



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
LUIZ HENRIQUE PAIXÃO GROKOSKI

UMA RELAÇÃO ENTRE ÁLGEBRAS HEREDITÁRIAS POR PARTES E
ÁLGEBRAS INCLINADAS ITERADAS

CURITIBA
Abril de 2019

LUIZ HENRIQUE PAIXÃO GROKOSKI

UMA RELAÇÃO ENTRE ÁLGEBRAS HEREDITÁRIAS POR PARTES E ÁLGEBRAS
INCLINADAS ITERADAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edson Ribeiro Alvares.

Coorientadora: Prof.^a Dr.^a Tanise Carnieri Pierin.

CURITIBA

Abril de 2019

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Grokoski, Luiz Henrique Paixão

Uma relação entre álgebras hereditárias por partes e álgebras inclinadas iteradas / Luiz Henrique Paixão Grokoski. – Curitiba, 2019.

1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Orientador: Edson Ribeiro Alvares

Coorientador: Tanise Carnieri Pierin

1. Álgebra. 2. Teoria dos grafos. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Alvares, Edson Ribeiro. IV. Pierin, Tanise Carnieri. V. Título.

Bibliotecário: Leticia Priscila Azevedo de Sousa CRB-9/2029



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA -
40001016041P1

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de LUIZ HENRIQUE PAIXÃO GROKOSKI intitulada: *Uma relação entre álgebras hereditárias por partes e álgebras inclinadas iteradas*, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 23 de Abril de 2019.

Tanise C. Pierin
TANISE CARNIERI PIERIN

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

Sonia Maria Fernandes
SONIA MARIA FERNANDES

Avaliador Externo (UFV)

Eduardo do Nascimento Marcos
EDUARDO DO NASCIMENTO MARCOS

Avaliador Externo (USP)

Agradecimentos

À minha família e amigos, pelo apoio constante neste e em todos os outros períodos de minha trajetória. Aos professores do departamento de matemática da UFPR, pelo conhecimento e experiências compartilhados. À meus orientadores Edson e Tanise, pela paciência e conselhos imprescindíveis para a conclusão deste trabalho e para minha formação. Aos colegas do PPGM-UFPR, em especial aos membros da sala 14, pelos debates acalorados sobre diagramas e teoremas, além dos tão necessários momentos de descontração. À CAPES, pelo apoio financeiro durante o curso.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos conceitos ligados a teoria de representações de álgebras, como teoria inclinante e o quiver de Auslander-Reiten de uma categoria de módulos. Posteriormente, trabalhamos com triângulos exatos em uma categoria, visando estabelecer propriedades homológicas e esclarecer como estas estruturas podem ser usadas no estudo da categoria. O objetivo principal deste trabalho é demonstrar, de forma detalhada, um resultado apresentado por Happel, que foi o último passo para mostrar a equivalência entre os conceitos de álgebras hereditárias por partes do tipo $\vec{\Delta}$ e álgebras inclinadas iteradas de tipo $\vec{\Delta}$, sendo $\vec{\Delta}$ um quiver finito. No fim do texto abordamos um caso particular, mostrando que álgebras hereditárias por partes do tipo Dynkin são APR-inclinadas iteradas de mesmo tipo.

Palavras-chave: Álgebras hereditárias por partes. Álgebras inclinadas iteradas. Módulos APR-inclinantes.

ABSTRACT

In the present work we introduce concepts related to representation theory of algebras such as tilting theory and the Auslander-Reiten quiver of a module category. Subsequently, we work with exact triangles in a category, aiming to establish homological properties and clarify how these structures can be used to study the category. The main goal of this work is to prove in detail a result presented by Happel that was the last step to show the equivalence between the concepts of piecewise hereditary algebras of type $\vec{\Delta}$ and iterated tilted algebras of type $\vec{\Delta}$, whenever $\vec{\Delta}$ is a finite quiver. Towards the end of the text we address a particular case, showing that piecewise hereditary algebras of Dynkin type are APR-iterated tilted algebras of the same type.

Keywords: Piecewise hereditary algebras. Iterated tilted algebras. APR-tilting modules.

SUMÁRIO

1	Introdução	2
2	Definições e Resultados Preliminares	6
2.1	Teoria de Auslander-Reiten	6
2.2	Translações de Auslander-Reiten	9
2.3	Quiver de Auslander-Reiten	13
2.4	Característica de Euler	19
2.5	Álgebras Hereditárias	20
2.6	Grafos de Dynkin e o Teorema de Gabriel	22
2.7	Teoria Inclinante	23
2.8	Grupo de Grothendieck	32
3	Categorias Trianguladas	35
3.1	Triângulos Exatos	35
3.2	Funtores e Categorias Trianguladas	38
3.3	Somas Diretas em Categorias Trianguladas	42
4	Álgebras Hereditárias por Partes do Tipo $\vec{\Delta}$ e Módulos APR-inclinantes	46
4.1	Álgebras Hereditárias por Partes do Tipo $\vec{\Delta}$	46
4.2	Módulos APR-inclinantes	53
5	Álgebras Inclinadas e Inclinadas Iteradas	56
5.1	Resultados Gerais	56
5.2	O Caso Dynkin	74
	REFERÊNCIAS	83

1 INTRODUÇÃO

Álgebra é uma área da Matemática estudada desde a antiguidade em diversas regiões do mundo, mas a área conhecida atualmente como Álgebra Moderna surgiu, segundo Kleiner em [16], durante o século XIX. Esta área teve seu desenvolvimento inicial a partir de sistemas axiomáticos no estudo de Teoria de Grupos, Anéis e Álgebra Linear.

No início do século XX ocorreram grandes avanços. Seguindo as construções da Teoria de Anéis, matemáticos como Emil Artin e Emmy Noether desenvolveram teorias a respeito de ideais e módulos. A partir deste momento o conceito de módulo, definido inicialmente por Noether no artigo [19] de 1921, passou a ter papel central nas pesquisas de álgebra. Matemáticos de diversas subáreas da Álgebra, como Teoria de Representações, Álgebra Homológica, Álgebras de Hopf e Álgebras de Lie utilizam a estrutura de módulo para seus estudos. Particularmente em Teoria de Representações há o objetivo de conhecer a estrutura dos módulos sobre um anel ou uma álgebra e os morfismos entre eles, ou seja, as categorias de módulos.

A linguagem categórica se tornou muito importante no estudo de representações, diversos resultados e ferramentas importantes foram introduzidos visando facilitar o estudo de categorias de módulos. Uma técnica muito utilizada é estudar uma categoria de módulos de uma álgebra A comparando-a com a de outra álgebra B . Um passo fundamental para que tais estudos fossem possíveis foi o resultado conhecido como Teorema de Morita, demonstrado por Kiiti Morita em seu artigo [18], publicado em 1958. A versão do Teorema de Morita para o contexto deste trabalho diz que: *Sendo \mathbb{K} um corpo algebricamente fechado, dadas duas \mathbb{K} -álgebras A e B , existe uma equivalência \mathbb{K} -linear entre suas categorias de módulos se, e somente se, existe um A -módulo P_A projetivo, finitamente gerado e gerador da categoria de módulos de A tal que $\text{End}P_A \cong B$.*

O resultado demonstrado por Morita abriu caminho para muitos outros semelhantes; há diversas generalizações e resultados análogos a este teorema em outros contextos. Caso não exista uma equivalência de Morita entre duas álgebras A e B , é natural questionar se é possível obter outras relações entre as categorias de módulos destas álgebras. A Teoria Inclinante (ou Tilting) estabelece condições para que existam equivalências, semelhantes às de Morita, entre partes das categorias de módulos de álgebras distintas. Sendo T um A -módulo inclinante, conseguimos equivalências naturais entre pares de torção da categoria $\text{mod}A$ e da categoria $\text{mod}\text{End}T$. O processo de passar de uma álgebra a outra via construção da álgebra de endomorfismos de um módulo inclinante é conhecido como inclinação.

Ao utilizar a teoria inclinante para estudar certa álgebra A , gostaríamos de obter equivalências entre partes da categoria de módulos de A e de outra álgebra mais conhecida. Um tipo de álgebra cuja categoria de módulos é razoavelmente conhecida é o de álgebras hereditárias. Há um algoritmo simples

que permite identificar álgebras hereditárias de tipo de representação finito, para as quais existe um processo para descrever a categoria de módulos correspondente. Para as de tipo de representação infinito há diversos resultados que facilitam seu estudo.

Dados um corpo algebricamente fechado \mathbb{K} e um quiver finito, conexo e acíclico $\vec{\Delta}$, álgebras que podem ser relacionadas com a álgebra hereditária $\mathbb{K}\vec{\Delta}$, via um ou múltiplos processos de inclinação, são conhecidas como álgebras inclináveis de tipo $\vec{\Delta}$. Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e T um A -módulo inclinante, diz-se que T é um módulo separante se o par de torção induzido por T em $\text{mod}A$ é cindido. Um caso particular de álgebras inclináveis de tipo $\vec{\Delta}$ são as álgebras inclinadas iteradas de tipo $\vec{\Delta}$, dadas por:

Definição 1: *A é uma álgebra inclinada iterada de tipo $\vec{\Delta}$ se existe uma sequência finita de triplas $(A_i, T_i, A_{i+1} = \text{End}T_i)_{0 \leq i < k}$, onde $A_0 = A$, $A_k = \mathbb{K}\vec{\Delta}$ e para cada $0 \leq i < k$ temos que T_i é um A_i -módulo inclinante separante.*

Note que nos referimos às álgebras hereditárias como álgebras do tipo $\mathbb{K}\vec{\Delta}$, ou seja, álgebras de caminhos de quivers sem relações. As álgebras estudadas neste trabalho serão álgebras de caminhos, pois existe um resultado (que pode ser encontrado na página 64 de [4]) garantindo que toda álgebra básica, conexa e de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado é isomorfa a um quociente da álgebra de caminhos de um quiver finito, conexo e acíclico. Logo estudar álgebras de caminhos é o mesmo que estudar álgebras básicas, conexas e de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado.

Outra ferramenta muito importante para o desenvolvimento da Teoria de Representações de Álgebras, é o conceito de categoria derivada, introduzido por Grothendieck no artigo [12] de 1958. As categorias derivadas, apesar de em geral não serem categorias abelianas, têm uma estrutura de triângulos exatos que permite estudá-las. Como há uma maneira natural de incluir uma categoria de módulos em sua categoria derivada, estudar a categoria derivada nos dá resultados sobre a categoria de módulos. As categorias de módulos de álgebras hereditárias são bem conhecidas, logo suas categorias derivadas também podem ser estudadas de maneira mais fácil. Então, para estudar a categoria derivada (da categoria de módulos) de uma álgebra A não hereditária, pode-se buscar relações entre esta categoria $D^b(A)$ e a categoria derivada de uma álgebra hereditária. Para isso temos a seguinte definição:

Definição 2: *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e $\vec{\Delta}$ um quiver finito e acíclico. Dizemos que A é hereditária por partes do tipo $\vec{\Delta}$ se a categoria $D^b(A)$ é triângulo-equivalente a $D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta})$.*

A princípio álgebras inclinadas iteradas de tipo $\vec{\Delta}$ e álgebras hereditárias por partes do tipo $\vec{\Delta}$ não parecem ter grandes relações, porém um resultado demonstrado por Happel, no artigo [13] de 1987, mostra que há fortes relações entre estes objetos. O teorema de Happel diz:

Teorema 1: *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra de dimensão finita e T um A -módulo inclinante, então existe uma equivalência triangulada entre as categorias derivadas $D^b(A)$ e $D^b(\text{End}T)$.*

O teorema acima deixa explícito que toda álgebra inclinada iterada de tipo $\vec{\Delta}$ é uma álgebra

hereditária por partes do tipo $\vec{\Delta}$, pois os processos de inclinação nos dão uma nova álgebra cuja categoria derivada é triângulo-equivalente a categoria derivada da álgebra anterior. A recíproca, porém, ainda não havia sido demonstrada. Em 1988 o próprio Happel, em seu livro [14], enunciou e demonstrou o seguinte teorema:

Teorema 2: *Se A é uma álgebra hereditária por partes do tipo $\vec{\Delta}$, então A é uma álgebra inclinada iterada do tipo $\vec{\Delta}$.*

Provando, assim, que os conceitos de álgebras inclinadas iteradas de tipo $\vec{\Delta}$ e álgebras hereditárias por partes do tipo $\vec{\Delta}$ são equivalentes.

O principal objetivo do presente trabalho é detalhar a demonstração apresentada por Happel (em [14]) para o Teorema 2, mostrando passos e contas deixados a cargo do leitor na demonstração original. Para isso, além de explicitar certas implicações e construções, partes da demonstração do teorema foram transformadas em lemas enunciados no último capítulo deste texto.

Esta dissertação está dividida em quatro partes. Na primeira parte são apresentados definições e resultados preliminares, considerados necessários para a plena compreensão dos temas seguintes. São abordados temas pertinentes de Teoria de Representações de Álgebras, Teoria de Auslander-Reiten, Teoria Inclinante e outros assuntos pontuais. Os resultados desse capítulo, salvo poucas exceções, não serão demonstrados, mas referências serão indicadas.

Na segunda parte é abordada a ideia de categoria triangulada, ou seja, categorias com uma estrutura adicional que, em certos casos, se comporta de forma semelhante as sequências exatas em categorias abelianas. As demonstrações deste capítulo são importantes para o leitor que não está acostumado com a linguagem categórica, ou com funtores como $\text{Hom}_A(X, _)$ e $\text{Ext}_A^1(X, _)$. Muitos dos argumentos usados neste capítulo também terão importância na demonstração do teorema principal da dissertação.

A terceira parte trata de dois temas distintos, as álgebras hereditárias por partes do tipo $\vec{\Delta}$ e os módulos APR-inclinaentes. As álgebras hereditárias por partes do tipo $\vec{\Delta}$ são fundamentais para este trabalho, neste capítulo são apresentados resultados gerais sobre tais álgebras. Já na segunda parte do capítulo, será apresentado o conceito de módulo APR-inclinante, um caso particular de módulo inclinante que tem ligação direta com as álgebras hereditárias por partes do tipo $\vec{\Delta}$ quando $\vec{\Delta}$ é um quiver do tipo Dynkin.

No capítulo final da dissertação são enunciados e demonstrados lemas usados por Happel em sua demonstração do teorema 2 e lemas retirados de partes dessa demonstração. Além disso, o resultado principal é demonstrado, juntamente com consequências diretas dele. O último resultado apresentado diz que toda álgebra hereditária por partes do tipo $\vec{\Delta}$, com $\vec{\Delta}$ um quiver do tipo Dynkin, é uma álgebra APR-inclinada iterada do tipo $\vec{\Delta}$.

Vale salientar que, apesar de seguirmos em grande parte do trabalho a estrutura das demons-

trações apresentadas por Happel em [14], as notações adotadas estão mais próximas das apresentadas em [4]. Esta escolha foi feita por dois motivos, a preferência por utilizar módulos à direita e o fato de, devido a época em que foi escrito, as notações do segundo livro estarem mais alinhadas com as utilizadas atualmente. Além disso, nenhum dos resultados apresentados aqui é novo, todos podem ser encontrados na literatura que foi usada como referência para este trabalho.

2 DEFINIÇÕES E RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo serão apresentados, de maneira sucinta, diversas definições e resultados que serão usados durante o restante do trabalho ou que são necessários para sua compreensão. Neste trabalho, a menos que dito o contrário, \mathbb{K} denotará um corpo algebricamente fechado e A será uma \mathbb{K} -álgebra básica de dimensão finita. Além disso, quando nos referirmos a A -módulos estaremos tratando de módulos à direita, finitamente gerados.

Utilizaremos basicamente as mesmas notações adotadas em [4], mas apresentamos a seguir uma breve descrição das notações mais importantes. Denotaremos por $\text{mod}A$ a categoria de A -módulos à direita finitamente gerados, $\text{ind}A$ a subcategoria de $\text{mod}A$ em que os objetos são apenas os A -módulos indecomponíveis. Assumindo conhecidos os conceitos de resolução projetiva e resolução injetiva, fixados X e Y objetos de $\text{mod}A$, denotaremos por pdX e idX a dimensão projetiva e dimensão injetiva de X , respectivamente. O radical de Jacobson de X , dado pela interseção dos submódulos maximais, será representado por $radX$. Denotaremos por $\text{Hom}_A(X, Y)$ o conjunto (K -módulo) dos morfismos de X para Y em $\text{mod}A$; no caso particular em que tratarmos de $\text{Hom}_A(X, X)$, denotaremos o anel de endomorfismos por $\text{End}(X)$. O grupo de extensões de Y por X será representado por $\text{Ext}_A^1(X, Y)$.

2.1 Teoria de Auslander-Reiten

Sabemos, pelo Teorema da Decomposição Única (ver 4.10, p. 23 de [4]), que dada uma \mathbb{K} -álgebra A , podemos conhecer muitas propriedades da categoria $\text{mod}A$ estudando uma classe especial de A -módulos, os indecomponíveis. Nesta seção apresentamos uma classe de morfismos que tem papel semelhante, os morfismos irredutíveis, que podem ser usados para obter informações sobre todos os morfismos da categoria $\text{mod}A$. Além disso, também será apresentado o conceito de sequência de Auslander-Reiten, muito utilizado no restante deste trabalho.

Definição 2.1.1. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra, L, M, N módulos em $\text{mod}A$ e $f: L \rightarrow M$ e $g: M \rightarrow N$ morfismos de A -módulos. Então:*

- (a) *O morfismo f é dito minimal à esquerda se todo $h \in \text{End}M$ tal que $hf = f$ é um automorfismo.*
- (b) *O morfismo g é dito minimal à direita se todo $k \in \text{End}M$ tal que $gk = g$ é um automorfismo.*
- (c) *O morfismo f é dito quase cindido à esquerda se não é uma seção e, para todo morfismo $u: L \rightarrow U$ que não é uma seção, existe $u': M \rightarrow U$ tal que $u'f = u$.*

- (d) O morfismo g é dito quase cindido à direita se não é uma retração e, para todo morfismo $v: V \rightarrow N$ que não é uma retração, existe $v': V \rightarrow M$ tal que $gv' = v$.
- (e) O morfismo f é dito minimal quase cindido à esquerda se é, simultaneamente, minimal à esquerda e quase cindido à esquerda.
- (f) O morfismo g é dito minimal quase cindido à direita se é, simultaneamente, minimal à direita e quase cindido à direita.

Lema 2.1.2. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra, L, M, N módulos em $\text{mod}A$. Então:*

- (a) *Se $f: L \rightarrow M$ é um morfismo quase cindido à esquerda, então L é um módulo indecomponível.*
- (b) *Se $g: M \rightarrow N$ é um morfismo quase cindido à direita, então N é um módulo indecomponível.*

Demonstração. Ver Lema 1.3, p.99 de [4]. □

Proposição 2.1.3. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e L, M, N, M' módulos em $\text{mod}A$. Então:*

- (a) *Se $f: L \rightarrow M$ e $f': L \rightarrow M'$ são morfismos minimais quase cindidos à esquerda, então existe um isomorfismo $h: M \rightarrow M'$ tal que $f' = hf$.*
- (b) *Se $g: M \rightarrow N$ e $g': M' \rightarrow N$ são morfismos minimais quase cindidos à direita, então existe um isomorfismo $k: M \rightarrow M'$ tal que $g = g'k$.*

Demonstração. Provaremos apenas o item (a), pois a demonstração de (b) é análoga. Sejam $f: L \rightarrow M$ e $f': L \rightarrow M'$ morfismos minimais quase cindidos à esquerda. Como f e f' são quase cindidos à esquerda, existem morfismos $h: M \rightarrow M'$ e $h': M' \rightarrow M$ tais que $f' = hf$ e $f = h'f'$. Logo $f = h'hf$ e $f' = hh'f'$. Como f e f' são minimais à esquerda, temos que hh' e $h'h$ são automorfismos. Assim, h é monomorfismo e epimorfismo, portanto, é um isomorfismo entre M e M' . □

A proposição acima é importante, pois mostra que dado um módulo L , a menos de isomorfismo, há um único módulo M tal que existe morfismo $f: L \rightarrow M$ que é minimal quase cindido à esquerda. E vale o análogo para morfismo minimal quase cindido à direita. Conhecendo tais resultados, pode-se estudar os morfismos irredutíveis.

Definição 2.1.4. *Dados módulos L, M e um morfismo $f: L \rightarrow M$ em $\text{mod}A$, f é dito irredutível se:*

- (a) *f não é uma seção nem uma retração;*
- (b) *se existe uma fatoração $f = f_1f_2$, então f_1 é uma retração ou f_2 é uma seção.*

Lema 2.1.5. *Todo morfismo irredutível é um monomorfismo ou um epimorfismo.*

Demonstração. Seja $f: L \rightarrow M$ um morfismo em $\text{mod}A$. Denote por $i: \text{Im}f \rightarrow M$ e $f': L \rightarrow \text{Im}f$ a inclusão e a correstrrição canônicas, respectivamente. Logo $f = if'$. Suponha que f não é um epimorfismo, então i não é uma retração. Como f é irredutível, f' deve ser uma seção. Portanto, f é um monomorfismo. \square

Teorema 2.1.6. *Sejam L e N dois A -módulos indecomponíveis.*

- (a) *Um morfismo $f: L \rightarrow M$ é irredutível se, e somente se, $M \neq 0$ e existe um morfismo $f': L \rightarrow M'$ tal que $[f \ f']^t: L \rightarrow M \oplus M'$ é minimal quase cindido à esquerda.*
- (b) *Um morfismo $g: M \rightarrow N$ é irredutível se, e somente se, $M \neq 0$ e existe um morfismo $g': M' \rightarrow N$ tal que $[g \ g']: M \oplus M' \rightarrow N$ é minimal quase cindido à direita.*

Demonstração. Ver Lema 1.10, p.103 de [4]. \square

Definição 2.1.7. *Uma sequência exata curta $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ em $\text{mod}A$ é dita sequência de Auslander-Reiten (ou sequência quase cindida) se:*

- (i) *f é morfismo minimal quase cindido à esquerda e;*
- (ii) *g é morfismo minimal quase cindido à direita.*

Note que uma sequência de Auslander-Reiten nunca é cindida, pois f não é seção e g não é retração. Daí o outro nome dado a estes objetos, sequência exata quase cindida.

Proposição 2.1.8. *Uma sequência de Auslander-Reiten é unicamente determinada, a menos de isomorfismo, por seu termo final ou inicial.*

Demonstração. Provaremos apenas o caso em que o termo inicial da sequência está fixado, o caso em que o termo final é fixado tem demonstração análoga.

Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e L, M, N, M' e N' A -módulos. Suponha que existem duas sequências de Auslander-Reiten da forma

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad 0 \rightarrow L \xrightarrow{f'} M' \xrightarrow{g'} N' \rightarrow 0.$$

Logo, f e f' são morfismos minimais quase cindidos à esquerda. Pela proposição 2.1.3, existe um isomorfismo $h: M \rightarrow M'$ tal que $f' = hf$. Podemos construir o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow 1_L & & \downarrow h & & \downarrow \varphi & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Como M e M' são isomorfos, pelo Lema dos 5, existe $\varphi: N \rightarrow N'$ que faz o diagrama comutar e é um isomorfismo. Logo as sequências exatas que aparecem nas linhas do diagrama são isomorfas. \square

Teorema 2.1.9. *Seja $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ uma sequência exata curta em $\text{mod}A$. Então são equivalentes:*

- (i) *Esta sequência é de Auslander-Reiten.*
- (ii) *O módulo L é indecomponível e g é quase cindido à direita.*
- (iii) *O módulo N é indecomponível e f é quase cindido à esquerda.*
- (iv) *O morfismo f é minimal quase cindido à esquerda.*
- (v) *O morfismo g é minimal quase cindido à direita.*
- (vi) *Os módulos L e N são indecomponíveis, e os morfismos f e g são irredutíveis.*

Demonstração. Ver Teorema 1.1, p.105 de [4]. \square

2.2 Translações de Auslander-Reiten

Nesta seção apresentamos o conceito de translação de Auslander-Reiten, as Fórmulas de Auslander-Reiten e alguns outros resultados que serão utilizados no decorrer do texto. Para mais detalhes e demonstrações dos resultados indicam-se [4], [15] e [9].

Definição 2.2.1. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e M um A -módulo. Pode-se construir as coberturas projetivas $P_0 \xrightarrow{p_0} M$ e $P_1 \xrightarrow{p_1} \ker p_0$. Assim, obtém-se a sequência exata $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \rightarrow 0$, chamada de apresentação projetiva minimal de M . Aplicando o funtor $(_)^t = \text{Hom}_A(_, A): \text{mod}A \rightarrow \text{mod}A^{op}$, obtém-se a seguinte sequência exata (em $\text{mod}A^{op}$)*

$$0 \rightarrow (M)^t \rightarrow (P_0)^t \xrightarrow{(p_1)^t} (P_1)^t \rightarrow \text{coker}(p_1)^t \rightarrow 0.$$

Chamamos de transposta de M , denotado por TrM , o módulo $\text{coker}(p_1)^t = \text{coker}\text{Hom}_A(p_1, A)$.

Vale notar que a apresentação projetiva de um módulo M é única a menos de isomorfismo. Logo TrM é unicamente determinado a menos de isomorfismo.

Proposição 2.2.2. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e M um A -módulo indecomponível.*

- (a) *O A -módulo à esquerda TrM não tem somandos diretos projetivos não nulos.*

- (b) Se M não é projetivo, então a sequência $(P_0)^t \xrightarrow{(p_1)^t} (P_1)^t \longrightarrow \text{Tr}M \longrightarrow 0$, induzida da apresentação projetiva minimal $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$ de M , é uma apresentação projetiva minimal do A -módulo à esquerda $\text{Tr}M$.
- (c) O A -módulo M é projetivo se, e somente se, $\text{Tr}M = 0$. Se M não é projetivo, então $\text{Tr}M$ é indecomponível e $\text{Tr}(\text{Tr}M) \cong M$.
- (d) Sendo N um A -módulo indecomponível e M, N não projetivos, $M \cong N$ se, e somente se, $\text{Tr}M \cong \text{Tr}N$.

Demonstração. Ver Proposição 2.1, p. 107 de [4]. □

Queremos agora utilizar Tr para construir uma dualidade entre duas categorias convenientes. Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e M, N dois A -módulos. Denotaremos por $\mathcal{P}(M, N)$ o subconjunto de $\text{Hom}_A(M, N)$ que consiste dos morfismos que se fatoram por módulos projetivos. De maneira análoga, denotaremos por $\mathcal{I}(M, N)$ o subconjunto de $\text{Hom}_A(M, N)$ que consiste dos morfismos que se fatoram por módulos injetivos. Pode-se provar que estes subconjuntos de $\text{Hom}_A(M, N)$ formam ideais de $\text{mod}A$, logo definimos as categorias

$\underline{\text{mod}}A = (\text{mod}A)/\mathcal{P}$, cujos objetos são os mesmos de $\text{mod}A$ e os morfismos entre dois objetos M e N pertencem a $\underline{\text{Hom}}_A(M, N) = \text{Hom}_A(M, N)/\mathcal{P}(M, N)$.

$\overline{\text{mod}}A = (\text{mod}A)/\mathcal{I}$, cujos objetos são os mesmos de $\text{mod}A$ e os morfismos entre dois objetos M e N pertencem a $\overline{\text{Hom}}_A(M, N) = \text{Hom}_A(M, N)/\mathcal{I}(M, N)$.

Proposição 2.2.3. *A correspondência $M \mapsto \text{Tr}M$ induz um funtor \mathbb{K} -linear $\text{Tr}: \underline{\text{mod}}A \longrightarrow \overline{\text{mod}}A^{\text{op}}$ que é uma dualidade de categorias.*

Demonstração. Apresentamos apenas uma ideia da prova, pois certos argumentos usados serão úteis no decorrer do texto. Para mais detalhes ver Proposição 2.2, p. 110 de [4].

Sejam M e N dois A -módulos. Dados o morfismo $f: M \longrightarrow N$ em $\underline{\text{mod}}A$ e as apresentações projetivas minimais de M e N obtém-se o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \xrightarrow{p_1} & P_0 & \xrightarrow{p_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow f & & \\ P'_1 & \xrightarrow{p'_1} & P'_0 & \xrightarrow{p'_0} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

É possível provar que os morfismos f_0 e f_1 são os únicos (a menos de isomorfismo) que fazem tal diagrama comutar. Aplicando $\text{Hom}_A(_, A)$ ao diagrama, obtém-se:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Hom}_A(P'_0, A) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(P'_1, A) & \longrightarrow & \text{Tr}N & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \text{Hom}_A(f_0, A) & & \downarrow \text{Hom}_A(f_1, A) & & \downarrow \text{Tr}f & & \\
 \text{Hom}_A(P_0, A) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(P_1, A) & \longrightarrow & \text{Tr}M & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Existe um único morfismo $\text{Tr}f: \text{Tr}N \longrightarrow \text{Tr}M$ que torna este diagrama comutativo e não se fatora por módulos projetivos. Logo, $\text{Tr}: \underline{\text{mod}}A \longrightarrow \underline{\text{mod}}A^{op}$ é um funtor e, além disso, uma dualidade de categorias.

□

Definição 2.2.4. *Sejam Tr a dualidade definida acima e $D = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(_, \mathbb{K})$ a dualidade padrão. Definimos as translações de Auslander-Reiten por*

$$\tau = D\text{Tr} \quad e \quad \tau^{-1} = \text{Tr}D.$$

Lema 2.2.5. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e M um módulo em $\text{mod}A$.*

(a) $\text{pd}_A M \leq 1$ se, e somente se, $\text{Hom}_A(DA, \tau M) = 0$.

(b) $\text{id}_A M \leq 1$ se, e somente se, $\text{Hom}_A(\tau^{-1}M, A) = 0$.

Demonstração. Ver Proposição 2.7, p. 115 de [4].

□

As proposições a seguir têm grande importância nesta teoria, pois apresentam algumas propriedades básicas das translações de Auslander-Reiten.

Proposição 2.2.6. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e M, N módulos indecomponíveis em $\text{mod}A$.*

(a) O módulo τM é zero se, e somente se, M é projetivo.

(b) Se M é um módulo não projetivo, então τM é indecomponível não injetivo e $\tau^{-1}\tau M \cong M$.

(c) Se M, N são módulos não projetivos, então $M \cong N$ se, e somente se, $\tau M \cong \tau N$.

Demonstração. Ver Proposição 2.10, p. 116 de [4].

□

Proposição 2.2.7. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e M, N módulos indecomponíveis em $\text{mod}A$.*

(a) O módulo $\tau^{-1}N$ é zero se, e somente se, N é injetivo.

(b) Se N é um módulo não injetivo, então $\tau^{-1}N$ é indecomponível não projetivo e $\tau\tau^{-1}N \cong N$.

(c) Se M, N são módulos não injetivos, então $M \cong N$ se, e somente se, $\tau^{-1}M \cong \tau^{-1}N$.

Demonstração. Ver Proposição 2.10, p. 116 de [4].

□

Corolário 2.2.8. *As translações de Auslander-Reiten τ e τ^{-1} induzem equivalências inversas*

$$\underline{\text{mod}}A \begin{array}{c} \xrightarrow{\tau} \\ \xleftarrow{\tau^{-1}} \end{array} \overline{\text{mod}}A .$$

No teorema a seguir apresentamos as Fórmulas de Auslander-Reiten. Tais expressões serão amplamente utilizadas no decorrer deste trabalho, muitas vezes sem referência a este resultado.

Teorema 2.2.9. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e M, N dois módulos em $\text{mod}A$. Então existem isomorfismos funtoriais em ambas as variáveis*

$$\text{Ext}_A^1(M, N) \cong D\underline{\text{Hom}}_A(\tau^{-1}N, M) \cong D\overline{\text{Hom}}_A(N, \tau M).$$

Demonstração. Ver Teorema 2.13, p. 117 de [4]. □

Corolário 2.2.10. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e M, N dois módulos em $\text{mod}A$.*

- (a) *Se $\text{pd}_A M \leq 1$ e $\text{id}_A N \leq 1$ então existe um isomorfismo \mathbb{K} -linear $\text{Hom}_A(N, \tau M) \cong \text{Hom}_A(\tau^{-1}N, M)$.*
- (b) *Se $\text{pd}_A M \leq 1$, $\text{id}_A N \leq 1$ e N é um módulo indecomponível não projetivo, então existe um isomorfismo \mathbb{K} -linear $\text{Hom}_A(\tau N, \tau M) \cong \text{Hom}_A(N, M)$.*
- (c) *Se $\text{pd}_A \tau^{-1}M \leq 1$, $\text{id}_A N \leq 1$ e M é um módulo indecomponível não injetivo, então existe um isomorfismo \mathbb{K} -linear $\text{Hom}_A(\tau^{-1}N, \tau^{-1}M) \cong \text{Hom}_A(N, M)$.*

Demonstração. Ver Corolário 2.15, p. 119 de [4]. □

Teorema 2.2.11. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e M, N dois módulos em $\text{mod}A$.*

- (a) *Se M é um módulo indecomponível não projetivo, então existe uma sequência de Auslander-Reiten $0 \rightarrow \tau M \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$ em $\text{mod}A$.*
- (b) *Se N é um módulo indecomponível não injetivo, então existe uma sequência de Auslander-Reiten $0 \rightarrow N \rightarrow F \rightarrow \tau^{-1}N \rightarrow 0$ em $\text{mod}A$.*

Demonstração. Ver Teorema 3.1, p. 120 de [4]. □

O teorema acima prova a existência de sequências de Auslander-Reiten. Como, a menos de isomorfismos, há unicidade de tais sequências, este resultado caracteriza as sequências de Auslander-Reiten com início em módulos indecomponíveis não injetivos e com final em módulos indecomponíveis não projetivos.

2.3 Quiver de Auslander-Reiten

Nesta seção apresentaremos o quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra. Esta ferramenta será muito usada, principalmente para construir exemplos, no decorrer do trabalho. Iniciaremos a seção enunciando mais alguns resultados sobre morfismos irredutíveis e sobre o radical de uma categoria de módulos. As principais referências para esta seção, onde podem ser encontrados mais detalhes, são [4], [21] e [20].

Definição 2.3.1. *Seja A uma \mathbb{K} -álgebra. O radical (de Jacobson) da categoria $\text{mod}A$ é o ideal bilateral dado por:*

$$\text{rad}_A(M, N) = \{f \in \text{Hom}_A(M, N) \mid 1_N - fg \text{ é invertível, para todo } g \in \text{Hom}_A(N, M)\},$$

para quaisquer A -módulos M e N .

Para mais detalhes sobre o radical de uma categoria de módulos e demonstrações dos resultados, ver seção 7 do capítulo V, p. 178 de [6].

Tendo definido o radical de uma categoria de módulos, é possível definir de forma recursiva $\text{rad}_A^n(M, N)$, para $n > 1$. Tal definição pode ser encontrada na página 179 de [6], porém para nossos objetivos neste trabalho basta definir

$$\text{rad}_A^2(M, N) = \{gf \mid f \in \text{rad}_A(M, Z) \text{ e } g \in \text{rad}_A(Z, N), \text{ para certo } A\text{-módulo } Z\}.$$

Vale notar que o conceito de radical de uma categoria de módulos, embora relacionado ao de radical de uma álgebra (ou de um módulo), que é dado pela interseção dos ideais (submódulos) maximais à direita, não é equivalente a este outro radical. Vejamos, agora, alguns resultados que relacionam o radical de uma categoria de módulos com outros conceitos importantes.

Proposição 2.3.2. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e M, N dois A -módulos indecomponíveis. Então:*

$$(a) \text{ rad}_A(M, N) = \{f \in \text{Hom}_A(M, N) \mid f \text{ não é isomorfismo}\}.$$

$$(b) \text{ rad}_A(M, M) = \text{rad}(\text{End}M), \text{ onde } \text{rad}(\text{End}M) \text{ é o radical da álgebra local } \text{End}M.$$

Demonstração. Ver Lema 3.1, p. 12 de [3]. □

Proposição 2.3.3. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e M, N dois A -módulos indecomponíveis. Um morfismo $f: M \rightarrow N$ é irredutível se, e somente se, $f \in \text{rad}_A(M, N)/\text{rad}_A^2(M, N)$.*

Demonstração. Ver Lema 1.6, p. 100 de [4]. □

Dada a proposição acima, definimos o espaço dos morfismos irredutíveis de M para N , denotado por $\text{Irr}(M, N)$, pelo quociente de \mathbb{K} -espaços vetoriais $\text{Irr}(M, N) = \text{rad}_A(M, N)/\text{rad}_A^2(M, N)$.

Proposição 2.3.4. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e M, N dois A -módulos indecomponíveis. Então:*

- (a) *Se M é não projetivo, existe um morfismo irredutível $f: N \rightarrow M$ se, e somente se, existe um morfismo irredutível $f': \tau M \rightarrow N$.*
- (b) *Se N é não injetivo, existe um morfismo irredutível $g: N \rightarrow M$ se, e somente se, existe um morfismo irredutível $g': M \rightarrow \tau^{-1}N$.*

Demonstração. Ver Proposição 3.8, p. 123 de [4]. □

Corolário 2.3.5. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e M um A -módulo indecomponível. Então:*

- (a) *Se S é um A -módulo simples, projetivo e não injetivo e $f: S \rightarrow M$ é um morfismo irredutível, então M é um módulo projetivo.*
- (b) *Se S é um A -módulo simples, injetivo e não projetivo e $g: M \rightarrow S$ é um morfismo irredutível, então M é um módulo injetivo.*

Demonstração. Ver Corolário 3.9, p. 124 de [4]. □

Proposição 2.3.6. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e um A -módulo $M = \bigoplus_{i=1}^m M_i^{n_i}$, com cada M_i indecomponível e dois a dois não isomorfos.*

- (a) *Sejam L um A -módulo indecomponível e $f: L \rightarrow M$ um morfismo em $\text{mod}A$ tal que $f = [f_1, \dots, f_m]$, em que $f_i = [f_{i1}, \dots, f_{in_i}]: L \rightarrow M_i^{n_i}$. Então f é minimal quase cindida à esquerda se, e somente se, f_{ij} pertence a $\text{rad}_A(L, M_i)$ e as classes $\overline{f_{i1}}, \dots, \overline{f_{in_i}}$ módulo $\text{rad}_A^2(L, M_i)$ formam uma base de $\text{Irr}(L, M_i)$, para cada $1 \leq i \leq m$. Além disso, se existe um A -módulo indecomponível M' tal que $\text{Irr}(L, M') \neq 0$, então $M' \cong M_i$ para algum $1 \leq i \leq m$.*
- (b) *Sejam N um A -módulo indecomponível e $g: M \rightarrow N$ um morfismo em $\text{mod}A$ tal que $g = [g_1, \dots, g_m]$, em que $g_i = [g_{i1}, \dots, g_{in_i}]: M_i^{n_i} \rightarrow N$. Então g é minimal quase cindida à direita se, e somente se, g_{ij} pertence a $\text{rad}_A(M_i, N)$ e as classes $\overline{g_{i1}}, \dots, \overline{g_{in_i}}$ módulo $\text{rad}_A^2(M_i, N)$ formam uma base de $\text{Irr}(M_i, N)$, para cada $1 \leq i \leq m$. Além disso, se existe um A -módulo indecomponível M' tal que $\text{Irr}(M', N) \neq 0$, então $M' \cong M_i$ para algum $1 \leq i \leq m$.*

Demonstração. Ver Proposição 4.2, p. 126 de [4]. □

Corolário 2.3.7. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e M, N dois A -módulos indecomponíveis. Então:*

- (a) *Se $\tau M \neq 0$ e $\tau N \neq 0$, existe um isomorfismo \mathbb{K} -linear $\text{Irr}(M, N) \cong \text{Irr}(\tau M, \tau N)$.*
- (b) *Se $\tau^{-1}M \neq 0$ e $\tau^{-1}N \neq 0$, existe um isomorfismo \mathbb{K} -linear $\text{Irr}(M, N) \cong \text{Irr}(\tau^{-1}M, \tau^{-1}N)$.*

Demonstração. Ver Corolário 4.5, p. 128 de [4]. □

Definição 2.3.8. *Seja A uma \mathbb{K} -álgebra básica, conexa e de dimensão finita. O quiver de Auslander-Reiten de $\text{mod}A$, denotado por $\Gamma(\text{mod}A)$, é dado por:*

- (a) *Os vértices (ou pontos) de $\Gamma(\text{mod}A)$ são as classes de isomorfismo $[M]$ de A -módulos indecomponíveis M .*
- (b) *Sejam $[M]$ e $[N]$ dois vértices de $\Gamma(\text{mod}A)$, correspondentes as classes dos A -módulos indecomponíveis M e N , respectivamente. As setas de $[M]$ para $[N]$ em $\Gamma(\text{mod}A)$ estão em correspondência biunívoca com os vetores de uma base do \mathbb{K} -espaço vetorial $\text{Irr}(M, N)$.*

Algumas propriedades do quiver de Auslander-Reiten devem ser destacadas, pois podem facilitar sua construção. Dada A uma \mathbb{K} -álgebra básica, conexa e de dimensão finita e $\Gamma(\text{mod}A)$ o quiver de Auslander-Reiten temos que:

1. Se M é um A -módulo projetivo indecomponível, então o conjunto de antecessores imediatos de $[M]$ coincide com o conjunto de pontos $[L]$ correspondentes a classes de A -módulos indecomponíveis L que são somandos diretos de $\text{rad}(M)$;
2. Se M é um A -módulo injetivo indecomponível, então o conjunto de sucessores imediatos de $[M]$ coincide com o conjunto de pontos $[L]$ correspondentes a classes de A -módulos indecomponíveis L que são somandos diretos de $M/\text{soc}(M)$;
3. Se M é um A -módulo indecomponível não projetivo, então o conjunto de antecessores imediatos de $[M]$ coincide com o conjunto de pontos $[L]$, correspondentes a classes de A -módulos indecomponíveis L que são somandos diretos do termo do meio da sequência de Auslander-Reiten terminando em M .
4. Se M é um A -módulo indecomponível não injetivo, então o conjunto de sucessores imediatos de $[M]$ coincide com o conjunto de pontos $[L]$, correspondentes a classes de A -módulos indecomponíveis L que são somandos diretos do termo do meio da sequência de Auslander-Reiten começando em M .
5. O quiver $\Gamma(\text{mod}A)$ é finito se, e somente se, A admite um número finito de classes de isomorfismo de módulos indecomponíveis, ou seja, se A é de tipo de representação finito.
6. Não há morfismos irredutíveis de um módulo para ele mesmo, logo o quiver $\Gamma(\text{mod}A)$ não possui laços.

Dadas a definição do quiver de Auslander-Reiten e as propriedades destacadas acima, podemos construir alguns exemplos. O primeiro exemplo será feito em mais detalhes e os demais apenas explicados sucintamente. Mais exemplos de quivers de Auslander-Reiten podem ser encontrados em [21], capítulo 3, p. 69 ou a partir da página 132 de [4].

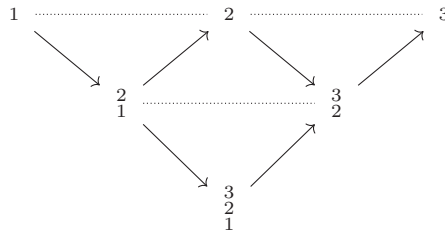
Exemplo 2.3.9. *Seja A a \mathbb{K} -álgebra de caminhos do quiver $\overrightarrow{\Delta} : 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$. Iniciamos a construção encontrando os A -módulos projetivos indecomponíveis. Como estes módulos são da forma $P_1 = e_1A$, $P_2 = e_2A$ e $P_3 = e_3A$ (e estamos usando a notação de concatenação de setas), basta olhar para os caminhos em $\overrightarrow{\Delta}$ que começam nos vértices 1, 2 e 3, respectivamente. Para os módulos injetivos indecomponíveis I_1 , I_2 e I_3 vale o dual. Logo temos:*

$$\begin{array}{ll} P_1 & = 1 \\ P_2 & = \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \\ P_3 & = \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} I_1 & = \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \end{array} \\ I_2 & = \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \\ I_3 & = 3 \end{array}$$

Note que os módulos P_1 e I_3 são módulos simples e que $P_3 = I_1$. Vale notar que esta notação, usando a cadeia radical de um módulo, nem sempre permite diferenciar módulos distintos, em certos casos é necessário recorrer às representações do quiver para saber se os módulos realmente são iguais. Porém, neste caso, não há dúvidas de que o projetivo 3 coincide com o injetivo 1.

Após encontrar estes módulos vamos calcular o radical de cada módulo projetivo indecomponível, obtendo $\text{rad}P_1 = 0$, $\text{rad}P_2 = 1$ e $\text{rad}P_3 = \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}$.

Como P_1 é um projetivo simples, não há morfismo irredutível chegando em P_1 . Por outro lado, $\text{rad}P_2 = P_1$, que não é um somando do radical de P_3 , logo a inclusão $i: P_1 \rightarrow P_2$ é o único morfismo irredutível saindo de P_1 . Além disso, $\text{Coker}(i) = P_2/P_1$, que é o módulo simples S_2 . Como $\text{rad}P_3 = P_2$, também existe um morfismo irredutível de P_2 para P_3 . Conhecendo os morfismos irredutíveis que chegam em todos os módulos projetivos, pode-se continuar a construção calculando o transladado dos módulos em questão e utilizando os resultados 2.3.4 e 2.3.7, até que todos os módulos injetivos apareçam nesta construção. Vale notar que esta forma de construir um quiver de Auslander-Reiten nem sempre funciona, para álgebras de tipo de representação infinito os módulos injetivos não aparecerão desta forma. Como, neste caso, os módulos injetivos podem ser encontrados desta forma obtém-se o quiver $\Gamma(\text{mod}A)$:

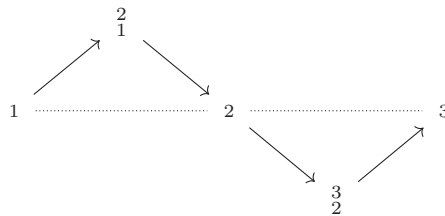


Utilizando as mesmas técnicas, também podemos construir o quiver de Auslander-Reiten de álgebra cujo quiver ordinário possui relações, como nos exemplos a seguir.

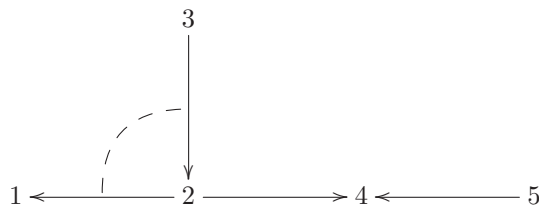
Exemplo 2.3.10. *Seja A a \mathbb{K} -álgebra de caminhos do quiver $1 \xleftarrow{\quad} 2 \xleftarrow{\quad} 3$. Esta álgebra tem módulos projetivos, radicais dos módulos projetivos e módulos injetivos dados por:*

$$\begin{array}{lll}
 P_1 = 1 & rad(P_1) = 0 & I_1 = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \\
 P_2 = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} & rad(P_2) = 1 & I_2 = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \\
 P_3 = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} & rad(P_3) = 2 & I_3 = 3
 \end{array}$$

Desta forma, obtém-se o quiver $\Gamma(\text{mod}A)$:



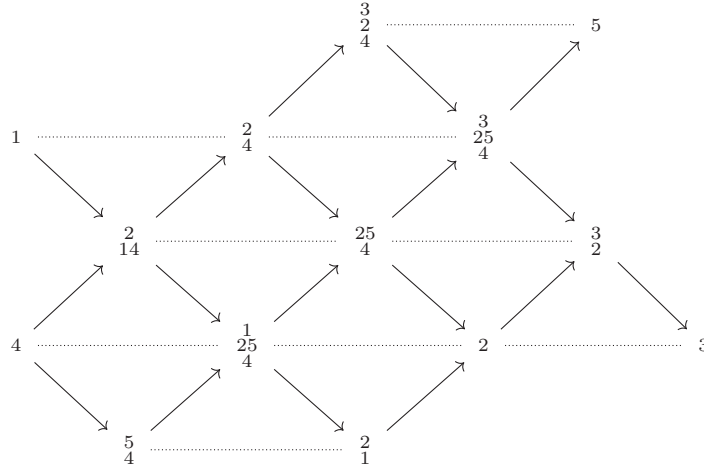
Exemplo 2.3.11. *Seja A a \mathbb{K} -álgebra de caminhos do quiver com relações:*



Esta álgebra tem módulos projetivos, radicais dos módulos projetivos e módulos injetivos dados por:

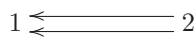
$$\begin{array}{lll}
 P_1 = 1 & rad(P_1) = 0 & I_1 = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \\
 P_2 = \begin{smallmatrix} 2 \\ 14 \end{smallmatrix} & rad(P_2) = 1 \oplus 4 & I_2 = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \\
 P_3 = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{smallmatrix} & rad(P_3) = \begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix} & I_3 = 3 \\
 P_4 = 4 & rad(P_4) = 0 & I_4 = \begin{smallmatrix} 3 \\ 25 \\ 4 \end{smallmatrix} \\
 P_5 = \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix} & rad(P_5) = 4 & I_5 = 5
 \end{array}$$

Assim, o quiver $\Gamma(\text{mod}A)$ é da forma:



Como nem toda álgebra é de tipo de representação finito, existem categorias de módulos cujo quiver de Auslander-Reiten é infinito, além disso também há álgebras cujos quivers de Auslander-Reiten tem setas múltiplas. Tais álgebras não são incomuns, veremos posteriormente que conhecemos todas as álgebras de caminhos de quivers sem relações de tipo de representação finito. Um exemplo tradicional de álgebra de tipo de representação infinito, cujo quiver de Auslander-Reiten também tem setas múltiplas, é a álgebra de Kronecker, apresentada abaixo.

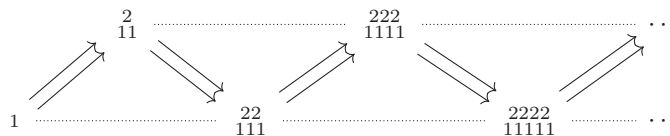
Exemplo 2.3.12. Seja A a álgebra de Kronecker, ou seja, a \mathbb{K} -álgebra de caminhos do quiver:



Os módulos projetivos, radicais dos módulos projetivos e módulos injetivos desta álgebra são:

$$\begin{array}{lll}
 P_1 = 1 & \text{rad}(P_1) = 0 & I_1 = \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \\
 P_2 = \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} & \text{rad}(P_2) = 1 \oplus 1 & I_2 = 2
 \end{array}$$

Construindo o quiver de Auslander-Reiten da mesma forma que nos exemplos anteriores chegamos ao quiver:



A construção pode continuar indefinidamente e, portanto, o quiver $\Gamma(\text{mod}A)$ é infinito. Existem resultados que descrevem partes deste quiver, como as componentes pós-projetiva, pré-injetiva e os tubos, mas estes resultados estão fora do escopo deste trabalho (para mais detalhes ver capítulo VIII, p.301 de [4]).

2.4 Característica de Euler

Ao discutirmos propriedades de álgebras hereditárias por partes de tipo Dynkin no último capítulo deste texto será necessário conhecer o conceito de característica de Euler. Esta forma quadrática é importante em diversas áreas e há muitos resultados sobre ela, mas aqui serão apresentados apenas conceitos iniciais e uma propriedade homológica.

Definição 2.4.1. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra básica, $\{P_i\}_{1 \leq i \leq n}$ um conjunto completo de representantes das classes de isomorfismo dos A -módulos projetivos indecomponíveis e M um A -módulo qualquer. Defina-se o vetor dimensão de M , denotado por $\dim M$, como o vetor coluna em \mathbb{N}^n dado por:*

$$\dim M = \begin{bmatrix} \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_A(P_1, M) \\ \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_A(P_2, M) \\ \vdots \\ \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_A(P_n, M) \end{bmatrix}$$

Definição 2.4.2. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra básica e $\{P_i\}_{1 \leq i \leq n}$ um conjunto completo de representantes das classes de isomorfismo dos A -módulos projetivos indecomponíveis. Então a Matriz de Cartan de A , denotada por C_A é a matriz quadrada que tem como colunas os vetores dimensão dos A -módulos P_1, P_2, \dots, P_n , ou seja, a j -ésima coluna de C_A é o vetor coluna $\dim P_j$.*

Lema 2.4.3. *Seja A uma \mathbb{K} -álgebra com dimensão global finita, então a Matriz de Cartan de A é invertível sobre \mathbb{Z} .*

Demonstração. Ver Proposição 3.10, p. 90 de [4]. □

Definição 2.4.4. *Seja A uma \mathbb{K} -álgebra básica e com dimensão global finita, então pode-se definir a forma \mathbb{Z} -bilinear $\langle -, - \rangle_A$ por $\langle x, y \rangle_A = x(C_A^{-1})^t y^t$, para quaisquer vetores $x, y \in \mathbb{Z}^n$. A forma quadrática associada, denotada por χ_A , é dada por*

$$\chi_A(x) = \langle x, x \rangle_A = x(C_A^{-1})^t x^t,$$

e recebe o nome de *Característica de Euler de A* .

Lema 2.4.5. *Nas mesmas condições da definição acima, dados A -módulos X e Y , temos que $\dim X, \dim Y \in \mathbb{Z}^n$, logo pode-se calcular o valor de $\langle \dim X, \dim Y \rangle_A$; além disso vale a seguinte propriedade homológica*

$$\langle \dim X, \dim Y \rangle_A = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_{\mathbb{K}} \text{Ext}_A^i(X, Y).$$

Demonstração. Ver Lema 1.3, p.98 de [14]. □

2.5 Álgebras Hereditárias

Nesta seção consideraremos \mathbb{K} um corpo algebricamente fechado e A uma \mathbb{K} -álgebra básica e conexa de dimensão finita. Para os resultados iniciais apresentados aqui não há necessidade de assumir que os módulos são finitamente gerados, portanto, quando for pertinente faremos menção a esta necessidade.

Definição 2.5.1. *Uma \mathbb{K} -álgebra A é dita hereditária à direita se todo ideal à direita de A é projetivo como A -módulo.*

As álgebras hereditárias à esquerda podem ser definidas de maneira análoga. Como usamos módulos à direita, faremos o mesmo com álgebras hereditárias. Vale notar que tal distinção se mostra desnecessária a partir de certo ponto do texto, pelo resultado do corolário 2.5.5. Além disso, os resultados apresentados possuem análogos para álgebras hereditárias à esquerda.

Teorema 2.5.2. *Seja A uma álgebra hereditária à direita. Todo submódulo de um A -módulo livre é isomorfo a uma soma direta de ideais à direita de A .*

Demonstração. Ver Teorema 1.2, p. 244 de [4]. □

Corolário 2.5.3. *A álgebra A é hereditária à direita se, e somente se, todo submódulo de um A -módulo projetivo é projetivo.*

Demonstração. Ver Corolário 1.3, p. 245 [4]. □

A definição apresentada aqui, de álgebra hereditária à direita (ou à esquerda) parece não justificar tal nome. O corolário acima deixa clara a motivação para o nome dado.

Teorema 2.5.4. *Para uma álgebra A , são equivalentes:*

- (i) *A é hereditária à direita.*
- (ii) *$gl.\dim(A) \leq 1$.*
- (iii) *Todo submódulo de um A -módulo projetivo é projetivo.*

(iv) Todo quociente de um A -módulo injetivo é injetivo.

(v) Todo submódulo de um A -módulo projetivo finitamente gerado é projetivo.

(vi) Todo quociente de um A -módulo injetivo finitamente gerado é injetivo.

(vii) O radical de todo A -módulo projetivo indecomponível finitamente gerado é projetivo.

(viii) O quociente de todo A -módulo injetivo indecomponível finitamente gerado pelo seu socle é injetivo.

Demonstração. Ver Teorema 1.4, p. 245 de [4]. \square

A equivalência entre (i) e (ii) será muito utilizada no decorrer do trabalho, muitas vezes, sem referência ao teorema acima. Além disso, tal equivalência nos permite demonstrar resultado a seguir. Para não causar confusão, note que estamos trabalhando com álgebras básicas, conexas, de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. O teorema acima e o corolário que segue, bem como outros resultados aqui apresentados, podem não ser verdadeiros em casos mais gerais.

Corolário 2.5.5. *Uma álgebra A é hereditária à direita se, e somente se, é uma álgebra hereditária à esquerda.*

Demonstração. Note que a condição (ii) do teorema 2.5.4 não muda de acordo com o lado dos ideais ou módulos considerados, ou seja, é uma propriedade simétrica. Assim, usando o análogo do teorema 2.5.4, temos que ser uma álgebra hereditária à direita ou a esquerda é equivalente a ter dimensão global no máximo 1. Logo, toda álgebra hereditária à direita é hereditária à esquerda, e vice-versa. \square

Com o resultado do corolário acima, a partir deste ponto podemos usar o nome álgebra hereditária, sem distinção de lado.

O resultado abaixo afirma, em outras palavras, que uma álgebra é hereditária se, e somente se, é uma álgebra de caminhos de um quiver finito, conexo e acíclico.

Teorema 2.5.6. (a) *Seja $\vec{\Delta}$ um quiver finito, conexo e acíclico, então $A = \mathbb{K}\vec{\Delta}$ é uma álgebra hereditária e, sendo $\vec{\Delta}_A$ o quiver ordinário de A , temos $\vec{\Delta} = \vec{\Delta}_A$.*

(b) *Seja A uma álgebra básica, conexa e hereditária com $\{e_1, \dots, e_n\}$ um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos. Então o quiver ordinário $\vec{\Delta}_A$ de A é finito, conexo e acíclico, além disso $A \cong \mathbb{K}\vec{\Delta}_A$.*

Demonstração. Ver Teorema 1.7, p. 248 de [4]. \square

O teorema acima mostra que, para os casos estudados aqui, álgebras hereditárias são as álgebras de caminhos de quivers sem relações. Tal fato será usado livremente, sem referência ao teorema 2.5.6. Como trabalharemos, constantemente, com o quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra, é interessante salientar as seguintes propriedades das álgebras hereditárias.

Proposição 2.5.7. *Sejam A uma álgebra e $\Gamma(\text{mod}A)$ seu quiver de Auslander-Reiten, então são equivalentes:*

- (i) A é hereditária.
- (ii) Os antecessores dos pontos de $\Gamma(\text{mod}A)$ que correspondem aos módulos indecomponíveis projetivos correspondem a módulos projetivos.
- (iii) Os sucessores dos pontos de $\Gamma(\text{mod}A)$ que correspondem aos módulos indecomponíveis injetivos correspondem a módulos injetivos.

Demonstração. Ver Proposição 1.10, p. 251 de [4]. □

Teorema 2.5.8. *Sejam $\vec{\Delta}$ um quiver finito e $A = \mathbb{K}\vec{\Delta}$ a álgebra de caminhos hereditária associada a $\vec{\Delta}$. Se \mathcal{C} é uma subcategoria de $\text{mod}A$ fechada para extensões e somas diretas, que contém um ciclo, então existe um A -módulo $Z \in \mathcal{C}$ tal que $\text{End}Z \neq \mathbb{K}$.*

Demonstração. Ver Teorema 2, p.160 de [14]. □

2.6 Grafos de Dynkin e o Teorema de Gabriel

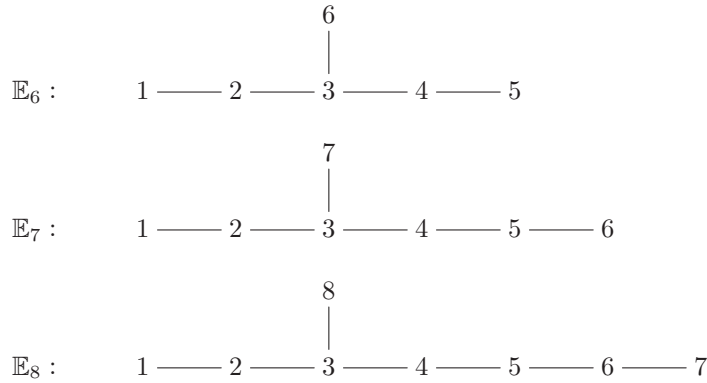
Ao ponderar a respeito da categoria de módulos (finitamente gerados) sobre uma álgebra, é natural perguntar quando o número de classes de isomorfismo de módulos indecomponíveis nesta categoria é finito. Além disso, tal informação facilita a construção do Quiver de Auslander-Reiten da álgebra. Nesta seção apresentamos o resultado que responde parcialmente tal questão, demonstrado por Peter Gabriel em [10].

Definição 2.6.1. *Dado um quiver $\vec{\Delta}$, seu grafo subjacente, denotado por Δ , é o grafo que possui os mesmos vértices de $\vec{\Delta}$ e uma aresta no lugar de cada seta. Ou seja, é o grafo dado por $\vec{\Delta}$ ao se ignorar a orientação das setas.*

Certos tipos de grafos são recorrentes em diferentes áreas da matemática; para este trabalho serão importantes os grafos conhecidos como diagramas Dynkin. Listamos abaixo tais diagramas.

$$\mathbb{A}_n : \quad 1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \text{ } n - 2 \text{ --- } n - 1 \text{ --- } n, \text{ com } n \geq 1.$$

$$\mathbb{D}_n : \quad \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 3 \text{ --- } 4 \text{ } n - 2 \text{ --- } n - 1 \text{ --- } n, \text{ com } n \geq 4. \\ \diagup \\ 2 \end{array}$$



Chamaremos os quivers cujo grafo subjacente é um dos grafos \mathbb{A}_n , \mathbb{D}_n , \mathbb{E}_6 , \mathbb{E}_7 ou \mathbb{E}_8 de quivers Dynkin. A importância destes quivers fica clara no teorema a seguir, que é parte do resultado conhecido como Teorema de Gabriel.

Teorema 2.6.2. *A álgebra de caminhos de um quiver finito e conexo é de tipo de representação finito se, e somente se, o grafo subjacente deste quiver é um diagrama Dynkin.*

Demonstração. Ver teorema 8.12, p. 219 de [21]. □

2.7 Teoria Inclinante

Em certos contextos pode-se construir a partir de uma álgebra A uma nova álgebra B de forma que os módulos sobre A possam ser estudados via suas relações com módulos sobre B . A teoria apresentada nesta seção vem de encontro a esta possibilidade.

Definição 2.7.1. *Seja A uma \mathbb{K} -álgebra. Um par de subcategorias plenas $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de $\text{mod}A$ é dito par de torção se satisfaz:*

- (a) $\text{Hom}_A(M, N) = 0$, para todo $M \in \mathcal{T}$ e todo $N \in \mathcal{F}$;
- (b) Se $\text{Hom}_A(M, N) = 0$ para todo $N \in \mathcal{F}$, então $M \in \mathcal{T}$;
- (c) Se $\text{Hom}_A(M, N) = 0$ para todo $M \in \mathcal{T}$, então $N \in \mathcal{F}$.

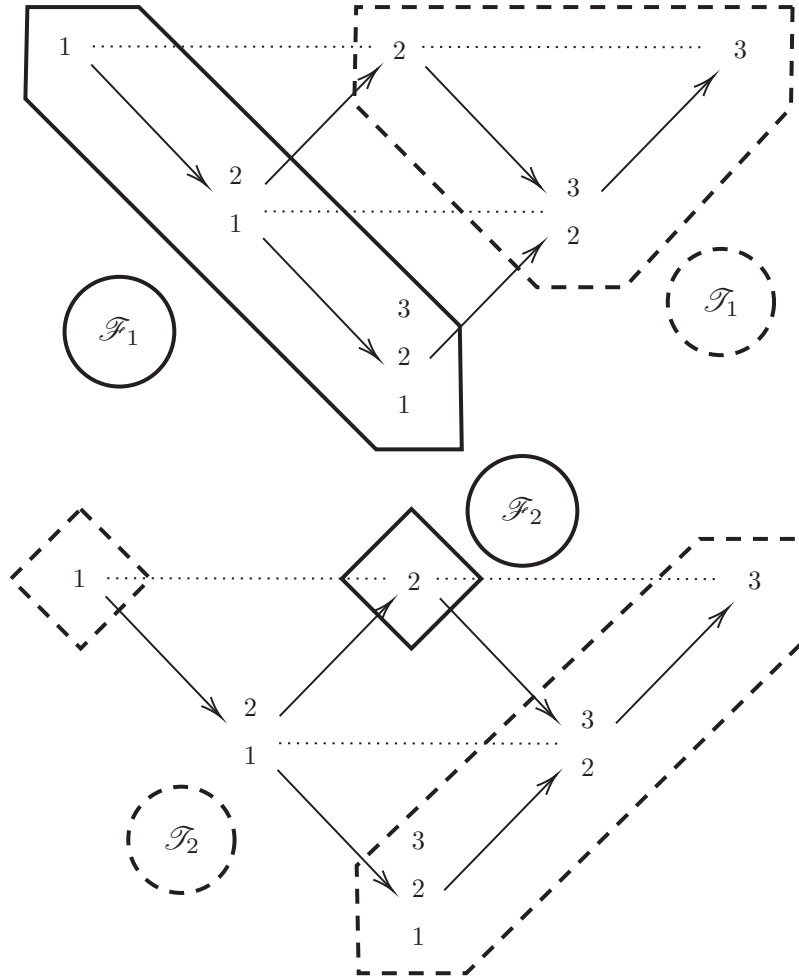
Deste ponto em diante, nos referiremos às subcategorias \mathcal{T} e \mathcal{F} , respectivamente, como classe de torção e classe livre de torção.

Exemplo 2.7.2. *Dada uma classe arbitrária \mathcal{C} de A -módulos, pode-se induzir um par de torção da seguinte forma:*

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} &= \{N; \text{Hom}_A(_, N)|_{\mathcal{C}} = 0\} \\
 \mathcal{T} &= \{M; \text{Hom}_A(M, _)|_{\mathcal{F}} = 0\}.
 \end{aligned}$$

Neste caso \mathcal{T} é a menor classe de torção que contém \mathcal{C} . O dual desta construção nos dá outro par de torção, em que a classe livre de torção é a menor que contém \mathcal{C} .

Exemplo 2.7.3. Seja A a \mathbb{K} -álgebra de caminhos do quiver $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$, então podemos construir seu quiver de Auslander-Reiten e nele observar alguns pares de torção, como $(\mathcal{T}_1, \mathcal{F}_1)$ e $(\mathcal{T}_2, \mathcal{F}_2)$ apresentados abaixo.



Definição 2.7.4. Seja A uma \mathbb{K} -álgebra. Diz-se que um par de torção $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ cinde (ou é cindido) em $\text{mod}A$ se todo A -módulo indecomponível pertence a \mathcal{T} ou \mathcal{F} .

Considerando a definição de par de torção cindido dada acima, vê-se que no exemplo 2.7.3 o par de torção $(\mathcal{T}_1, \mathcal{F}_1)$ é cindido, mas o par de torção $(\mathcal{T}_2, \mathcal{F}_2)$ não é cindido.

Definição 2.7.5. Seja A uma \mathbb{K} -álgebra. Um A -módulo M é dito gerado (resp. cogerado) pelo A -módulo T se existem um inteiro $d \geq 0$ e um epimorfismo (resp. monomorfismo) $T^d \rightarrow M$ (resp. $M \rightarrow T^d$).

Denotamos por $GenT$ e $CogenT$ as subcategorias plenas de $\text{mod}A$ cujos objetos são A -módulos gerados e cogerados por T , respectivamente.

Exemplo 2.7.6. *Considere a álgebra A do exemplo 2.7.3 e o A -módulo $T = 2 \oplus_1^2 \oplus_1^3$. O próprio módulo T pertence a $GenT$; além disso $\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}$, $3 \in GenT$, pois existem epimorfismos de $\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}$, e conseqüentemente de T , para cada um destes módulos. Como não existe epimorfismo de T para 1 , este módulo não pertence a $GenT$.*

Escolhendo um A -módulo T qualquer, normalmente não é possível comparar as categorias de módulos $\text{mod}A$ e $\text{mod}EndT$. Porém, quando o módulo T tem certas propriedades esta comparação é possível. Tendo em vista tais propriedades apresentamos a definição a seguir.

Definição 2.7.7. *Um A -módulo T é dito inclinante parcial se satisfaz:*

$$(T1) \quad pdT \leq 1;$$

$$(T2) \quad \text{Ext}_A^1(T, T) = 0.$$

Um A -módulo T inclinante parcial é dito inclinante se satisfaz:

$$(T3) \quad \text{Existe uma seqüência exata da forma } 0 \longrightarrow A_A \longrightarrow T' \longrightarrow T'' \longrightarrow 0, \text{ com } T', T'' \in \text{add}T.$$

A proposição a seguir nos dá uma maneira mais simples de verificar se um módulo inclinante parcial é inclinante. Esta proposição será muito útil no decorrer deste texto, principalmente quando usada em conjunto com o Quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra.

Proposição 2.7.8. *Seja T um A -módulo inclinante parcial. O módulo T é inclinante se, e somente se, o número de somandos indecomponíveis, dois-a-dois não isomorfos de T é igual ao número de classes de isomorfismo de A -módulos simples. Note que o número de classes de isomorfismo de A -módulos simples é exatamente $rk(K_0(A))$.*

Demonstração. Ver Corolário 4.4, p. 217 de [4]. □

Na proposição acima utilizamos a notação $K_0(A)$, que se refere ao grupo de Grothendieck da álgebra A (ou da categoria de módulos $\text{mod}A$); a definição de tal grupo será apresentada em 2.8.1. Usaremos esta proposição para construir os exemplos de maneira mais compreensível.

Exemplo 2.7.9. *Toda álgebra A admite um módulo inclinante trivial, dado pela soma direta de um representante de cada classe de isomorfismo de A -módulos projetivos indecomponíveis. Porém, veremos no decorrer deste trabalho, que estudar este módulo inclinante trivial não será de grande utilidade para esta teoria. Isso ocorre pois a álgebra de endomorfismos de um módulo construído desta forma é isomorfa à álgebra A .*

Podemos tornar mais fácil verificar, utilizando o Quiver de Auslander-Reiten, se certo módulo é inclinante parcial. Os resultados a seguir cumprem este papel e, em conjunto com a proposição 2.7.8, serão fortemente utilizados no decorrer do texto.

Proposição 2.7.10. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e M um A -módulo. Então $pdM \leq 1$ se, e somente se, $\text{Hom}_A(I, \tau M) = 0$ para todo A -módulo injetivo I .*

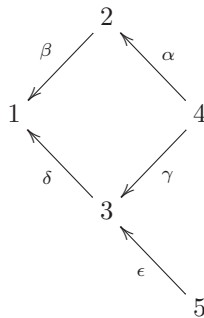
Demonstração. Fixado um A -módulo M , pelo item (a) do lema 2.2.5, temos que $pdM \leq 1$ se, e somente se, $\text{Hom}_A(DA_A, \tau M) = 0$. Note que o A -módulo DA_A é a soma direta de um representante de cada classe de A -módulos projetivos indecomponíveis, logo a dualidade padrão D leva este módulo na soma direta de um representante de cada classe de A -módulos injetivos indecomponíveis. Assim, $\text{Hom}_A(DA_A, \tau M) = 0$ se, e somente se, $\text{Hom}_A(J, \tau M) = 0$ para todo A -módulo injetivo indecomponível J , mas isso equivale a $\text{Hom}_A(I, \tau M) = 0$ para todo A -módulo injetivo I . \square

Proposição 2.7.11. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e M um A -módulo. Se $pdM \leq 1$, então existe um isomorfismo \mathbb{K} -linear $\text{Ext}_A^1(M, M) \cong D\overline{\text{Hom}}_A(M, \tau M)$.*

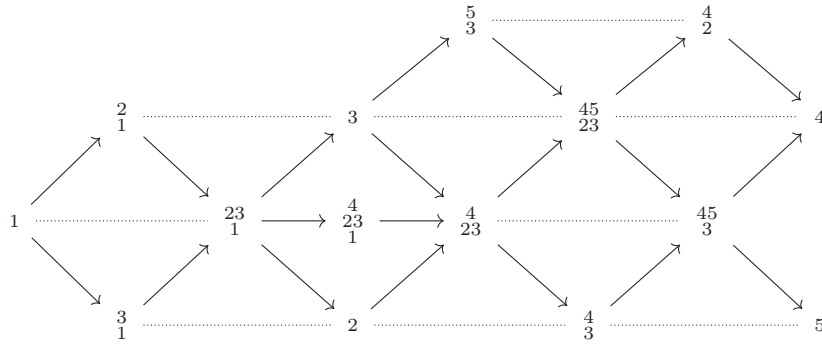
Demonstração. Dado o A -módulo M , pelo teorema 2.2.9, temos que $\text{Ext}_A^1(M, M) \cong D\overline{\text{Hom}}_A(M, \tau M)$. Como $pdM \leq 1$, pela proposição 2.7.10, temos $\text{Hom}_A(I, \tau M) = 0$ para todo A -módulo injetivo I , logo $\mathcal{S}(M, \tau M) = 0$. Assim, $\overline{\text{Hom}}_A(M, \tau M) = \text{Hom}_A(M, \tau M)$, provando o resultado. \square

Observação: Nos exemplos a seguir utilizaremos o seguinte fato: Sejam A uma álgebra de tipo de representação finito e M e N dois A -módulos indecomponíveis. Se existe um morfismo não nulo $M \rightarrow N$, então existe um caminho de M para N no quiver de Auslander-Reiten da álgebra A . Para mais detalhes e uma demonstração ver teorema 7.8, p.183 de [5].

Exemplo 2.7.12. *Considere o quiver abaixo, com as relações $\alpha\beta = \gamma\delta$ e $\epsilon\delta = 0$.*



A álgebra $A = \mathbb{K}\overrightarrow{\Delta}$ tem quiver de Auslander-Reiten da forma:



Considere os A -módulos M_1, M_2, M_3 e M_4 dados por:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \frac{2}{1} \oplus \frac{23}{1} \oplus \frac{4}{23} \oplus 2 \oplus \frac{5}{3} \\
 M_2 &= \frac{2}{1} \oplus \frac{23}{1} \oplus \frac{45}{3} \oplus 2 \oplus \frac{5}{3} \\
 M_3 &= \frac{2}{1} \oplus \frac{23}{1} \oplus \frac{3}{1} \oplus \frac{4}{23} \oplus \frac{5}{3} \oplus \frac{4}{3} \\
 M_4 &= \frac{2}{1} \oplus \frac{23}{1} \oplus \frac{4}{23} \oplus 2
 \end{aligned}$$

Vamos verificar se estes módulos são inclinantes usando o quiver de Auslander-Reiten de A e as proposições 2.7.8, 2.7.10 e 2.7.11.

(M_1) (T1) $\text{Hom}_A(I, \tau M_1) = 0$, pois $\tau M_1 = 1 \oplus \frac{3}{1}$ e, pela observação acima, claramente não há morfismo de um módulo injetivo para este módulo. Logo M_1 tem a propriedade (T1) dos módulos inclinantes.

(T2) $\text{Hom}_A(M_1, \tau M_1) = 0$, pois $\tau M_1 = 1 \oplus \frac{3}{1}$ e não há morfismo de M_1 para este módulo. Logo M_1 tem a propriedade (T2) dos módulos inclinantes.

(T3) M_1 possui cinco somandos indecomponíveis não isomorfos, logo tem a propriedade (T3) dos módulos inclinantes.

Assim, M_1 é um módulo inclinante e, conseqüentemente, um módulo inclinante parcial.

(M_2) (T1) $\text{Hom}_A(I, \tau M_2) \neq 0$, pois $\tau M_2 = 1 \oplus \frac{4}{23} \oplus \frac{3}{1}$ e há morfismo do módulo injetivo $\frac{4}{23}$ para este módulo. Logo M_2 não tem a propriedade (T1) dos módulos inclinantes.

Assim M_2 não é um módulo inclinante parcial e, conseqüentemente, não é inclinante. Note que neste caso, como $\text{pd}M_2 > 1$, não podemos usar as proposições 2.7.11 e 2.7.8 para verificar se M_2 tem as propriedades (T2) e (T3).

(M_3) (T1) $\text{Hom}_A(I, \tau M_3) = 0$, pois $\tau M_3 = 1 \oplus 2$ e não há morfismo de um módulo injetivo para este módulo. Logo M_3 tem a propriedade (T1) dos módulos inclinantes.

(T2) $\text{Hom}_A(M_3, \tau M_1) \neq 0$, pois $\tau M_3 = 1 \oplus 2$ e há morfismo de M_3 para este módulo. Logo M_3 não tem a propriedade (T2) dos módulos inclinantes.

Assim M_3 não é um módulo inclinante parcial e, conseqüentemente, não é inclinante. Não podemos verificar a propriedade (T3) usando a proposição 2.7.8, pois M_3 não é inclinante parcial.

(M₄) (T1) $\text{Hom}_A(I, \tau M_4) = 0$, pois $\tau M_4 = 1 \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$ e claramente não há morfismo de um módulo injetivo para este módulo. Logo M_4 tem a propriedade (T1) dos módulos inclinantes.

(T2) $\text{Hom}_A(M_4, \tau M_4) = 0$, pois $\tau M_4 = 1 \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$ e não há morfismo de M_4 para este módulo. Logo M_4 tem a propriedade (T2) dos módulos inclinantes.

(T3) M_4 possui quatro somandos indecomponíveis não isomorfos, mas, pela proposição 2.7.8, deveria ter cinco para ter a terceira propriedade dos módulos inclinantes.

Logo M_4 é um módulo inclinante parcial, mas não é inclinante. Podemos ver que o módulo M_4 pode ser completado a um módulo inclinante, ou seja, há um módulo que somado com M_4 resulta em um módulo inclinante. Note que $M_4 \oplus \begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \end{smallmatrix} = M_1$, que é um módulo inclinante. Tal completamento de um módulo inclinante parcial a um inclinante sempre existe; este resultado será apresentado no final desta seção.

Sendo T um módulo inclinante parcial, pode-se construir pares de torção interessantes a partir de T . Os próximos resultados discorrem sobre tais pares de torção.

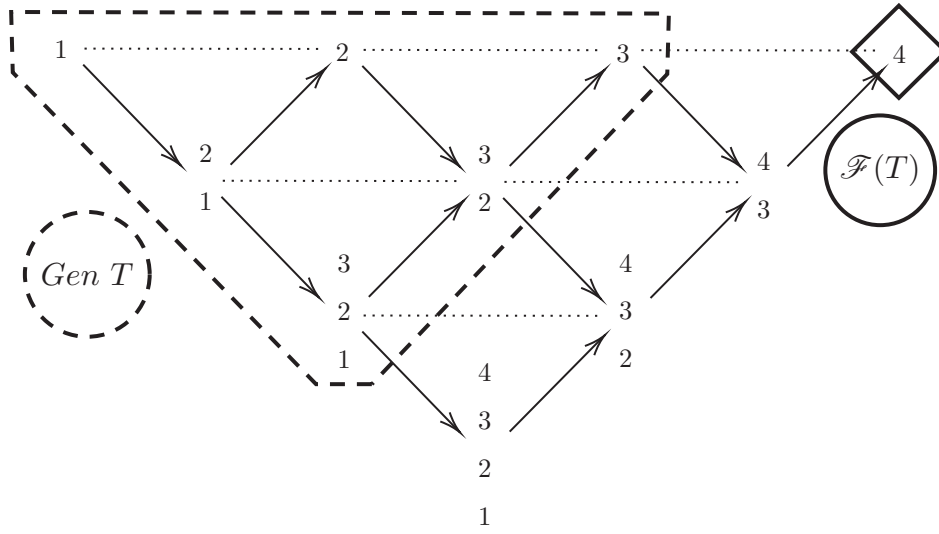
Lema 2.7.13. *Se T é um módulo inclinante parcial, valem as seguintes afirmações:*

(a) A subcategoria $\text{Gen}T$ é uma classe de torção cuja classe livre de torção correspondente é $\mathcal{F}(T) = \{M_A | \text{Hom}_A(T, M) = 0\}$.

(b) A subcategoria $\text{Cogen}(\tau T)$ é uma classe livre de torção cuja classe de torção correspondente é $\mathcal{T}(T) = \{M_A | \text{Ext}_A^1(T, M) = 0\}$.

Demonstração. Ver Lema 2.3, p. 194 de [4]. □

Exemplo 2.7.14. *Seja A a álgebra de caminhos do quiver $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 4$. O quiver de Auslander-Reiten desta álgebra está representado na figura abaixo. Nesta figura também destacamos o par de torção $(\text{Gen}T, \mathcal{F}(T))$, sendo T o módulo inclinante parcial $T = 1 \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$. Vale notar que T é um A -módulo projetivo, portanto, pelas propriedades da translação de Auslander-Reiten, temos $\tau T = 0$; assim $\text{Cogen}(\tau T) = 0$ e $\mathcal{T}(T)$ contém todos os A -módulos.*



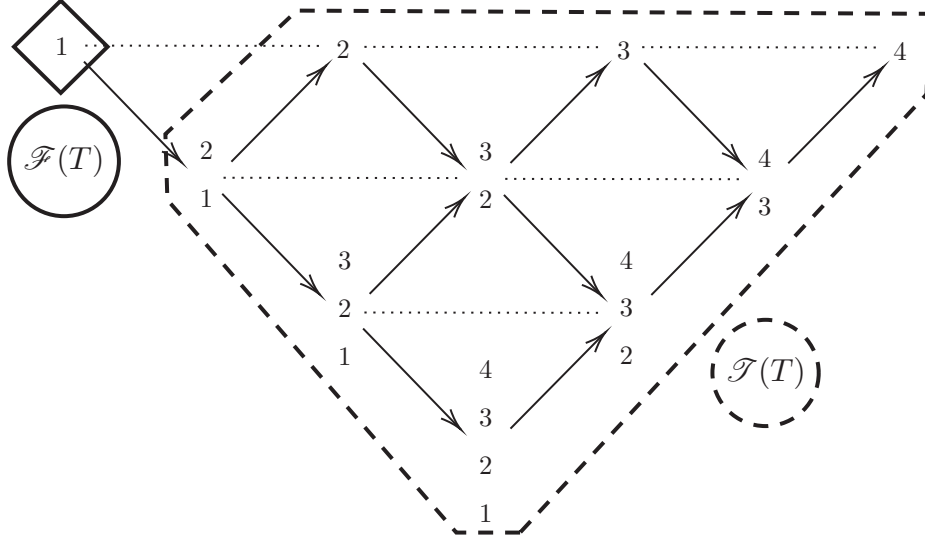
Lema 2.7.15. *Se T é um A -módulo inclinante parcial, são equivalentes as seguintes afirmações:*

- (i) T é um A -módulo inclinante.
- (ii) $GenT = \mathcal{T}(T)$.
- (iii) $\mathcal{F}(T) = Cogen(\tau T)$.
- (iv) Para todo A -módulo $M \in \mathcal{T}(T)$ existe uma sequência exata curta da forma $0 \rightarrow T_0'' \rightarrow T_0' \rightarrow M \rightarrow 0$, em que $T_0' \in \text{add}T$ e $T_0'' \in \mathcal{T}(T)$.

Demonstração. Ver Teorema 2.5, p. 197 de [4]. □

Definição 2.7.16. *Seja T uma A -módulo inclinante. Chamamos de par de torção induzido por T em $\text{mod}A$ o par $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$.*

Exemplo 2.7.17. *Seja A a álgebra de caminhos do quiver $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 4$. O módulo $T = 2 \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$ é um módulo inclinante sobre a álgebra A . Vemos abaixo o quiver de Auslander-Reiten desta álgebra e o par de torção $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ induzido por T . Este par de torção é cindido, mas isso nem sempre ocorre com pares induzidos por módulos inclinantes (ver exemplo 2.7.21).*



Teorema 2.7.18. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra, T um A -módulo inclinante e $B = \text{End}T$. Então o A -módulo T induz um par de torção $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ em $\text{mod}B$, em que:*

$$\mathcal{X}(T) = \{X_B \mid \text{Hom}_B(X, DT) = 0\}$$

$$\mathcal{Y}(T) = \{Y_B \mid \text{Ext}_B^1(Y, DT) = 0\}.$$

Demonstração. Ver Corolário 3.6, p. 205 de [4]. □

Definição 2.7.19. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra, T um A -módulo inclinante e $B = \text{End}T$. Então:*

- (a) *Diz-se que T é um módulo separante se o par de torção induzido $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ é cindido em $\text{mod}A$.*
- (b) *Diz-se que T é um módulo cindido se o par de torção induzido $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ é cindido em $\text{mod}B$.*

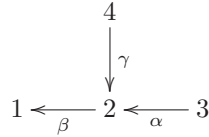
A seguir enunciamos o teorema conhecido como Teorema de Brenner-Butler ou Teorema Inclinante.

Teorema 2.7.20. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra, T um A -módulo inclinante e $B = \text{End}T$. Denotando por $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ e $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ os pares de torção induzidos por T em $\text{mod}A$ e $\text{mod}B$, respectivamente, valem as seguintes propriedades:*

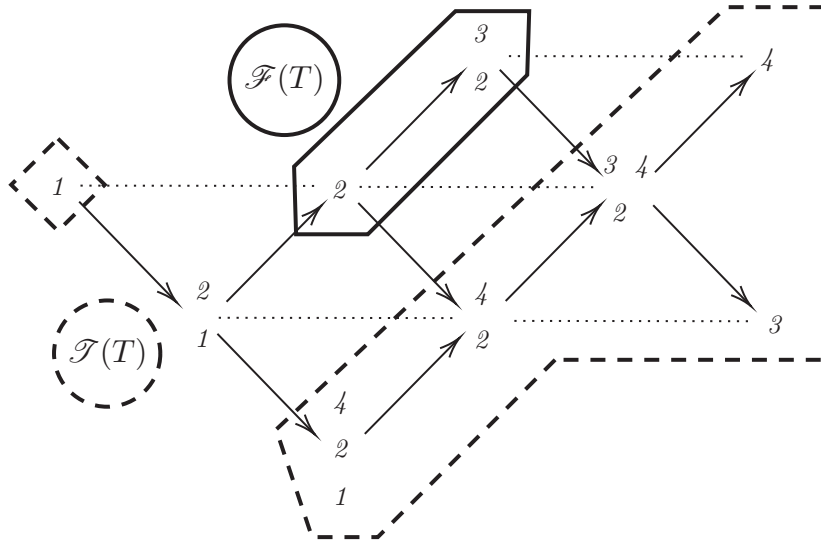
- (a) *${}_B T$ é um módulo inclinante e o homomorfismo de \mathbb{K} -álgebras canônico $A \rightarrow \text{End}({}_B T)^{op}$, dado por $a \mapsto (t \mapsto ta)$, é um isomorfismo.*
- (b) *Os funtores $\text{Hom}_A(T, _)$ e $_ \otimes_B T$ induzem equivalências quase inversas entre $\mathcal{T}(T)$ e $\mathcal{Y}(T)$.*
- (c) *Os funtores $\text{Ext}_A^1(T, _)$ e $\text{Tor}_1^B(_, T)$ induzem equivalências quase inversas entre $\mathcal{F}(T)$ e $\mathcal{X}(T)$.*

Demonstração. Ver Teorema 3.8, p. 207 de [4]. □

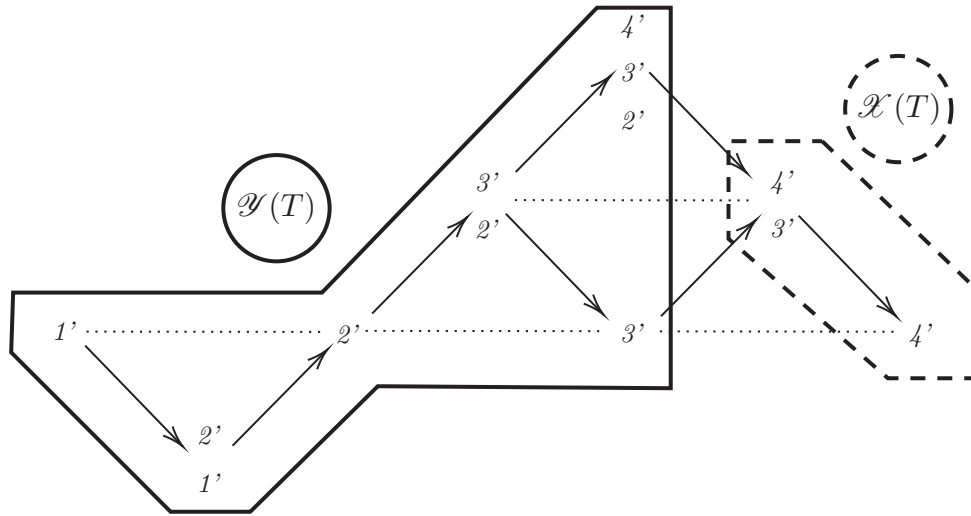
Exemplo 2.7.21. Este exemplo foi retirado de [3]; para outros exemplos consultar exemplo 4.8, p.53 de [3] ou exemplo 3.11, p.211 de [4]. Seja A a álgebra de caminhos do quiver abaixo, munido da relação $\alpha\beta = 0$.



Escolhendo o módulo inclinante $T = 1 \oplus \frac{4}{2} \oplus \frac{3^4}{2} \oplus 4$, obtemos o par de torção não cindido $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ representado abaixo.



A álgebra $B = \text{End}T$ será equivalente à álgebra de caminhos do quiver $1' \xleftarrow{\nu} 2' \xleftarrow{\mu} 3' \xleftarrow{\lambda} 4'$ com a relação $\mu\nu = 0$. Temos as relações $\text{Hom}_A(T, 1) = 1'$, $\text{Hom}_A(T, \frac{4}{2}) = 2'$, $\text{Hom}_A(T, 4) = \frac{4'}{3'}$, $\text{Hom}_A(T, \frac{4}{1}) = \frac{2'}{1'}$, $\text{Hom}_A(T, \frac{3^4}{2}) = \frac{3'}{2'}$ e $\text{Hom}_A(T, 3) = 3'$. Tais relações nos indicam quais são os B -módulos na classe $\mathcal{Y}(T)$. Para encontrar os B -módulos de $\mathcal{X}(T)$ utilizamos as relações $\text{Ext}_A^1(T, 2) = \frac{4'}{3'}$ e $\text{Ext}_A^1(T, \frac{3}{2}) = 4$. Assim, o quiver de Auslander-Reiten da álgebra B , com o par de torção $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ representado, tem a forma:



O resultado abaixo, conhecido como Lema de Bongartz, será usado na demonstração do teorema principal desta dissertação.

Lema 2.7.22. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e T um A -módulo inclinante parcial. Então existe um A -módulo E tal que $T \oplus E$ é um A -módulo inclinante.*

Demonstração. Ver Lema 2.4, p.196 de [4]. □

O módulo E nas condições do lema acima é conhecido como complemento de Bongartz de T .

Definição 2.7.23. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra, T um A -módulo inclinante parcial e E o complemento de Bongartz de T . A sequência exata curta $0 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow T^d \rightarrow 0$, em que $d = \dim \text{Ext}_A^1(T, A)$, é chamada de sequência exata de Bongartz.*

Como corolário da demonstração do Lema de Bongartz obtemos o seguinte resultado.

Corolário 2.7.24. *Dada a sequência exata de Bongartz de um A -módulo inclinante parcial T , aplicando o funtor $\text{Hom}_A(T, _)$ a esta sequência, pode-se obter a sequência exata longa:*

$$\cdots \rightarrow \text{Hom}_A(T, E) \rightarrow \text{Hom}_A(T, T^d) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_A^1(T, A) \rightarrow \text{Ext}_A^1(T, E) \rightarrow \cdots$$

que é bem definida pois a aplicação δ é sobrejetora.

2.8 Grupo de Grothendieck

Definição 2.8.1. *Seja A uma \mathbb{K} -álgebra. Denote por F o grupo abeliano livre cuja base é o conjunto de todas as classes de isomorfismo \overline{M} de A -módulos M finitamente gerados, e por F' o subgrupo de F*

gerado pelos elementos da forma $\overline{M} - \overline{L} - \overline{N}$, correspondentes a todas as sequências exatas curtas $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ em $\text{mod}A$. O grupo de Grothendieck de A é o grupo abeliano $K_0(A) = F/F'$.

Denotaremos por $[M]$ a imagem da classe de isomorfismo \overline{M} pelo epimorfismo de grupos canônico $F \rightarrow F/F'$.

Teorema 2.8.2. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra básica e $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ o conjunto completo de classes de isomorfismo dos A -módulos simples. Assim, o grupo de Grothendieck $K_0(A)$ é um grupo abeliano livre que tem como base o conjunto $[S_1], [S_2], \dots, [S_n]$. Além disso, existe um único isomorfismo de grupos $\text{dim}: K_0(A) \rightarrow \mathbb{Z}^n$ tal que $\text{dim}[M] = \text{dim} M$ para todo A -módulo M .*

Demonstração. Ver Teorema 3.5, p. 87 de [4]. □

A partir desta seção, para facilitar a escrita, dada uma álgebra A , denotaremos por $n(A)$ o número de classes de isomorfismo de módulos indecomponíveis sobre A .

Proposição 2.8.3. *Sejam A uma álgebra e $B = \text{End}T$, com T um A -módulo inclinante separante. Então $n(A) \leq n(B)$.*

Demonstração. Como T é um A -módulo inclinante separante temos que $\text{ind}A = (\mathcal{F}(T) \dot{\cup} \mathcal{T}(T)) \cap \text{ind}A$, sendo $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ o par de torção (cindido) induzido por T em $\text{mod}A$. Além disso, pelo teorema 2.7.18, o módulo T também induz um par de torção $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ em $\text{mod}B$. O Teorema 2.7.20 nos dá equivalências entre $\mathcal{T}(T)$ e $\mathcal{Y}(T)$ e entre $\mathcal{F}(T)$ e $\mathcal{X}(T)$. Desta forma, a cardinalidade do conjunto $\mathcal{Y}(T) \dot{\cup} \mathcal{X}(T)$ é igual a cardinalidade do conjunto $\mathcal{F}(T) \dot{\cup} \mathcal{T}(T)$ que, por sua vez, é igual a $n(A)$. Como podem existir B -módulos indecomponíveis que não pertencem ao conjunto $\mathcal{Y}(T) \dot{\cup} \mathcal{X}(T)$, podemos garantir apenas que $n(A) \leq n(B)$. □

Definição 2.8.4. *Sejam A e B duas \mathbb{K} -álgebras básicas. Diz-se que $K_0(A)$ é isométrico a $K_0(B)$ se existe uma bijeção linear $f: K_0(A) \rightarrow K_0(B)$ tal que, para quaisquer $x, y \in K_0(A)$, vale*

$$\langle x, y \rangle_A = \langle f(x), f(y) \rangle_B.$$

Neste caso, diz-se que f é uma isometria entre A e B .

A proposição a seguir utiliza uma nomenclatura que só será apresentada na definição 3.2.2, porém sua estreita relação com o conceito de Grupo de Grothendieck e o número de classes de isomorfismo de módulos simples sobre uma álgebra faz com que seja conveniente enunciar-la nesta seção.

Proposição 2.8.5. *Sejam A e B duas \mathbb{K} -álgebras básicas de dimensão finita e A com dimensão global finita. Dada uma equivalência triangulada $F: D^b(A) \rightarrow D^b(B)$, existe uma isometria $f: K_0(A) \rightarrow K_0(B)$ tal que $\text{dim} F(X^\bullet) = f(\text{dim} X^\bullet)$, para todo $X^\bullet \in D^b(A)$. Em particular, o número de classes de isomorfismo de A -módulos simples é igual ao de classes de isomorfismo de B -módulos simples.*

Demonstração. Ver Proposição 1.5, p. 101 de [14].

□

3 CATEGORIAS TRIANGULADAS

Neste capítulo apresentamos definições e resultados sobre um tipo de categoria com uma estrutura adicional, os triângulos exatos. Esta estrutura tem uma papel semelhante ao das sequências exatas em categorias abelianas, como a categoria de módulos sobre uma álgebra. A estrutura triangulada será importante no estudo de categorias derivadas, pois estas categorias em geral não são abelianas. Desta forma, os triângulos exatos e certos funtores que levam triângulos exatos em sequências exatas serão usados para nos dar mais informações sobre as categorias derivadas.

Vale ressaltar que a definição de categoria derivada não será apresentada neste texto. A escolha por não incluí-la aqui ocorreu pois as construções necessárias para apresentar tal definição não serão pertinentes para o restante deste trabalho. A demonstração do teorema 5.1.18, resultado principal do texto, não utiliza a definição de categoria derivada, apenas propriedade das álgebras hereditárias por partes de tipo $\overrightarrow{\Delta}$. Para detalhes sobre a construção de categorias derivadas deixamos como referências [1] e [17], que também foram as principais referências para este capítulo.

3.1 Triângulos Exatos

Em todo este capítulo será adotada a notação de concatenação de funções ao invés da notação de composição usual. Ou seja, sejam $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ duas funções, a composta de f com g será denotada por $fg: X \rightarrow Z$.

Sejam, pelo restante desta seção, \mathcal{C} uma categoria aditiva e $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ um automorfismo, chamado de funtor translação. Note que por ser um automorfismo, faz sentido aplicar tal funtor sucessivas vezes. Neste caso, dado X um objeto de \mathcal{C} , em certos momentos utilizaremos a notação $T^n X = X[n]$, para qualquer $n \in \mathbb{Z}$. Denotaremos o inverso de T^n por T^{-n} .

Definição 3.1.1. *Um triângulo em \mathcal{C} é uma sêxtupla (X, Y, Z, u, v, w) em que X, Y, Z são objetos de \mathcal{C} e $u: X \rightarrow Y$, $v: Y \rightarrow Z$ e $w: Z \rightarrow TX$ são morfismos na mesma categoria.*

Há duas notações usuais para triângulos, a primeira

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ w \swarrow & & \nwarrow v \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

explica a motivação para o nome dado a tais estruturas, porém não deixa claro que w é um morfismo de Z para TX . Por este motivo e pela brevidade da escrita, adotaremos a notação $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$.

Definição 3.1.2. *Dados dois triângulos $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ e $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} TX'$ em \mathcal{C} , um morfismo de triângulos é uma tripla (f, g, h) de morfismos em \mathcal{C} tal que o seguinte diagrama comuta.*

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow Tf \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & TX' \end{array}$$

Um isomorfismo de triângulos é um morfismo de triângulos (f, g, h) em que f , g e h são isomorfismos em \mathcal{C} .

Definição 3.1.3. *Um conjunto π de triângulos em \mathcal{C} , cujos elementos chamaremos de triângulos exatos, é uma triangulação de \mathcal{C} se satisfaz:*

(TR1) (a) *Todo triângulo isomorfo a um triângulo exato é um triângulo exato, ou seja, π é fechado por isomorfismos de triângulos.*

(b) *Para todo objeto X em \mathcal{C} o triângulo $X \xrightarrow{1_X} X \rightarrow 0 \rightarrow TX$ é um triângulo exato.*

(c) *Dado qualquer morfismo $u: X \rightarrow Y$ em \mathcal{C} , existe um triângulo exato $X \xrightarrow{u} Y \rightarrow Z \rightarrow TX$.*

(TR2) *Se $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ é um triângulo exato, então $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-Tu} TY$ também é um triângulo exato.*

(TR3) *Dados dois triângulos exatos $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ e $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} TX'$ e morfismos $f: X \rightarrow X'$, $g: Y \rightarrow Y'$ em \mathcal{C} tais que $fu' = ug$, existe um morfismo $h: Z \rightarrow Z'$ em \mathcal{C} que faz o seguinte diagrama comutar.*

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow Tf \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & TX' \end{array}$$

(TR4) *Sejam $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{a} Z' \rightarrow TX$, $X \xrightarrow{h} Z \xrightarrow{b} Y' \rightarrow TX$ e $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{c} X' \rightarrow TY$ triângulos exatos com $h = fg$. Tais triângulos exatos formam o seguinte diagrama:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{a} & Z' & \longrightarrow & TX \\
 \downarrow 1_X & & \downarrow g & & \downarrow & & \downarrow T1_X \\
 X & \xrightarrow{h} & Z & \xrightarrow{b} & Y' & \longrightarrow & TX \\
 \downarrow f & & \downarrow 1_Z & & \downarrow & & \downarrow Tf \\
 Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{c} & X' & \longrightarrow & TY.
 \end{array}$$

Então existem morfismos u, v e w em \mathcal{C} e um triângulo exato $Z' \xrightarrow{u} Y' \xrightarrow{v} X' \xrightarrow{w} TZ'$ que completam o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{a} & Z' & \longrightarrow & TX \\
 \downarrow 1_X & & \downarrow g & & \downarrow u & & \downarrow T1_X \\
 X & \xrightarrow{h} & Z & \xrightarrow{b} & Y' & \longrightarrow & TX \\
 \downarrow f & & \downarrow 1_Z & & \downarrow v & & \downarrow Tf \\
 Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{c} & X' & \longrightarrow & TY \\
 \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow 1_{X'} & & \downarrow Ta \\
 Z' & \xrightarrow{u} & Y' & \xrightarrow{v} & X' & \longrightarrow & TZ'.
 \end{array}$$

Além disso, as triplas $(1_X, g, u)$, $(f, 1_Z, v)$ e $(a, b, 1_{X'})$ são morfismos de triângulos.

A categoria \mathcal{C} munida de um funtor translação e de uma triangulação π é chamada de categoria triangulada.

A propriedade (TR2) é conhecida como axioma da rotação. Sabe-se que vale a recíproca deste axioma de categorias trianguladas, por isso alguns autores, como Milicic em [17], colocam tal recíproca como parte do axioma. Assumiremos que a recíproca vale; para uma demonstração ver Lema 1.3, p. 6 de [14].

A propriedade (TR4) é conhecida como axioma do octaedro. Este axioma pode ser reformulado de outras maneiras e não é necessário para a demonstração de diversas propriedades que enunciaremos a seguir. Para mais detalhes sobre tais reformulações e resultados indicamos [14], [17] e [1].

Dada uma categoria \mathcal{C} com um funtor translação T e triangulação π , nos referimos a categoria triangulada por \mathcal{C} , sem especificar o funtor translação e a triangulação. Isso será feito neste texto para simplificar a notação e, pois nos casos trabalhados aqui, a estrutura de triangulação estará clara. Vale notar, entretanto, que a estrutura da triangulação não é intrínseca a uma categoria, ou seja, há categorias com mais de uma triangulação. Um exemplo disso pode ser encontrado em [7].

3.2 Funtores e Categorias Trianguladas

Definição 3.2.1. *Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} categorias trianguladas. Um funtor aditivo $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é dito exato se existe uma transformação natural invertível $\alpha: FT_{\mathcal{C}} \rightarrow T_{\mathcal{D}}F$ tal que $FX \xrightarrow{Fu} FY \xrightarrow{Fv} FZ \xrightarrow{Fw} T_{\mathcal{D}}FX$ é um triângulo exato em \mathcal{D} sempre que $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ é um triângulo exato em \mathcal{C} .*

Definição 3.2.2. *Um funtor exato $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é dito uma equivalência triangulada, ou triângulo equivalência, se é uma equivalência de categorias.*

Outra forma de ver equivalências trianguladas é como equivalências de categorias que preservam triângulos exatos e comutam (a menos de isomorfismo) com os funtores translação. Olhando para equivalências trianguladas desta forma, obtemos o seguinte resultado.

Lema 3.2.3. *Sejam $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ uma equivalência triangulada e $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ sua quase inversa. Então G é uma equivalência triangulada.*

Definição 3.2.4. *Seja $H: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ um funtor aditivo de uma categoria triangulada \mathcal{C} para uma categoria abeliana \mathcal{A} . Diz-se que H é um funtor (covariante) cohomológico se para todo triângulo exato $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ a sequência*

$$\dots \rightarrow H(T^i X) \xrightarrow{H(T^i u)} H(T^i Y) \xrightarrow{H(T^i v)} H(T^i Z) \xrightarrow{H(T^i w)} H(T^{i+1} X) \rightarrow \dots$$

é exata.

Diz-se que H é um funtor (contravariante) cohomológico se para todo triângulo exato $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ a sequência

$$\dots \rightarrow H(T^{i+1} X) \xrightarrow{H(T^{i+1} w)} H(T^i Z) \xrightarrow{H(T^i v)} H(T^i Y) \xrightarrow{H(T^i u)} H(T^i X) \rightarrow \dots$$

é exata.

Teorema 3.2.5. *Sejam \mathcal{C} uma categoria triangulada, $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ um triângulo exato e M um objeto em \mathcal{C} . Então:*

(a) $uv = vw = 0$.

(b) $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, _)$ e $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(_, M)$ são funtores cohomológicos covariante e contravariante, respectivamente.

(c) *Seja (f, g, h) um morfismo de triângulos de $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ para $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} TX'$. Se f e g são isomorfismos em \mathcal{C} , então (f, g, h) é um isomorfismo de triângulos.*

Demonstração. (a) Mostraremos apenas que $uv = 0$, pois pelo axioma da rotação (TR2) temos um triângulo exato $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-Tu} TY$.

Por (TR1), $X \xrightarrow{1_X} X \rightarrow 0 \rightarrow TX$ é um triângulo exato. Logo temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{1_X} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TX \\ \downarrow 1_X & & \downarrow u & & \downarrow f & & \downarrow T1_X \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX. \end{array}$$

Por (TR3), existe $f: 0 \rightarrow Z$ que completa o diagrama e o faz comutar. Claramente f é o morfismo nulo e, assim, $uv = 0$.

(b) Mostraremos apenas que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, _)$ é um funtor cohomológico. O caso de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(_, M)$ é dual.

Para isso basta mostrar que a sequência

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^i X) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^i u)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^i Y) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^i v)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^i Z)$$

é exata para todo $i \in \mathbb{Z}$. O item (a) garante que $\text{Im Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^i u) \subset \ker \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^i v)$, logo resta mostrar que $\ker \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^i v) \subset \text{Im Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^i u)$. Note que é suficiente fazer tal prova para $i = 0$, pois se a sequência for exata em $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Y)$ também será em $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^i Y)$.

Seja $f: M \rightarrow Y$ pertencente a $\ker \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, v)$, ou seja, $fv = 0$. Considere o seguinte diagrama em que as linhas são triângulos exatos:

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xrightarrow{1_M} & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TM \\ & & \downarrow f & & \downarrow & & \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \end{array}$$

Por (TR2), podemos rotacionar as linhas do diagrama acima, obtendo novos triângulos exatos que formam o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TM & \xrightarrow{-1_M} & TM \\ \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow Tg & & \downarrow Tf \\ Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX & \xrightarrow{-Tu} & TY \end{array}$$

Tal diagrama pode, por (TR3), ser completado com o morfismo Tg , que o faz comutar. Como vale uma recíproca do axioma da rotação (TR2), podemos voltar aos triângulos exatos iniciais, obtendo o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 M & \xrightarrow{1_M} & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TM \\
 \downarrow g & & \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow Tg \\
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX
 \end{array}$$

Logo existe $g: M \rightarrow X$ tal que $f = gu = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, u)(g)$. Assim, $\ker \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, v) \subset \text{Im} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, u)$, donde a seqüência

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^i X) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^i u)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^i Y) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^i v)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^i Z)$$

é exata para todo $i \in \mathbb{Z}$.

(c) Sejam f e g isomorfismos e o diagrama comutativo abaixo, cujas linhas são triângulos exatos.

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\
 \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow Tf \\
 X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & TX'
 \end{array}$$

Aplicando o funtor cohomológico $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', _)$ obtém-se o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', X) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Z) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', TX) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', TY) \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', f) \downarrow & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', g) \downarrow & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', h) \downarrow & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Tf) \downarrow & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Tg) \downarrow \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', X') & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Y') & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Z') & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', TX') & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', TY')
 \end{array}$$

que, pelo item (b), tem linhas exatas. Como f e g são isomorfismos, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', f)$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', g)$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Tf)$ e $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Tg)$ também são isomorfismos. Logo, pelo Lema dos 5 (ver lema 3.5, p. 31 de [2]), $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', h)$ é um isomorfismo. Em particular, existe $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Z)$ tal que $\phi h = 1_{Z'}$. Por um argumento análogo, aplicando $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(_, Z)$, prova-se que existe $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Z)$ tal que $h\psi = 1_Z$. Portanto, h é um isomorfismo.

□

O teorema acima é importante, pois mostra que triângulos exatos em categorias trianguladas têm propriedades similares as de seqüências exatas em categorias abelianas. O papel dos funtores cohomológicos é fazer esta ligação entre tais objetos. Além disso, o item (c) do teorema evidencia que o terceiro objeto de um triângulo exato é unicamente determinado, a menos de isomorfismo, pelos anteriores.

Corolário 3.2.6. *Sejam \mathcal{C} uma categoria triangulada e $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ um triângulo exato em \mathcal{C} . Então são equivalentes:*

(i) $w = 0$.

(ii) u é uma seção.

(iii) v é uma retração.

Demonstração. Provaremos apenas as implicações (i) \Rightarrow (ii) e (ii) \Rightarrow (i), pois as demais são demonstradas de forma análoga.

(i) \Rightarrow (ii) Seja $w = 0$. Por (TR1), temos o diagrama abaixo, cujas linhas são triângulos exatos.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ \downarrow 1_X & & \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow T1_X \\ X & \xrightarrow{1_X} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TX \end{array}$$

Aplicando uma rotação e utilizando (TR3), temos que existe $f: Y \rightarrow X$ que faz o diagrama comutar. Logo $uf = 1_X$ e, assim, u é uma seção.

(ii) \Rightarrow (i) Se u é uma seção, existe $f: Y \rightarrow X$ tal que $uf = 1_X$, logo há um morfismo de triângulos $(1_X, f, 0)$ de $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ para $X \xrightarrow{1_X} X \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} TX$. Portanto, $w1_{TX} = 0$, donde $w = 0$.

□

Corolário 3.2.7. *Sejam \mathcal{C} uma categoria triangulada, $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ um triângulo exato e M um objeto em \mathcal{C} . São equivalentes:*

(i) *Se $f: M \rightarrow Z$ não é uma retração, então existe $f': M \rightarrow Y$ tal que $f'v = f$.*

(ii) *Se $f: M \rightarrow Z$ não é uma retração, então $fw = 0$.*

Demonstração. Pelo item (b) do teorema 3.2.5, temos a sequência exata

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Y) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, v)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Z) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, w)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, TX).$$

Logo $\ker \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, w) = \text{Im} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, v)$. Assim, (i) \Rightarrow (ii) decorre de $\text{Im} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, v) \subset \ker \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, w)$ e (ii) \Rightarrow (i) decorre de $\ker \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, w) \subset \text{Im} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, v)$.

□

Corolário 3.2.8. *Sejam \mathcal{C} uma categoria triangulada e $u: X \rightarrow Y$ um morfismo em \mathcal{C} . Então $X \xrightarrow{u} Y \rightarrow 0 \rightarrow TX$ é um triângulo exato se, e somente se, u é um isomorfismo.*

Demonstração. (\Rightarrow) Se $X \xrightarrow{u} Y \rightarrow 0 \rightarrow TX$ é um triângulo exato, temos o morfismo de triângulos $(u, 1_X, 0)$ como no diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TX \\ \downarrow u & & \downarrow 1_Y & & \downarrow & & \downarrow Tu \\ Y & \xrightarrow{1_Y} & Y & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TY \end{array}$$

Com uma rotação e o item (c) do teorema 3.2.5, temos que u é um isomorfismo.

(\Leftarrow) Se u é um isomorfismo, então $X \xrightarrow{u} Y \rightarrow 0 \rightarrow TX$ é isomorfo a $Y \xrightarrow{1_Y} Y \rightarrow 0 \rightarrow TY$. Logo, por (TR1), $X \xrightarrow{u} Y \rightarrow 0 \rightarrow TX$ é um triângulo exato. \square

3.3 Somas Diretas em Categorias Trianguladas

Como estamos trabalhando com categorias aditivas com uma estrutura adicional, os triângulos, é natural buscar saber como esta estrutura se comporta em relação a somas diretas. Nesta seção apresentaremos alguns resultados que mostram como os triângulos se relacionam com somas diretas e, conseqüentemente, nos permitem construir novos triângulos. Além disso, o último resultado desta seção caracteriza os monomorfismos e epimorfismos em uma categoria triangulada.

Teorema 3.3.1. *Sejam $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ e $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} TX'$ triângulos exatos em uma categoria triangulada \mathcal{C} . Então*

$$X \oplus X' \xrightarrow{u \oplus u'} Y \oplus Y' \xrightarrow{v \oplus v'} Z \oplus Z' \xrightarrow{w \oplus w'} T(X \oplus X')$$

também é um triângulo exato em \mathcal{C} .

Demonstração. Dado o morfismo $u \oplus u': X \oplus X' \rightarrow Y \oplus Y'$, por (TR1), existe um triângulo exato $X \oplus X' \xrightarrow{u \oplus u'} Y \oplus Y' \rightarrow M \rightarrow T(X \oplus X')$. Sendo $p: X \oplus X' \rightarrow X$ e $q: Y \oplus Y' \rightarrow Y$ as projeções canônicas, temos o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X \oplus X' & \xrightarrow{u \oplus u'} & Y \oplus Y' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & T(X \oplus X') \\ \downarrow p & & \downarrow q & & \downarrow r & & \downarrow T_p \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \end{array}$$

que, por (TR3), pode ser completado com um morfismo $r: M \rightarrow Z$ que faz o diagrama comutar. Estabelecemos, assim, um morfismo de triângulos (p, q, r) . Analogamente, com as projeções canônicas $p': X \oplus X' \rightarrow X'$ e $q': Y \oplus Y' \rightarrow Y'$, pode-se construir o morfismo de triângulos (p', q', r') de $X \oplus X' \xrightarrow{u \oplus u'} Y \oplus Y' \rightarrow M \rightarrow T(X \oplus X')$ para $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} TX'$.

Seja $\varphi = (r \ r')^t: M \rightarrow Z \oplus Z'$. Então temos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccccccc} X \oplus X' & \xrightarrow{u \oplus u'} & Y \oplus Y' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & T(X \oplus X') \\ \downarrow 1_{X \oplus X'} & & \downarrow 1_{Y \oplus Y'} & & \downarrow \varphi & & \downarrow T1_{X \oplus X'} \\ X \oplus X' & \xrightarrow{u \oplus u'} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{v \oplus v'} & Z \oplus Z' & \xrightarrow{w \oplus w'} & T(X \oplus X'). \end{array}$$

Seja N um objeto em \mathcal{C} . Aplicando o funtor cohomológico $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, _)$, obtemos o diagrama comutativo a seguir, que denotaremos por (\star) :

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, X \oplus X') & \xrightarrow{1_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, X \oplus X')}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, X \oplus X') \\
 \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, u \oplus u') & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, u \oplus u') \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, Y \oplus Y') & \xrightarrow{1_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, Y \oplus Y')}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, Y \oplus Y') \\
 \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, v \oplus v') \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, \varphi)} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, Z \oplus Z') \\
 \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, w \oplus w') \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, T(X \oplus X')) & \xrightarrow{1_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, T(X \oplus X'))}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, T(X \oplus X')) \\
 \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, T(u \oplus u')) & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, T(u \oplus u')) \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, T(Y \oplus Y')) & \xrightarrow{1_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, T(Y \oplus Y'))}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, T(Y \oplus Y')) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Como a primeira coluna do diagrama vem de um triângulo exato, pelo teorema 3.2.5, esta coluna é exata. Pelo mesmo teorema, temos as sequências exatas longas:

$$\cdots \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, Y) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, v)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, Z) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, w)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, TX) \longrightarrow \cdots$$

e

$$\cdots \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, Y') \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, v')} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, Z') \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, w')} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, TX') \longrightarrow \cdots$$

A segunda coluna do diagrama (\star) é a soma direta destas duas sequências exatas, logo é uma sequência exata. Pelo Lema dos 5, temos que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, \varphi)$ é um isomorfismo.

De maneira análoga, usando o funtor cohomológico $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(_, N)$, prova-se que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\varphi, N)$ é um isomorfismo.

Tomando $N = Z \oplus Z'$, temos que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z \oplus Z', \varphi)$ é bijetora, logo existe $\alpha: Z \oplus Z' \rightarrow M$ tal que $\alpha\varphi = 1_{Z \oplus Z'}$. De forma semelhante, escolhendo $N = M$, obtemos que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\varphi, M)$ é bijetora, logo existe $\beta: Z \oplus Z' \rightarrow M$ tal que $\varphi\beta = 1_M$. Assim, $\varphi = u \oplus u'$ é um isomorfismo. Como

$$X \oplus X' \xrightarrow{u \oplus u'} Y \oplus Y' \xrightarrow{v \oplus v'} Z \oplus Z' \xrightarrow{w \oplus w'} T(X \oplus X')$$

é isomorfo a um triângulo exato, por (TR1), também é um triângulo exato. \square

Corolário 3.3.2. *Sejam $i: X \rightarrow X \oplus Y$ e $p: X \oplus Y \rightarrow Y$ a inclusão e a projeção canônicas, respectivamente. Então $X \xrightarrow{i} X \oplus Y \xrightarrow{p} Y \xrightarrow{0} TX$ é um triângulo exato.*

Demonstração. Basta ver que, por (TR1) e (TR2), $X \xrightarrow{1_X} X \rightarrow 0 \rightarrow TX$ e $0 \rightarrow Y \xrightarrow{1_Y} Y \rightarrow 0$ são triângulos exatos. Logo, pelo teorema 3.3.1, $X \xrightarrow{i} X \oplus Y \xrightarrow{p} Y \xrightarrow{0} TX$ é um triângulo exato. \square

Corolário 3.3.3. *Seja $X \xrightarrow{u} Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{0} TX$ um triângulo exato em \mathcal{C} . Então existe um isomorfismo $\varphi: X \oplus Y \rightarrow Z$ que completa um isomorfismo de triângulos $(1_X, \varphi, 1_Y)$, como no diagrama abaixo.*

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{i} & X \oplus Y & \xrightarrow{p} & Y & \xrightarrow{0} & TX \\ \downarrow 1_X & & \downarrow \varphi & & \downarrow 1_Y & & \downarrow T1_X \\ X & \xrightarrow{u} & Z & \xrightarrow{v} & Y & \xrightarrow{0} & TX \end{array}$$

Demonstração. Pelo corolário 3.3.2, $X \xrightarrow{i} X \oplus Y \xrightarrow{p} Y \xrightarrow{0} TX$ é um triângulo exato. Logo, aplicando uma rotação e (TR3), vê-se que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{i} & X \oplus Y & \xrightarrow{p} & Y & \xrightarrow{0} & TX \\ \downarrow 1_X & & \downarrow \varphi & & \downarrow 1_Y & & \downarrow T1_X \\ X & \xrightarrow{u} & Z & \xrightarrow{v} & Y & \xrightarrow{0} & TX \end{array}$$

pode ser completado com um morfismo $\varphi: X \oplus Y \rightarrow Z$ que o faz comutar. Logo, $(1_X, \varphi, 1_Y)$ é um morfismo de triângulos e, pelo teorema 3.2.5, é um isomorfismo. \square

Como $X \xrightarrow{i} X \oplus Y \xrightarrow{p} Y \xrightarrow{0} TX$ é um triângulo exato, pelo corolário 3.2.6, temos que i é uma seção (monomorfismo que cinde) e p é uma retração (epimorfismo que cinde). A próxima proposição nos diz que todo monomorfismo ou epimorfismo em uma categoria triangulada é uma composição de i ou p com um isomorfismo apropriado.

Proposição 3.3.4. *Sejam \mathcal{C} uma categoria triangulada, $u: X \rightarrow Y$ um monomorfismo e $u': X' \rightarrow Y'$ um epimorfismo em \mathcal{C} .*

(a) *Existem um objeto Z em \mathcal{C} e um isomorfismo $\varphi: X \oplus Z \rightarrow Y$ tais que u é a composição da inclusão canônica $i: X \rightarrow X \oplus Z$ com φ .*

(b) *Existem um objeto Z' em \mathcal{C} e um isomorfismo $\psi: X' \rightarrow Y' \oplus Z'$ tais que u' é a composição de ψ com a projeção canônica $p: Y' \oplus Z' \rightarrow Y'$.*

Demonstração. Demonstraremos apenas (a), pois a demonstração de (b) é análoga.

Seja $u: X \rightarrow Y$ um monomorfismo em \mathcal{C} , então, por (TR1), existe um triângulo exato $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$. Aplicando uma rotação, como a composição de morfismos consecutivos em um triângulo exato é zero, vê-se que $T^{-1}wu = 0$. Como u é um monomorfismo, temos $T^{-1}w = 0$ e, portanto, $w = 0$.

Pelo corolário 3.3.3, existe um isomorfismo de triângulos $(1_X, \varphi, 1_Z)$ como no diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{i} & X \oplus Z & \xrightarrow{p} & Z & \xrightarrow{0} & TX \\ \downarrow 1_X & & \downarrow \varphi & & \downarrow 1_Y & & \downarrow T1_X \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{0} & TX \end{array}$$

Logo $i\varphi = 1_X u$, ou seja, $u = i\varphi$.

□

Neste trabalho as categorias trianguladas que nos interessam são categorias derivadas de categorias de módulos finitamente gerados sobre uma \mathbb{K} -álgebra. A estrutura triangulada será importante na categoria derivada, pois tais categorias em geral não são abelianas (para mais detalhes ver [17]). Para comparar categorias derivadas, utilizaremos funtores que preservam triângulos exatos, como as equivalências trianguladas. Tentar estabelecer estas relações entre categorias derivadas é o que motiva a discussão inicial do próximo capítulo.

4 ÁLGEBRAS HEREDITÁRIAS POR PARTES DO TIPO $\vec{\Delta}$ E MÓDULOS APR-INCLINANTES

4.1 Álgebras Hereditárias por Partes do Tipo $\vec{\Delta}$

Nesta seção discutiremos o conceito de álgebra hereditária por partes do tipo $\vec{\Delta}$, sendo $\vec{\Delta}$ um quiver finito e acíclico. Estas álgebras estão, de certo modo, ligadas as álgebras hereditárias por propriedades comuns das categorias derivadas de suas categorias de módulos. Como nos capítulos anteriores, \mathbb{K} denotará um corpo algebricamente fechado e A uma \mathbb{K} -álgebra de dimensão finita.

Antes de apresentarmos o conceito de álgebras hereditárias por partes, para que faça sentido a definição de álgebras hereditárias por partes do tipo $\vec{\Delta}$, vamos definir reflexões em um quiver. Seja $\vec{\Delta}$ um quiver finito e acíclico com grafo subjacente Δ . Sejam a um poço e b uma fonte em $\vec{\Delta}$, definimos os quivers $\sigma_a^+(\vec{\Delta})$ e $\sigma_b^-(\vec{\Delta})$ por:

- O grafo subjacente de $\sigma_a^+(\vec{\Delta})$ e $\sigma_b^-(\vec{\Delta})$ é Δ ;
- Dada uma seta $\gamma: x \rightarrow y$ em $\vec{\Delta}$, se $y \neq a$, então $\gamma': x \rightarrow y$ é uma seta em $\sigma_a^+(\vec{\Delta})$;
- Dada uma seta $\gamma: x \rightarrow y$ em $\vec{\Delta}$, se $x \neq b$, então $\gamma': x \rightarrow y$ é uma seta em $\sigma_b^-(\vec{\Delta})$;
- Dada uma seta $\alpha: x \rightarrow a$ em $\vec{\Delta}$, $\alpha': a \rightarrow x$ é uma seta em $\sigma_a^+(\vec{\Delta})$;
- Dada uma seta $\beta: b \rightarrow y$ em $\vec{\Delta}$, $\beta': y \rightarrow b$ é uma seta em $\sigma_b^-(\vec{\Delta})$.

Estas transformações de um quiver são chamadas de reflexões. Vemos que reflexões mantêm o grafo subjacente, trocam o sentido das setas que chegam (se for um poço) ou saem (se for uma fonte) do vértice escolhido e mantêm as demais setas inalteradas.

Dizemos que um quiver $\vec{\Delta}_1$ pode ser transformado no quiver $\vec{\Delta}_2$ via uma sequência de reflexões se existem vértices x_1, x_2, \dots, x_n em Δ tais que cada x_i é um poço ou uma fonte em $\sigma_{x_{i-1}}^\pm \sigma_{x_{i-2}}^\pm \dots \sigma_{x_1}^\pm(\vec{\Delta}_1)$ e vale a igualdade $\vec{\Delta}_2 = \sigma_{x_n}^\pm \sigma_{x_{n-1}}^\pm \dots \sigma_{x_1}^\pm(\vec{\Delta}_1)$. Se $\vec{\Delta}_1$ pode ser transformado em $\vec{\Delta}_2$ via uma sequência de reflexões, escrevemos $\vec{\Delta}_2 \sim \vec{\Delta}_1$.

Para que a definição principal desta seção faça sentido precisamos do seguinte resultado.

Proposição 4.1.1. *Se $D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta}_1)$ é triângulo equivalente a $D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta}_2)$, então $\vec{\Delta}_2 \sim \vec{\Delta}_1$.*

Demonstração. Ver corolário 5.7, p.56 de [14]. □

Dado um quiver $\vec{\Delta}$, a categoria derivada $D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta})$ de $\text{mod}\mathbb{K}\vec{\Delta}$ (módulos finitamente gerados sobre uma álgebra hereditária) é bem conhecida. Por isso faz sentido tentar obter propriedades de categorias derivadas de outras categorias de módulos comparando-as com $D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta})$. Isso motiva a definição a seguir.

Definição 4.1.2. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e $\vec{\Delta}$ um quiver finito e acíclico. Dizemos que A é hereditária por partes do tipo $\vec{\Delta}$ se a categoria $D^b(A)$ é triângulo-equivalente a $D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta})$.*

Note que, na definição acima, $\vec{\Delta}$ é unicamente determinado, a menos da relação \sim .

Observação: Dada uma álgebra A hereditária por partes do tipo $\vec{\Delta}$, nos casos em que não há possibilidade de confusão, a fim de facilitar a notação, pode-se dizer que a álgebra é apenas hereditária por partes, sem referência direta ao quiver em questão. Esta omissão também pode ocorrer quando sabe-se que existe tal quiver, porém não há mais informações sobre ele, ou estas informações não são necessárias.

Lema 4.1.3. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra hereditária por partes, X e Y dois A -módulos indecomponíveis e $i > 1$. Então:*

(i) $\text{Ext}_A^i(X, X) = 0$;

(ii) Se X e Y aparecem em um mesmo ciclo em $\text{mod}A$, então $\text{Ext}_A^i(X, Y) = 0$.

Demonstração. Ver Lema 1.9, p.156 de [14]. □

Definição 4.1.4. *Dada A uma \mathbb{K} -álgebra, um A -módulo X é dito brick se a álgebra de endomorfismos de X é isomorfa a \mathbb{K} , ou seja, $\text{End}X \cong \mathbb{K}$.*

Para a demonstração do próximo teorema usaremos um lema técnico cuja demonstração não é pertinente, apenas o enunciamos a seguir.

Lema 4.1.5. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} Y \rightarrow 0$ uma sequência exata curta em $\text{mod}A$. Então:*

(i) Se X é indecomponível, então cada morfismo coordenada de g é não nulo.

(ii) Se Y é indecomponível, então cada morfismo coordenada de f é não nulo.

Demonstração. Ver Lema 1.1, p. 3 de [8]. □

Teorema 4.1.6. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra hereditária por partes e M um A -módulo indecomponível que não é brick. Então existe um A -módulo X tal que:*

(i) X é brick;

(ii) $\text{Ext}_A^1(X, X) \neq 0$;

(iii) $X \subset M$.

Demonstração. Provaremos este resultado encontrando um submódulo próprio indecomponível X (não necessariamente brick) de M tal que $\text{Ext}_A^1(X, X) \neq 0$. Isso é suficiente, pois se X for um módulo brick não há mais o que mostrar; caso contrário, basta repetir o processo e, em um número finito de repetições, obtém-se um submódulo simples que, consequentemente, é brick.

Seja $f \in \text{End}M$ não nulo tal que $\text{Im}f = S$ tem comprimento minimal. Desta forma S é indecomponível, pois uma decomposição em soma direta implicaria que há endomorfismo cuja imagem tem comprimento menor. Se $\text{Ext}_A^1(S, S) \neq 0$, basta tomar $X = S$; caso contrário, tome o módulo indecomponível $X \subset N = \ker f$ de comprimento minimal tal que $\text{Hom}_A(S, X) \neq 0 \neq \text{Ext}_A^1(S, X)$. Vamos provar que um módulo X nestas condições existe.

Sejam $N = \bigoplus_{i=1}^r N_i$ com cada N_i indecomponível e denote por p_i a projeção canônica de N em N_i . Desta forma, existem módulos E_i , para $1 \leq i \leq r$, tais que o diagrama abaixo tem linhas exatas e comuta.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\mu} & M & \xrightarrow{f} & S & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow p_i & & \downarrow h & & \downarrow 1_S & & \\ 0 & \longrightarrow & N_i & \xrightarrow{l_i} & E_i & \longrightarrow & S & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Mostremos que a sequência $0 \longrightarrow N_i \xrightarrow{l_i} E_i \longrightarrow S \longrightarrow 0$, denotada por (\star) não é cindida. Suponha, por contradição, que (\star) cinde, logo l_i é uma seção, ou seja, existe $t_i: E_i \longrightarrow N_i$ tal que $l_i t_i = 1_{N_i}$. Como o diagrama comuta, temos que $\mu h t_i = p_i$, donde $h t_i$ é uma retração. Ou seja, N_i é um somando de M , que é indecomponível, logo $N_i = M$. Desta forma temos $N = M$, donde $f = 0$, o que contradiz a escolha de f e finaliza a prova de que (\star) não cinde. Logo $\text{Ext}_A^1(S, N_i) \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq r$. Como $S = \text{Im}f$, temos que $\text{Hom}_A(S, N_i) \neq 0$ para ao menos um i . Existe, desta forma, um módulo X nas condições desejadas.

Provemos agora que, para um submódulo X com as características descritas acima, temos $\text{Ext}_A^1(X, X) \neq 0$. Seja $g \in \text{Hom}_A(S, X)$ não nulo. Como S tem comprimento minimal, vê-se que g é injetivo. Também, como $\text{Ext}_A^1(X, X) \neq 0$ e $\text{Ext}_A^1(S, S) = 0$, não pode existir um isomorfismo entre X e S , logo g não é bijetivo. Desta forma é possível encontrar um módulo $Q \neq 0$ e um morfismo $q: X \longrightarrow Q$ tais que a sequência abaixo é exata.

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{g} X \xrightarrow{q} Q \longrightarrow 0 \quad (*)$$

Aplicando $\text{Ext}_A^1(S, _)$ a $(*)$, temos a sequência exata $\text{Ext}_A^1(S, S) \longrightarrow \text{Ext}_A^1(S, X) \longrightarrow \text{Ext}_A^1(S, Q)$.

Como $\text{Ext}_A^1(S, X) \neq 0$ e $\text{Ext}_A^1(S, S) = 0$ temos que $\text{Ext}_A^1(S, Q) \neq 0$. Ou seja, existe uma sequência exata não cindida da forma $0 \rightarrow Q \rightarrow E \rightarrow S \rightarrow 0$, sendo E um A -módulo.

Provemos que Q é um A -módulo indecomponível. Suponha, por contradição, que existe uma decomposição $Q = \bigoplus_{i=1}^n Q_i$, com cada Q_i indecomponível e $n > 1$. Podemos assumir que $\text{Ext}_A^1(S, Q_1) \neq 0$. Denote por μ_1 a inclusão de Q_1 em Q e considere as seqüências:

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow Y \longrightarrow Q_1 \longrightarrow 0 \quad (1)$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow 1_S & & \downarrow & & \downarrow \mu_1 \\ 0 & \longrightarrow & S & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Q \longrightarrow 0 \end{array} \quad (2)$$

Pode-se provar, com um argumento muito parecido ao utilizado para provar que a seqüência (\star) não é cindida, que a seqüência (1) (obtida via pullback) não cinde, pois X é indecomponível. Pelo lema 4.1.3, temos que $\text{Ext}_A^2(S, S) = 0$. Aplicando $\text{Hom}_A(S, _)$ a (1), temos a seqüência exata $\text{Ext}_A^1(S, Y) \rightarrow \text{Ext}_A^1(S, Q_1) \rightarrow \text{Ext}_A^2(S, S)$, portanto $\text{Ext}_A^1(S, Y) \neq 0$. Seja $Y = \bigoplus_{i=1}^t Y_i$, com cada Y_i indecomponível. Como (1) não cinde, pelo lema 4.1.5, $\text{Hom}_A(S, Y_i) \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq t$. Então existe ao menos um $1 \leq j \leq t$ tal que $\text{Ext}_A^1(S, Y_j) \neq 0 \neq \text{Hom}_A(S, Y_j)$. Além disso, como (1) e (2) são seqüências exatas, temos que $l(Y) = l(S) + l(Q_1)$ e $l(X) = l(S) + l(Q)$. Como Q_1 é um somando direto de Q , o comprimento de Q_1 é estritamente menor que o de Q , donde $l(Y_j) < l(Y) < l(X)$. Isso contradiz a escolha inicial de X como submódulo com comprimento minimal com tais características. Logo Q é indecomponível.

Voltemos agora a demonstração de que $\text{Ext}_A^1(X, X) \neq 0$. Como existe a seqüência não cindida $0 \rightarrow Q \rightarrow E \rightarrow S \rightarrow 0$, para cada somando indecomponível E' de E , temos a seqüência (não necessariamente exata) $Q \xrightarrow{u} E' \xrightarrow{v} S \xrightarrow{g} X \xrightarrow{h} Q$. Como Q é indecomponível, u e v são não nulas e não invertíveis, esta seqüência nos dá um ciclo em $\text{mod}A$. Pelo lema 4.1.3, temos $\text{Ext}_A^2(Q, X) = 0$. Aplicando $\text{Ext}_A^1(_, X)$ a seqüência $(*)$ obtém-se a seqüência exata $\text{Ext}_A^1(X, X) \rightarrow \text{Ext}_A^1(S, X) \rightarrow \text{Ext}_A^2(Q, X)$. Sendo $\text{Ext}_A^2(Q, X) = 0$ e $\text{Ext}_A^1(S, X) \neq 0$ deve-se ter $\text{Ext}_A^1(X, X) \neq 0$, provando o teorema. \square

Teorema 4.1.7. *Seja A uma \mathbb{K} -álgebra. Se existe um A -módulo X que é brick tal que $\text{Ext}_A^1(X, X) \neq 0$ e $\text{Ext}_A^2(X, X) = 0$, então A é de tipo de representação infinito.*

Demonstração. Para provar que A é de tipo de representação infinito construiremos indutivamente A -módulos indecomponíveis X_i para $i \geq 0$ e extensões não cindidas

$$E_i : \quad 0 \longrightarrow X_{i-1} \xrightarrow{f_i} X_i \xrightarrow{g_i} X_0 \longrightarrow 0$$

para $i \geq 1$, tais que $\dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_A(X_0, X_i) = 1$ e $\text{Ext}_A^2(X_0, X_i) = 0$ para todo $i \geq 0$.

Sejam $X_0 = X$ e $E_1 \in \text{Ext}_A^1(X_0, X_0)$ uma extensão não cindida $E_1: 0 \rightarrow X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{g_1} X_0 \rightarrow 0$. Aplicando o funtor $\text{Hom}_A(X_0, _)$ a E_1 e considerando que $\text{End}X_0 = \mathbb{K}$ e $\text{Ext}_A^2(X_0, X_0) = 0$ temos a sequência exata

$$0 \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow \text{Hom}_A(X_0, X_1) \rightarrow \mathbb{K} \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_A^1(X_0, X_0) \rightarrow \text{Ext}_A^1(X_0, X_1) \rightarrow \text{Ext}_A^1(X_0, X_0) \rightarrow 0.$$

Notando que δ é uma transformação linear, seu domínio tem dimensão igual a 1, logo δ é injetora ou a aplicação nula, mas pela definição de δ sabemos que esta aplicação não é nula. Sendo δ injetiva, temos que $\dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_A(X_0, X_1) = 1$.

Vamos mostrar que X_1 é indecomponível. Suponha, por absurdo, que existe uma decomposição $X_1 = X'_1 \oplus X''_1$. Logo a extensão E_1 pode ser reescrita por $0 \rightarrow X_0 \xrightarrow{f_1} X'_1 \oplus X''_1 \xrightarrow{g_1} X_0 \rightarrow 0$, sendo $f_1 = (f'_1 \ f''_1)^t$, com $f'_1: X_0 \rightarrow X'_1$ e $f''_1: X_0 \rightarrow X''_1$. Como E_1 não cinde e X_0 é indecomponível, pelo lema 4.1.5, temos $f'_1 \neq 0$ e $f''_1 \neq 0$. Desta forma teríamos dois morfismos linearmente independentes de X_0 para X_1 , o que contradiz o fato de que $\dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_A(X_0, X_1) = 1$. Logo X_1 é indecomponível. Também vale notar que, como $\text{Ext}_A^2(X_0, X_0) = 0$, vendo o restante da sequência exata longa acima temos $\text{Ext}_A^2(X_0, X_1) = 0$.

Provado o caso inicial, vamos provar que o passo de indução funciona. Seja a extensão não cindida $E_{i-1}: 0 \rightarrow X_{i-2} \xrightarrow{f_{i-1}} X_{i-1} \xrightarrow{g_{i-1}} X_0 \rightarrow 0$, com X_{i-1} indecomponível, $\dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_A(X_0, X_{i-1}) = 1$ e $\text{Ext}_A^2(X_0, X_{i-1}) = 0$ e suponha que as mesmas propriedades valem para todo número menor ou igual a $i-2$. Pelas suposições anteriores, temos $\text{Ext}_A^2(X_0, X_{i-2}) = 0$, logo $\text{Ext}_A^1(X_0, g_{i-1})$ é sobrejetora. Assim, existe certo $E_i \in \text{Ext}_A^1(X_0, X_{i-1})$ que é pre-imagem de E_1 , donde obtém-se o seguinte diagrama cujas linhas são extensões não cindidas

$$\begin{array}{ccccccccc} E_1 : & 0 & \longrightarrow & X_0 & \xrightarrow{f_1} & X_1 & \xrightarrow{g_1} & X_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & & g_{i-1} & & & & 1_{X_0} & & \\ E_i : & 0 & \longrightarrow & X_{i-1} & \xrightarrow{f_i} & X_i & \xrightarrow{g_i} & X_0 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Aplicando $\text{Hom}_A(X_0, _)$ a E_i , temos a sequência exata:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \text{Hom}_A(X_0, X_{i-1}) \longrightarrow \text{Hom}_A(X_0, X_i) \longrightarrow \text{Hom}_A(X_0, X_0) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_A^1(X_0, X_{i-1}) \\ &\longrightarrow \text{Ext}_A^1(X_0, X_i) \longrightarrow \text{Ext}_A^1(X_0, X_0) \longrightarrow \text{Ext}_A^2(X_0, X_{i-1}) \longrightarrow \text{Ext}_A^2(X_0, X_i) \\ &\longrightarrow \text{Ext}_A^2(X_0, X_0). \end{aligned}$$

Como $\dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_A(X_0, X_{i-1}) = 1$ e $\text{End}X_0 = \mathbb{K}$, vemos que δ é injetora. Assim, $\dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_A(X_0, X_i) = 1$, o que mostra que X_i é um módulo indecomponível. Além disso, temos que $\text{Ext}_A^2(X_0, X_{i-1}) = 0$ e $\text{Ext}_A^2(X_0, X_0) = 0$, logo $\text{Ext}_A^2(X_0, X_i) = 0$. Isso conclui a indução.

Tal processo indutivo mostra que A admite módulos indecomponíveis com comprimento arbitrário (o crescimento do comprimento dos módulos é uma consequência do Teorema de Jordan–Hölder,

que pode ser encontrado na página 17 de [4]), logo há infinitas classes de isomorfismo de A -módulos indecomponíveis. \square

Corolário 4.1.8. *Seja A uma álgebra hereditária por partes. Se A é de tipo de representação finito, então todo A -módulo indecomponível é brick.*

Demonstração. Seja M um A -módulo indecomponível que não é brick. Então, pelo teorema 4.1.6, M contém um submódulo brick Z tal que $\text{Ext}_A^1(Z, Z) \neq 0$. Pelo lema 4.1.3, temos $\text{Ext}_A^2(Z, Z) = 0$. Como A é de tipo de representação finito, isso contradiz o teorema 4.1.7, logo M deve ser brick. \square

Lema 4.1.9. *Sejam $\vec{\Delta}$ um quiver Dynkin e $\mathbb{K}\vec{\Delta}$ a álgebra de caminhos (hereditária) associada a este quiver. Se X é um $\mathbb{K}\vec{\Delta}$ -módulo indecomponível, então X é brick.*

Demonstração. Como $\mathbb{K}\vec{\Delta}$ é uma álgebra hereditária, sabemos que é hereditária por partes de tipo $\vec{\Delta}$. Além disso, pelo teorema 2.6.2, tal álgebra é de tipo de representação finito. Logo, pelo corolário 4.1.8, temos que todo $\mathbb{K}\vec{\Delta}$ -módulo indecomponível é brick. \square

Definição 4.1.10. *Um caminho na categoria \mathcal{C} é uma sequência de objetos indecomponíveis $(X_i)_{0 \leq i \leq r}$ e morfismos $f_i: X_i \rightarrow X_{i+1}$ não nulos e não invertíveis, para cada $0 \leq i \leq r$.*

Para simplificar a notação, em casos em que não seja necessário explicitar os morfismos, denotaremos um caminho apenas pelos objetos envolvidos, como no caso abaixo.

Definição 4.1.11. *Diz-se que um caminho (X_0, \dots, X_r) é um ciclo se $X_0 = X_r$ e $r > 0$. A categoria \mathcal{C} é dirigida se não contém ciclos.*

Proposição 4.1.12. *Seja A uma \mathbb{K} -álgebra hereditária por partes do tipo $\vec{\Delta}$. Se A é de tipo de representação finito, então $\text{mod}A$ é dirigida.*

Demonstração. Provaremos um resultado mais geral do qual este corolário é um caso particular. Seja \mathcal{U} uma subcategoria de $\text{mod}A$ fechada para extensões e somas diretas. Como A é hereditária por partes de tipo $\vec{\Delta}$, existe uma equivalência triangulada $F: D^b(A) \rightarrow D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta})$. Seja um ciclo $X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_n \rightarrow X_0$ em \mathcal{U} . Obtemos um ciclo associado em $D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta})$ que, pelo corolário 5.3, p.50 de [14], pode ser considerado como um ciclo $F(X_0) \rightarrow F(X_1) \rightarrow \dots \rightarrow F(X_n) \rightarrow F(X_0)$ de $\mathbb{K}\vec{\Delta}$ -módulos indecomponíveis.

Seja \mathcal{C} a menor subcategoria plena de $\text{mod}\mathbb{K}\vec{\Delta}$ que é fechada para extensões, para somas diretas e que contém $F(X_i)$ para todo $0 \leq i \leq n$. Provemos agora que dado $Y \in \mathcal{C}$ existe um A -módulo $Y' \in \mathcal{U}$ tal que $F(Y') = Y$. Sejam $Y_1, Y_2 \in \mathcal{C}$ tais que $0 \rightarrow Y_1 \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Y_2 \rightarrow 0$ é exata em $\text{mod}\mathbb{K}\vec{\Delta}$. Pela escolha da subcategoria \mathcal{C} , podemos assumir que $Y_1 = F(Z_1)$ e $Y_2 = F(Z_2)$ para certos A -módulos Z_1 e Z_2 que estão em \mathcal{U} . Nestas condições temos:

$$\text{Ext}_{\mathbb{K}\vec{\Delta}}^1(Y_2, Y_1) \cong \text{Hom}_{D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta})}(Y_2, TY_1) \cong \text{Hom}_{D^b(A)}(Z_2, TZ_1) \cong \text{Ext}_A^1(Z_2, Z_1).$$

Seja $w \in \text{Hom}_{D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta})}(Y_2, TY_1)$ o elemento correspondente à sequência $0 \rightarrow Y_1 \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Y_2 \rightarrow 0$. Então $w = F(w')$ para certo $w' \in \text{Hom}_{D^b(A)}(Z_2, TZ_1)$. Também existe um elemento correspondente em $\text{Ext}_A^1(Z_2, Z_1)$, que denotaremos por $0 \rightarrow Z_1 \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{g} Z_2 \rightarrow 0$. Como $Y' \in \mathcal{U}$, temos o triângulo $Z_1 \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{g} Z_2 \xrightarrow{w'} TZ_1$ em $D^b(A)$. Logo $F(Z_1) \xrightarrow{F(f)} F(Y') \xrightarrow{F(g)} F(Z_2) \xrightarrow{F(w')} F(TZ_1)$ é um triângulo em $D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta})$ e, por construção, é isomorfo a $Y_1 \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Y_2 \xrightarrow{w} TY_1$. Em particular $F(Y') = Y$.

Assim, pelo teorema 2.5.8, existe um módulo indecomponível em \mathcal{C} tal que $\text{End}Z \neq \mathbb{K}$. Pelo que foi mostrado acima, existe $Z' \in \mathcal{U}$ tal que $F(Z') = Z$ e assim $\text{End}Z' \neq \mathbb{K}$. Isso contradiz o corolário 4.1.8, pois neste caso Z' não seria brick. Logo não há ciclos em \mathcal{U} . Para provar o resultado basta tomar $\mathcal{U} = \text{mod}A$. □

Proposição 4.1.13. *Sejam $\vec{\Delta}$ um quiver, A uma \mathbb{K} -álgebra hereditária por partes de tipo $\vec{\Delta}$ e X um A -módulo indecomponível. Então:*

(a) *Se o quiver $\vec{\Delta}$ é Dynkin, então $\text{End}_A X \cong \mathbb{K}$.*

(b) $\chi_A(\dim X) = 1$.

Demonstração. (a) Como A é uma \mathbb{K} -álgebra hereditária por partes de tipo $\vec{\Delta}$, existe uma equivalência triangulada $F: D^b(A) \rightarrow D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta})$. Logo

$$\text{End}_A X = \text{Hom}_{D^b(A)}(X, X) \cong \text{Hom}_{D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta})}(F(X), F(X)).$$

Como X é indecomponível, $F(X) = T^i X_i$, para algum $i \in \mathbb{Z}$ e algum $\mathbb{K}\vec{\Delta}$ -módulo indecomponível X_i . Então, usando o lema 4.1.9, temos

$$\text{Hom}_{D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta})}(F(X), F(X)) = \text{Hom}_{D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta})}(T^i X_i, T^i X_i) = \text{Hom}_{\mathbb{K}\vec{\Delta}}(X_i, X_i) \cong \mathbb{K},$$

donde $\text{End}_A X \cong \mathbb{K}$.

(b) Ver Corolário 1.5, p. 360 de [4]. □

Teorema 4.1.14. *Seja $\vec{\Delta}$ um quiver finito e acíclico. Dadas A e B duas \mathbb{K} -álgebras hereditárias por partes de tipo $\vec{\Delta}$, temos que $K_0(A)$ e $K_0(B)$ são isométricos.*

Demonstração. Como A e B são ambas álgebras hereditárias por partes de tipo $\vec{\Delta}$, temos equivalências trianguladas $F_1: D^b(A) \rightarrow D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta})$ e $F_2: D^b(B) \rightarrow D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta})$. Logo, pela proposição 2.8.5, $K_0(A)$ e $K_0(B)$ são ambos isométricos a $K_0(\mathbb{K}\vec{\Delta})$. Portanto $K_0(A)$ e $K_0(B)$ são isométricos. □

4.2 Módulos APR-inclinantes

Os módulos inclinantes têm um papel importante no estudo de categorias de módulos de certas álgebras e são úteis para a construção de novas álgebras com características semelhantes à álgebra que queremos estudar. Neste capítulo estudaremos um tipo particular de módulo inclinante, introduzido por Auslander, Platzeck e Reiten em [5], e que recebe o nome de módulo APR-inclinante. Tal módulo pode ser construído facilmente sobre qualquer álgebra cuja categoria de módulos contenha um módulo simples projetivo e não injetivo.

Definição 4.2.1. *Seja A uma \mathbb{K} -álgebra. Diz-se que um A -módulo T é APR-inclinante se é da forma*

$$T(S) = \tau^{-1}S \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^m P_i \right),$$

em que S é um A -módulo simples projetivo e $\{P_i\}_{1 \leq i \leq m}$ um conjunto completo de representantes das classes de isomorfismo de módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos a S .

Proposição 4.2.2. *Dada uma álgebra A hereditária por partes do tipo $\vec{\Delta}$ e de tipo de representação finito, existe um A -módulo S simples, projetivo e não injetivo, e portanto, um A -módulo APR-inclinante.*

Demonstração. Como A é hereditária por partes de tipo de representação finito, pelo corolário 4.1.12, a categoria $\text{mod}A$ é dirigida. Assim sendo, o quiver de Auslander-Reiten $\Gamma(\text{mod}A)$ é acíclico, finito e conexo. Um quiver com tais características deve possuir ao menos um vértice que não recebe flechas. Ou seja, há ao menos uma classe de isomorfismo de A -módulos indecomponíveis S onde não chegam morfismos irredutíveis; esta classe deve ser de módulos simples e projetivos. Além disso, os módulos em S devem ser não injetivos, caso contrário, o quiver $\Gamma(\text{mod}A)$ seria apenas um ponto. Assim, há um A -módulo simples projetivo e, portanto, pode-se construir um A -módulo APR-inclinante. \square

Teorema 4.2.3. *Todo módulo APR-inclinante T é um módulo inclinante e o par de torção $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ é cindido.*

Demonstração. Seja A uma \mathbb{K} -álgebra. Se T é um A -módulo APR-inclinante, então existe S um A -módulo simples projetivo e $\{P_i\}_{1 \leq i \leq m}$ um conjunto completo de representantes das classes de isomorfismo de módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos a S tais que $T = \tau^{-1}S \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^m P_i \right)$. Assim, como $\tau^{-1}S$ é um módulo indecomponível e não-projetivo, pelo teorema 2.2.11, existe uma sequência de Auslander-Reiten da forma

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{f} E \longrightarrow \tau^{-1}S \longrightarrow 0.$$

Além disso, pelo teorema 2.1.6, o morfismo f é irredutível. Vamos mostrar que esta sequência nos dá uma resolução projetiva de $\tau^{-1}S$. Suponha, por absurdo, que E não é projetivo, logo $E =$

$\bigoplus_{i=1}^n E_i$ com cada E_i indecomponível e certo E_j não projetivo. Como f é irredutível, a componente $f_j: S \rightarrow E_j$ também é irredutível. Logo existe uma sequência de Auslander-Reiten da forma

$$0 \longrightarrow \tau E_j \begin{pmatrix} h_j & h \\ \longrightarrow & \end{pmatrix} S \oplus G \begin{pmatrix} f_j \\ g \\ \longrightarrow \end{pmatrix} E_j \longrightarrow 0,$$

com $h_j: \tau E_j \rightarrow S$ irredutível, portanto, não nulo. Como S é simples, h_j é um epimorfismo. Logo h_j cinde, pois S é projetivo, o que é uma contradição, já que h_j não pode ser irredutível e ao mesmo tempo cindido. Assim, o A -módulo E deve ser projetivo, e portanto obtemos uma resolução projetiva de $\tau^{-1}S$, donde $pd\tau^{-1}S \leq 1$.

O argumento acima prova que o módulo APR-inclinante T tem a propriedade (T1) dos módulos inclinantes. Logo, pela proposição 2.7.11, temos

$$\text{Ext}_A^1(T, T) \cong D\text{Hom}_A(T, \tau T) \cong D\text{Hom}_A(T, S) = 0.$$

Vale notar que, na expressão acima, a última igualdade decorre do fato de S ser um A -módulo simples projetivo e não existir somando direto indecomponível de T isomorfo a S . Logo T possui a propriedade (T2) dos módulos inclinantes.

Como o número de somandos indecomponíveis de T é igual ao número de módulos simples sobre a álgebra A , então T possui a propriedade (T3) dos módulos inclinantes e, portanto, é um A -módulo inclinante.

Provemos, agora, que o par de torção $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ é cindido. Seja M um A -módulo indecomponível. Como T é módulo inclinante temos que $M \in \mathcal{T}(T)$ se, e somente se, $\text{Ext}_A^1(T, M) = 0$. Como $dpT \leq 1$, temos os isomorfismos $\text{Ext}_A^1(T, M) \cong D\text{Hom}_A(M, \tau T) \cong D\text{Hom}_A(M, S)$, mas este último termo é nulo se, e somente se, $M \cong S$. Logo todo módulo indecomponível não isomorfo a S pertence a $\mathcal{T}(T)$ e, como não há morfismos de $\mathcal{T}(T)$ para S , temos $S \in \mathcal{F}(T)$. Desta forma está provado que o par $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ cinde. \square

Corolário 4.2.4. *Sejam A uma álgebra de tipo de representação finito, S um A -módulo simples projetivo e $T(S)$ o módulo APR-inclinante obtido a partir de S . Então são equivalentes:*

(i) $id_A S > 1$

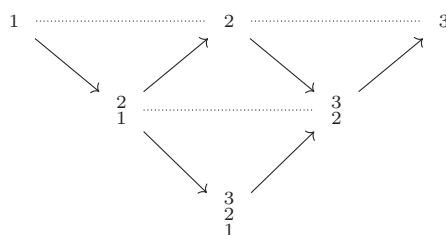
(ii) A álgebra $B = \text{End}(T(S))$ é de tipo de representação infinito ou $n(B) > n(A)$.

Demonstração. Ver Corolário 4.14, p. 126 de [14]. \square

Um fato interessante sobre os módulos APR-inclinantes é que, dada uma álgebra A básica, não simples e hereditária, a álgebra de endomorfismos $\text{End}T$ de um módulo APR-inclinante T terá o

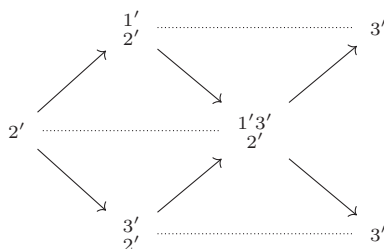
quiver ordinário muito parecido com o de A . Para ser mais preciso, o quiver $Q_{\text{End}T}$ terá os mesmos vértices que o quiver Q_A , porém as setas que chegam no poço usado para construir T serão invertidas, e as demais setas se manterão inalteradas. Este fato está demonstrado no teorema 5.3, p.280 de [4]. Vejamos um exemplo fácil deste resultado.

Exemplo 4.2.5. *Seja A a \mathbb{K} -álgebra de caminhos do quiver $\vec{\Delta} : 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3$. Desta forma obtém-se o quiver $\Gamma(\text{mod}A)$:*



Temos apenas um poço em $\vec{\Delta}$, o vértice 1. Logo construímos o módulo APR-inclinante $T = 2 \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$. A álgebra de endomorfismos deste módulo terá quiver ordinário $\vec{\Delta}' : 1' \longrightarrow 2' \longleftarrow 3'$. Ou seja, o quiver é como esperado.

Vamos construir mais um exemplo usando a álgebra de caminhos do quiver $\vec{\Delta}'$, cujo único poço é o vértice $2'$. O quiver de Auslander-Reiten de $\mathbb{K}\vec{\Delta}'$ é da forma:



Construindo o módulo APR-inclinante $T' = \begin{smallmatrix} 1' \\ 2' \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 1'3' \\ 2' \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3' \\ 2' \end{smallmatrix}$, a álgebra de endomorfismos do módulo T' terá quiver ordinário $\vec{\Delta}'' : 1'' \longleftarrow 2'' \longrightarrow 3''$, que é como esperado.

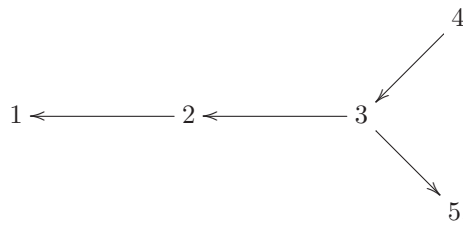
5 ÁLGEBRAS INCLINADAS E INCLINADAS ITERADAS

Neste capítulo demonstraremos, seguindo os passos da demonstração de Happel em [14], o resultado principal deste trabalho, que diz: *Se B é uma álgebra hereditária por partes do tipo $\vec{\Delta}$, então B é uma álgebra inclinada iterada do tipo $\vec{\Delta}$.* Posteriormente, este resultado será usado para mostrar que toda álgebra hereditária por partes do tipo Dynkin é APR-inclinada iterada do tipo Dynkin.

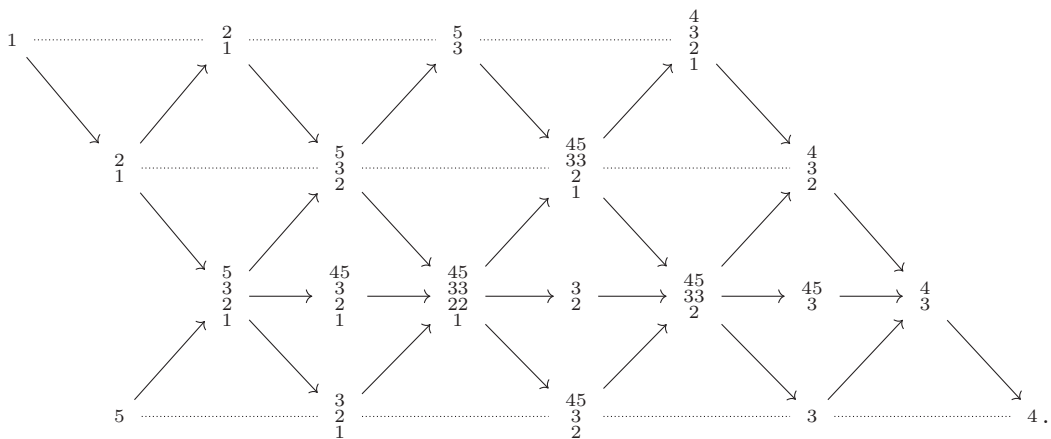
5.1 Resultados Gerais

Definição 5.1.1. *Diz-se que uma \mathbb{K} -álgebra A é inclinada se existem uma \mathbb{K} -álgebra hereditária H e um H -módulo inclinante T tais que $A = \text{End}_H(T)$.*

Exemplo 5.1.2. *Seja A a \mathbb{K} -álgebra de caminhos do quiver $1 \xleftarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3 \xleftarrow{\gamma} 4 \xleftarrow{\delta} 5$ com a relação $\delta\gamma\beta\alpha = 0$, então A é inclinada. De fato, seja H a \mathbb{K} -álgebra (hereditária) de caminhos do quiver sem relações*



Assim, o quiver de Auslander-Reiten de $\text{mod}H$ é da forma

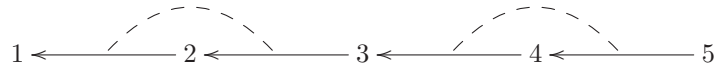


Escolhendo o H -módulo inclinante $T = 5 \oplus \begin{smallmatrix} 45 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 45 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 45 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus 4$ temos que $\text{End}T \cong A$, provando que A é inclinada.

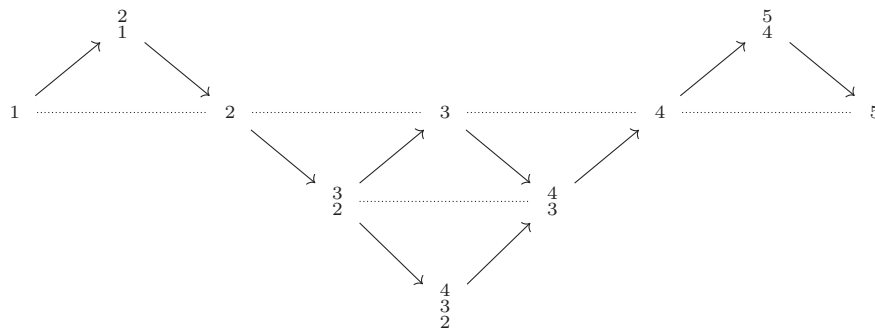
Definição 5.1.3. Seja $\vec{\Delta}$ um quiver finito e acíclico e $\mathbb{K}\vec{\Delta}$ a álgebra de caminhos associada a este quiver. Dada uma \mathbb{K} -álgebra A de dimensão finita dizemos que:

- (a) A é uma álgebra inclinável a $\mathbb{K}\vec{\Delta}$, ou inclinável de tipo $\vec{\Delta}$, se existe uma seqüência finita de triplas $(A_i, M_i, A_{i+1} = \text{End}M_i)_{0 \leq i < k}$, onde $A_0 = A$, $A_k = \mathbb{K}\vec{\Delta}$ e para cada $0 \leq i < k$ temos que M_i é um A_i -módulo inclinante.
- (b) A é uma álgebra inclinada iterada de tipo $\vec{\Delta}$ se existe uma seqüência finita de triplas $(A_i, M_i, A_{i+1} = \text{End}M_i)_{0 \leq i < k}$, onde $A_0 = A$, $A_k = \mathbb{K}\vec{\Delta}$ e para cada $0 \leq i < k$ temos que M_i é um A_i -módulo inclinante separante.
- (c) A é uma álgebra APR-inclinada iterada de tipo $\vec{\Delta}$ se existe uma seqüência finita de triplas $(A_i, M_i, A_{i+1} = \text{End}M_i)_{0 \leq i < k}$, onde $A_0 = A$, $A_k = \mathbb{K}\vec{\Delta}$ e para cada $0 \leq i < k$ temos que M_i é um A_i -módulo APR-inclinante.

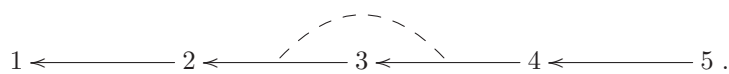
Exemplo 5.1.4. Vejamos, agora, um exemplo de álgebra inclinável de tipo $\vec{\Delta}$ que também é inclinada iterada de tipo $\vec{\Delta}$. Dado o quiver (com relações)



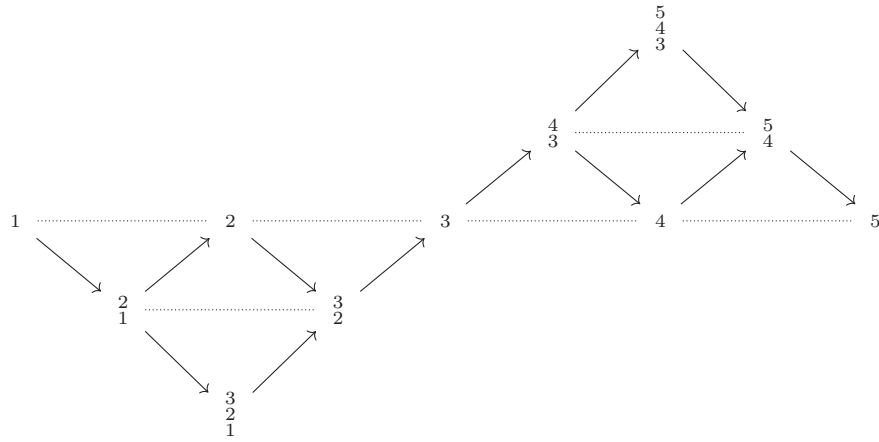
seja B a \mathbb{K} -álgebra de caminhos associada. Então o quiver de Auslander-Reiten da álgebra B é da forma:



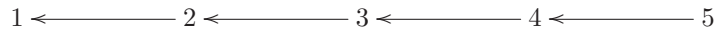
- (a) Primeiramente, veremos que a álgebra B é inclinável de tipo \mathbb{A}_5 . Tomando o B -módulo inclinante $M = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus 2 \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus 4 \oplus \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix}$ obtemos a álgebra $\text{End}M$. Note que o par de torção $(\mathcal{T}(M), \mathcal{F}(M))$, induzido por M em $\text{mod}B$, não é cindido. $\text{End}M$ é isomorfa a álgebra de caminhos do quiver com relações



O quiver de Auslander-Reiten desta álgebra é

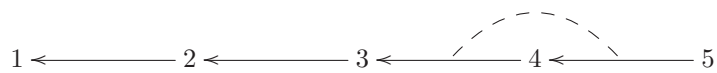


Escolhendo o módulo inclinante $M' = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{smallmatrix}$, temos a álgebra $\text{End}M'$ que é isomorfa a álgebra de caminhos do quiver abaixo.

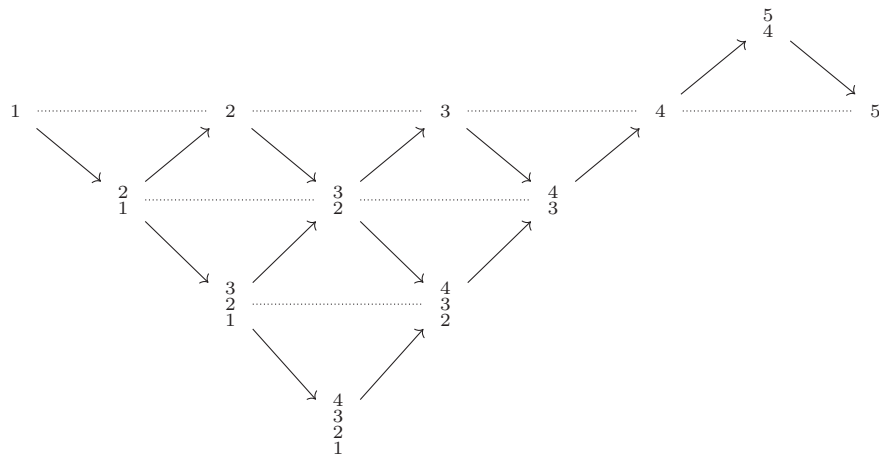


Como o quiver não tem relações vemos que esta álgebra é hereditária, portanto B é uma álgebra inclinável de tipo \mathbb{A}_5 .

- (b) Vejamos agora que, fazendo uma escolha diferente de módulos inclinantes, mostra-se que B é uma álgebra inclinada iterada de tipo \mathbb{A}_5 . Tome o B -módulo inclinante $T = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus 2 \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix}$. Este módulo é APR-inclinante, logo o par de torção $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$, induzido por T em $\text{mod}B$, é cindido. A álgebra $\text{End}T$ é isomorfa a álgebra de caminhos do quiver com relações



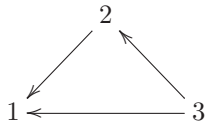
cujo quiver de Auslander-Reiten tem a forma:



Escolhendo o módulo inclinante $T' = \begin{smallmatrix} 4 \\ \frac{3}{2} \oplus \frac{4}{3} \oplus \frac{4}{3} \oplus 4 \oplus \frac{5}{4} \\ 1 \end{smallmatrix}$, que é separante, obtém-se a álgebra $\text{End}T'$. Esta álgebra é isomorfa a álgebra de caminhos do mesmo quiver sem relações apresentado no item (a), logo é hereditária. Isso prova que B é uma álgebra inclinada iterada de tipo \mathbb{A}_5 .

Note que as três definições acima são muito parecidas; isso ocorre pois toda álgebra APR-inclinada iterada de tipo $\vec{\Delta}$ é inclinada iterada de tipo $\vec{\Delta}$ e conseqüentemente inclinável a $\mathbb{K}\vec{\Delta}$. Além disso, será mostrado, como corolário do teorema principal desta seção, que os conceitos de álgebra inclinada iterada de tipo $\vec{\Delta}$ e inclinável a $\mathbb{K}\vec{\Delta}$ são equivalentes. Porém, estes conceitos não são equivalentes ao de álgebra APR-inclinada iterada de tipo $\vec{\Delta}$, o que pode ser visto no exemplo a seguir.

Exemplo 5.1.5. Seja A a álgebra de caminhos do quiver $1 \begin{smallmatrix} \xleftarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{smallmatrix} 2 \xleftarrow{\gamma} 3$, com a relação $\gamma\alpha = \gamma\beta$. É possível mostrar que esta álgebra é inclinada (e conseqüentemente inclinada iterada) de tipo $\vec{\Delta}$, com $\vec{\Delta}$ sendo o quiver:



Os módulos projetivos, radicais dos módulos projetivos e módulos injetivos da álgebra A são:

$$\begin{array}{lll}
 P_1 = 1 & \text{rad}(P_1) = 0 & I_1 = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \\
 P_2 = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix} & \text{rad}(P_2) = 1 \oplus 1 & I_2 = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \\
 P_3 = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} & \text{rad}(P_3) = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} & I_3 = 3
 \end{array}$$

Como existe apenas um poço no quiver ordinário da álgebra A , sabemos que existe apenas um módulo APR-inclinante em $\text{mod}A$, que será construído com o transladado inverso do módulo projetivo correspondente ao vértice 1.

A álgebra A é a extensão por um ponto da álgebra de Kronecker (ver exemplo 2.3.12). O conceito de extensão por um ponto não será trabalhado neste texto; para mais detalhes ver capítulo XV de [22]. Para nosso objetivo basta saber que o início da componente pós-projetiva de $\Gamma(\text{mod}A)$ coincide com o do quiver do exemplo 2.3.12. Temos que $\tau^{-1}(P_1) = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}$, portanto o módulo APR-inclinante é dado por $M = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$. O quiver ordinário da álgebra $\text{End}M$ será exatamente o quiver ordinário de A , com a mesma relação. Logo $\text{End}M \cong A$, e assim, não é possível chegar a uma álgebra hereditária por meio de passos APR-inclnantes. Isso mostra que, apesar de ser uma álgebra inclinada iterada de tipo $\vec{\Delta}$, A não é APR-inclinada iterada de tipo $\vec{\Delta}$.

Definição 5.1.8. *Sejam $\vec{\Delta}$ um quiver finito e acíclico e $i \in \mathbb{Z}$. Definimos $\mathcal{H}[i]$ como a subcategoria plena de $D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta})$ formada pelos complexos X^\bullet que são isomorfos a $T^i X$ para algum $X \in \text{mod}\mathbb{K}\vec{\Delta}$.*

Note que os complexos indecomponíveis em $D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta})$ são complexos stalk, com um módulo indecomponível em uma entrada e zero em todas as outras. Assim, cada complexo indecomponível X^\bullet em $D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta})$ está em apenas um $\mathcal{H}[i]$.

Definição 5.1.9. *Seja A uma \mathbb{K} -álgebra hereditária por partes de tipo $\vec{\Delta}$, existe uma equivalência triangulada $F: D^b(A) \rightarrow D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta})$. Denotamos, para cada $i \geq 0$, por \mathcal{U}_i a subcategoria plena de $\text{mod}A$ formada pelos módulos indecomponíveis X tais que $F(X) \in \mathcal{H}[i]$, conhecida como a i -parte de $\text{mod}A$.*

Lema 5.1.10. *Seja A uma \mathbb{K} -álgebra hereditária por partes de tipo $\vec{\Delta}$ e uma equivalência triangulada $F: D^b(A) \rightarrow D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta})$ tal que, para todo indecomponível $X \in \text{mod}A$, temos $F(X) \in \bigvee_{i=0}^l \mathcal{H}[i]$ para algum $l \geq 0$. Então temos que:*

(a) *Se $X \in \mathcal{U}_i$, então $pdX \leq i + 1$ e $idX \leq l - i + 1$.*

(b) *Se $X \in \mathcal{U}_i$ e $Y \in \mathcal{U}_r$, então $\text{Ext}_A^j(X, Y) = 0$ para todo $j > i - r + 1$.*

Vale notar que se existe uma equivalência triangulada F entre $D^b(A)$ e $D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta})$ é sempre possível escolher F da forma descrita acima. Uma equivalência triangulada F tal que para todo indecomponível $X \in \text{mod}A$, temos $F(X) \in \bigvee_{i=0}^l \mathcal{H}[i]$, para algum $l \geq 0$, é chamada de equivalência normalizada.

Demonstração. Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra hereditária por partes de tipo $\vec{\Delta}$ e $X \in \mathcal{U}_i$, para certo $i \in \mathbb{Z}$ fixado.

(a) Como $X \in \mathcal{U}_i$ temos que $F(X) \in \mathcal{H}[i]$, ou seja, $F(X) = T^i X'$ para certo $\mathbb{K}\vec{\Delta}$ -módulo indecomponível X' . Tome $Y \in \text{ind}A$. Desta forma, $F(Y) = T^r Y'$, para algum $r \geq 0$ e Y' um $\mathbb{K}\vec{\Delta}$ -módulo indecomponível. Seja $j \geq 0$, então

$$\begin{aligned} \text{Ext}_A^j(X, Y) &\cong \text{Hom}_{D^b(A)}(X, T^j Y) \\ &\cong \text{Hom}_{D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta})}(F(X), T^j F(Y)) \\ &= \text{Hom}_{D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta})}(T^i X', T^{r+j} Y') \\ &\cong \text{Ext}_{\mathbb{K}\vec{\Delta}}^{r+j-i}(X', Y'). \end{aligned}$$

Como $\mathbb{K}\vec{\Delta}$ é hereditária temos que se $r + j - i > 1$, então $\text{Ext}_{\mathbb{K}\vec{\Delta}}^{r+j-i}(X', Y') = 0$. Logo se $r + j - i > 1$, então $\text{Ext}_A^j(X, Y) = 0$. Como $r \geq 0$, temos em particular que $j > i + 1$ implica em $\text{Ext}_A^j(X, Y) = 0$. Sendo Y um objeto genérico em $\text{ind}A$, isso implica que $pdX \leq i + 1$.

De forma análoga, temos que

$$\begin{aligned}
\text{Ext}_A^j(Y, X) &\cong \text{Hom}_{D^b(A)}(Y, T^j X) \\
&\cong \text{Hom}_{D^b(\mathbb{K}\overrightarrow{\Delta})}(F(Y), T^j F(X)) \\
&= \text{Hom}_{D^b(\mathbb{K}\overrightarrow{\Delta})}(T^r Y', T^{j+i} X') \\
&\cong \text{Ext}_{\mathbb{K}\overrightarrow{\Delta}}^{j+i-r}(Y', X') \\
&= 0,
\end{aligned}$$

para $j > r - i + 1$. Como $0 \leq r \leq l$, então $r - i + 1 \leq l - i + 1$. Logo $\text{Ext}_A^j(Y, X) = 0$ para todo $j > l - i + 1$, donde $\text{id}X \leq l - i + 1$.

(b) Se $X \in \mathcal{U}_i$ e $Y \in \mathcal{U}_r$, temos $F(X) = T^i X'$ e $F(Y) = T^r Y'$, para certos $\mathbb{K}\overrightarrow{\Delta}$ -módulos indecomponíveis X' e Y' . Pelo mesmo argumento usado no item (a), temos $\text{Ext}_A^j(X, Y) \cong \text{Ext}_{\mathbb{K}\overrightarrow{\Delta}}^{j+r-i}(X', Y')$. Tal expressão é nula se $j + r - i > 1$. Logo $\text{Ext}_A^j(X, Y) = 0$, para todo $j > i - r + 1$.

□

Lema 5.1.11. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e X^\bullet um objeto de $D^b(A)$. Então X^\bullet está na imagem da inclusão canônica de $\text{mod}A$ em $D^b(A)$ se, e somente se, $\text{Hom}_{D^b(A)}(T^i A, X^\bullet) = 0$ para todo $i \neq 0$.*

Demonstração. Se X^\bullet está na imagem da inclusão canônica de $\text{mod}A$ em $D^b(A)$, então é isomorfo a algum A -módulo X . Logo

$$\begin{aligned}
\text{Hom}_{D^b(A)}(T^i A, X^\bullet) &\cong \text{Hom}_{D^b(A)}(T^i A, X) \\
&\cong \text{Ext}_A^{-i}(A, X) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

A igualdade acima ocorre para todo $i \neq 0$, pois se $i > 0$ a expressão é nula pela definição do espaço de extensões e, se $i < 0$, o fato de A ser projetivo em $\text{mod}A$ garante a igualdade. Assim, está provada a primeira implicação; provemos a recíproca.

Seja $X^\bullet \in D^b(A)$ tal que $\text{Hom}_{D^b(A)}(T^i A, X^\bullet) = 0$, para todo $i \neq 0$. Então X^\bullet é quase isomorfo a um complexo limitado superiormente $P^\bullet = (P^j, d^j)$, com cada P^j um A -módulo projetivo. Vamos mostrar que $H^i(P^\bullet) = 0$ para todo $i \neq 0$. O complexo P^\bullet tem a forma abaixo.

$$\dots \longrightarrow P^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{d^0} P^1 \xrightarrow{d^1} P^2 \longrightarrow \dots$$

Sejam $i \neq -1$ e P um A -módulo projetivo do qual existe sobrejeção para $\ker d^{i+1}$. Logo, pode-se construir um morfismo de complexos $f^\bullet: T^{-i-1}P \longrightarrow P^\bullet$, que é, por hipótese, homotópico a zero.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & f^{-1} & & f^0 & & f^1 & & & & f^i & & \downarrow & & f^{i+2} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & P^{-1} & \xrightarrow{d^{-1}} & P^0 & \xrightarrow{d^0} & P^1 & \xrightarrow{d^1} & \cdots & \longrightarrow & P^i & \xrightarrow{d^i} & P^{i+1} & \xrightarrow{d^{i+1}} & P^{i+2} & \xrightarrow{d^{i+2}} & \cdots
 \end{array}$$

Neste caso existe $g: P \rightarrow P^i$ tal que $gd^i = f^{i+1}$. Isso mostra que $Im f^{i+1} \subset Im d^i$, mas $Im f^{i+1} = \ker d^{i+1}$, donde $\ker d^{i+1} \subset Im d^i$. Assim, $H^i(P^\bullet) = 0$ para todo $i \neq -1$, o que mostra que X^\bullet é quase isomorfo a um complexo stalk, logo está na imagem da inclusão canônica. □

Definição 5.1.12. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e X uma A -módulo. Definimos a categoria perpendicular X^\perp como a subcategoria plena de $\text{mod}A$ cujos objetos são dados por*

$$X^\perp = \{Y \in \text{mod}A \mid \text{Hom}_A(X, Y) = 0 = \text{Ext}_A^1(X, Y)\}.$$

Note que além de plena, a subcategoria M^\perp de $\text{mod}A$ também é abeliana, exata e fechada para extensões.

Apresentadas as definições pertinentes, deste ponto até o fim desta seção nosso objetivo será demonstrar o teorema 5.1.18. Para isso, serão necessários alguns resultados, que enunciaremos e demonstraremos a seguir.

Proposição 5.1.13. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra hereditária e M um A -módulo inclinante parcial indecomponível. Se A tem n classes de isomorfismo de módulos simples, então existe uma \mathbb{K} -álgebra hereditária H de dimensão finita e com $n - 1$ classes de isomorfismo de módulos simples, tal que $M^\perp \cong \text{mod}H$.*

Demonstração. Dado M um A -módulo inclinante parcial, seja E o módulo que completa M para formar um módulo inclinante $E \oplus M$. Então, existe a sequência exata de Bongartz

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow M^m \longrightarrow 0 \tag{*}$$

com $m = \dim \text{Ext}_A^1(M, A)$. Aplicando $\text{Hom}_A(M, _)$ à sequência (*) obtemos a sequência exata de cohomologia

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(M, E) \longrightarrow \text{Hom}_A(M, M^m) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_A^1(M, A) \longrightarrow \text{Ext}_A^1(M, E) \longrightarrow 0.$$

Note que $\text{Hom}_A(M, A) = 0$, pois $\text{Hom}_A(M, A) = \text{Hom}_A(\tau^{-1}(\tau M), A)$ e, como A é hereditária, segue do lema 2.2.5 que $\text{Hom}_A(M, A) = 0$. Pela forma como foi construído, vide corolário 2.7.24, temos que

δ é sobrejetor. Logo $\text{Ext}_A^1(M, E) = 0$. Além disso, vê-se que $\dim \text{Hom}_A(M, M^m) = \dim \text{Ext}_A^1(M, A)$ (note que tais dimensões são de \mathbb{K} -espaços vetoriais), logo δ é injetora. Assim, $\text{Hom}_A(M, E) = 0$, donde $E \in M^\perp$.

Para cada $X \in M^\perp$ fixado, aplicando $\text{Hom}_A(_, X)$ à sequência (*), obtemos a sequência exata longa de cohomologia

$$\cdots \longrightarrow \text{Ext}_A^1(M^m, X) \longrightarrow \text{Ext}_A^1(E, X) \longrightarrow \text{Ext}_A^1(A, X) \longrightarrow \cdots$$

Como $X \in M^\perp$, temos $\text{Ext}_A^1(M^m, X) = 0$, e $\text{Ext}_A^1(A, X) = 0$, pois A é projetivo. Logo temos $\text{Ext}_A^1(E, X) = 0$. Isso implica que todo módulo $X \in M^\perp$ está na classe de torção do par $(\mathcal{T}(E \oplus M), \mathcal{F}(E \oplus M))$. Logo X é gerado por $E \oplus M$. Como $\text{Hom}_A(M, X) = 0$, vê-se que X é gerado por E .

Denote por $H = \text{End}E$ a álgebra de endomorfismos do A -módulo E . Vamos mostrar que $M^\perp \cong \text{mod}H$. Seja $F = \text{Hom}_A(E, _): M^\perp \longrightarrow \text{mod} \text{End}E$, provaremos primeiramente que este funtor é fiel e pleno e depois que é denso.

No caso em que $X \in \text{add}E$, temos, pelo lema 3.1, p.202 de [4], que F se comporta como funtor fiel e pleno. Sabendo disso, mostremos que F é realmente fiel e pleno. Fixado um objeto X em M^\perp , sabemos que X também está em $\text{Gen}E$, logo existe um epimorfismo $f: E^d \longrightarrow X$. Como M^\perp é abeliana, temos $\ker f \in M^\perp$, e isso nos permite construir uma sequência exata $E_1 \longrightarrow E_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$, com $E_1, E_0 \in \text{add}E$.

Dado $Y \in M^\perp$, aplicando $\text{Hom}_A(_, Y)$ à sequência exata acima obtemos a sequência

$$\text{Hom}_A(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_A(E_0, Y) \longrightarrow \text{Hom}_A(E_1, Y).$$

De maneira análoga, aplicando a $E_1 \longrightarrow E_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$ o funtor $\text{Hom}_A(E, _)$ e, posteriormente, o funtor $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(_, \text{Hom}_A(E, Y))$, obtemos o diagrama de colunas exatas:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_A(X, Y) & \dashrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\text{Hom}_A(E, X), \text{Hom}_A(E, Y)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_A(E_0, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\text{Hom}_A(E, E_0), \text{Hom}_A(E, Y)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_A(E_1, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\text{Hom}_A(E, E_1), \text{Hom}_A(E, Y)) \end{array}$$

Como $E_0, E_1 \in \text{add}E$, e sabemos que $F = \text{Hom}_A(E, _)$ é fiel e pleno nesta subcategoria, existem isomorfismos $\alpha: \text{Hom}_A(E_0, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\text{Hom}_A(E, E_0), \text{Hom}_A(E, Y))$ e $\beta: \text{Hom}_A(E_1, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\text{Hom}_A(E, E_1), \text{Hom}_A(E, Y))$ que fazem o quadrado acima comutar. Logo existe um isomorfismo $\phi: \text{Hom}_A(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\text{Hom}_A(E, X), \text{Hom}_A(E, Y))$, que faz o diagrama comutar. Isso prova que F é fiel e pleno.

Provemos, agora, que $F = \text{Hom}_A(E, _)$ é denso. Se $B = \text{End}E$, pelo lema 3.1, p.202 de [4], F age como uma equivalência entre $\text{add}E$ e $\text{add}B$. Sejam $X \in \text{mod}B$ e a sequência exata $P_1 \xrightarrow{g} P_0 \rightarrow X \rightarrow 0$, com $P_0, P_1 \in \text{add}B$ (uma resolução projetiva de X). Como F age como equivalência, existem $E_0, E_1 \in \text{add}E$ e $f: E_1 \rightarrow E_0$ tais que $g = F(f)$, e a sequência $E_1 \xrightarrow{f} E_0 \rightarrow \text{Coker}(f) \rightarrow 0$ é exata. Aplicando F a esta sequência obtemos:

$$\begin{array}{ccccc} F(E_1) & \longrightarrow & F(E_0) & \longrightarrow & F(\text{Coker}(f)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & X \end{array}$$

Pela maneira como definimos E_0 e E_1 , as duas primeiras setas verticais do diagrama são isomorfismos que fazem com que o quadrado mais a esquerda seja comutativo, logo há um isomorfismo $F(\text{Coker}(f)) \rightarrow X$ que faz o diagrama comutar. Assim, F é um funtor denso e, portanto, uma equivalência.

Sabendo que $M^\perp \cong \text{mod}H$, resta mostrar que H é hereditária. Para isso mostraremos que para todo $X \in M^\perp$, existe uma sequência exata $0 \rightarrow E^1 \rightarrow E^0 \rightarrow X \rightarrow 0$, com $E^1, E^0 \in \text{add}E$. Ou seja, mostraremos que existe uma resolução projetiva com comprimento menor ou igual a um para a imagem de X em $\text{mod}H$.

Seja $\{f_1, f_2, \dots, f_r\}$ uma base de $\text{Hom}_A(E, X)$. Como E gera X , existe um morfismo sobrejetor $\varphi: E^r \rightarrow X$. Podemos ver que este morfismo se fatora pelo morfismo $f = [f_1, f_2, \dots, f_r]^t: E^r \rightarrow X$. Logo, como φ é sobrejetora, f é sobrejetora e temos a sequência exata

$$0 \rightarrow \ker f \rightarrow E^r \xrightarrow{f} X \rightarrow 0. \tag{**}$$

Aplicando $\text{Hom}_A(M, _)$ à sequência (**) obtemos a sequência exata longa

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, \ker f) \rightarrow \text{Hom}_A(M, E^r) \rightarrow \text{Hom}_A(M, X) &\rightarrow \text{Ext}_A^1(M, \ker f) \\ &\rightarrow \text{Ext}_A^1(M, E^r). \end{aligned}$$

Como $E, X \in M^\perp$ temos $\text{Hom}_A(M, E^r), \text{Hom}_A(M, X)$ e $\text{Ext}_A^1(M, E^r)$ iguais a zero. Logo $\text{Hom}_A(M, \ker f) = 0 = \text{Ext}_A^1(M, \ker f)$, donde $\ker f \in M^\perp$.

Pelo modo como f foi construída, temos um epimorfismo $g: \text{Hom}_A(E, E^r) \rightarrow \text{Hom}_A(E, X)$. Logo aplicando $\text{Hom}_A(E, _)$ à sequência (**), temos que $\text{Ext}_A^1(E, \ker f) = 0$. Aplicando $\text{Hom}_A(_, E)$ à sequência (**) vê-se que $\text{Ext}_A^1(\ker f, E) = 0$. Logo $\ker f \in \text{add}E$, e assim a sequência exata $0 \rightarrow \ker f \rightarrow E^r \xrightarrow{f} X \rightarrow 0$ é da forma desejada. Portanto, todo H -módulo tem dimensão projetiva menor ou igual a um, donde H é uma álgebra hereditária.

□

Lema 5.1.14. *Sejam $\vec{\Delta}$ um quiver finito e acíclico com n vértices e X um $\mathbb{K}\vec{\Delta}$ -módulo. Escreva $X = \bigoplus_{i=0}^t X_i^{r_i}$ com cada X_i indecomponível, $r_i \geq 1$ e $X_i \not\cong X_j$ se $i \neq j$. Se $\text{Ext}_A^1(X_i, X_i) = 0$ para $1 \leq i \leq t$ e $X_i \in X_j^\perp$ para $i < j$, então $X^\perp \cong \text{mod}H$ para alguma \mathbb{K} -álgebra H hereditária e de dimensão finita. Além disso, temos que (a menos de isomorfismo) há $n - t$ H -módulos simples.*

Demonstração. Este resultado segue por indução da proposição 5.1.13. □

Lema 5.1.15. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra hereditária e B uma \mathbb{K} -álgebra. Se existe $F: D^b(B) \rightarrow D^b(A)$ uma equivalência triangulada tal que $F(B_B) = \bigoplus_{j=0}^r T^j X_j$, para certos A -módulos $\{X_j\}_{0 \leq j \leq r}$, então:*

- (a) $\text{Hom}_A(X_i, X_j) = 0$, para $i \neq j$;
- (b) $\text{Ext}_A^1(X_i, X_j) = 0$, para $i + 1 \neq j$;
- (c) Se $r = 0$, então X_0 é um A -módulo inclinante.

Demonstração. Como F é uma equivalência triangulada, então admite uma quase inversa G . Vale lembrar, ainda, que \mathcal{U}_i é a subcategoria plena de $\text{mod}B$ que tem como objetos os B -módulos indecomponíveis X tais que $F(X) \in \text{mod}A[i]$. Vê-se que para todo X_j em $\text{mod}A$ tem-se que $G(T^j X_j) \in \mathcal{U}_j$ e é B -módulo projetivo. De fato, $FG(T^j X_j) \cong \text{Id}(T^j X_j) = T^j X_j$, logo $G(T^j X_j) \in \mathcal{U}_j$. Além disso, $B \cong GF(B) = \bigoplus_{j=0}^r G(T^j X_j)$, então $G(T^j X_j)$ é somando direto do B -módulo projetivo B , portanto é projetivo.

- (a) Como a categoria derivada mantém os morfismos da categoria original, temos:

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_A(X_i, X_j) &= \text{Hom}_{D^b(A)}(X_i, X_j) \\
 &\cong \text{Hom}_{D^b(A)}(T^i X_i, T^i X_j) \\
 &= \text{Hom}_{D^b(A)}(T^i X_i, T^{i-j}(T^j X_j)) \\
 &\cong \text{Hom}_{D^b(B)}(G(T^i X_i), T^{i-j}(G(T^j X_j))) \\
 &\cong \text{Ext}_B^{i-j}(G(T^i X_i), G(T^j X_j)).
 \end{aligned}$$

Mas temos que $\text{Ext}_B^{i-j}(G(T^i X_i), G(T^j X_j)) = 0$ para quaisquer i e j , com $i \neq j$. De fato, no caso em que $i < j$ temos, pelo teorema 5 da p.167 de [11], que a afirmação vale. Quando $i > j$ temos que $G(T^i X_i)$ e $G(T^j X_j)$ são projetivos, assim a afirmação segue. Logo, pelas igualdades e isomorfismos acima, se $i \neq j$ obtemos $\text{Hom}_A(X_i, X_j) = 0$.

(b) Temos que:

$$\begin{aligned} \text{Ext}_A^1(X_i, X_j) &= \text{Hom}_{D^b(A)}(X_i, T^1 X_j) \\ &= \text{Hom}_{D^b(A)}(T^i X_i, T^{i-j+1}(T^j X_j)) \\ &\cong \text{Ext}_B^{i-j+1}(G(T^i X_i), G(T^j X_j)). \end{aligned}$$

Logo as igualdades e isomorfismos acima implicam que se $i + 1 \neq j$, então $\text{Ext}_A^1(X_i, X_j) = 0$.

(c) Agora temos todas as ferramentas para mostrar que no caso $r = 0$ o A -módulo X_0 é inclinante. Observe que se $r = 0$, temos $F(B_B) = \bigoplus_{j=0}^0 T^j X_j = X_0$, que tem dimensão projetiva menor ou igual a 1, já que A é hereditária. Além disso, mostramos no item (b) que $\text{Ext}_A^1(X_0, X_0) = 0$. A terceira condição para que o módulo seja inclinante decorre da igualdade $F(B) = X_0$ e do fato de que F é uma equivalência de categorias, pois deste modo o número de somandos indecomponíveis de X_0 e de classes de isomorfismo de B -módulos simples é o mesmo, o que finaliza a demonstração. \square

Lema 5.1.16. *Sejam $A = \mathbb{K}\overrightarrow{\Delta}$ uma \mathbb{K} -álgebra, B uma \mathbb{K} -álgebra e $F: D^b(B) \rightarrow D^b(A)$ uma equivalência triangulada. Se $\{X_i\}_{0 \leq i \leq r}$ é um conjunto de A -módulos tal que $F(B_B) = \bigoplus_{i=0}^r T^i X_i$, então existe uma \mathbb{K} -álgebra hereditária H tal que $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_{r-1} \oplus X_r)^\perp \cong \text{mod}H$.*

Demonstração. Para demonstrar este resultado faremos uma reordenação dos módulos X_1, X_2, \dots, X_r de forma que seja possível usar o lema 5.1.14. Pode-se escrever cada X_i como soma direta de A -módulos indecomponíveis da forma:

$$\begin{aligned} X_1 &= Y_1^1 \oplus Y_2^1 \oplus \cdots \oplus Y_{m_1}^1 \\ X_2 &= Y_1^2 \oplus Y_2^2 \oplus \cdots \oplus Y_{m_2}^2 \\ &\vdots \\ X_r &= Y_1^r \oplus Y_2^r \oplus \cdots \oplus Y_{m_r}^r. \end{aligned}$$

Caso existam $Y_b^a \cong Y_d^c$ podemos excluir um dos módulos sem alterar a categoria perpendicular. Desta forma, temos um número finito de módulos indecomponíveis dois-a-dois não isomorfos em uma categoria triangulada. Em cada conjunto $\{Y_j^i\}_{1 \leq j \leq n_i}$ podemos dar uma ordenação adequada, de forma que não existam morfismos não nulos de cada Y_j^i para seus predecessores. Ou seja, com os índices já alterados para esta nova ordem, temos conjuntos $\{Y_1^1, Y_2^1, \dots, Y_{n_1}^1\}$, $\{Y_1^2, Y_2^2, \dots, Y_{n_2}^2\}$, \dots , $\{Y_1^r, Y_2^r, \dots, Y_{n_r}^r\}$ tais que para todo $1 \leq i \leq r$ vale $\text{Hom}_A(Y_k^i, Y_j^i) = 0$, se $k > j$. Como, pelo lema 5.1.14, $\text{Hom}_A(X_i, X_j) = 0$ se $i \neq j$, temos que não há morfismos não nulos entre módulos de conjuntos distintos. Logo, é possível ordenar os módulos da seguinte forma $Y_1 = Y_1^1, Y_2 = Y_2^1, \dots, Y_{n_1} = Y_{n_1}^1$,

$Y_{n_1+1} = Y_1^2, Y_{n_1+2} = Y_2^2, \dots, Y_{n_1+n_2+\dots+n_r} = Y_{n_r}^r$. Denotando $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$, obtemos um conjunto ordenado de módulos indecomponíveis, dois-a-dois não isomorfos, $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ tal que

- $\text{Hom}_A(Y_j, Y_i) = 0$, se $i < j$.
- $\text{Ext}_A^1(Y_j, Y_i) = 0$, se $i \leq j$.
- $(X_1 \oplus \dots \oplus X_r)^\perp \cong (Y_1 \oplus \dots \oplus Y_n)^\perp$

Assim, $Y_i \in Y_j^\perp$ se $i < j$, logo pode-se usar o lema 5.1.14. Dessa forma, existe uma \mathbb{K} -álgebra hereditária H tal que $(Y_1 \oplus Y_2 \oplus \dots \oplus Y_n)^\perp \cong \text{mod}H$. Pela forma como $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ foi construído temos:

$$(X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_{r-1} \oplus X_r)^\perp \cong (Y_1 \oplus Y_2 \oplus \dots \oplus Y_n)^\perp \cong \text{mod}H.$$

□

A partir do lema a seguir, voltaremos a utilizar a notação adotada em 5.1.8. Ou seja, $\mathcal{H}[i]$ denotará a subcategoria plena de $D^b(A)$ formada pelos complexos X^\bullet que são isomorfos a $T^i X$ para algum $X \in \text{mod}A$.

Lema 5.1.17. *Sejam $A = \mathbb{K}\overrightarrow{\Delta}$ uma \mathbb{K} -álgebra hereditária, H uma \mathbb{K} -álgebra hereditária tal que $\text{mod}H$ é uma subcategoria plena de $\text{mod}A$, B uma \mathbb{K} -álgebra e $F: D^b(B) \rightarrow D^b(A)$ uma equivalência triangulada com quase inversa $G: D^b(A) \rightarrow D^b(B)$. Denotando por Q o cogrador injetivo de $\text{mod}H$ formado pela soma direta dos H -módulos injetivos indecomponíveis, vale:*

- (a) Se $F(B_B) = \bigoplus_{j=0}^r T^j X_j$, para certo conjunto de A -módulos $\{X_j\}_{0 \leq j \leq r}$, e X_0 é um H -módulo inclinante, então $\text{Hom}_{D^b(B)}(T^i B, G(Q)) = 0$, para todo $i \neq 0$.
- (b) Se S é um B -módulo simples, projetivo e não injetivo tal que $F(S)$ é um somando direto de Q , então $F(\tau^{-1}S)$ não é um A -módulo, ou seja, $F(\tau^{-1}S) \notin \mathcal{H}[0]$.

Demonstração. (a) Como Q é injetivo, temos que $\text{Ext}_H^1(X_0, Q) = 0$. Logo

$$Q \in \mathcal{T}(X_0) = \{M \in \text{mod}H \mid \text{Ext}_H^1(X_0, M) = 0\}.$$

Pelo lema 2.7.15, existe uma sequência exata curta da forma $0 \rightarrow X_0'' \rightarrow X_0' \rightarrow Q \rightarrow 0$, com X_0' e X_0'' em $\text{add}X_0$. Tal sequência exata induz um triângulo $X_0'' \rightarrow X_0' \rightarrow Q \rightarrow TX_0''$ na categoria derivada $D^b(A)$. Aplicando o funtor $\text{Hom}_{D^b(A)}(T^i F(B), _)$, com $i \neq 0$, a este triângulo obtemos a sequência exata:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{D^b(A)}(T^i F(B), X_0'') &\longrightarrow \text{Hom}_{D^b(A)}(T^i F(B), X_0') \longrightarrow \text{Hom}_{D^b(A)}(T^i F(B), Q) \\ &\longrightarrow \text{Hom}_{D^b(A)}(T^i F(B), TX_0''). \end{aligned}$$

Mas pelo lema 5.1.15, o segundo e último termos da sequência são nulos, logo $\text{Hom}_{D^b(A)}(T^i F(B), Q) = 0$ para todo $i \neq 0$. Portanto, temos:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{D^b(B)}(T^i B, G(Q)) &\cong \text{Hom}_{D^b(B)}(T^i GF(B), G(Q)) \\ &\cong \text{Hom}_{D^b(A)}(T^i F(B), Q) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(b) Considere a sequência de Auslander-Reiten da forma

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{f} P \longrightarrow \tau^{-1}S \longrightarrow 0.$$

Seja $S \xrightarrow{f} P \longrightarrow \tau^{-1}S \longrightarrow TS$ o triângulo induzido por esta sequência em $D^b(B)$, aplicando F temos o triângulo $F(S) \longrightarrow F(P) \longrightarrow F(\tau^{-1}S) \longrightarrow TF(S)$ em $D^b(A)$. Aplicando o funtor cohomológico $\text{Hom}_{D^b(A)}(A, _)$ a este triângulo obtemos a sequência exata longa

$$\text{Hom}_{D^b(A)}(A, T^{-1}F(\tau^{-1}S)) \xrightarrow{\alpha} \text{Hom}_{D^b(A)}(A, F(S)) \xrightarrow{\beta} \text{Hom}_{D^b(A)}(A, F(P)).$$

Suponha, por absurdo, que $\text{Hom}_{D^b(A)}(A, T^{-1}F(\tau^{-1}S)) = 0$. Logo β é uma aplicação injetiva. Não se pode dizer, diretamente, que isso induz uma injeção de $F(S)$ em $F(P)$, pois este segundo objeto pode não ser um A -módulo (neste contexto, quando nos referimos a um A -módulo queremos dizer um complexo stalk em $\mathcal{H}[0]$). Seja P' o maior somando de P tal que $F(P')$ é um A -módulo, ou seja, tal que $F(P')$ é somando direto de Q . Assim, a aplicação injetiva β induz uma injeção $\mu: F(S) \longrightarrow F(P')$. Como μ é um monomorfismo começando em um módulo injetivo, μ cinde, logo é uma seção. Denote por π a projeção de P em P' , logo $F(\pi)$ é uma aplicação sobrejetora. Assim, o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} F(S) & \xrightarrow{F(f)} & F(P) \\ \uparrow \text{Id}_{F(S)} & & \downarrow F(\pi) \\ F(S) & \xleftarrow{\mu} & F(P') \end{array}$$

Denotamos por μ' a aplicação inversa pela esquerda de μ , que existe pois μ é uma seção. Pelo diagrama, $F(\pi)\mu'Id_{F(S)}$ é uma inversa à esquerda de $F(f)$, logo $F(f)$ é uma seção.

Uma equivalência triangulada como F (ou sua quase inversa) leva seção em seção, logo f é uma seção e, conseqüentemente, a seqüência exata

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{f} P \longrightarrow \tau^{-1}S \longrightarrow 0$$

cinde. Como esta é uma seqüência de Auslander-Reiten (quase cindida), isso é uma contradição. Assim, $\text{Hom}_{D^b(A)}(A, T^{-1}F(\tau^{-1}S)) \neq 0$. A existência de morfismos não nulos entre A e $T^{-1}F(\tau^{-1}S)$ garante que $T^{-1}F(\tau^{-1}S) \notin \mathcal{H}[-1]$, logo $F(\tau^{-1}S) \notin \mathcal{H}[0]$. □

Enunciados os lemas acima, podemos finalmente demonstrar o resultado principal desta seção.

Teorema 5.1.18. *Se B é uma álgebra hereditária por partes do tipo $\vec{\Delta}$, então B é uma álgebra inclinada iterada do tipo $\vec{\Delta}$.*

Demonstração. Sejam a álgebra $A = \mathbb{K}\vec{\Delta}$ e $F: D^b(B) \longrightarrow D^b(A)$ uma equivalência triangulada normalizada com quase inversa G , como no lema 5.1.15. Sendo $X^\bullet = F(B_B)$, temos que $X^\bullet = \bigoplus_{j=0}^r T^j X_j$, em que cada X_j é um A -módulo e $X_0 \neq 0 \neq X_j$ (estes módulos X_j não são necessariamente indecomponíveis).

Procederemos por indução em r . Pelo lema 5.1.15, quando $r = 0$ temos que X_0 é um A -módulo inclinante, logo B é inclinada. Como toda álgebra inclinada é inclinada iterada, o resultado segue.

Assuma que o teorema vale para os casos em que o número de shifts que aparecem na soma direta $F(B_B) = \bigoplus_{j=0}^r T^j X_j$ é menor que o número r , ou em que o número de shifts é igual a r mas X_0 possui menos somandos indecomponíveis. Note que o passo inicial da indução neste segundo caso recai no primeiro caso, pois se X_0 tem zero somandos há um shift a menos na soma direta.

Vejamus que X_0 está na categoria perpendicular $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_r)^\perp$. De fato, pelas fórmulas do lema 5.1.15, valem as igualdades

$$\text{Hom}_A(X_1 \oplus \cdots \oplus X_r, X_0) \cong \bigoplus_{j=1}^r \text{Hom}_A(X_j, X_0) = 0$$

$$\text{Ext}_A^1(X_1 \oplus \cdots \oplus X_r, X_0) \cong \bigoplus_{j=1}^r \text{Ext}_A^1(X_j, X_0) = 0.$$

Desta forma X_0 é um módulo em $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_r)^\perp$.

Pelo lema 5.1.16, sabemos que existe uma \mathbb{K} -álgebra hereditária H tal que $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_r)^\perp \cong \text{mod}H$. A categoria $\text{mod}H$ é uma subcategoria plena de $\text{mod}A$; por este motivo objetos e morfismos de $\text{mod}H$ estão em $\text{mod}A$. Mostraremos, agora, que X_0 é um módulo inclinante em $\text{mod}H$. A primeira propriedade dos módulos inclinantes é satisfeita, pois H é hereditária. Temos também que

$\text{Ext}_A^1(X_0, X_0) = 0$, portanto $\text{Ext}_H^1(X_0, X_0) = 0$, satisfazendo a segunda propriedade. Pelo lema 5.1.14 sabemos que o número de módulos simples (não isomorfos) em $\text{mod}H$ é o número de simples (não isomorfos) em $\text{mod}A$ menos o número de somandos indecomponíveis não isomorfos de $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_r)^\perp$. Como $D^b(B) \cong D^b(A)$ temos, pela proposição 2.8.5, que $\text{rk}(K_0(B)) = \text{rk}(K_0(A))$. Logo o número de somandos indecomponíveis não isomorfos de X_0 é igual ao número de módulos simples (não isomorfos) em $\text{mod}H$, assim X_0 é um H -módulo inclinante.

Sabe-se que o H -módulo Q_H dado pela soma direta de todos os H -módulos injetivos indecomponíveis (sem repetição) é um cogrador injetivo minimal de $\text{mod}H$. Além disso, pelo item (a) do lema 5.1.17, temos que $\text{Hom}_{D^b(B)}(T^i B, G(Q)) = 0$ para todo $i \neq 0$. Logo, pelo lema 5.1.11, $G(Q)$ está na imagem da inclusão de $\text{mod}B$ em $D^b(B)$. Com certo abuso de notação, diremos que $G(Q) \in \text{mod}B$. Sendo

$$F(B_B) = \bigoplus_{j=0}^r T^j X_j,$$

existem B -módulos projetivos P e P' tais que $F(P) = X_0$ e $B = P \oplus P'$. Vale notar que a maneira como este módulo P foi escolhido implica em

$$P \cong G(X_0) \quad \text{e} \quad P' \cong G\left(\bigoplus_{j=1}^r T^j X_j\right).$$

Para simplificar a notação, denotemos $Y_B = G(Q)$. Tome o B -módulo $M = Y \oplus P'$. Mostraremos que M é um módulo inclinante e que o par de torção $(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(M))$ cinde em $\text{mod}B$. Pela forma como foi definido Y , temos que $F(Y) = F(G(Q)) \cong Q$. Logo $Y \in \mathcal{U}_0$ e, pelo lema 5.1.10, vê-se que $pd_B Y \leq 1$. Sendo P' um B -módulo projetivo, tem-se que $pd_B M \leq 1$, satisfazendo a primeira propriedade dos módulos inclinantes. Além disso,

$$\begin{aligned} \text{Ext}_B^1(M, M) &= \text{Ext}_B^1(Y \oplus P', Y \oplus P') \\ &\cong \text{Ext}_B^1(Y, Y \oplus P') \oplus \text{Ext}_B^1(P', Y \oplus P') \\ &= \text{Ext}_B^1(Y, Y \oplus P') \\ &\cong \text{Ext}_B^1(Y, Y) \oplus \text{Ext}_B^1(Y, P') \\ &= \text{Ext}_B^1(Y, P'), \end{aligned}$$

ou seja, temos que $\text{Ext}_B^1(M, M) \cong \text{Ext}_B^1(Y, P')$. Denotando por $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ o conjunto de somandos indecomponíveis dois-a-dois não isomorfos de P' , para cada λ fixado vale $\text{Ext}_B^1(Y, P_\lambda) \cong \text{Hom}_{D^b(B)}(Y, TP_\lambda) \cong \text{Hom}_{D^b(A)}(Q, TFP_\lambda)$. Como P_λ é indecomponível, $F(P_\lambda) \in \mathcal{H}[j]$ para algum $j \geq 1$. Logo $F(P_\lambda) = T^j X_\lambda$ para certo objeto X_λ em $\text{mod}A$, assim, $\text{Ext}_B^1(Y, P_\lambda) \cong \text{Hom}_{D^b(B)}(Y, TP_\lambda) \cong \text{Ext}_A^{j+1}(Q, X_\lambda)$. Este último termo é nulo, pois $j \geq 1$ e A é uma álgebra hereditária, logo $\text{Ext}_B^1(M, M) = 0$ e M é um módulo inclinante parcial.

Para provar que M é um B -módulo inclinante resta mostrar que o número de somandos indecomponíveis não-isomorfos de Y é o mesmo de X_0 . Sendo G uma equivalência triangulada, temos que o número de somandos indecomponíveis não-isomorfos de Y é o mesmo de Q , mas este cogeração injetivo é a soma de todos os injetivos indecomponíveis de $\text{mod}H$ e X_0 é um H -módulo inclinante, logo os números coincidem e, assim, M é inclinante em $\text{mod}B$.

Agora mostremos que o par de torção induzido por M é cindido (M é separante). Tome Z um B -módulo indecomponível tal que $Z \notin \mathcal{T}(M)$, ou seja, $\text{Ext}_B^1(M, Z) \neq 0$. Sabe-se que $F(Z)$ pertence a $\mathcal{H}[i]$ para algum $i \in \mathbb{Z}$. Além disso, como P' é projetivo, temos $\text{Ext}_B^1(Y, Z) \neq 0$. Como $Y \in \mathcal{U}_0$, usando o mesmo argumento da demonstração do lema 5.1.10, $\text{Ext}_B^1(Y, Z) \cong \text{Ext}_A^{1+i}(FY, T^{-i}FZ) \neq 0$ implica em $0 \leq 1+i \leq 1$, portanto $i = 0$ e, conseqüentemente, $F(Z) \in \mathcal{H}[0]$. Provemos agora que $F(Z)$ é um objeto na categoria $(X_1 \oplus \dots \oplus X_r)^\perp \cong \text{mod}H$. Para cada i , com $1 \leq i \leq r$, e r vale:

$$\text{Hom}_A(X_i, F(Z)) \cong \text{Hom}_{D^b(A)}(X_i, F(Z)) \cong \text{Hom}_{D^b(B)}(G(X_i), Z).$$

Como $T^i G(X_i)$ está na imagem da inclusão de $\text{mod}B$ em $D^b(B)$, podemos dizer que $G(X_i)$ está no shift $-i$. Logo $\text{Hom}_{D^b(B)}(G(X_i), Z)$ é isomorfo a um somando de $\text{Hom}_{D^b(B)}(T^{-i}B, Z) \cong \text{Ext}_B^i(B, Z)$. Como $1 \leq i \leq r$ e B é projetivo, temos $\text{Ext}_B^i(B, Z) = 0$, assim, $\text{Hom}_A(X_i, F(Z)) = 0$. Pelo mesmo argumento usado acima temos:

$$\begin{aligned} \text{Ext}_A^1(X_i, F(Z)) &\cong \text{Hom}_{D^b(A)}(T^{-1}X_i, F(Z)) \\ &\cong \text{Hom}_{D^b(B)}(T^{-1}G(X_i), Z) \\ &\cong \text{Hom}_{D^b(B)}(T^{-1-i}T^i G(X_i), Z) \\ &\cong \text{Ext}_B^{1+i}(T^i G(X_i), Z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo $F(Z)$ é um objeto na categoria $(X_1 \oplus \dots \oplus X_r)^\perp \cong \text{mod}H$. Como $\text{Ext}_B^1(Y, Z) \neq 0$, temos que $\text{Ext}_H^1(Q, F(Z)) \neq 0$, logo $F(Z)$ não é injetivo em $\text{mod}H$.

Vamos mostrar que $\text{Hom}_H(Q, F(Z)) = 0$. Seja $g: Q \rightarrow F(Z)$ um morfismo, logo pode-se construir a seqüência exata $0 \rightarrow \text{Ker}(g) \rightarrow Q \rightarrow \text{Im}(g) \rightarrow 0$ e a seqüência exata longa de cohomologia:

$$\text{Ext}_H^1(X, Q) \rightarrow \text{Ext}_H^1(X, \text{Im}(g)) \rightarrow \text{Ext}_H^2(X, \text{Ker}(g)),$$

para cada H -módulo X . Além disso, $\text{Ext}_H^1(X, Q) = 0$, pois Q é injetivo e $\text{Ext}_H^2(X, \text{Ker}(g)) = 0$, pois H é hereditária. Logo $\text{Ext}_H^1(X, \text{Im}(g)) = 0$ para todo $X \in \text{mod}H$. Assim, $\text{Im}(g)$ é um H -módulo injetivo.

Sejam $g': Q \rightarrow \text{Im}(g)$ o morfismo induzido por g na sua imagem e $\mu: \text{Im}(g) \rightarrow F(Z)$ a inclusão, assim o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 Q & \xrightarrow{g} & F(Z) \\
 & \searrow^{g'} & \nearrow^{\mu} \\
 & & \text{Im}(g)
 \end{array}$$

Sendo μ um monomorfismo, μ é uma seção. Assim, $\text{Im}(g)$ é isomorfo a um somando de $F(Z)$, um indecomponível. Desta forma temos duas possibilidades; $\text{Im}(g) = 0$ ou $\text{Im}(g) \cong F(Z)$. Neste segundo caso teríamos $F(Z)$ (que já provamos ser não injetivo) isomorfo a um módulo injetivo e isso não pode ocorrer. Logo temos $\text{Im}(g) = 0$ e assim não há morfismo não-nulo de Q para $F(Z)$, ou seja, $\text{Hom}_H(Q, F(Z)) = 0$.

Os morfismos em $\text{mod}H$ podem ser vistos como morfismos em $D^b(A)$, assim, aplicando G , temos que $\text{Hom}_{D^b(B)}(Y, Z) = 0$ e, portanto, $\text{Hom}_B(Y, Z) = 0$. Desta forma

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_B(M, Z) &= \text{Hom}_B(Y \oplus P', Z) \\
 &\cong \text{Hom}_B(Y, Z) \oplus \text{Hom}_B(P', Z) \\
 &\cong \text{Hom}_B(Y, Z) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Note que o termo $\text{Hom}_B(P', Z)$ se anula na expressão acima, pois $\text{Hom}_B(P', Z) \cong \text{Hom}_{D^b(B)}(P', Z) \cong \text{Hom}_{D^b(A)}(\bigoplus_{j=1}^r T^j X_j, F(Z)) \cong \bigoplus_{j=1}^r \text{Ext}_A^{-j}(X_j, F(Z)) = 0$. Logo $Z \in \mathcal{F}(M)$ e, assim, o par de torção $(\mathcal{T}(M), \mathcal{F}(M))$ cinde.

Seja $C = \text{End}M$. O funtor derivado $R\text{Hom}_B(M, _): D^b(B) \rightarrow D^b(C)$ é uma equivalência triangulada tal que $R\text{Hom}_B(M, M) = \text{Hom}_B(M, M) = C$. Utilizando o funtor quase-inverso de $R\text{Hom}_B(M, _)$ e o funtor F , pode-se construir uma equivalência $F': D^b(C) \rightarrow D^b(A)$ tal que

$$F'(C) \cong F(M) = F(U \oplus P') \cong F(Y) \oplus F(P') \cong Q \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^r T^j X_j \right).$$

Seja S um C -módulo simples projetivo e não injetivo. Tal módulo existe pois sabemos que C é uma álgebra conexa e podemos excluir o caso trivial em que $C \cong \mathbb{K}$. Além disso, podemos tomar este S de forma que $F'(S)$ seja um somando direto de Q . De fato, se não existir um módulo simples projetivo desta forma, então não há módulos indecomponíveis que sejam somandos de Q , pois não há morfismo irredutível chegando em um módulo simples projetivo. Desta forma, temos

$$F'(C) = \left(\bigoplus_{j=1}^r T^j X_j \right).$$

Note que a soma começa em $j = 1$, ou seja, há objetos em menos shifts do que em X^\bullet , assim, pela hipótese de indução, temos que C é inclinada iterada, o que conclui a prova para este caso.

Voltemos ao caso em que existe um C -módulo S simples projetivo e não injetivo tal que $F'(S)$ seja um somando direto de Q . Com este módulo S pode-se construir um módulo APR-inclinante $M(S) = \tau^{-1}S \oplus \bigoplus_{P_i \neq S} P_i$, em que cada P_i é um módulo projetivo indecomponível não isomorfo a S . Deste modo, segue do teorema 4.2.3 que o par de torção $(\mathcal{T}(M(S)), \mathcal{F}(M(S)))$ cinde em $\text{mod}C$. Além disso, pelo item (b) do lema 5.1.17, temos que $F'(\tau^{-1}S)$ não é um A -módulo.

Como $F'(\tau^{-1}S) \notin \mathcal{H}[0]$ e denotando por $D = \text{End}(M(S))$, existe uma equivalência triangulada $R\text{Hom}_C(M(S), _): D^b(C) \rightarrow D^b(D)$ com $R\text{Hom}_C(M(S), M(S)) = D$. Usando a quase inversa, temos uma equivalência triangulada $F'': D^b(D) \rightarrow D^b(A)$ tal que:

$$F''(D) \cong F'(M(S)) = F' \left(\tau^{-1}S \oplus \bigoplus_{P_i \neq S} P_i \right) \cong F'(\tau^{-1}S) \oplus \left(\bigoplus_{P_i \neq S} F'(P_i) \right).$$

Note que $F'(S) \in \mathcal{H}[0]$, pois tomamos S tal que $F'(S)$ é somando de Q . Mas $F'(\tau^{-1}S)$ não pertence a $\mathcal{H}[0]$, assim $F''(D)$ possui menos somandos indecomponíveis em $\mathcal{H}[0]$ que $F'(C)$, entrando na hipótese de indução. Logo D é inclinada iterada e como os passos de B para D foram cindidos, temos que B é uma álgebra inclinada iterada do tipo $\vec{\Delta}$. □

Como consequência imediata do teorema acima temos o seguinte importante resultado.

Corolário 5.1.19. *Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e $\vec{\Delta}$ um quiver finito e acíclico. Então são equivalentes:*

- (i) A é uma \mathbb{K} -álgebra hereditária por partes do tipo $\vec{\Delta}$.
- (ii) A é uma \mathbb{K} -álgebra inclinada iterada do tipo $\vec{\Delta}$.
- (iii) A é uma \mathbb{K} -álgebra inclinável a $\mathbb{K}\vec{\Delta}$.

5.2 O Caso Dynkin

Nesta seção trataremos de um caso particular de álgebras hereditárias por partes, aquelas de tipo Dynkin. Para tais álgebras é possível melhorar os resultados da seção anterior. Para delimitar o tipo de álgebras estudadas aqui precisamos do resultado a seguir, que é um corolário direto do teorema 5.1.18.

Proposição 5.2.1. *Seja B uma álgebra hereditária por partes de tipo Dynkin, então B é de tipo de representação finito.*

Demonstração. Se B é uma álgebra hereditária por partes de tipo Dynkin, a categoria derivada $D^b(B)$ é triângulo-equivalente a categoria derivada $D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta})$, para certo quiver Dynkin $\vec{\Delta}$. Sabemos, pelo

teorema 5.1.18, que B é inclinada iterada de tipo $\vec{\Delta}$ e que toda álgebra hereditária de tipo Dynkin é de tipo derepresentação finito. Assim, existe uma sequência finita de triplas $(A_i, M_i, A_{i+1} = \text{End}M_i)_{0 \leq i \leq k}$, em que $A_0 = B$, $A_k = \mathbb{K}\vec{\Delta}$ e cada M_i é um módulo inclinante separante. Como os módulos M_i são separantes, pela proposição 2.8.3, temos que

$$n(B) = n(A_0) \leq n(A_1) \leq n(A_2) \leq \cdots \leq n(A_k) = n(\mathbb{K}\vec{\Delta}).$$

Como $\vec{\Delta}$ é Dynkin, $n(\mathbb{K}\vec{\Delta})$ é finito, logo B deve ser de tipo de representação finito. \square

Vale notar que a recíproca do resultado acima não é verdadeira, ou seja, existem álgebras hereditárias por partes de tipo $\vec{\Delta}$ que são de tipo de representação finito, mesmo com $\vec{\Delta}$ não sendo Dynkin. É possível, por exemplo, a partir da álgebra de caminhos (de tipo de representação infinito) de um quiver Euclidiano $\vec{\Delta}$ obter um módulo inclinante T cuja álgebra de endomorfismos é de tipo de representação finito. Desta forma, $\text{End}T$ será uma álgebra de tipo de representação finito que é hereditária por partes de tipo $\vec{\Delta}$ sendo $\vec{\Delta}$ um quiver não Dynkin. Para mais detalhes sobre a construção de tal módulo de representação inclinante ver proposição 4.4, p.328 de [4].

Com o resultado acima, sabe-se que estudaremos nesta seção apenas álgebras de tipo de representação finito. Para este estudo precisaremos, ainda, da definição a seguir.

Definição 5.2.2. *Sejam $\vec{\Delta}$ um quiver finito e acíclico e A uma \mathbb{K} -álgebra hereditária por partes do tipo $\vec{\Delta}$. Então define-se $r_{\vec{\Delta}}(A) = \{x \in \mathbb{Z}^n / \chi_A(x) = 1\}$.*

Proposição 5.2.3. *Dado $\vec{\Delta}$ um quiver e A uma \mathbb{K} -álgebra, se existe uma equivalência triangulada $F: D^b(A) \rightarrow D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta})$ então $r_{\vec{\Delta}}(A) = r_{\vec{\Delta}}(\mathbb{K}\vec{\Delta})$, ou seja, o valor de $r_{\vec{\Delta}}(A)$ independe de A .*

Demonstração. Sejam $\vec{\Delta}$ um quiver e A uma \mathbb{K} -álgebra. Se existe uma equivalência triangulada $F: D^b(A) \rightarrow D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta})$ então, pela proposição 2.8.5, existe uma isometria $f: K_0(A) \rightarrow K_0(\mathbb{K}\vec{\Delta})$ tal que $\dim F(X^\bullet) = f(\dim X^\bullet)$, para todo $X^\bullet \in D^b(A)$. Assim, para cada $X^\bullet \in D^b(A)$ temos que:

$$\begin{aligned} \chi_A(\dim X^\bullet) &= \langle \dim X^\bullet, \dim X^\bullet \rangle_A \\ &= \langle f(\dim X^\bullet), f(\dim X^\bullet) \rangle_{\mathbb{K}\vec{\Delta}} \\ &= \langle \dim F(X^\bullet), \dim F(X^\bullet) \rangle_{\mathbb{K}\vec{\Delta}} \\ &= \chi_{\mathbb{K}\vec{\Delta}}(\dim F(X^\bullet)). \end{aligned}$$

Logo $\chi_A(\dim X^\bullet) = 1$ se, e somente se, $\chi_{\mathbb{K}\vec{\Delta}}(\dim F(X^\bullet)) = 1$. Isso mostra que os valores $r_{\vec{\Delta}}(A)$ e $r_{\vec{\Delta}}(\mathbb{K}\vec{\Delta})$ são iguais, provando o resultado. \square

Pela proposição acima sabemos que o valor de $r_{\vec{\Delta}}(A)$ independe da álgebra A escolhida, variando de acordo com o quiver $\vec{\Delta}$ tomado. Por este motivo, podemos denotar apenas por $r_{\vec{\Delta}}(A) = r_{\vec{\Delta}}$.

Além disso, no caso dos quivers do tipo Dynkin, pelo teorema 5.10 da página 291 de [4], o conjunto $\{x \in \mathbb{Z}^n | \chi_A(x) = 1\}$ é sempre finito e os valores de $r_{\vec{\Delta}}$ são conhecidos. Seguem os valores para $\vec{\Delta}$ Dynkin

$$r_{\mathbb{A}_n} = n(n+1)/2 \quad , \quad r_{\mathbb{D}_n} = n^2 - n \quad , \quad r_{\mathbb{E}_6} = 36 \quad , \quad r_{\mathbb{E}_7} = 63 \quad , \quad r_{\mathbb{E}_8} = 120.$$

Teorema 5.2.4. *Sejam $\vec{\Delta}$ um quiver do tipo Dynkin e A uma álgebra hereditária por partes de tipo $\vec{\Delta}$, ou seja, $D^b(A) \cong D^b(\mathbb{K}\vec{\Delta})$. Então A é APR-inclinada iterada de tipo $\vec{\Delta}$.*

Demonstração. Pela proposição 4.2.2, há em $\text{mod}A$ um módulo simples projetivo e não injetivo S , e portanto, um módulo APR-inclinante $M(S)$. Desta forma pode-se obter a álgebra $B = \text{End}M(S)$ que, pelo corolário 5.1.19, também é hereditária por partes de tipo $\vec{\Delta}$.

Sendo $M(S)$ um módulo APR-inclinante, pelo teorema 4.2.3, o par de torção $(\mathcal{T}(M(S)), \mathcal{F}(M(S)))$ é cindido. Logo, usando as proposições 2.8.3 e 4.1.13, temos que:

$$r_{\vec{\Delta}} \geq n(B) \geq n(A).$$

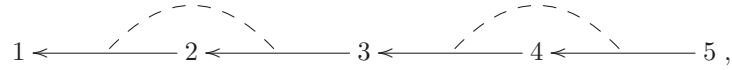
Sabemos que B é de tipo de representação finito, logo, pelo corolário 4.2.4, temos a desigualdade estrita $n(B) > n(A)$ se, e somente se, $\text{id}_A S > 1$.

Se A é uma álgebra hereditária, não há o que provar; caso contrário, a dimensão global de A é maior que 1, ou seja, existe algum A -módulo simples com dimensão injetiva maior que 1. Porém não há garantias de que este módulo seja o módulo projetivo S a partir do qual é obtido o módulo APR-inclinante $M(S)$. Neste caso existe uma sequência finita de triplas $(A_i, M_i, A_{i+1} = \text{End}M_i)_{0 \leq i \leq k}$, em que $A_0 = A$, A_i e A_{i+1} são álgebras hereditárias por partes de tipo $\vec{\Delta}$ para cada i e cada M_i é um módulo APR-inclinante, além disso, $n(A_k) > n(A_{k-1})$, ou seja, com finitos processos APR-inclinante obtemos uma álgebra cujo número de classes de isomorfismos de módulos indecomponíveis é estritamente maior que o de A (ver prova do Teorema 4.15, p.126 de [14]).

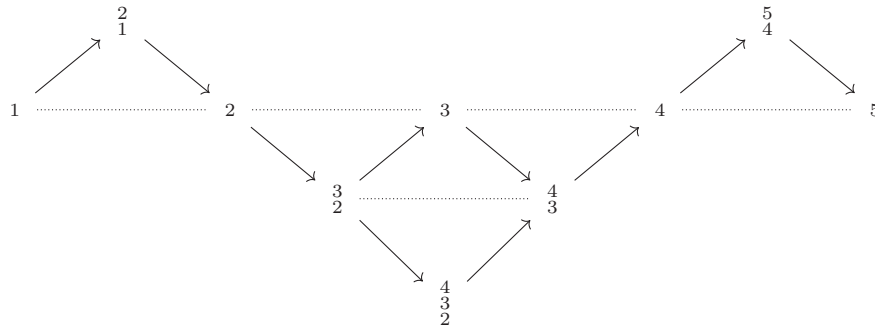
Repetindo este processo, se necessário, pode-se obter uma álgebra C com categoria de módulos derivadamente equivalente a de A tal que $r_{\vec{\Delta}} = n(C) \geq n(A)$. Como $r_{\vec{\Delta}}$ é um limitante superior para o número de classes de isomorfismos de módulos indecomponíveis sobre as álgebras em questão, não é possível, a partir da álgebra C , continuar este processo. Logo todo módulo simples sobre C possui dimensão injetiva menor ou igual a 1, donde $\text{gl.dim}C \leq 1$ e portanto C é hereditária. Isso conclui a prova de que A , nas condições acima, é APR-inclinada iterada de tipo $\vec{\Delta}$. \square

Para ilustrar esta propriedade das álgebras hereditárias por partes do tipo Dynkin, retomamos a álgebra do exemplo 5.1.4. Já sabemos que esta álgebra é inclinada iterada do tipo \mathbb{A}_5 , e por ser Dynkin, o teorema 5.2.4 garante que também será APR-inclinada iterada do tipo \mathbb{A}_5 . Apresentamos abaixo a construção das álgebras e módulos APR-inclinentes que provam tal propriedade.

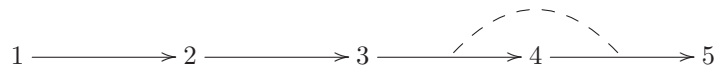
Exemplo 5.2.5. Dado o quiver (com relações)



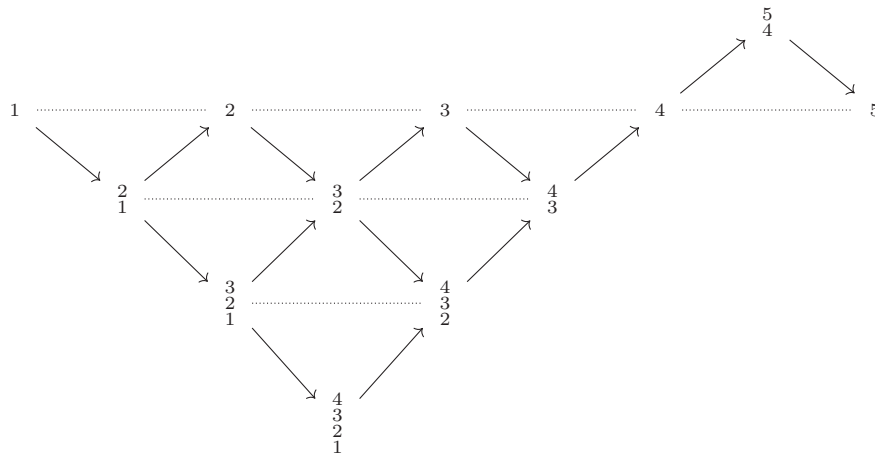
seja B a \mathbb{K} -álgebra de caminhos associada. Então o quiver de Auslander-Reiten da álgebra B é da forma:



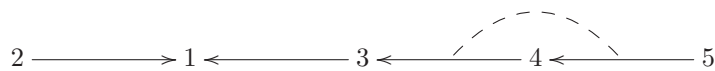
Podemos ver que o único B -módulo APR-inclinante é $T_1 = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus 2 \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix}$. Assim, obtemos a álgebra $\text{End}T_1$ que é isomorfa a álgebra de caminhos do quiver com relações



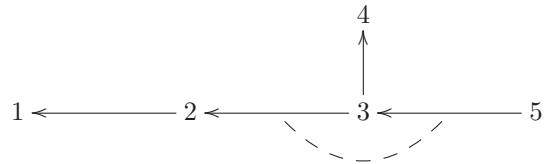
e, portanto, não é uma álgebra hereditária. O quiver de Auslander-Reiten da álgebra $\text{End}T_1$ é da forma:



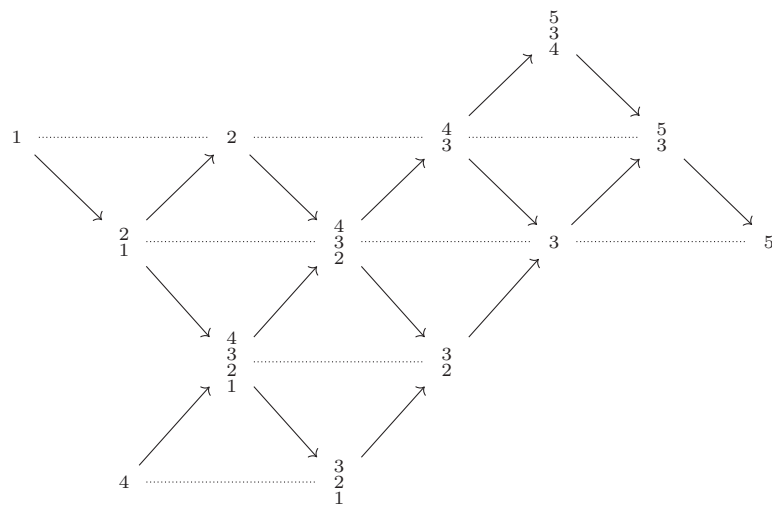
Novamente temos apenas um módulo APR-inclinante, dado por $T_2 = 2 \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix}$. A álgebra de endomorfismos $\text{End}T_2$ é isomorfa a álgebra de caminhos de



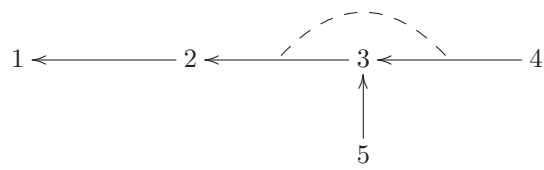
portanto, não é hereditária. O quiver de Auslander-Reiten desta álgebra é da forma



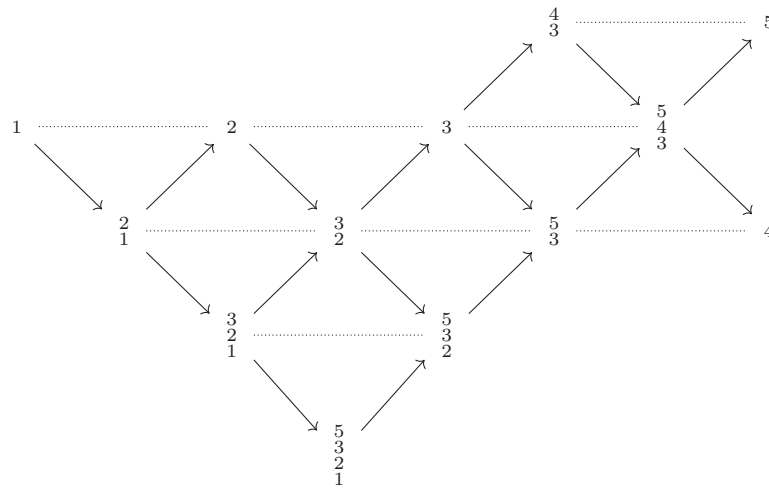
cujo quiver de Auslander-Reiten é da forma



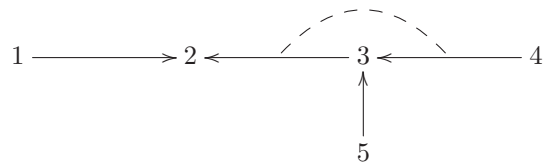
Novamente temos dois módulos APR-inclinantes que podem ser escolhidos para construir a nova álgebra. Seguiremos com o módulo $T_5 = 1 \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{smallmatrix}$. A álgebra $\text{End}T_5$ é isomorfa a álgebra de caminhos do quiver:



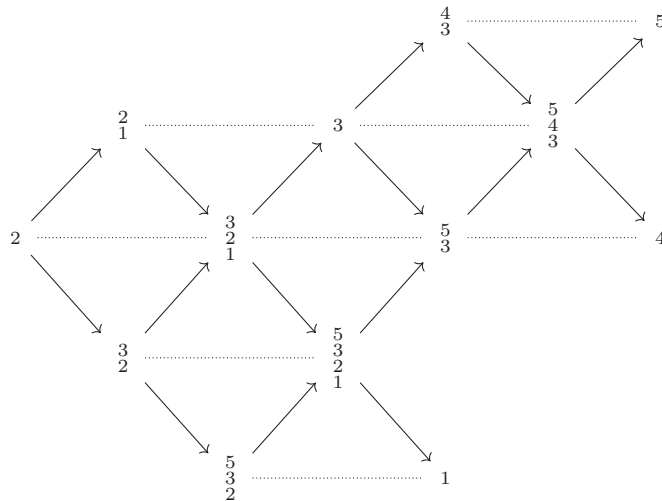
e, portanto, não é hereditária. Prossequimos encontrando o quiver de Auslander-Reiten desta álgebra, que é apresentado a seguir.



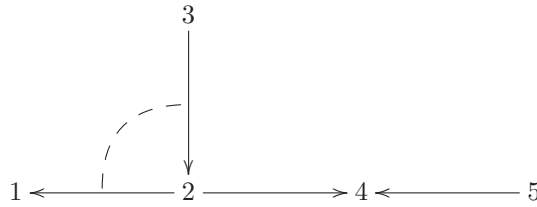
Existe apenas um módulo APR-inclinante, o módulo $T_6 = 2 \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}$. Tal módulo nos dá uma álgebra de endomorfismos $\text{End}T_6$ isomorfa a álgebra de caminhos do quiver



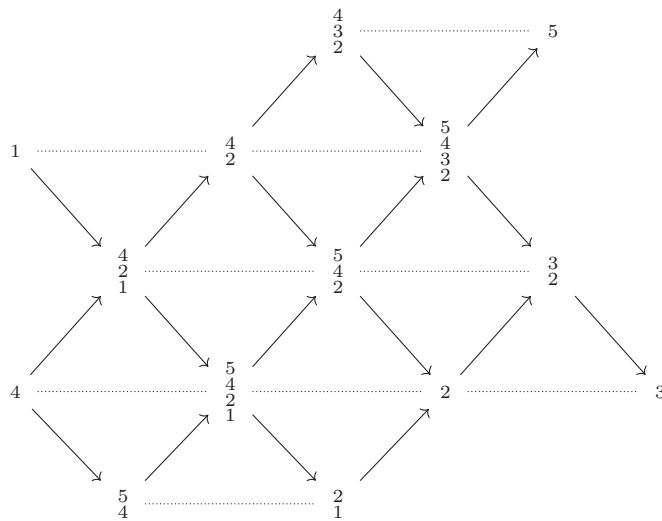
que ainda não é hereditária e tem o quiver de Auslander-Reiten da forma apresentada abaixo.



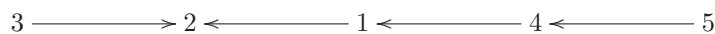
Há apenas uma opção de módulo APR-inclinante para seguir o processo. Com o módulo $T_7 = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}$, obtemos a álgebra $\text{End}T_7$ isomorfa a álgebra do quiver com relações a seguir.



Tal quiver possui relações, logo a álgebra de caminhos associada não é hereditária. Esta álgebra tem quiver de Auslander-Reiten dado por:



Novamente temos duas opções para a escolha de um módulo APR-inclinante. Escolhendo o módulo $T_8 = \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus 4 \oplus \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}$ temos a álgebra $\text{End}T_8$ que é isomorfa a álgebra de caminho do quiver seguinte.



Este quiver não possui relações, logo a álgebra $\text{End}T_8$ é hereditária, encerrando nossas iterações. Isso mostra que a álgebra inicial B , assim como todas as outras que encontramos em cada iteração, é APR-inclinada iterada.

São pertinentes algumas observações sobre o exemplo 5.2.5. Pelos quivers de Auslander-Reiten apresentados, podemos saber quantas classes de isomorfismo de módulos indecomponíveis há na categoria de módulos de cada álgebra construída no exemplo.

Note que a categoria de módulos da álgebra inicial B possui dez classes de isomorfismo de módulos indecomponíveis, mas este número aumenta para doze na categoria de módulos sobre a álgebra $\text{End}T_1$. Este incremento do número de classes de isomorfismo de módulos indecomponíveis aparece na demonstração do teorema 5.2.4. Tal incremento é o que nos permite finalizar a prova, pois sabemos que há um limitante superior para o número de classes de isomorfismo de módulos indecomponíveis na categoria de módulos de uma álgebra hereditária por partes do tipo Dynkin.

Outro fato interessante que pode ser observado no exemplo 5.2.5 é que em certas iterações o número de classes de isomorfismo de módulos indecomponíveis na categoria de módulos não é alterado. Isso ocorre, por exemplo, com as álgebras $\text{End}T_1$, $\text{End}T_2$ e $\text{End}T_3$, que possuem doze classes de isomorfismo de módulos indecomponíveis na categoria de módulos, e com as álgebras $\text{End}T_4$, $\text{End}T_5$ e $\text{End}T_6$, que possuem treze classes de isomorfismo de módulos indecomponíveis na categoria de módulos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALVARES, E. A course on derived categories. *Mini-course notes*, 2014.
- [2] ASSEM, I. *Algèbres et modules: cours et exercices*. Masson, 1997.
- [3] ASSEM, I.; CAPPA, J. A.; PLATZECK, M. I.; VERDECCHIA, M. *Módulos inclinantes y álgebras inclinadas*. Universidad Nacional del Sur. Instituto de Matemática, 2008.
- [4] ASSEM, I.; SKOWRONSKI, A.; SIMSON, D. *Elements of the representation theory of associative algebras: Volume 1: Techniques of representation theory*. Cambridge University Press, 2006. v. 65.
- [5] AUSLANDER, M.; PLATZECK, M. I.; REITEN, I. Coxeter functors without diagrams. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 250, p. 1–46, 1979.
- [6] AUSLANDER, M.; REITEN, I.; SMALO, S. O. *Representation theory of artin algebras*. Cambridge university press, 1997. v. 36.
- [7] BALMER, P. Triangulated categories with several triangulations. *preprint*, 2002.
- [8] CASTONGUAY, D.; ALVARES, E. R.; MEUR, P. L.; PIERIN, T. C. (m, n) -quasitilted and (m, n) -almost hereditary algebras. *arXiv preprint arXiv:1709.07086*, 2017.
- [9] DLAB, V.; GABRIEL, P. *Representation theory i: Proceedings of the workshop on the present trends in representation theory, ottawa, carleton university, august 13-18, 1979*. Springer, 2006. v. 831.
- [10] GABRIEL, P. Unzerlegbare darstellungen i. *Manuscripta mathematica*, v. 6, n. 1, p. 71–103, 1972.
- [11] GELFAND, S. I.; MANIN, Y. I. *Methods of homological algebra*. Springer-Verlag, Berlin, 1996. Translated from the 1988 Russian original.
- [12] GROTHENDIECK, A. The cohomology theory of abstract algebraic varieties. In: . c1958. p. 103–18.
- [13] HAPPEL, D. On the derived category of a finite-dimensional algebra. *Commentarii Mathematici Helvetici*, v. 62, n. 1, p. 339–389, 1987.
- [14] HAPPEL, D. *Triangulated categories in the representation of finite dimensional algebras*. Cambridge University Press, 1988. v. 119.

- [15] HÜGEL, L. A. An introduction to auslander-reiten theory. *Lecture notes, ICTP Trieste*, 2006.
- [16] KLEINER, I. *A history of abstract algebra*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007.
- [17] MILIČIĆ, D. Lectures on derived categories. *Department of Mathematics, University of Utah, Salt Lake City*, 2007.
- [18] MORITA, K. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku, Section A*, v. 6, n. 150, p. 83–142, 1958.
- [19] NOETHER, E. Idealtheorie in ringbereichen. *Mathematische Annalen*, v. 83, n. 1-2, p. 24–66, 1921.
- [20] PIERIN, T. C. Classificação das álgebras de artin a partir dos ext-projetivos na parte direita de suas categorias de módulos. 2011.
- [21] SCHIFFLER, R. *Quiver representations*. Springer, 2014.
- [22] SIMSON, D.; SKOWRONSKI, A. Representation-infinite tilted algebras, volume 3 of elements of the representation theory of associative algebras, 2007.