E(\Omega_j; \Omega_0)$ - equação (3.65);
13. *Soluciona* $\{X(\Omega_j)\}$ - equação (3.73);
14. *EndFor*;
15. *Toc* (Parar o Contador de tempo);
16. *End*

4.3.4 Método Floody-Espíndola Modificado

O método abordado nesta Seção é proposto neste trabalho e trata-se de uma modificação no método Floody-Espíndola, com objetivo de melhorar a precisão e mantendo o tempo computacional aproximadamente o mesmo. Aqui, são definidas várias faixas de frequências, dentro das quais as propriedades do MVE são feitas constantes, pela definição de uma frequência de referência em cada faixa. Com isso, é resolvido um problema de autovalores e autovetores para cada faixa e o truncamento é realizado somente nesse intervalo. O número de faixas delimitadas é igual ao número de frequências naturais dentro do intervalo total de frequências de interesse. Portanto, frequentemente, este é um número bastante reduzido.

Cada intervalo é definido com base nas frequências naturais, com exceção do primeiro e último. No primeiro intervalo, o valor inicial da frequência é definido como o valor mínimo dentro da faixa de frequência de interesse. No último intervalo, o limite superior à

direita é definido como a frequência superior da faixa de interesse, e entre os intervalos, a frequência que os delimita é obtida calculando a média aritmética entre a frequência natural imediatamente inferior e a frequência natural imediatamente superior.

Em seguida, para cada intervalo discreto, o problema de autovalores e autovetores é resolvido para a frequência de referência, seguindo a mesma metodologia apresentada na Seção 3.4.1, de forma separada para cada intervalo. Posteriormente, os vetores solução da FRF são concatenados, resultando em um único vetor solução com a mesma ordem do sistema original. O pseudo-algoritmo 4 sugere como esse método é estruturado.

Pseudo-algoritmo 5 – Floody-Espíndola Modificado:

1. *Define* $[M]$, $[M_e]$, $[K_e]$, $[K'_{mve}]$ and \mathbf{F} ;
2. *Tic* (Iniciar o contador de tempo);
3. *Resolve* $[K_e]\phi_j = \lambda_j[M_e]\phi_j$;
4. *If* $\Omega_i < \sqrt{\lambda_j} < \Omega_f$; *Do*:
5. $\Omega_0^j = \sqrt{\lambda_j}$;
6. *EndIf*;
7. *Define* $\Omega_0^1, \Omega_0^2, \dots, \Omega_0^n$; ($n = \text{número de faixa de frequências consideradas}$)
8. *Do*: $\Omega_i^1 = \Omega_i$; $\Omega_f^n = \Omega_f$;
9. *For* $j = 1, \dots, (n-1)$; *Do*:
10. $\Omega_f^j = \frac{\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_{j+1}}}{2}$;
11. $\Omega_i^{j+1} = \Omega_f^j$;
12. *EndFor*;
13. *For* $j = 1, \dots, n$; *Do*:
14. *Calcula* $E_c(\Omega_0^j)$ - equação (3.46);
15. *Calcula* $[K(\Omega_0^j)]$ - equação (3.60);
16. *Soluciona* $[\Phi_0^j], [\Lambda_0^j]$ - equação (3.61);
17. *Define* $[\hat{\Phi}_0^j]$;
18. *Calcula* $[I]_{\hat{n} \times \hat{n}}$; - equação (3.63);
19. *Calcula* $[\Lambda^j]_{\hat{n} \times \hat{n}}$ - equação (3.64);
20. *Calcula* $[\tau^j]_{\hat{n} \times \hat{n}}$;
21. *For* $k = 1, \dots, N_{\Omega}^j$; *Do*:
22. *Calcula* $\Delta E(\Omega_k^j; \Omega_0^j)$ - equação (3.65);
23. *Soluciona* $\{X^j(\Omega_k^j)\}$ - equação (3.73);
24. *EndFor*;
25. *EndFor*;
26. *Concatena* $\{X(\Omega)\} = \{X^1(\Omega); X^2(\Omega); \dots; X^n(\Omega)\}$;
27. *Toc* (Parar o Contador de tempo);
28. *End*

Neste método, $[M_e]$ e $[K_e]$ são respectivamente, as matrizes globais de massa e rigidez da barra composta. Outro ponto a ser destacado, é que na linha 26 do pseudo-algoritmo 5, realizou-se uma aproximação nos pontos de frequência correspondentes à interseção entre dois intervalos de interesse. Nesses pontos, foram feitas médias aritméticas entre a receptância da última frequência discreta do intervalo imediatamente inferior e a receptância da primeira frequência discreta do intervalo imediatamente superior.

4.4 SIMULAÇÕES E OBTENÇÃO DOS RESULTADOS

Nesta Seção, são apresentadas as simulações executadas para se alcançar os objetivos do presente estudo, discorridos na Seção 1.1. Adicionalmente, são apresentadas as análises numéricas e visuais que foram realizadas para entender o comportamento numérico dos métodos discutidos.

Os cinco métodos discutidos na Seção 4.3 são denominados aqui como Decomposição LU, MINRES, SYMMLQ, Floody-Espíndola e Floody-Espíndola Modificado. Além disso, considerando N_Ω como sendo 6501 pontos (decorrente de intervalos de 1 Hz) e 32501 pontos (com intervalos de 0,2 Hz) e definindo a discretização da barra em 2^{14} (16384 nós), 2^{16} (65536 nós) e 2^{18} (262144 nós), pode se estabelecer as seis combinações de simulações efetuadas. A TABELA 3 retrata os parâmetros de cada forma de simulação, os quais foram testados para cada um desses métodos.

TABELA 3 - Definição de parâmetros das simulações principais.

Simulação	Número de nós	Número de valores discretos de frequência
1	16384	6501 (1 – 1 Hz)
2	65536	6501 (1 – 1 Hz)
3	262144	6501 (1 – 1 Hz)
4	16384	32501 (0,2 – 0,2 Hz)
5	65536	32501 (0,2 – 0,2 Hz)
6	262144	32501 (0,2 – 0,2 Hz)

FONTE: Autor (2023)

Neste trabalho, foi avaliado o tempo de processamento dos métodos, determinados conforme detalhado nos pseudo-algoritmos da Seção 4.3. Além disso, foram calculadas as normas L_2 (norma Euclidiana) e L_∞ (norma infinito) para avaliação e comparação da convergência dos métodos. Para um vetor genérico \mathbf{x} de ordem n , essas normas são dadas, respectivamente, por

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2)} \quad (4.17)$$

e

$$\|\mathbf{x}\|_{\infty} = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|). \quad (4.18)$$

Neste estudo, o vetor \mathbf{x} em questão, é o vetor diferença entre a resposta encontrada pela metodologia direta (solução de referência) e com qualquer outra metodologia aplicada. Ainda, foram gerados gráficos da receptância, para avaliação visual nas regiões das frequências naturais. Já a memória não foi avaliada, pois essa não apresentou variação significativa entre métodos, considerando para um mesmo caso de simulação.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste Capítulo são apresentados, inicialmente, os resultados referentes à validação do modelo do sistema primário, bem como a FRF numérica do modelo do sistema composto. Posteriormente, são expostos os resultados pertinentes às escolhas de alguns parâmetros importantes de simulação, tais como a tolerância, as diferentes formas de definição do vetor inicial de cada passo dos métodos iterativos e o número de modos de vibrar utilizados no método baseado em truncamento da matriz modal. Em seguida, são apresentados e discutidos, em forma de tabelas e gráficos, os resultados referentes aos objetivos deste estudo e da metodologia discutida no Capítulo 4.

5.1 VALIDAÇÃO DO MODELO DO SISTEMA PRIMÁRIO

Nesta Seção, apresenta-se a validação do sistema primário. Para isso, compararam-se as frequências naturais dos cinco primeiros modos de vibrar longitudinal do modelo do sistema primário implementado com as frequências naturais obtidas analiticamente na literatura (LEISSA; QATU, 2011) e, dadas genericamente, por

$$w_m = \frac{(2m - 1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (5.1)$$

onde w_m é a frequência natural (em rad/s) do m -ésimo modo de vibrar do sistema, L é o comprimento total da barra genérica, E é o módulo de elasticidade do material e ρ é a densidade de massa do material. Essa comparação é detalhada por meio da TABELA 4, a qual mostra os valores das frequências naturais analíticas e numéricas dos cinco primeiros modos de vibrar longitudinal assim como a diferença percentual entre esses valores, considerando o sistema primário. Os resultados numéricos foram obtidos via MEF, com uma discretização com 1000 nós.

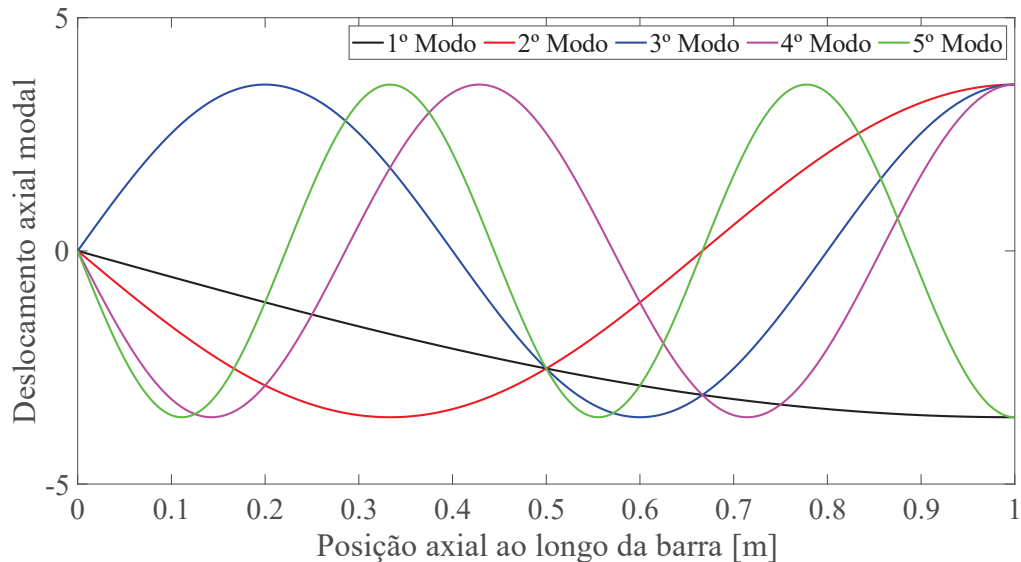
TABELA 4 - Frequência naturais analíticas e numéricas do sistema primário e seu e o erro percentual.

Modo de vibrar	Frequência natural analítica [Hz]	Frequência natural numérica [Hz]	Diferença percentual [%]
1	1.261,08	1.261,08	1,03E-05
2	3.783,25	3.783,25	9,27E-05
3	6.305,42	6.305,43	2,58E-04
4	8.827,58	8.827,63	5,05E-04
5	11.349,75	11.349,84	8,34E-04

FONTE: Autor (2023).

Além disso, para o modelo em questão, foram verificados os comportamentos de tais modos de vibrar por meio do deslocamento axial em função das posição axial ao longo da barra. Isso está ilustrado na FIGURA 5.

FIGURA 5 - Cinco primeiros modos de vibrar longitudinais do sistema primário.



FONTE: Autor (2023).

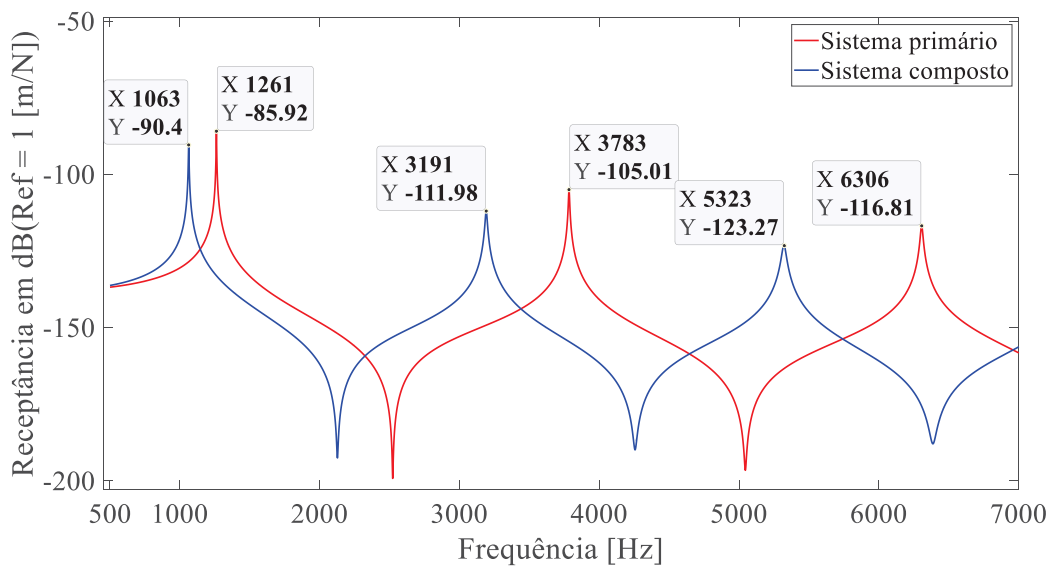
Na TABELA 4 observa-se baixos valores das diferenças percentuais para as frequências compreendidas dentro do intervalo de interesse (500 – 7000 Hz). Além disso, a FIGURA 5 ilustra um comportamento padrão dos cinco primeiros modos de vibrar da estrutura. Dessa forma, é possível afirmar que a representação do modelo do sistema primário está em conformidade com o esperado. Na sequência, são apresentados os resultados com vistas à validação do modelo numérico do sistema composto por material metálico e MVE.

5.2 APRESENTAÇÃO DA FRF NUMÉRICA DO SISTEMA COMPOSTO

Nesta Seção, são mostradas as componentes $n \times n$ da matriz de funções receptâncias do modelo do sistema composto que foi utilizada para todas as comparações no trabalho. Após a validação do modelo do sistema primário, constatou-se que as formas de geração das matrizes de massa e rigidez estavam corretas. Posteriormente, foram calculadas as matrizes globais de massa e rigidez do sistema composto. Em seguida, aplicou-se a metodologia presente no pseudo-algoritmo 4.1 para obter a receptância do sistema primário e composto. Essa simulação foi conduzida com 10000 nós via MEF e 6501 pontos de frequência discretos.

Na FIGURA 6, são observadas pequenas reduções dos picos para o sistema composto em relação aos picos correspondentes do sistema primário. Caracterizando, assim, uma pouca influência do termo de dissipação do MVE nesse tipo de vibração. Além disso, é possível observar que as frequências naturais do sistema composto respeitam aproximadamente as relações $w_2 = 3w_1$ e $w_3 = 5w_1$, assim como ocorre no sistema primário. Aqui w_2 e w_3 são, respectivamente, as frequências naturais do segundo e terceiro modos de vibrar. Nas próximas seções, são ilustradas apenas FRF's do modelo composto, pois apenas este possui parâmetros dependentes da frequência.

FIGURA 6 - Componente n, n da matriz de funções receptâncias dos sistemas primário e composto da estrutura.



FONTE: Autor (2023).

5.3 AVALIAÇÃO DA INFLUÊNCIA DO VETOR INICIAL EM CADA PASSO NA CONVERGÊNCIA DOS MÉTODOS ITERATIVOS

A finalidade desta Seção é apresentar e examinar os diferentes vetores que podem ser utilizados como vetores iniciais em cada iteração dos métodos iterativos MINRES e SYMMLQ. Isso permitiu determinar qual vetor inicial padrão será utilizado em todas as simulações.

A metodologia discutida na Subseção 4.3.2 indica que, no modelo composto, para cada ponto discreto na frequência é resolvido um sistema de equações lineares complexas. Esses serão solucionados pelos métodos MINRES e SYMMLQ, que permitem a utilização de um vetor inicial para começar o processo iterativo. Os vetores, aqui, analisados são:

- Vetor nulo: $\mathbf{X}_0(\Omega_j) = \{\mathbf{0}\}$. Ou seja, o ponto de partida em cada iteração é sempre o vetor nulo.
- Vetor inicial anterior: este vetor é igual ao vetor solução encontrado para a iteração imediatamente anterior, ou seja, $\mathbf{X}_0(\Omega_{j+1}) = \mathbf{X}(\Omega_j)$. Para o primeiro valor discreto de frequência, o vetor inicial é nulo.
- Vetor inicial ΔX : Este vetor é igual ao vetor solução encontrado para o ponto discreto na frequência imediatamente anterior, somado a um vetor $\Delta \mathbf{X}$, no formato $\mathbf{X}_0(\Omega_{j+1}) = \mathbf{X}(\Omega_j) + \Delta \mathbf{X}(\Omega_j)$, onde o vetor $\Delta \mathbf{X}$ é calculado por meio da diferença entre os vetores solução das duas frequências imediatamente anteriores, isto é, $\Delta \mathbf{X}(\Omega_j) = \mathbf{X}(\Omega_j) - \mathbf{X}(\Omega_{j-1})$. Para o primeiro valor discreto de frequência, o vetor inicial é nulo.

Para uma discretização física da barra utilizando elementos finitos lineares e 10000 nós, conseqüentemente, resultando em um sistema de equações lineares de dimensão 10000×10000 , foram testados três diferentes discretizações da frequência para a faixa analisada. Isso foi realizado para avaliar se a escolha do vetor inicial influencia a convergência dos métodos iterativos durante o processo incremental. As TABELA 5 e TABELA 6 apresentam tempos de processamento e números médios de iterações, respectivamente, para os diferentes vetores iniciais e números de pontos discretos na frequência.

TABELA 5 - Tempos de processamento, em segundos, das FRF's do modelo composto, com discretização com 10000 nós, utilizando métodos iterativos com tolerância de $1.e-05$ e para vetores iniciais diferentes.

Método	Vetor inicial	Discretização na frequência		
		5 – 5 (1301 pontos)	1 – 1 (6501 pontos)	0,2 – 0,2 (32501 pontos)
MINRES	Nulo	21,00	108,08	508,22
MINRES	Anterior	9,69	40,46	134,26
MINRES	ΔX	5,29	17,81	70,33
SYMMLQ	Nulo	21,61	110,94	537,92
SYMMLQ	Anterior	9,95	43,96	143,98
SYMMLQ	ΔX	5,58	19,26	77,28

FONTE: Autor (2023).

TABELA 6 – Números médios, em segundos, das FRF's do modelo composto, com discretização com 10000 nós, utilizando métodos iterativos com tolerância de $1.e-05$ e para vetores iniciais diferentes.

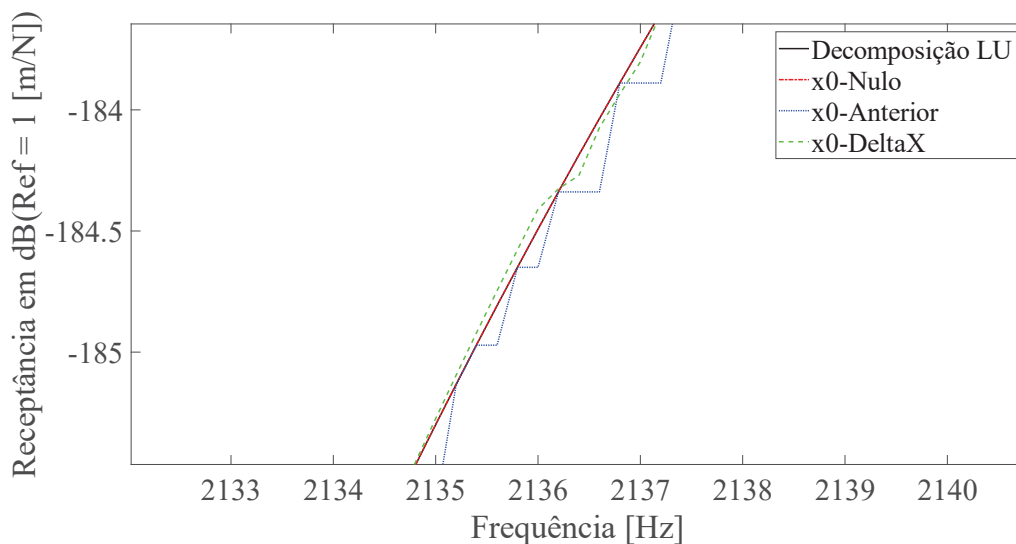
Método	Vetor inicial	Discretização na frequência		
		5 – 5 (1301 pontos)	1 – 1 (6501 pontos)	0,2 – 0,2 (32501 pontos)
MINRES	Nulo	15,6	15,5	15,5
MINRES	Anterior	6,0	5,4	3,4
MINRES	ΔX	3,0	1,9	1,5
SYMMLQ	Nulo	2,0	10,1	15,6
SYMMLQ	Anterior	0,7	3,3	3,1
SYMMLQ	ΔX	0,3	1,1	1,2

FONTE: Autor (2023).

Observa-se nas TABELA 5 e TABELA 6 que, para ambos os métodos iterativos e os três diferentes números de pontos discretos, o uso do vetor inicial baseado numa estimativa da solução da próxima iteração (ΔX) apresentou menores valores para o número médio de iterações e tempo de processamento. Além disso, à medida que o número de pontos discretos da frequência aumenta, menor é a proporção em que o tempo aumenta em relação a discretização anterior para o caso do vetor inicial ΔX . Isso indica que, quanto mais refinada a discretização na frequência, este vetor inicial tende a convergir mais rapidamente. Ao contrário, o comportamento do número médio de iterações não segue um padrão definido à medida que esta discretização é refinada.

No entanto, é importante notar que o número médio de iterações em alguns casos é inferior à um, pois a estimativa inicial já atendia ao critério de parada, resultando em uma solução idêntica ao vetor inicial para aquela frequência. Isso pode ser observado na FIGURA 7, onde a discretização utilizada foi de 0,2 - 0,2 Hertz (32501 pontos). A curva em linha preta representa a solução de referência calculada diretamente e está sobreposta pela curva em vermelho, na qual, devido ao vetor inicial nulo, ocorrem iterações em todas as frequências. A curva em azul indica que em regiões de retas paralelas ao eixo das abscissas ocorreram zero iterações, o que resulta em uma representação indesejada da curva em algumas regiões.

FIGURA 7 - Vista ampliada da região próxima da antirressonância das FRF's do modelo composto, resolvida utilizando o método iterativo MINRES e com diferentes vetores iniciais.



FONTE: Autor (2023).

A curva em verde, qual representa a técnica baseada na estimativa da próxima solução (ΔX) e suaviza a solução tendendo para a curva em preto (que é a solução de referência). Assim, considerando o comportamento vantajoso em termos de tempo de

processamento, número médio de iterações e o formato da curva, escolheu-se essa técnica de estimativa da solução para cada iteração para ser utilizada para as demais simulações envolvendo os métodos iterativos.

5.4 AVALIAÇÃO DA INFLUÊNCIA DA TOLERÂNCIA NA CONVERGÊNCIA DOS MÉTODOS ITERATIVOS

O propósito desta Seção é avaliar como a tolerância afeta o comportamento de convergência dos métodos iterativos MINRES e SYMMLQ. Com esse objetivo realizou-se uma análise das normas L_2 e L_∞ , além do tempo de processamento. Ambas as normas foram calculadas utilizando o vetor da diferença entre a solução referência (obtida por decomposição LU) e a solução obtida via método iterativo. Foram realizadas simulações para uma dada discretização na frequência, considerando três malhas com diferentes números de nós e três tolerâncias distintas para ambos os métodos.

É possível observar nas TABELA 7, TABELA 8 e TABELA 9 que, à medida em que a tolerância se torna mais restrita, o tempo de processamento se eleva significativamente. Além disso, ambas normas L_2 e L_∞ tornam-se menores e com casas decimais próximas, para uma mesma tolerância, diferenciando-se entre os métodos.

TABELA 7 - Análise dos tempos de processamento da FRF do sistema composto e da normas L_∞ e L_2 , utilizando métodos iterativos com diferentes tolerâncias. 6501 pontos na frequência e malha com 16384 nós.

Método	Tolerância	Norma L_∞ [m/N]	Norma L_2 [m/N]	Tempo [s]
MINRES	E-04	3,1908E-08	6,7656E-08	19,47
MINRES	E-05	1,0662E-09	3,4442E-09	23,4762
MINRES	E-06	3,3898E-11	1,7079E-10	31,6436
SYMMLQ	E-04	2,1954E-08	4,8170E-08	21,7049
SYMMLQ	E-05	6,7860E-10	2,8773E-09	25,8546
SYMMLQ	E-06	3,4715E-11	1,5279E-10	34,2878

FONTE: Autor (2023).

TABELA 8 - Análise dos tempos de processamento da FRF do sistema composto e da normas L_∞ e L_2 , utilizando métodos iterativos com diferentes tolerâncias. 6501 pontos na frequência e malha com 65536 nós.

Método	Tolerância	Norma L_∞ [m/N]	Norma L_2 [m/N]	Tempo [s]
MINRES	E-04	7,3753E-08	1,4656E-07	61,1219
MINRES	E-05	2,2903E-09	8,1949E-09	81,7944
MINRES	E-06	8,2845E-11	3,9181E-10	108,0238
SYMMLQ	E-04	5,9441E-08	1,0340E-07	72,8752
SYMMLQ	E-05	3,1246E-09	8,0778E-09	87,0353
SYMMLQ	E-06	8,6278E-11	3,8915E-10	111,0568

FONTE: Autor (2023).

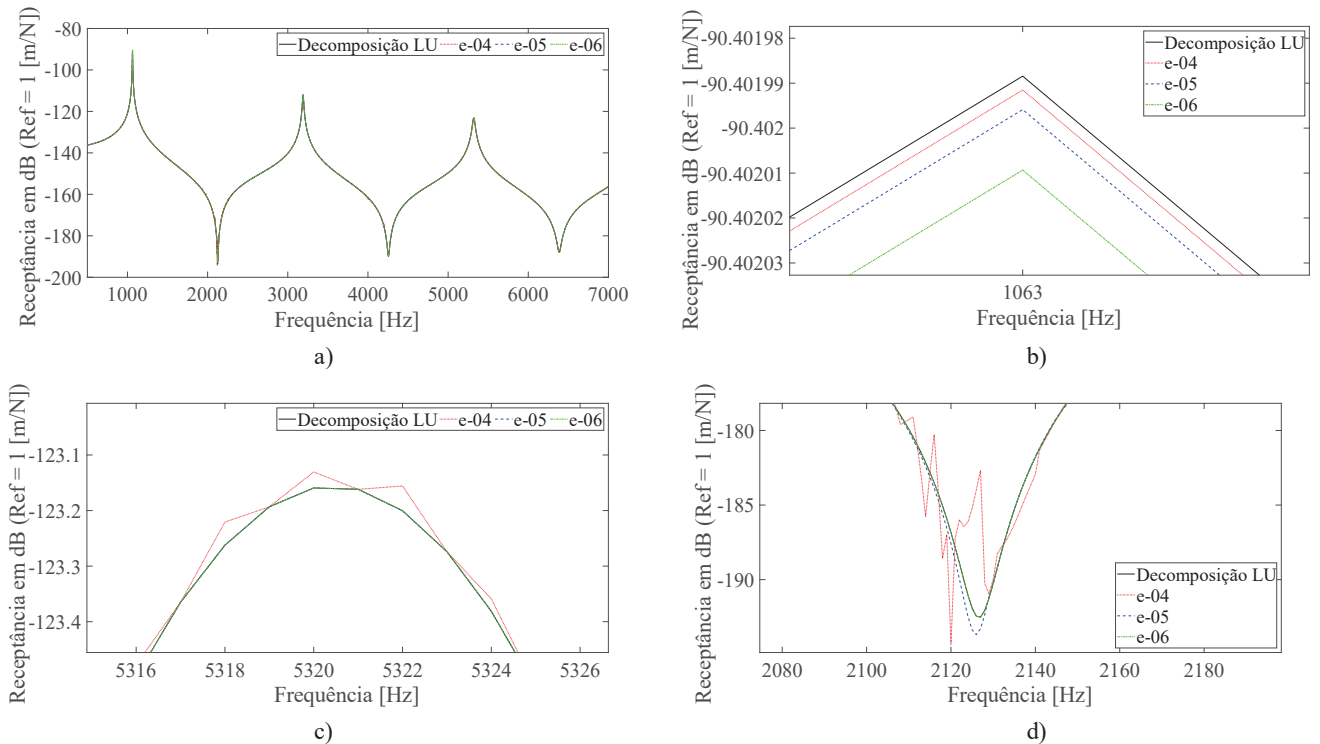
TABELA 9 - Análise dos tempos de processamento da FRF do sistema composto e da normas L_∞ e L_2 , utilizando métodos iterativos com diferentes tolerâncias. 6501 pontos na frequência e malha com 262144 nós.

Método	Tolerância	Norma L_∞ [m/N]	Norma L_2 [m/N]	Tempo [s]
MINRES	E-04	1,9475E-07	3,9437E-07	188,9037
MINRES	E-05	7,3314E-09	1,8797E-08	249,6520
MINRES	E-06	3,1961E-10	1,02796E-09	326,9746
SYMMLQ	E-04	1,3308E-07	2,8827E-07	252,4416
SYMMLQ	E-05	7,7204E-09	1,6797E-08	270,2612
SYMMLQ	E-06	3,0010E-10	1,0062E-09	351,9529

FONTE: Autor (2023).

A análise de uma Função de Resposta em Frequência (FRF) é crucial para a visualização das frequências naturais do modelo mecânico. Esta análise requer precisão para representar adequadamente as regiões que correspondem aos picos. Nesse contexto, foram geradas FRF's utilizando os parâmetros descritos na TABELA 9. Assim, a FIGURA 8.a e a FIGURA 9.a apresentam as FRF's obtidas utilizando os métodos MINRES e SYMMLQ, respectivamente. Nessas figuras, observa-se uma sobreposição das curvas. Entretanto, ao observar uma ampliação das regiões dos picos e das antirressonâncias, é possível identificar algumas discrepâncias.

FIGURA 8 - Análise comparativa gráfica entre FRF's do sistema composto via método iterativo MINRES com diferentes tolerâncias.



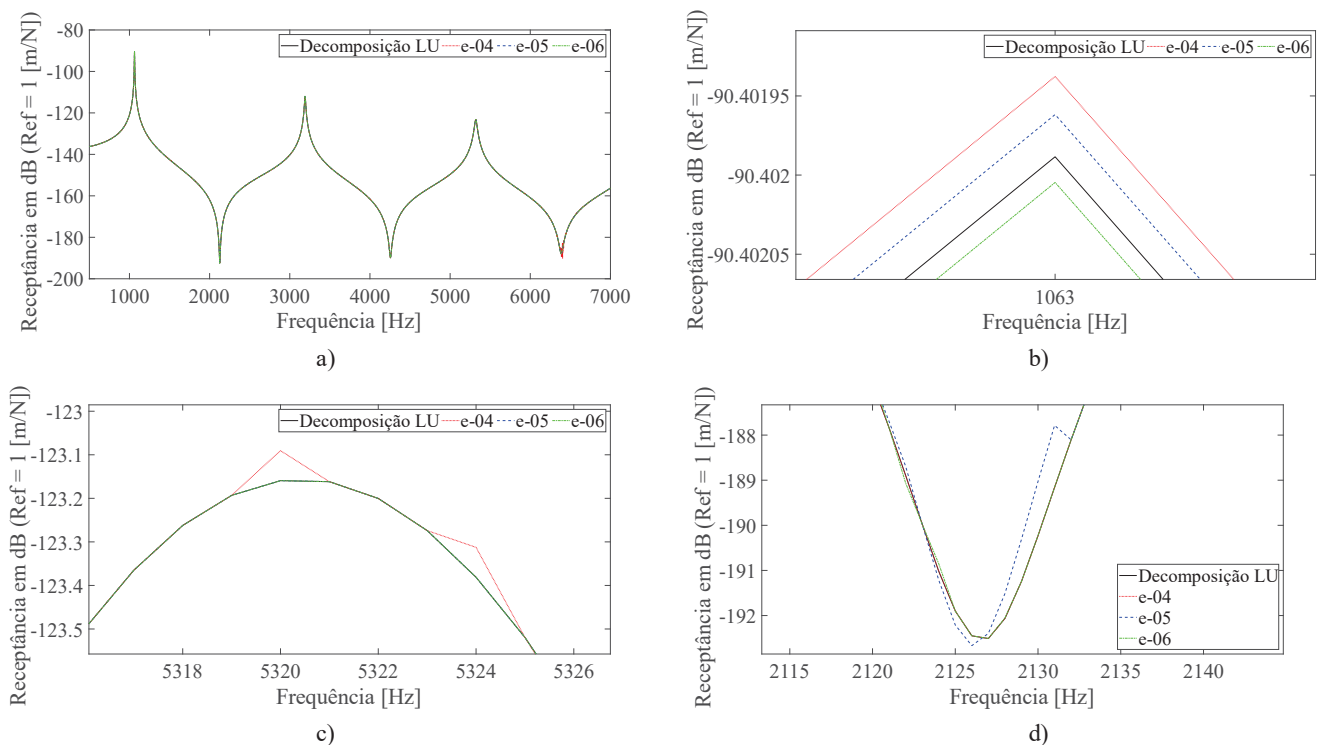
FONTE: Autor (2023).

LEGENDA: a) FRF em toda faixa de frequência; b) Ampliação da região do primeiro pico; c) Ampliação da região do terceiro pico; d) Ampliação na região da primeira antirressonância.

Nas FIGURA 8.b e a FIGURA 9.b constata-se que as curvas diferem somente na sexta casa significativa no ponto do pico. Por outro lado, na região do terceiro pico (FIGURA 8.c e a FIGURA 9.c), as imprecisões já se mostram no quarto dígito significativo. É possível observar que a tolerância $1.e-04$, para ambos os métodos, é insuficiente para representar adequadamente a FRF nessa faixa. Além disso, para essa tolerância, no intervalo correspondente à primeira antirressonância, a curva do método iterativo MINRES apresenta uma significativa diferença em relação à com a curva referência, conforme ilustrado na FIGURA 8.d.

De forma geral, ambos os métodos com tolerâncias $1.e-05$ e $1.e-06$ se mostraram capazes de reproduzir a FRF do modelo do sistema composto com boa precisão. Considerando essa precisão e a pequena diferença entre as normas L_2 dessas tolerâncias, optou-se por utilizar tolerância $1.e-05$, para a análise comparativa deste estudo, uma vez que demandou um menor tempo de processamento.

FIGURA 9 - Análise comparativa gráfica entre FRF's do sistema composto via método iterativo SYMMLQ com diferentes tolerâncias.



FONTE: Autor (2023).

LEGENDA: a) FRF em toda faixa de frequência; b) Ampliação da região do primeiro pico; c) Ampliação da região do terceiro pico; d) Ampliação na região da primeira antirressonância.

5.5 AVALIAÇÃO DA INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE MODOS DE TRUNCAMENTO NOS MÉTODOS BASEADOS EM TRUNCAMENTO MODAL

Nesta Seção, é avaliado o número de modos necessários durante a aplicação do método Floody-Espíndola para realizar o truncamento modal, a fim de aproximar adequadamente as propriedades do material viscoelástico no intervalo de interesse. Para isso, diferentes truncamentos foram avaliados numericamente e graficamente.

A TABELA 10 e a TABELA 11 foram geradas com 6501 pontos discretos na frequência e, respectivamente, 65536 e 262144 nós na malha do MEF. A análise dessas tabelas indica que, à medida que o número de modos truncados é elevado, o tempo de processamento também aumenta. Esse aumento de tempo está relacionado fortemente com o primeiro problema de autovalores/autovetores. Em contrapartida, as alterações nas normas são insignificantes.

TABELA 10 - Método Floody-Espíndola: Normas L_∞ e L_2 e tempo de processamento da FRF do sistema composto utilizando números diferentes de modos de vibrar para o truncamento. 6501 pontos na frequência e malha com 65536 nós.

Número de modos	Norma L_∞ [m/N]	Norma L_2 [m/N]	Tempo [s]
10	2,6226E-06	4,5400E-06	7,71
20	2,6228E-06	4,5365E-06	11,38
30	2,6228E-06	4,5359E-06	15,52
40	2,6228E-06	4,5356E-06	19,61
50	2,6228E-06	4,5355E-06	23,83
100	2,6229E-06	4,5354E-06	46,43

FONTE: Autor (2023).

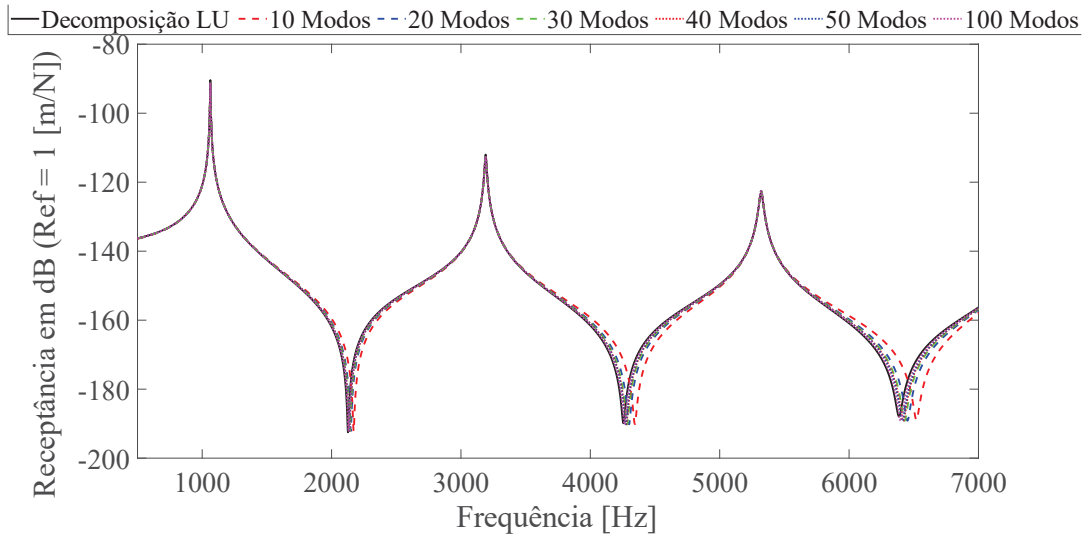
TABELA 11 - Método Floody-Espíndola: Normas L_∞ e L_2 e tempo de processamento da FRF do sistema composto utilizando números diferentes de modos de vibrar para o truncamento. 6501 pontos na frequência e malha com 262144 nós.

Número de modos	Norma L_∞ [m/N]	Norma L_2 [m/N]	Tempo [s]
10	2,6229E-06	4,5406E-06	39,74
20	2,6230E-06	4,5371E-06	65,54
30	2,6231E-06	4,5365E-06	88,84
40	2,6231E-06	4,5362E-06	127,29
50	2,6231E-06	4,5361E-06	144,42
100	2,6231E-06	4,5360E-06	268,56

FONTE: Autor (2023).

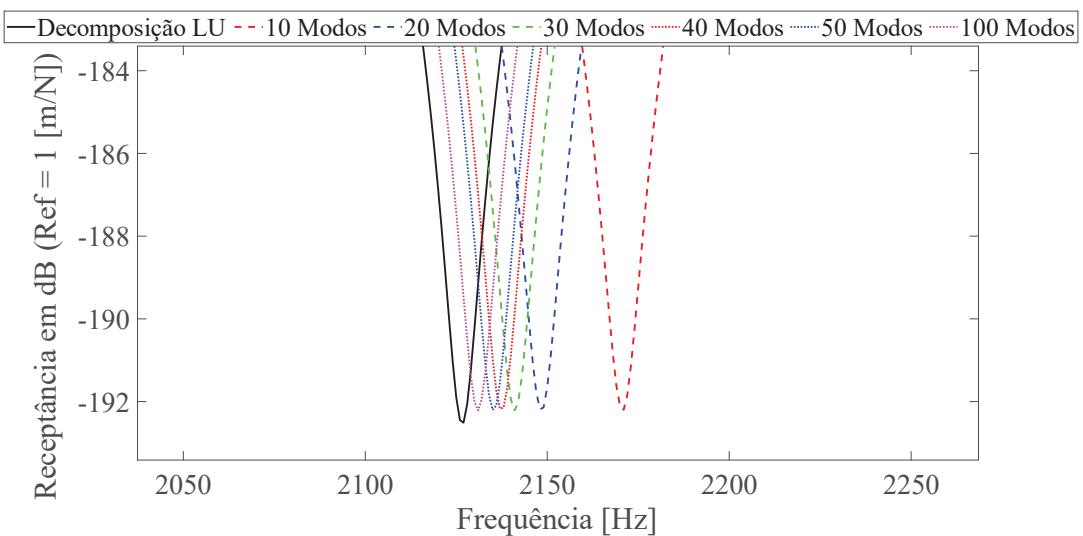
Na FIGURA 10, fica evidente que as principais diferenças entre as soluções se dão apenas nas regiões das antirressonâncias do segundo e terceiro modo. Ao ampliar a região da primeira antirressonância na FIGURA 11, nota-se que, de fato, quanto mais modos são utilizados, a curva se aproxima da curva referência.

FIGURA 10 - Método Floody-Espíndola: FRF's do sistema composto, com diferentes números de modos de vibrar para o truncamento. 6501 pontos na frequência e malha com 262144 nós.



FONTE: Autor (2023).

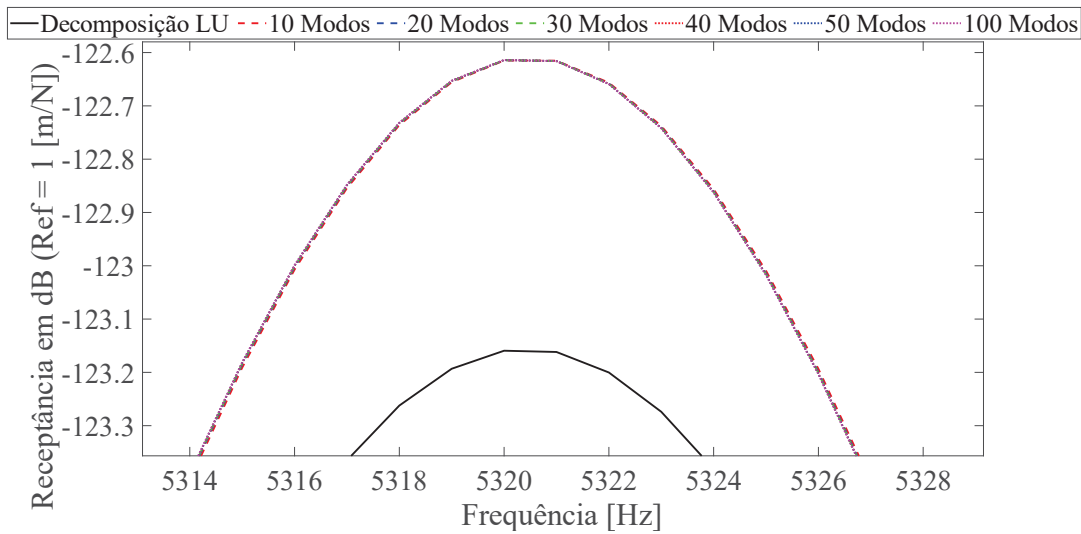
FIGURA 11 - Método Floody-Espíndola: Vista ampliada da região da primeira antirressonância das FRF's do sistema composto, utilizando diferentes números de modos de vibrar para o truncamento. 6501 pontos na frequência e malha com 262144 nós.



FONTE: Autor (2023).

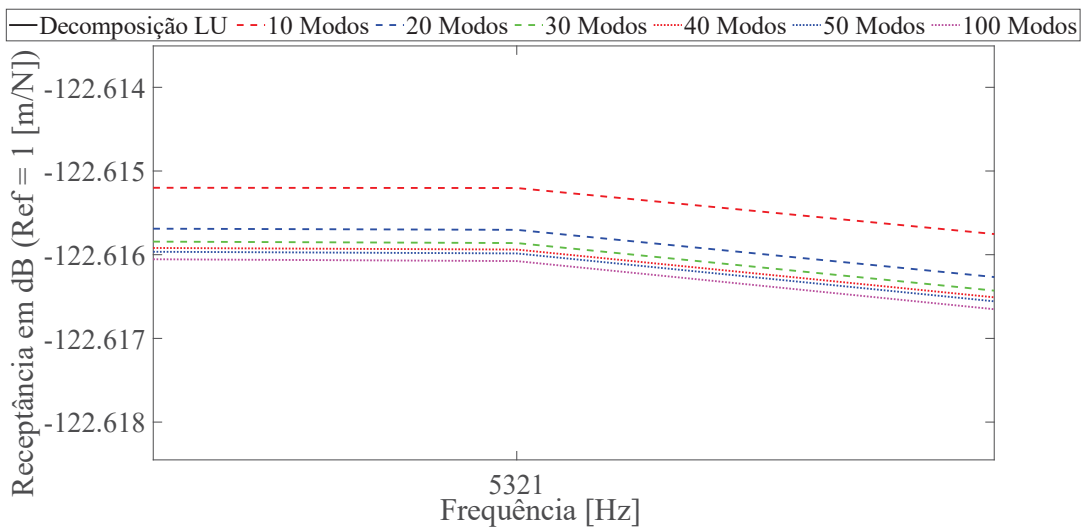
A região do segundo pico é representada na FIGURA 12. Nesta figura, pode-se notar que as curvas estão sobrepostas e diferem aproximadamente 0,6 dB em amplitude do valor de referência. Já na FIGURA 13, verifica-se pelo eixo das ordenadas que no pico, as curvas divergem no sétimo dígito significativo. Assim, considerando o comportamento gráfico e numérico, optou-se por utilizar 30 modos nas simulações dos métodos Floody-Espíndola e Floody-Espíndola Modificado.

FIGURA 12 - Método Floody-Espíndola: Vista da região aproximada do terceiro pico das FRF's do sistema composto, com diferentes números de modos de vibrar para o truncamento. 6501 pontos na frequência e malha com 262144 nós.



FONTE: Autor (2023).

FIGURA 13 - Método Floody-Espíndola: Vista ampliada da região aproximada do terceiro pico das FRF's do sistema composto, com diferentes números de modos de vibrar para o truncamento. 6501 pontos na frequência e malha com 262144 nós.



FONTE: Autor (2023).

5.6 ANÁLISE COMPARATIVA DAS METODOLOGIAS IMPLEMENTADAS

Nesta Seção, são apresentados resultados relativos aos tempos de processamento e às normas L_2 e L_∞ , definidas a partir do vetor diferença entre a solução obtida para cada metodologia e a solução de referência, para todos as metodologias expostas na Seção 4.3,

considerando os parâmetros adotados nas Seções 5.3, 5.4 e 5.5. A partir desses resultados, é realizada uma análise comparativa entre os métodos.

5.6.1 Tempos de processamento

Nesta subseção, o tempo relativo de processamento obtido pela divisão do tempo de processamento do método avaliado pelo tempo decorrente da aplicação do método de referência, a decomposição LU. Quando esse parâmetro é superior a um, indica que o método testado tem o tempo de processamento superior ao do método de referência.

Pode-se observar na TABELA 12 que, o tempo relativo é inferior a um apenas para os métodos baseados em truncamento. Além disso, estes métodos apresentam variações insignificantes do tempo relativo à medida que a ordem do sistema aumenta. Em contraste, as metodologias MINRES e SYMMLQ demonstram tempos relativos superiores a um, reduzindo à medida que a ordem dos sistemas aumenta. Isso, indica que para sistemas de ordens maiores que as apresentadas aqui, esses métodos poderiam oferecer tempos inferiores aos obtidos quando da aplicação da decomposição LU.

TABELA 12 - Tempos de processamento e tempos relativos do cálculo da FRF do sistema composto, considerando 6501 pontos discretos na frequência.

Método	Resultado	Ordem do sistema		
		16384	65536	262144
Decomposição LU	Tempo (s)	14,32	58,29	239,86
MINRES	Tempo (s)	23,48	81,79	249,65
	Tempo relativo	1,6399	1,4032	1,0408
SYMMLQ	Tempo (s)	25,85	87,04	270,26
	Tempo relativo	1,8060	1,4931	1,1267
Floody-Espíndola	Tempo (s)	4,01	16,82	69,81
	Tempo relativo	0,2801	0,2886	0,2910
Floody-Espíndola Modificado	Tempo (s)	5,30	21,78	91,25
	Tempo relativo	0,3704	0,3736	0,3804

FONTE: Autor (2023)

Conforme o número de pontos avaliados na frequência aumenta, de acordo com as TABELA 12 e TABELA 13, as metodologias iterativas exibem tempos relativos inferiores a um para a ordem de sistema mais elevadas (262144). Isso ocorre porque, à medida que os pontos de frequência se tornam mais próximos, o vetor inicial, dependente da solução na frequência anterior, se mostra uma melhor aproximação para a solução no passo corrente, em comparação com o vetor inicial para a discretização com menos pontos. Assim, nessas situações, a solução converge mais rápido.

Entretanto, para sistemas com ordens inferiores (de 16384 e 65536), as metodologias iterativas não se mostraram eficazes, uma vez que os tempos relativos são maiores que um. Os métodos baseados em truncamento modal se comportaram de maneira similar à condição anterior, já que para essas metodologias o vetor inicial não influencia na obtenção do resultado.

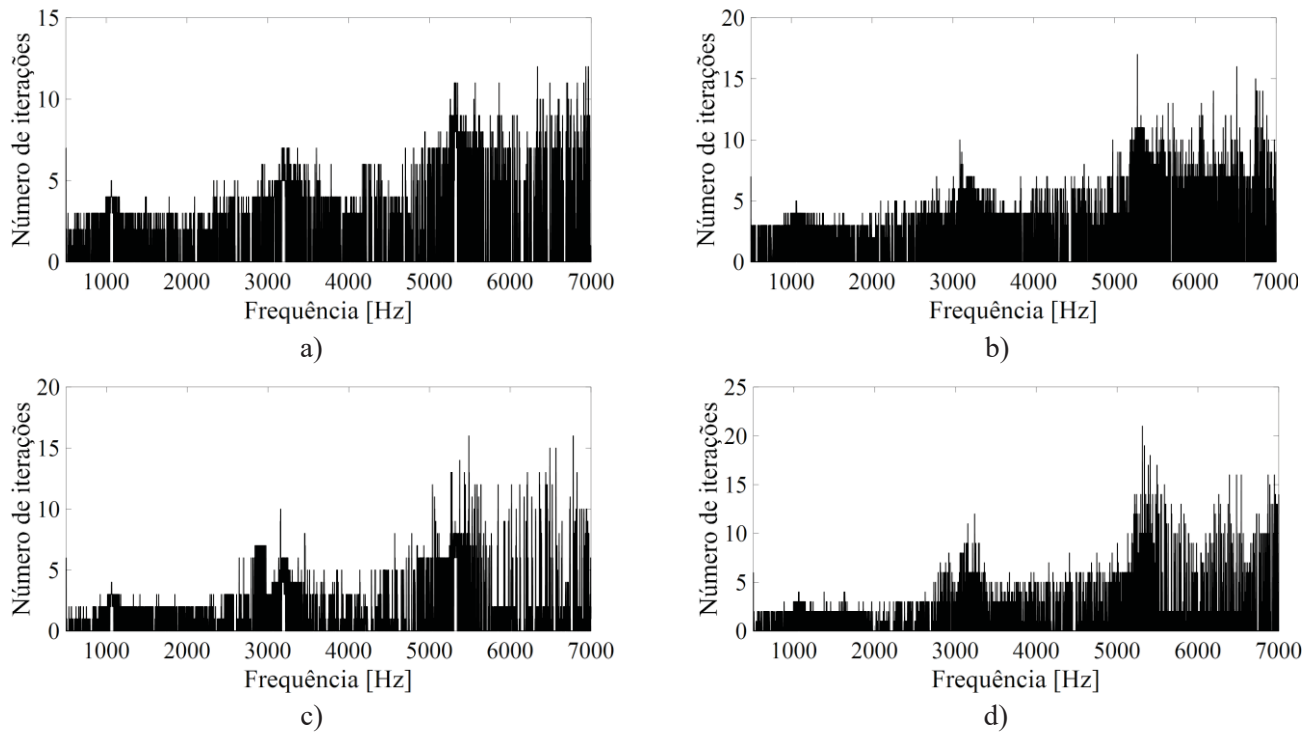
TABELA 13 - Tempos de processamento e tempos relativos do cálculo da FRF do sistema composto, considerando 32501 pontos discretos na frequência.

Método	Resultado	Ordem do sistema		
		16384	65536	262144
Decomposição LU	Tempo (s)	70,68	291,79	1.195,10
MINRES	Tempo (s)	91,26	307,35	928,69
	Tempo relativo	1,2913	1,0533	0,7771
SYMMLQ	Tempo (s)	107,90	357,94	1.004,80
	Tempo relativo	1,5267	1,2267	0,8408
Floody-Espíndola	Tempo (s)	17,40	72,98	311,18
	Tempo relativo	0,2462	0,2501	0,2604
Floody-Espíndola Modificado	Tempo (s)	18,17	77,72	328,51
	Tempo relativo	0,2570	0,2664	0,2749

FONTE: Autor (2023).

Outro ponto analisado foi o número de iterações do método iterativo para a convergência de cada sistema de equações, ilustrado na FIGURA 14. Observa-se que nos casos b) e d), relativos à sistemas de ordem mais elevada (32501), os métodos geraram números inferiores de iterações em comparação com os casos a) e c), (para sistemas de menor ordem, 6501), respectivamente. Nota-se também que, quando os sistemas estão sendo avaliados em frequências mais altas, a tendência é que o número médio de iterações seja mais elevado, para todos os casos. Isso ocorre, porque nessas frequências, as propriedades do MVE variam mais fortemente e, por consequência, o sistema de equações é mais alterado quando o valor da frequência é alterado entre passos subsequentes.

FIGURA 14 - Número de iterações em cada valor de frequência.



FONTE: Autor (2023).

LEGENDA: a) MINRES - 6501 pontos; b) MINRES - 32501; c) SYMMLQ - 6501; d) SYMMLQ - 32501.

5.6.2 Normas L_∞ e L_2

Nesta Subseção, são analisadas a qualidade das soluções obtidas quando da aplicação das metodologias iterativas e de truncamento modal. Para isso, são definidas as funções diferenças entre as soluções obtidas pelos métodos em análise e a solução obtida pelo método de referência (decomposição LU). Naturalmente, esta função diferença é avaliada em pontos discretos da frequência. Com isso, a intensidade de cada uma dessas funções é avaliada pelo valor aproximado das suas normas L_∞ e L_2 . Esses valores das normas são apresentados em formas de tabelas, visando facilitar a observação dos resultados.

A partir das TABELAS 14 e 15, é possível constatar que os valores das normas L_∞ dos métodos iterativos são menores em comparação com os métodos baseados em truncamento modal. Isso sugere que, para os métodos iterativos, o "pior" componente do vetor solução está mais próximo da solução do problema quando comparado com o "pior" componente dos métodos baseados em truncamento. Ainda, verificou-se que, com uma maior discretização na frequência, ambos os métodos iterativos tiveram valores mais elevados para essa norma, enquanto os demais métodos mantiveram valores inalterados.

TABELA 14 - Norma L_∞ [m/N] da FRF do sistema composto, com discretização na frequência em 6501 pontos, para diferentes métodos e ordens de sistemas.

Método	Ordem do sistema		
	16384	65536	262144
MINRES	1,0662E-09	2,2903E-09	7,3314E-09
SYMMLQ	6,7860E-10	3,1246E-09	7,7204E-09
Floody-Espíndola	2,6228E-06	2,2668E-06	2,6231E-06
Floody-Espíndola Modificado	2,6121E-06	2,6121E-06	2,6124E-06

FONTE: Autor (2023)

TABELA 15 - Norma L_∞ [m/N] da FRF do sistema composto, com discretização na frequência em 32501 pontos, para diferentes métodos e ordens de sistemas.

Método	Ordem do sistema		
	16384	65536	262144
MINRES	4,2552E-09	1,5396E-08	2,6343E-08
SYMMLQ	4,7967E-09	1,2673E-08	1,4423E-08
Floody-Espíndola	2,6228E-06	2,2668E-06	2,6231E-06
Floody-Espíndola Modificado	2,6121E-06	2,6121E-06	2,6124E-06

FONTE: Autor (2023)

A análise deste conjunto de resultados reforça a eficácia dos métodos iterativos em obter uma aproximação para a solução referencial, destacando que, mesmo com a maior discretização na frequência, os métodos iterativos mantêm uma vantagem ao apresentarem valores inferiores de normas L_∞ , assim, possuindo componentes na FRF mais próximos da solução do problema, em comparação com os métodos baseados em truncamento modal.

Pelas TABELAS 16 e 17, nota-se que os métodos MINRES e SYMMLQ obtiveram valores inferiores da norma L_2 em relação aos métodos baseados em truncamento modal. Isso indica que suas FRF's geradas são mais próximas da curva de referência na maioria de seus componentes. Sob outra perspectiva, com uma maior discretização na frequência, todos os métodos iterativos apresentaram valores maiores dessa norma. Isso pode ser atribuído ao fato de que os vetores iniciais para essa discretização atendiam ao critério de convergência, resultando em zero iterações. Como resultado, para alguns valores de frequência, o vetor solução pode não estar muito bem calculado.

TABELA 16 - Norma L_2 [m/N] da FRF do sistema composto, com discretização na frequência em 6501 pontos, para diferentes métodos e ordens de sistemas.

Método	Ordem do sistema		
	16384	65536	262144
MINRES	3,4442E-09	8,1949E-09	1,8797E-08
SYMMLQ	2,8773E-09	8,0778E-09	1,6797E-08
Floody-Espíndola	4,5359E-06	4,5359E-06	4,5365E-06
Floody-Espíndola Modificado	4,5172E-06	4,5173E-06	4,5179E-06

FONTE: Autor (2023)

TABELA 17 - Norma L_2 [m/N] da FRF do sistema composto, com discretização na frequência em 32501 pontos, para diferentes métodos e ordens de sistemas.

Método	Ordem do sistema		
	16384	65536	262144
MINRES	1,6013E-08	4,1853E-08	7,2073E-08
SYMMLQ	1,5452E-08	3,7845E-08	6,1939E-08
Floody-Espíndola	1,0142E-05	1,0142E-05	1,0142E-05
Floody-Espíndola Modificado	1,0100E-05	1,0100E-05	1,0101E-05

FONTE: Autor (2023).

Isso pode ser atribuído ao fato de que os vetores iniciais para essa discretização atendiam ao critério de convergência, resultando em zero iterações. Como resultado, alguns componentes da FRF (considerando o grau de liberdade da resposta) podem não estar tão refinados quanto aqueles que passaram por iterações.

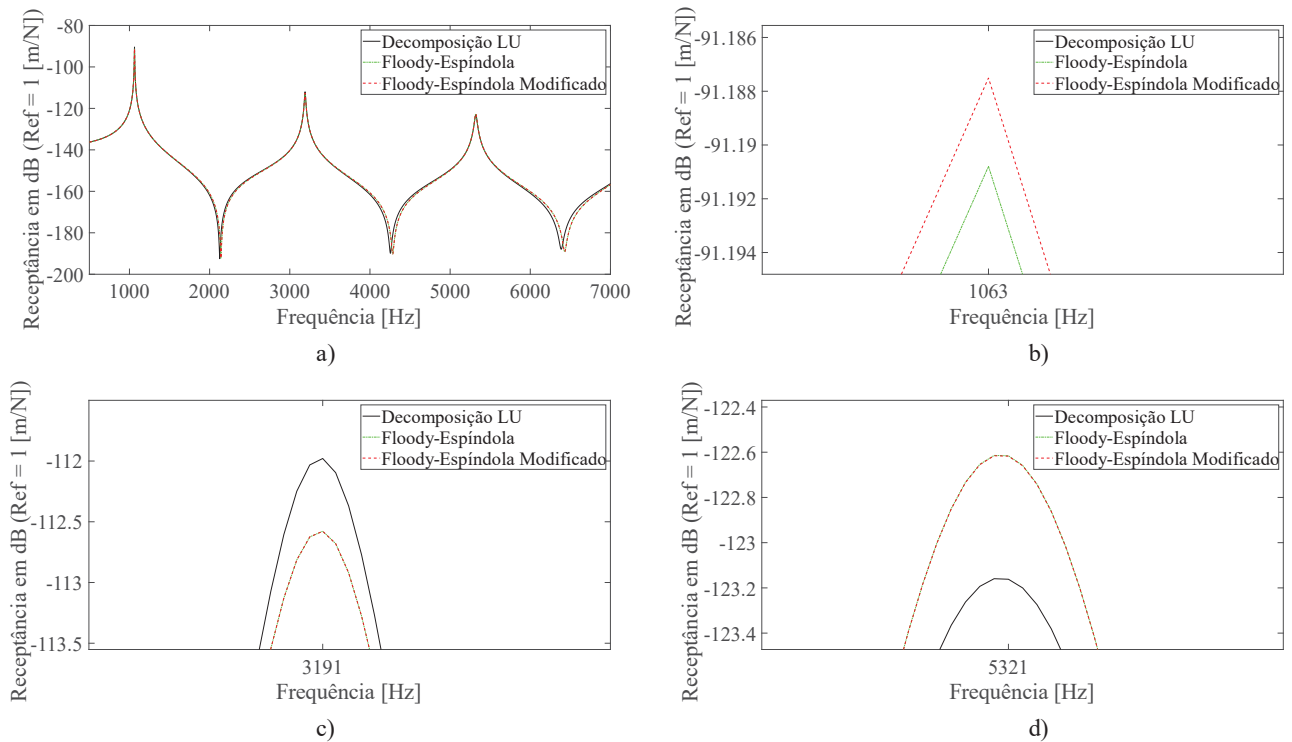
O método Floody-Espíndola Modificado apesar de apresentar valores menores para as normas em relação ao método Floody-Espíndola, considera-se, aqui, que os resultados são semelhantes em ambos. No caso dos métodos iterativos, o método SYMMLQ apresentou normas L_2 inferiores àquelas do método MINRES, na maioria dos casos.

5.6.3 Análise gráfica das FRF's

O objetivo desta subseção é avaliar diretamente a partir dos gráficos das FRF's, para verificar a adequação das curvas obtidas na análise dinâmica de sistemas compostos por MVE. Todas as receptâncias foram obtidas usando a escala em dB com referência 1 [m/N].

A configuração com 6501 pontos discretos na frequência e malha 262144 nós foi a que apresentou os maiores valores das normas L_∞ e L_2 , conforme verificado na Subseção 5.6.2. Portanto, para avaliar a precisão das curvas, essa é a primeira condição abordada.

FIGURA 15 - FRF'S dos métodos por truncamento modal. 6501 pontos na frequência e malha com 262144 nós.



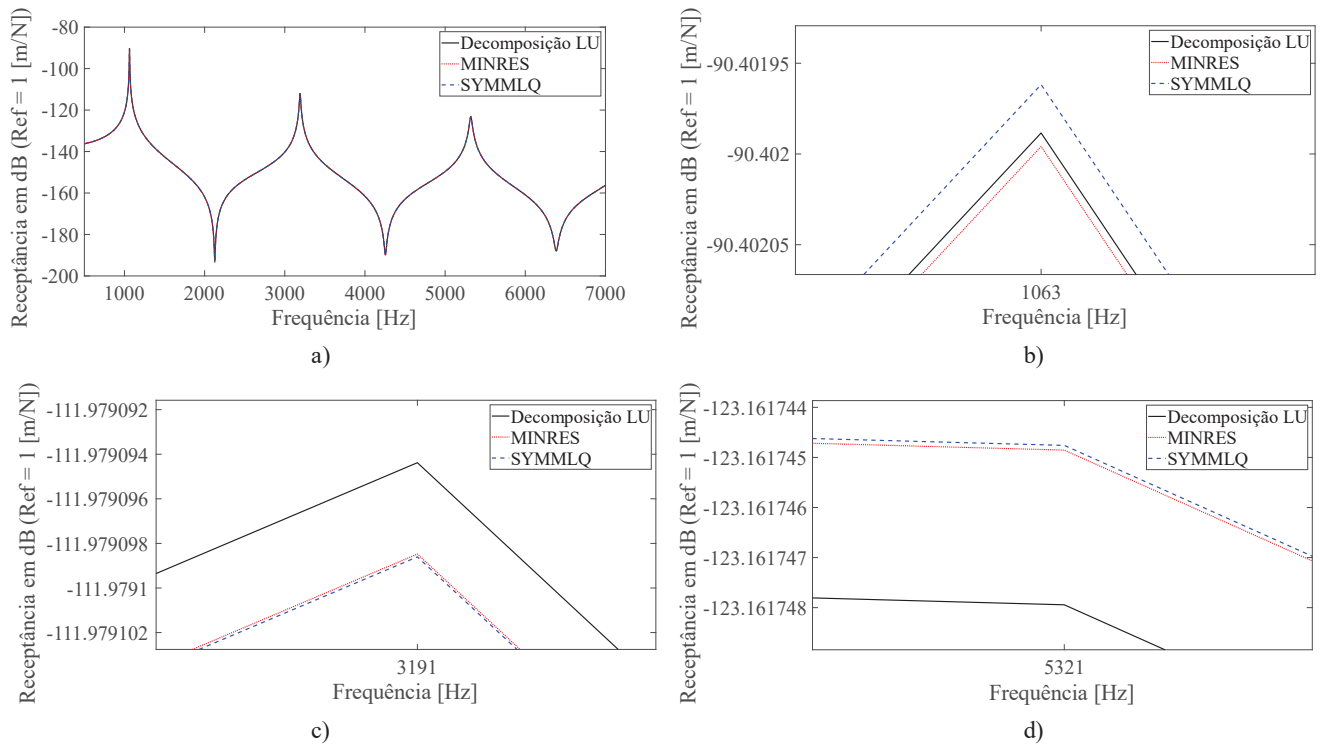
FONTE: Autor (2023).

LEGENDA: a) FRF em toda faixa de frequência; b) Ampliação da região do primeiro pico; c) Ampliação da região do segundo pico; d) Ampliação na região do terceiro pico.

Na FIGURA 15.a é possível observar que as três curvas parecem sobrepostas. No entanto, ao aproximar as regiões dos picos, verifica-se uma discrepância dos valores, como evidenciado na FIGURA 15.c e FIGURA 15.d, onde ocorrem variações de até 0,6 dB. Além disso, os métodos baseados em truncamento apresentam pouca diferença visual, como mostrado nas FIGURA 15.b, onde a discrepância está na quinta casa significativa. Isso sugere que os métodos têm soluções gráficas similares. Além disso, considerando que o método Floody-Espindola modificado demanda mais tempo computacional, o método Floody-Espindola deve ser preferido dentre essas abordagens metodológicas.

As FRF's geradas por meio das metodologias iterativas estão apresentadas na FIGURA 16.a. Considerando 6501 pontos na frequência e malha com 262144 nós, os métodos MINRES e SYMMLQ mostraram-se muito precisos, pois nos pontos do pico, os valores de receptância divergem somente no sétimo dígito significativo para o ponto no primeiro pico (FIGURA 16.b). Já para o segundo (FIGURA 16.c) e terceiro (FIGURA 16.d) picos, os valores divergem no décimo dígito significativo. Ainda, conforme a TABELA 14 e a TABELA 16, as maiores normas L_∞ e L_2 ocorrem para os mesmos parâmetros da FIGURA 16. Isso indica que mesmo para as maiores normas, a receptância ainda é bem aproximada.

FIGURA 16 - Comparação das FRF's dos métodos iterativos. 6501 pontos na frequência e malha com 262144 nós.



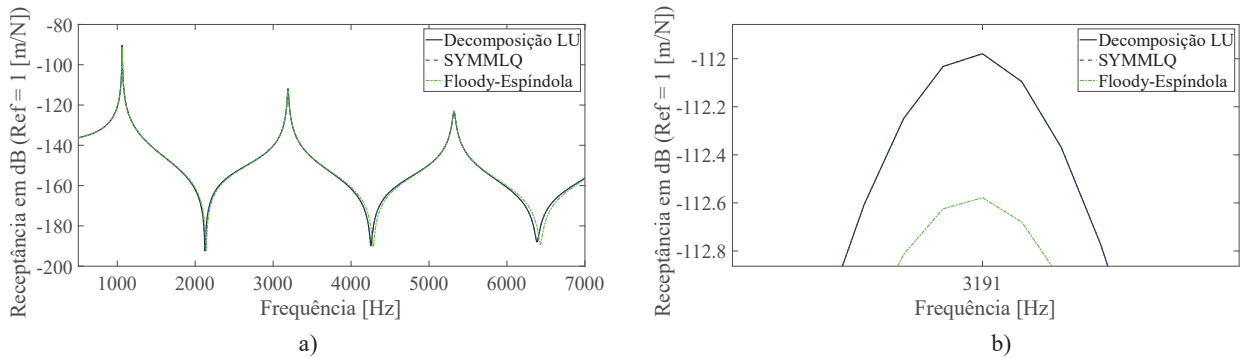
FONTE: Autor (2023).

LEGENDA: a) FRF em toda faixa de frequência; b) Ampliação da região do primeiro pico; c) Ampliação da região do segundo pico; d) Ampliação na região do terceiro pico.

Uma análise comparativa entre a metodologia Floody-Espíndola e um dos métodos iterativos (SYMMLQ), está ilustrada na FIGURA 17. Com base na FIGURA 17.b, compreende-se que os métodos iterativos aproximam melhor na região dos picos em relação ao método baseado em truncamento modal. Nesse ponto, a diferença é de aproximadamente 0,6 dB. No entanto, é importante destacar que o custo computacional, em termos de tempo de processamento, foi aproximadamente 70% maior para os métodos iterativos.

Aumentando o número de pontos na discretização da frequência, observou-se na FIGURA 18 que o método iterativo SYMMLQ apresenta somente pequenas variações na região do pico em relação ao que foi ilustrado na FIGURA 16. O comportamento dos métodos baseados em truncamento manteve-se inalterado em relação à condição apresentada anteriormente. Isso indica que a discretização de 6501 pontos (equivalente a uma frequência de amostragem de 1 Hz) já seria suficiente para representar a receptância por meio dos métodos baseados em truncamento.

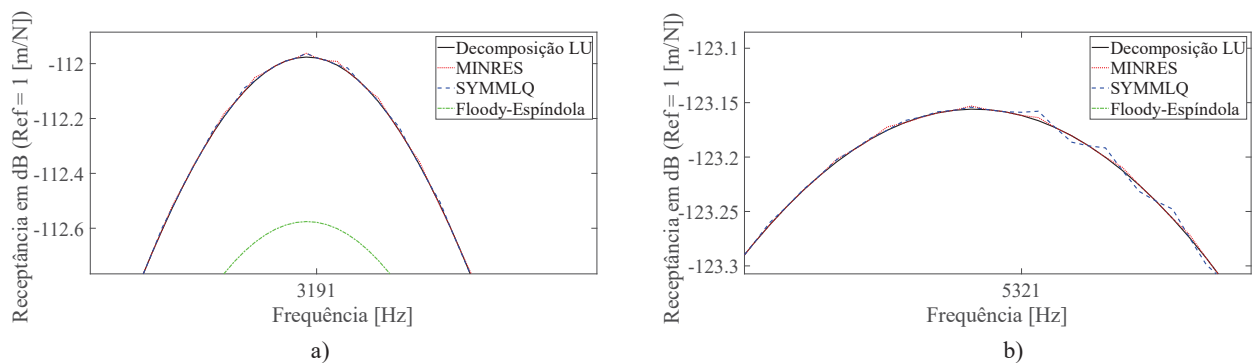
FIGURA 17 - Comparação entre as FRF's dos métodos SYMMLQ e Floody-Espíndola. 6501 pontos na frequência e malha com 262144 nós.



FONTE: Autor (2023).

LEGENDA: a) FRF em toda faixa de frequência; b) Ampliação da região do segundo pico.

FIGURA 18 - Comparação entre as FRF's na regiões ampliadas dos picos para diferentes métodos. 32501 pontos na frequência e malha com 262144 nós.

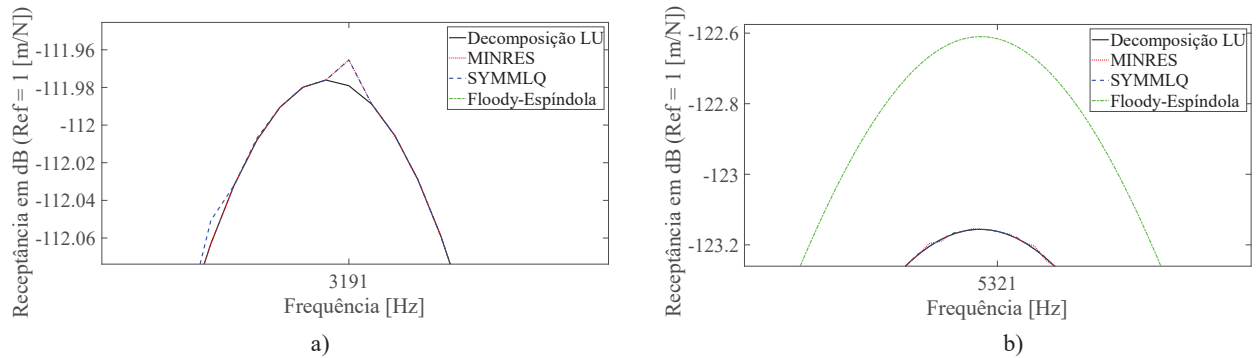


FONTE: Autor (2023).

LEGENDA: a) Ampliação da região do segundo pico; b) Ampliação da região do terceiro pico.

Nas FIGURAS 19 e 20, foram examinadas as regiões dos picos das FRF's do sistema composto para as condições de 65536 e 16384 nós da malha do MEF, respectivamente. Verificou-se que os métodos iterativos representaram bem a curva nessa região. No entanto, e importante notar que a TABELA 13 indicou que, nessas simulações o tempo de processamento não foi satisfatório. Dessa forma, apesar de apresentar um bom comportamento gráfico, para essas condições, os métodos iterativos não deveriam ser escolhidos.

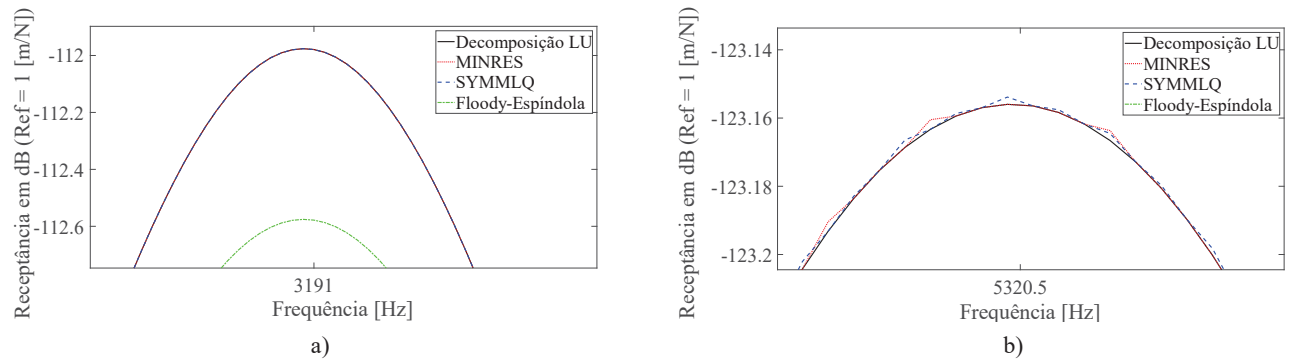
FIGURA 19 - Comparação entre as FRF's na regiões ampliadas dos picos para diferentes métodos. 32501 pontos na frequência e malha com 65536.



FONTE: Autor (2023).

LEGENDA: a) Ampliação da região do segundo pico; b) Ampliação da região do terceiro pico.

FIGURA 20 - Comparação entre as FRF's nas regiões ampliadas dos picos para diferentes métodos. Configuração: 32501 pontos na frequência e malha com 16384 nós.

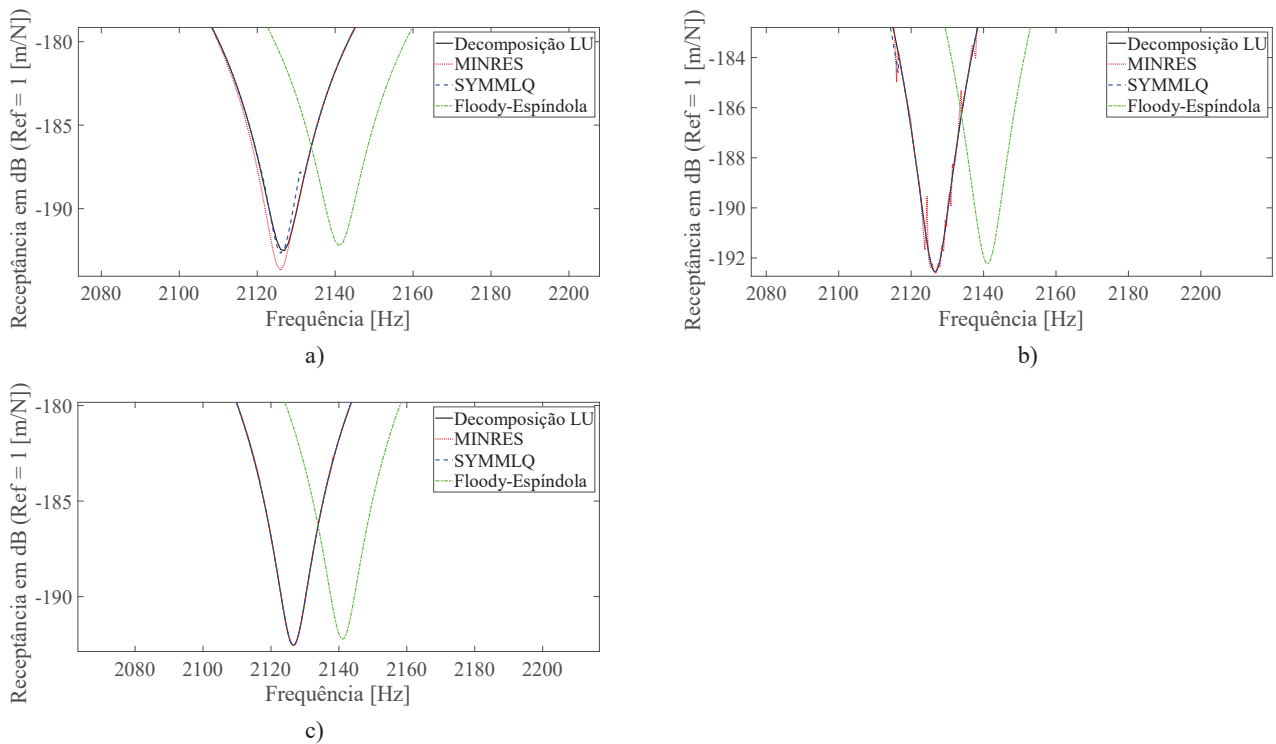


FONTE: Autor (2023).

LEGENDA: a) Ampliação da região do segundo pico; b) Ampliação da região do terceiro pico.

Na FIGURA 21 observa-se uma vista ampliada da região do primeira antirressonância em diferentes condições. É possível perceber, que o método Floody-Espindola apresenta um deslocamento à direita em relação aos demais métodos. Os métodos iterativos, contudo, apresentaram boas aproximações para os itens a) e c). No caso do item b), notam-se algumas imprecisões do método MINRES.

FIGURA 21 - Ampliação da região da primeira antirressonância para diferentes condições e diferentes métodos.



FONTE: Autor (2023).

LEGENDA: a) 6501 pontos na frequência e 262144 nós; b) 32501 pontos na frequência e 262144 nós; c) 32501 pontos na frequência e 65536 nós.

Comparando a FIGURA 20 com os dados presentes nas TABELAS 12 e 13 entendem-se duas situações. A primeira ocorre em condições em que os métodos iterativos na FIGURA 21.a e na FIGURA 21.c onde as primeiras possuem uma boa aproximação dessa região, mas exibiram tempos de processamento superiores à decomposição LU. A segunda, acontece na FIGURA 21.b onde ocorre o oposto, os métodos iterativos possuem menores tempos de processamento, não obstante, sua representação gráfica apresenta imprecisões.

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste capítulo, é discutida a importância dos resultados obtidos neste estudo. Além disso, são sugeridas tópicos de pesquisa que poderiam ser desenvolvidas em trabalhos futuros.

6.1 CONCLUSÕES

No presente trabalho foi realizada a implementação de métodos iterativos de subespaço de Krylov na resolução de sistemas de equações lineares complexas nos cálculos de FRF's, especificamente, de estruturas com parâmetros dependentes da frequência, tais como os MVE's. Além disso, realizaram-se comparações com as frequências naturais do sistema primário, com o intuito de certificar se a geração das matrizes de massa e rigidez por meio do MEF estavam corretas. Testaram-se, também, alguns parâmetros dos métodos iterativos que demonstraram ter forte influência no comportamento de convergência, tais como a tolerância e o vetor inicial.

A premissa de que um bom vetor inicial reduz a quantidade de iterações se mostrou crucial neste estudo. Como é necessário resolver um sistema para cada frequência discreta, a utilização do vetor solução como parte do vetor inicial para a frequência seguinte revelou-se eficaz em diminuir o número de iterações até a convergência do vetor solução, para determinada frequência. Isso ficou evidente ao experimentar três vetores iniciais distintos. Em termos do tempo de convergência para a curva FRF de referência, o vetor inicial nulo e um vetor estimativa a próxima solução (aqui denominado ΔX) apresentaram tempos de processamento aproximadamente cinco vezes inferiores em relação ao método baseado no vetor nulo, sendo escolhido o método ΔX para ser utilizado nas simulações subsequentes.

A escolha da tolerância teve uma influência direta nas normas L_∞ e L_2 encontradas para ambos os métodos iterativos. A tolerância de 1.e-04 revelou diversos pontos distantes da curva de referência. Em contrapartida, a tolerância de 1.e-05 demonstrou ser capaz de uma boa aproximação da curva FRF. Após a definição dos parâmetros de simulação, foram obtidas as FRF's do modelo do sistema composto para três diferentes tamanhos de malha do MEF e duas discretizações na frequência.

Para cada condição, cinco metodologias foram comparadas: uma direta (baseada na decomposição LU, tomada como solução de referência), duas utilizando métodos iterativos (MINRES e SYMMLQ) e duas baseadas em truncamento modal. Quando considerado o maior tamanho de malha do sistema e uma maior discretização da frequência, os métodos

iterativos demonstraram tempos de processamento menores do que a abordagem direta. No entanto, em outras condições, os métodos iterativos falharam nesse aspecto. Por outro lado, as metodologias baseadas em truncamento modal exibiram tempos relativos consistentemente inferiores a um, indicando serem superiores à abordagem de referência.

Sob outra perspectiva, os métodos iterativos mostraram ter as menores normas L_∞ e L_2 em todas as condições, sugerindo oferecer respostas mais eficazes do que os métodos baseados em truncamento. Ao comparar os gráficos, ficou evidente que os métodos iterativos, especialmente na região dos picos, proporcionaram a representação gráfica mais precisa entre as metodologias testadas com diferença no mínimo na quinta casa significativa. Em contraste, os métodos baseados em truncamento exibiram uma diferença de até 0,6 dB na região do pico.

Além disso, foi apresentada uma modificação para o método Floody-Espíndola, onde o número de frequências de referência depende do número de frequências naturais dentro do intervalo de referência. Este método mostrou ter diferenças insignificantes nas normas L_∞ e L_2 e na visualização gráfica, quando comparado ao método original de Floody-Espíndola. Entretanto, apresentou tempos de processamento levemente superior. Assim, este método mostrou-se pouco útil para os casos estudados nesta dissertação.

De modo geral, os métodos iterativos de subespaço de Krylov, quando aplicados aos cálculos de FRF's de estruturas que dependem da frequência, demonstraram ser suficientes em termos de convergência, mas insuficientes nos tempos de processamento. Em problemas que envolvem procedimentos repetitivos, tais como em processo de otimização ou em problemas com um elevado número de graus de liberdade esses métodos podem ser inviáveis. O método Floody-Espíndola, mesmo com algumas imprecisões, continua sendo uma considerável opção a ser utilizada nessas circunstâncias.

6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Nesta seção, são exibidas algumas sugestões para trabalhos futuros, as quais foram identificadas ao longo da realização do trabalho e que são tópicos importantes a serem investigados. São eles:

- Aplicação da metodologia em geometrias mais complicadas, permitindo observar o comportamento numérico para diferentes formato de matrizes;

- Um estudo de possíveis pré-condicionadores que poderiam acelerar a convergência dos métodos iterativos;
- Inserir métodos Multigrid dentro de passos intermediários do processo iterativo dos métodos de subespaço de Krylov;
- Procurar na literatura classes diferentes de métodos iterativos que podem resolver o problema discutido nesta dissertação;
- Realizar testes com um maior número de graus de liberdade, para entender se o comportamento numérico se repete.

REFERÊNCIAS

- ABDELJABER, O.; AVCI, O.; INMAN, D. J. Active vibration control of flexible cantilever plates using piezoelectric materials and artificial neural networks. **Journal of Sound and Vibration**, v. 363, p. 33–53, 2016.
- ANTON, H.; BUSBY, R. C. **Contemporary Linear Algebra**. Hoboken, NJ: Wiley, 2003.
- ARNOLDI, W. E. The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 9, n. 1, p. 17–29, 1951.
- BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. **Journal of Rheology**, v. 30, n. 1, p. 133–155, 1986.
- BAGLEY, R.; CALICO, R. The fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures. *In: 30th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference [...]*. Mobile, AL, U.S.A.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 3 abr. 1989.
- BAI, Z.-Z. Motivations and realizations of Krylov subspace methods for large sparse linear systems. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 283, p. 71–78, 2015.
- BAI, Z.-Z.; BENZI, M.; CHEN, F. Modified HSS iteration methods for a class of complex symmetric linear systems. **Computing**, v. 87, n. 3–4, p. 93–111, 2010.
- BAI, Z.-Z.; GOLUB, G. H. Accelerated Hermitian and skew-Hermitian splitting iteration methods for saddle-point problems. **IMA Journal of Numerical Analysis**, v. 27, n. 1, p. 1–23, 2007.
- BAI, Z.-Z.; GOLUB, G. H.; LI, C.-K. Convergence properties of preconditioned Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive semidefinite matrices. **Mathematics of Computation**, v. 76, n. 257, p. 287–299, 2007.
- BAI, Z.-Z.; GOLUB, G. H.; NG, M. K. Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive definite linear systems. **SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications**, v. 24, n. 3, p. 603–626, 2003.
- BAI, Z.-Z.; GOLUB, G. H.; PAN, J.-Y. Preconditioned Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive semidefinite linear systems. **Numerische Mathematik**, v. 98, n. 1, p. 1–32, 2004.
- BARRETT, R.; VORST, H. V. **Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods**. Philadelphia, PA: SIAM, 1993.
- BATHE, K.-J. **Finite Element Procedures**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1996.
- BJÖRCK, A.; PAIGE, C. C. Loss and recapture of orthogonality in the modified Gram-Schmidt algorithm. **SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications**, v. 13, n. 1, p. 176–190, 1992.

BODEWIG, E. **Matrix Calculus**. 3 ed. Amsterdam: Elsevier Science, 1959.

BORTOLOTTI, J. C.; LOPES, E. M. O.; BAVASTRI, C. A. Identificação e controle de vibrações de estruturas metálicas parcialmente compostas com lâminas viscoelásticas restringidas. In: Pirenópolis. **Proceedings XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. Pirenópolis, GO, Brazil, 2013.

BRINSON, H. F.; BRINSON, L. C. **Polymer Engineering Science and Viscoelasticity: An Introduction**. New York: Springer, 2008.

CALLISTER JR, W. D. **Ciência e Engenharia de Materiais: uma Introdução**. 5. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2002.

CEBON, D.; CHEUNG, C. Y. Deformation mechanisms of bituminous materials. **Advances in Asphalt Materials**. Elsevier, 2015. p. 169–203, 2015.

Choi, S. C. **Iterative Methods for Singular Linear Equations and Least-Squares Problems**, PhD thesis, Stanford University, 2006.

CHRISTIANSEN, S. H. Discrete Fredholm properties and convergence estimates for the electric field integral equation. **Mathematics of Computation**, v. 73, n. 245, p. 143–167, 2003.

CRANDALL, S. H. The role of damping in vibration theory. **Journal of Sound and Vibration**, v. 11, n. 1, 1970.

DECHAUMPHAI, P.; WANSOPHARK, N. **Numerical Methods in Science and Engineering: Theories with Matlab, Mathematica, Fortran, C and Python Programs**. Oxford: Alpha Science Publishing, 2020.

DEGHAN, M.; HAJARIAN, M. Modified AOR iterative methods to solve linear systems. **Journal of Vibration and Control**, v. 20, n. 5, p. 661–669, 2014.

DEGHAN, M.; SHIRILORD, A. Two lopsided TSCSP (LTSCSP) iteration methods for solution of complex symmetric positive definite linear systems. **Engineering with Computers**, v. 38, n. 2, p. 1867–1881, 2022.

DEMME, J. W. **Applied Numerical Linear Algebra**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.

DIJK, V. W.; TOYAMA, F. M. Accurate numerical solutions of the time-dependent Schrödinger equation. **Physical Review E**, v. 75, n. 3, p. 036707, 2007.

DONGARRA, J.; SULLIVAN, F. Guest Editors Introduction to the top 10 algorithms. **Computing in Science & Engineering**, v. 2, n. 1, p. 22–23, 2000.

FERIANI, A.; PEROTTI, F.; SIMONCINI, V. Iterative system solvers for the frequency analysis of linear mechanical systems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, p. 1719–1739, 2000.

FERRY, J. D. **Viscoelastic Properties of Polymers**. 3 ed. New York: Wiley, 1980.

FINDLEY, W. N.; LAI, J. S.; ONARAN, K. **Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials: with an Introduction to Linear Viscoelasticity**. New York: Dover, 1989.

FLOODY, S. E. P. **Dinâmica de Estruturas Compostas Metal/Elastômero: Uma Abordagem Generalizada**. Tese (Doutorado em engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Florianópolis, 2010.

FLOODY, S. E.; ARENAS, J. P.; ESPÍNDOLA, J. J. D. Modelling metal-elastomer composite structures using a finite-element-method approach. **Strojnicki Vestnik**, v. 53, n. 2, p. 66–77, 2007.

FRIDMAN, V. M. The Method of minimum iterations with minimum errors for a system of linear algebraic equations with a symmetrical matrix. **USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics**, v. 3, p. 362-363, 1963.

FRIEDMAN, M.; KANDEL, A. **Fundamentals of Computer Numerical Analysis**. Boca Raton, Fla: CRC Press, 1994.

GAMBOLATI, G.; PINI, G. Complex solution to nonideal contaminant transport through porous media. **Journal of Computational Physics**, v. 145, n. 2, p. 538–554, 1998.

GAO, H.; HU, J.; QI, Y.; SUN, C. Adaptive vibration control of a flexible structure based on hybrid learning controlled active mass damping. **Journal of the Franklin Institute**, v. 359, n. 12, p. 5935–5959, 2022.

GIBSON, R. F. **Principles of Composite Material Mechanics**. 3 ed. Boca Raton, Fla: Taylor & Francis, 2012.

GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. **Matrix Computations**. 3 ed. The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996.

GREENBAUM, A. **Iterative Methods for Solving Linear Systems**. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, 1997.

GUTKNECHT, M. H. A brief introduction to Krylov space methods for solving linear systems. *In*: KANEDA, Y.; KAWAMURA, H.; SASAI, M. (orgs.). **Frontiers of Computational Science**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, p. 53–62, 2007.

HANSEN, P. C.; HAYAMI, K.; MORIKUNI, K. GMRES methods for tomographic reconstruction with an unmatched back projector. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 413, p. 114352, 2022.

HESTENES, M. R.; STIEFEL, E. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. **Journal of Research of the National Bureau of Standards**, v. 49, n. 6, p. 409, 1952.

HOUSEHOLDER A. S. **The Theory of Matrices in Numerical Analysis**. Blaisdell, New York, 1963.

HUANG, Z.-G. Efficient block splitting iteration methods for solving a class of complex symmetric linear systems. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 395, p. 113574, 2021a.

HUANG, Z.-G. Modified two-step scale-splitting iteration method for solving complex symmetric linear systems. **Computational and Applied Mathematics**, v. 40, n. 4, p. 122, 2021b.

INMAN, D. J. **Engineering Vibration**. 4 ed. Boston: Pearson, 2014.

JI, J. C.; LUO, Q.; YE, K. Vibration control based metamaterials and origami structures: A state-of-the-art review. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 161, Article 107945, 2021.

JIN, Y.; WENA, C.; SHEN Z-L.; Gu, X-M. A simpler GMRES algorithm accelerated by Chebyshev polynomials for computing PageRank. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 413, p. 114395, 2022.

JUN, JI. A condensed Cramer's rule for the minimum-norm least-squares solution of linear equations. **Linear Algebra and its Applications**, v. 437, n. 9, p. 2173–2178, 2012.

KANDASAMY, R.; CUI, F.; TOWNSEND, N.; FOO, C. C.; GUO, J.; SHENOI, A.; XIONG, Y. A review of vibration control methods for marine offshore structures. **Ocean Engineering**, v. 127, p. 279–297, 2016.

KANG, J.; KANG, A. M. A system of linear equations for the identification of DNA binding affinity of zinc fingers. **Journal of Biological Chemistry**, v. 294, n. 1, p. 65, 2019.

KANKE, F. **Otimização topológica de camadas restritoras aplicada ao controle de vibrações em placas semi-espessas**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Paraná, Centro Politécnico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Curitiba, 2017.

KRYLOV, A. N. On the numerical solution of the equation by which in technical questions frequencies of small oscillations of material systems are determined. **News of Academy of Sciences of the USSR**, v 4, n. 4, p. 491–539, 1931. (in Russian).

LANCZOS, C. An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. **Journal of Research of the National Bureau of Standards**, v. 45, n. 4, p. 255, 1950.

LANCZOS, C. Solution of Systems of linear equations by minimized iterations. **Journal of Research of the National Bureau of Standards**, v. 49, n. 1, p. 33–53, 1952.

LEISSA, A. W; QATU, M, S. **Vibration of Continuous System**. McGraw-Hill Professional Publishing, New York, 2011.

LI, C.-X.; WU, S.-L. A single-step HSS method for non-Hermitian positive definite linear systems. **Applied Mathematics Letters**, v. 44, p. 26–29, 2015.

LI, L.; HUANG, T.-Z.; LIU, X.-P. Modified Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive-definite linear systems. **Numerical Linear Algebra with Applications**, v. 14, n. 3, p. 217–235, 2007.

MAINARDI, F. **Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models**. Second edition. New Jersey: World Scientific, 2022.

MEERSCHAERT, M. M.; SCALAS, E. Coupled continuous time random walks in finance. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 370, n. 1, p. 114–118, 2006.

MEURANT, G. **Computer solution of large linear systems**. Elsevier, North Holland, 1999.

MEYER, C. D. **Matrix Analysis and Applied Linear Algebra**. SIAM, Philadelphia, 2001

NOCHEBUENA-MORA, E.; MENDES, N.; LOURENÇO, P. B.; COVAS, J. A. Vibration control systems: A review of their application to historical unreinforced masonry buildings. **Journal of Building Engineering**, v. 44, p. 103333, 2021.

NOORMOHAMMADI POUR, H.; SADEGHI GOUGHERY, H. New Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive-definite linear systems. **Numerical Algorithms**, v. 69, n. 1, p. 207–225, 2015.

PAIGE, C.C.; SAUNDERS, M.A. Solution of sparse indefinite systems of linear equations. **SIAM Journal on Numerical Analysis**. V. 12, n. 4, p. 617–629, 1975.

PARLETT, B. N. **The symmetric eigenvalue problem**. SIAM, Philadelphia, 1998.

PEACEMAN, D. W.; RACHFORD, JR., H. H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 3, n. 1, p. 28–41, 1955.

PETTYT, M. **Introduction to Finite Element Vibration Analysis**. 2 ed. New York: Cambridge University Press, 2010.

PLATO, R. **Concise Numerical Mathematics**. Providence, R.I: American Mathematical Society, 2003.

PRITZ, T. Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials. **Journal of Sound and Vibration**, v. 195, n. 1, p. 103–115, 1996.

RAO, S. S. **Vibration of Continuous Systems**. Hoboken, N.J: Wiley, 2007.

RATNA, D. **Thermal properties of thermosets**. 1 ed. Thermosets. Elsevier, 2012.

REID, T. J. Free vibration and hysteretic damping. **The Journal of the Royal Aeronautical Society**, v. 60, n. 544, p. 283–283, 1956.

ROGERS, L. Operators and fractional derivatives for viscoelastic constitutive equations. **Journal of Rheology**, v. 27, n. 4, p. 351–372, 1983.

ROSSIKHIN, Y. A. Reflections on two parallel ways in the progress of fractional calculus in mechanics of solids. **Applied Mechanics Reviews**, v. 63, n. 1, p. 010701, 2010.

ROY, S.; KUNDU, C. K. State of the art review of wind induced vibration and its control on transmission towers. **Structures**, v. 29, p. 254–264, 2021.

SAAD, Y. **Iterative Methods for Sparse Linear Systems**. 2ed. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.

SAAD, Y. Krylov Subspace Methods for Solving Large Unsymmetric Linear Systems. **Mathematical Computing**, v. 37, n. 155, p. 105–126, 1981.

SAAD, Y.; SCHULTZ, M. H. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. **SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing**, v. 7, n. 3, p. 856–869, 1986.

SAADABAD, A. N.; MORADI, H.; VOSSOUGH, G. Semi-active control of forced oscillations in power transmission lines via optimum tuneable vibration absorbers: With review on linear dynamic aspects. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 87, p. 163–178, 2014.

SCANLAN, R. H.; MENDELSON, A. Structural damping. **AIAA Journal**, v. 1, n. 4, p. 938–939, 1963.

SHAWAGFEH, N.; KAYA, D. Comparing numerical methods for the solutions of systems of ordinary differential equations. **Applied Mathematics Letters**, v. 17, n. 3, p. 323–328, 2004.

SHEN, Z-L.; SU, M.; CARPENTIERI, B.; WEN, C. Shifted power-GMRES method accelerated by extrapolation for solving PageRank with multiple damping factors. **Applied Mathematics and Computation**, v. 420, p. 126799, 2022.

SKUDRZYK, E.; LINDSAY, R. B. Simple and complex vibratory systems. **American Journal of Physics**, v. 37, n. 5, p. 569–569, 1969.

SONNEVELD, P. CGS, a Fast Lanczos-Type Solver for Nonsymmetric Linear Systems. **SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing**, v. 10, n. 1, p. 36–52, 1989.

SOROKA, W. W. Note on the relations between viscous and structural damping coefficients. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 16, n. 7, p. 409–410, 1949.

STIEFEL, E. Relaxationsmethoden bester Strategie zur losung linearer Gleichungssysteme. **Commentarii Mathematici Helvetici**, v. 29, n. 1, p. 157–179, 1955.

TCHARKHTCHI, A.; NONY, F.; KHELLADI, S.; FITOUSSI, J.; FARZANEH, S. Epoxy/amine reactive systems for composites materials and their thermomechanical properties. In: BOISSE, P. (ed.). **Advances in Composites Manufacturing and Process Design**. 1 ed. Elsevier, 2015. p. 269–296.

TOBOLSKY, A. V. Stress Relaxation Studies of the Viscoelastic Properties of Polymers. **Journal of Applied Physics**, v. 27, n. 7, p. 673–685, 1956.

UDAWAT, B.; BEGANI, J.; MANSINGHKA, M.; BHATIA, N.; SHARMA, H.; HADAP, A. Gauss Jordan method for balancing chemical equation for different materials. **Materials Today: Proceedings**, v. 51, p. 451–454, 2022.

VAN DER VORST, H. A. BI-CGSTAB: a Fast and Smoothly Converging Variant of BI-CG for the Solution of Nonsymmetric Linear Systems. **SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing**, v. 13, n. 2, p. 631–644, 1992.

XIE, F.; ALY, A.-M. Structural control and vibration issues in wind turbines: A review. **Engineering Structures**, v. 210, p. 110087, 2020.

Y SAAD, Y.; VORST, H. A. Iterative solution of linear systems in the 20th century. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 123, p. 1–33, 2000.

ZOU, Q. GMRES algorithms over 35 years. **Applied Mathematics and Computation**, v. 445, p. 127869, 2023.