



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

GREANDA IZABELI MENEZES DA SILVA

ESTIMATIVA DA DISPERSÃO LONGITUDINAL EM RIOS BRASILEIROS A PARTIR
DE RELAÇÕES GEOMÉTRICAS DE CANAIS

CURITIBA

2023

GREENDA IZABELI MENEZES DA SILVA

ESTIMATIVA DA DISPERSÃO LONGITUDINAL EM RIOS BRASILEIROS A PARTIR
DE RELAÇÕES GEOMÉTRICAS DE CANAIS

Trabalho apresentado como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Ambiental no curso de Engenharia Ambiental do Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Michael Mannich

CURITIBA

2023



TERMO DE APROVAÇÃO DE PROJETO FINAL


GRENDA IZABELI MENEZES DA SILVA

ESTIMATIVA DA DISPERSÃO LONGITUDINAL EM RIOS BRASILEIROS A PARTIR DE RELAÇÕES GEOMÉTRICAS DE CANAIS

Projeto Final de Curso, aprovado como requisito parcial para a obtenção do Diploma de Bacharel em Engenharia Ambiental no Curso de Graduação em Engenharia Ambiental do Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná, com nota 10, pela seguinte banca examinadora:

Orientador(a): 
Michael Mannich
Departamento de Engenharia Ambiental / UFPR

Membro(a) 1: 
Tobias Bleninger
Departamento de Engenharia Ambiental / UFPR

Membro(a) 2: 
Maurício Felga Gobbi
Departamento de Engenharia Ambiental / UFPR

Curitiba, 06 de dezembro de 2023

AGRADECIMENTOS

Alcançar este estágio da minha jornada só foi possível graças às pessoas incríveis que caminharam ao meu lado, inspirando-me e oferecendo apoio a cada passo que dei. A todos vocês, expresso minha sincera gratidão.

À minha vó Tereza Menezes e minha mãe Suzana Menezes, por sempre confiarem em mim e terem me dado tanto suporte e encorajamento quando decidi me aventurar em uma nova cidade sozinha, pelos áudios longos diários, as broncas necessárias, e por serem minha maior inspiração de mulheres fortes apesar das adversidades da vida.

Aos meus irmãos, Idia Menezes, Ícaro Menezes e Ana Paula, por serem fontes constantes de admiração e por me transmitirem, desde os primeiros auxílios nas tarefas escolares, a importância da busca pelo conhecimento. Agradeço por todo acolhimento, pelas vibrações positivas em minhas conquistas e por terem contribuído para criar o ambiente amoroso no qual cresci, moldando a pessoa que me tornei.

Às minhas amigas de longa data, Juliana Bueno e Vitória Rosa, por me acompanharem desde o período pré-universitário e por sempre participarem ativamente da minha vida, oferecendo conselhos e apoio em diferentes fases, mesmo quando distantes.

Aos amigos que fiz durante a graduação, em especial para minha amiga Rafaella Schmidt, que tornou os dias frios e cinzentos curitibanos mais acolhedores e alegres desde o início, e a Karollyn Quadros e Laura Figueiredo, que foram as melhores companhias, tanto dentro quanto fora da faculdade, tornando os momentos bons e ruins mais leves e divertidos, especialmente durante os almoços no RU.

Ao meu parceiro Victor Augusto, por ter me acompanhado durante toda a minha trajetória acadêmica, sempre me acolhendo com apoio e carinho nos momentos difíceis.

Aos professores do Departamento de Engenharia Ambiental da UFPR pelos valiosos ensinamentos ao longo da minha formação, em especial o meu orientador, Michael Mannich, que foi um excelente guia, tutor e professor desde o meu segundo ano da graduação, introduzindo-me ao fascinante universo dos recursos hídricos, sempre transmitindo seus conhecimentos de maneira empolgante e clara, demonstrando sua paixão pelo ensino.

Aos meus supervisores de estágio, Paula Wessling e João Paulo Saboia, por compartilharem conhecimentos e ensinamentos fundamentais que contribuíram

significativamente para o meu desenvolvimento fora do ambiente acadêmico.

E, por fim, agradeço a todas as pessoas que, de maneira invisível, contribuem para a formulação de políticas públicas para a democratização da educação gratuita e de qualidade. Reconheço o papel essencial da educação como um agente de ascensão social, e sou grata por poder usufruir dessas políticas e conseguir chegar até aqui.

Muito obrigada.

*“Se as coisas são inatingíveis... ora!
Não é motivo para não querê-las...
Que tristes os caminhos, se não fora
A presença distante das estrelas!”
(Mario Quintana)*

RESUMO

A preservação dos recursos hídricos é uma preocupação crescente devido aos efeitos prejudiciais da poluição nos ecossistemas aquáticos e à crescente escassez de água. A poluição por poluentes químicos, transportados pelos rios, impacta negativamente a saúde humana, a biodiversidade e os usos múltiplos da água. O estudo do transporte de substâncias em cursos d'água é essencial, mas complexo, devido à natureza heterogênea de cada rio. Nesse contexto, faz-se necessário a compreensão e previsão da dispersão longitudinal de poluentes em rios, a partir de análises abrangentes da dispersão e advecção para entender a dinâmica do transporte desses poluentes, sem ser necessário trabalhosas medições in situ. Este estudo teve como objetivo a análise e aprimoramento de uma equação analítica de coeficiente de dispersão longitudinal desenvolvida por Deng, Singh e Bengtsson, baseada na integral tripla de Fischer. Foi desconsiderada a simplificação feita por Deng, Singh e Bengtsson, que $\beta = \ln(B/H)$, e utilizados os parâmetros de forma (β) de rios brasileiros, obtidos por Perez et al.. Uma base de estudos de medição de D_L em rios brasileiros foi montada, e obtidos os β reais dos rios medidos, a partir da localização geográfica. Foram separados dois conjuntos de dados, o conjunto A, para β nos rios originais, e conjunto B que é a soma do conjunto A com β do rio mais próximo. A comparação dos β obtidos por Perez et al. em relação à simplificação feita por Deng, Singh e Bengtsson, retornou uma correlação (r) e erro médio absoluto ($MAPE$) de $-0,0189$ e $77,61\%$, respectivamente, indicando que a simplificação não se confirma. A análise comparativa entre a nova equação e as propostas por Deng, Singh e Bengtsson; Seo e Cheong; Kashefipour e Falconer, e Ribeiro et al. revelaram, para o conjunto A, uma correlação baixa de $0,401$. Contudo, destacou-se também uma baixa razão de discrepância (R_d) de $0,390$, além de um reduzido erro quadrático médio ($RMSE$) de $49,157$ e índice de erro médio absoluto ($MAPE$) inferior ao observado nas outras equações. O conjunto B, por sua vez, apresentou um coeficiente de correlação mais elevado, atingindo $0,757$, e manteve valores reduzidos para R_d , $RMSE$ e $MAPE$, registrando $-0,218$; $22,524$ e $183,627$, respectivamente. Embora a equação proposta tenha demonstrado um desempenho inferior à equação de Ribeiro et al quando comparada à equação base de Deng, Singh e Bengtsson, evidenciou uma melhoria, indicando a importância do parâmetro β nesse contexto. É relevante considerar que a obtenção dos valores de β em trechos não exatos dos rios de medição pode ter impactado, contribuindo para maiores erros e imprecisões, sugerindo a necessidade de futuros estudos com medições mais precisas em rios de maior extensão e em diversas regiões.

Palavras-chaves: recursos hídricos; dispersão longitudinal; coeficiente de dispersão, equação analítica; rios brasileiros.

ABSTRACT

The preservation of water resources is a growing concern due to the detrimental effects of pollution on aquatic ecosystems and the increasing water scarcity. Pollution from chemical pollutants transported by rivers negatively impacts human health, biodiversity, and multiple water uses. The study of substance transport in watercourses is essential but complex due to the heterogeneous nature of each river. In this context, it is necessary to understand and predict the longitudinal dispersion of pollutants in rivers through comprehensive analyses of dispersion and advection to grasp the dynamics of pollutant transport without the need for laborious measurements. This study aimed to analyze and improve an analytical equation for longitudinal dispersion coefficient developed by Deng, Singh, and Bengtsson, based on Fischer's triple integral. The simplification made by Deng, Singh, and Bengtsson, $\beta = \ln(B/H)$, was disregarded, and the shape parameters (β) of Brazilian rivers, obtained by Perez et al., were used. A database of longitudinal dispersion measurements in Brazilian rivers was assembled, and the real β values of the measured rivers were obtained based on their geographical locations. Two datasets were separated: Dataset A for β in the original rivers and Dataset B, which is the sum of Dataset A and the β values of the nearest river. The comparison of β values obtained by Perez et al. with the simplification made by Deng, Singh, and Bengtsson resulted in a correlation (r) and mean absolute percentage error ($MAPE$) of $-0,0189$ and $77,61\%$, respectively, indicating that the simplification is not confirmed. Comparative analysis between the new equation and those proposed by Deng, Singh, and Bengtsson; Seo and Cheong; Kashfipour and Falconer, and Ribeiro et al., revealed a low correlation of $0,401$ for Dataset A. However, it also highlighted a low discrepancy ratio (R_d) of $0,390$, along with a reduced root mean square error ($RMSE$) of $49,157$ and a mean absolute percentage error ($MAPE$) lower than observed in other equations. Dataset B, on the other hand, showed a higher correlation coefficient, reaching $0,757$, and maintained reduced values for R_d , $RMSE$, and $MAPE$, recording $-0,218$, $22,524$, and $183,627$, respectively. Although the proposed equation demonstrated inferior performance compared to Ribeiro et al. equation, when compared to Deng, Singh, and Bengtsson's base equation, it showed improvement, indicating the importance of the β parameter in this context. It is relevant to consider that obtaining β values in nonexact river sections may have impacted the results, contributing to greater errors and inaccuracies, suggesting the need for future studies with more precise measurements in longer rivers and different regions.

Key-words: water resources; longitudinal dispersion; dispersion coefficient, analytical equation; Brazilian rivers.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – Representação da medição de coeficiente de dispersão longitudinal a partir de lançamento de traçador	18
FIGURA 2 – Forma parabólica de um canal e as variáveis envolvidas. (FONTE: Deng, Singh e Bengtsson (2001))	20
FIGURA 3 – Relação de β para diferentes formas.	21
FIGURA 4 – Relação de D_L medido e estimado pela equação 3.19. A escala de cores representa a diferença percentual absoluta e a linha pontilhada uma reta da relação 1:1.	31
FIGURA 5 – Relação de B , H e β	32
FIGURA 6 – Relação de β e (B/H) para dados de Perez et al. (2021) e a equação $\beta = \ln(B/H)$, proposta por Deng, Singh e Bengtsson (2001)	32
FIGURA 7 – Comparação das características morfológicas dos rios para Largura (Figura A), Profundidade (Figura B) e a razão de Largura por Profundidade (Figura C).	34
FIGURA 8 – Relação de B/H e β com α (A) e R/H (B)	36
FIGURA 9 – Ajuste e resultados da integral tripla da equação 5.5	38
FIGURA 10 – Mapa de rios de medição de D_L , e β obtidos por Perez et al. (2021)	40
FIGURA 11 – Comparação dos valores de D_L medidos e estimados, para o conjunto A	42
FIGURA 12 – Comparação dos valores de D_L medidos e estimados, para o conjunto B	43
FIGURA 13 – Comparação dos percentuais de diferença absoluta dos valores de D_L estimados, para o conjunto A, em ordem crescente de D_L	44
FIGURA 14 – Comparação dos percentuais de diferença absoluta dos valores de D_L estimados, para o conjunto B	45
FIGURA 15 – Frequência das razões de discrepância dos valores de D_L estimados, para o conjunto A	46
FIGURA 16 – Frequência das razões de discrepância dos valores de D_L estimados, para o conjunto B	46
FIGURA 17 – Relação dos valores calculados com a razão B/H para o conjunto B	48

LISTA DE SÍMBOLOS

D_L	Coeficiente de dispersão longitudinal
A	Área da seção transversal
U	Velocidade média da seção
u'	Desvio da velocidade média na profundidade local
u	Velocidade média local
u_*	Velocidade de cisalhamento
ε_t	Coeficiente de difusão turbulenta transversal local
h	Profundidade local do canal
B	Largura do canal
b	Metade da largura do canal
H_c	Profundidade máxima no centro do canal
H	Profundidade média do canal
β	Parâmetro de forma do canal
y	Coordenada lateral
z	Coordenada vertical
S	Declividade média
n	Coeficiente de rugosidade de Manning
R	Raio hidráulico
α	Coeficiente de correção da diferença entre a altura e o raio hidráulico
I	Valor da integral tripla
ξ	Valor adimensional da relação y/b

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	OBJETIVOS	14
2.1	OBJETIVO GERAL	14
2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	14
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	15
3.1	RELAÇÃO GEOMÉTRICA DE CANAIS	15
3.2	COEFICIENTE DE DISPERSÃO LONGITUDINAL	16
3.2.1	Definição	16
3.2.2	Determinação de D_L	18
3.2.3	Solução analítica de coeficiente de dispersão longitudinal em rios retilíneos	19
3.2.4	Equações encontradas na literatura	22
4	MATERIAL E MÉTODOS	25
4.1	DADOS EXPERIMENTAIS DE D_L	25
4.2	APRIMORAMENTO DA EQUAÇÃO DE DENG, SINGH E BENGTSSON	25
4.3	COMPARAÇÃO DA EQUAÇÃO COM DADOS EXPERIMENTAIS	26
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO	28
5.1	ELABORAÇÃO DE UM BANCO DE DADOS NACIONAL DE D_L	28
5.2	PARÂMETRO β	32
5.2.1	Comparação de largura e profundidade	33
5.3	PROPOSIÇÃO DE UMA NOVA EQUAÇÃO PARA D_L	34
5.3.1	Determinação de α por Deng, Singh e Bengtsson	35
5.3.2	Solução da integral tripla	37
5.3.3	Equação final	39
5.3.4	Validação	39
5.3.5	Limitações	48
6	CONCLUSÃO	50
	REFERÊNCIAS	51

APÊNDICES		55
APÊNDICE A	DEFINIÇÃO DE α	56
APÊNDICE B	DEFINIÇÃO DE α COM RAIOS HIDRÁULICOS	57

1 INTRODUÇÃO

A preservação dos recursos hídricos tem se tornado uma preocupação crescente na contemporaneidade, impulsionada pelos efeitos prejudiciais da poluição nos ecossistemas aquáticos e o aumento da escassez hídrica. Dentre as fontes de poluição mais significativas, destacam-se os poluentes químicos, os quais podem ser transportados pelos rios e causar impactos negativos em diversas áreas de interesse, como a saúde humana, a biodiversidade e os usos múltiplos da água (MORAES; JORDÃO, 2002).

A compreensão e identificação das variações espaciais e temporais dos poluentes é crucial para o controle e a proteção da qualidade da água, fornecendo subsídios para o desenvolvimento de estratégias de gestão e controle eficazes. A recuperação de rios ou riachos poluídos por cargas contaminantes não é imediata, uma vez que ocorre ao longo de grandes distâncias e longos períodos antes que a diluição ou mistura esteja completa, atenuando parcialmente o efeito deletério. Neste contexto, o estudo de mistura e transporte de substâncias em cursos d'água torna-se essencial. Porém ele é desafiador, devido à natureza peculiar e heterogênea de cada rio, pois há mudanças de fluxos, geometrias e características físico-químicas que influenciam diretamente na retenção, sedimentação e recuperação do rio em resposta à contaminação (TENEBE et al., 2016).

Análises abrangentes da dispersão e advecção são essenciais para entender a dinâmica do transporte de poluentes. A dispersão é um processo que envolve a mistura e disseminação de contaminantes em corpos d'água, resultante da combinação de mistura turbulenta, difusão molecular e mistura devido ao cisalhamento vertical e transversal. Embora a advecção seja o principal mecanismo de transporte de poluentes em rios devido à velocidade da água, em determinadas condições locais, como em grandes rios, a importância relativa da dispersão pode se tornar significativa, especialmente quando a velocidade da água diminui. Nessas condições de baixa velocidade a dispersão longitudinal em rios é de suma importância, pois desempenha um papel mais relevante na propagação de poluentes em comparação com a dispersão transversal (BENEDINI et al., 2013).

Dentre os pioneiros na área de estudos de dispersão de poluentes em rios, destaca-se Fischer (1979), que contribuiu significativamente com uma equação que descreve o processo advecção-difusão e uma expressão de integral tripla para calcular o coeficiente de dispersão longitudinal, que estabelece uma relação matemática entre os principais fatores que influenciam a dispersão longitudinal de poluentes em rios, tais como a velocidade média do escoamento, área, profundidade e coeficiente de mistura

transversal (ZENG; HUAI, 2014; RAMEZANI et al., 2019).

Realizar medição da dispersão longitudinal em rios pode se tornar uma tarefa desafiadora ao ser executada *in situ*, uma vez que demanda instrumentação adequada, boas condições meteorológicas e presença de escoamento permanente, o que restringe e complica o processo de medição. Nesse contexto, uma abordagem frequentemente adotada é a utilização de equações paramétricas que levam em consideração as características hidráulicas do canal (RIBEIRO et al., 2010). Essas equações proporcionam uma solução prática e amplamente empregada para estimar o coeficiente de dispersão longitudinal.

O objetivo deste estudo é analisar uma equação analítica de coeficiente de dispersão longitudinal para substâncias dissolvidas, desenvolvida por Deng, Singh e Bengtsson (2001), baseada em Fischer (1979) usando relações geomorfológicas de rios do Estados Unidos. Essa equação foi estabelecida para rios retos e foi comparada com dados de medição da literatura. Neste sentido, este estudo se baseará nos artigos de Perez et al. (2021) e Deng, Singh e Bengtsson (2001), buscando inspiração para aprimorar a equação desenvolvida e aplicá-la às características dos rios brasileiros, removendo algumas simplificações, a fim de avaliar sua eficácia e utilidade para prognósticos futuros.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

Desenvolver uma equação para estimativa do coeficiente de dispersão longitudinal (D_L) fundamentada em relações geométricas de canais para rios brasileiros.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Elaborar um banco de dados de coeficientes de dispersão longitudinal obtidos experimentalmente em rios brasileiros, extraídos de publicações científicas, dissertações, teses e relatórios técnicos;
2. Aprimorar e desenvolver uma equação para estimativa do coeficiente de dispersão longitudinal fundamentado em relações geométricas de canais derivada de Deng, Singh e Bengtsson (2001) e Perez et al. (2021) ;
3. Comparar e verificar as diferenças entre a nova equação desenvolvida e os dados de D_L para rios brasileiros, em relação à equação de Deng, Singh e Bengtsson (2001) e outras equações empíricas disponíveis na literatura;

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo aborda os aspectos fundamentais desta pesquisa, que incluem; (i) uma descrição sucinta dos conceitos de relações hidráulicas de canais baseadas na vazão de rios, (ii) definição do coeficiente de dispersão longitudinal, e (iii) o detalhamento do desenvolvimento de uma equação para estimativa do D_L fundamentada em Deng, Singh e Bengtsson (2001) destacando os aspectos que são objeto de aprimoramento.

3.1 RELAÇÃO GEOMÉTRICA DE CANAIS

A morfologia dos rios desempenha um papel crucial no processo de dispersão longitudinal, uma vez que afeta as características hidráulicas e geométricas do escoamento, impactando diretamente a mistura longitudinal de substâncias. Diversos parâmetros morfométricos, como largura, profundidade, declividade, sinuosidade, rugosidade e forma do canal, são utilizados para descrever a morfologia dos rios (GOND et al., 2021). Esses parâmetros determinam propriedades do escoamento, como vazão, velocidade média, número de Reynolds, número de Froude e número de Schmidt. Tais medidas podem ser empregadas na estimativa do coeficiente de dispersão longitudinal por meio de fórmulas empíricas ou métodos analíticos. Portanto, compreender a morfologia dos rios pode contribuir para obtenção do coeficiente de dispersão longitudinal e previsão do comportamento de poluentes em cursos de água naturais.

Nesse contexto, a teoria da geometria hidráulica é uma estratégia para relacionar como a medição quantitativa dos fatores hidráulicos influenciam a forma dos canais dos cursos d'água naturais. Essa teoria descreve como esses fatores variam com a vazão, tipicamente utilizando funções do tipo potência ($y = ax^b$) (LEOPOLD; MADDOCK, 1953). A importância da geometria hidráulica reside no fato de que a vazão é o principal agente modificador dos canais, e a interação entre as forças do escoamento e a resistência dos materiais aluviais determina o equilíbrio entre a erosão e a deposição de sedimentos nos rios. Adicionalmente, o entendimento da geometria hidráulica é fundamental para a compreensão da evolução da rede de canais, permitindo a integração dos canais com a hidrologia e a geomorfologia da bacia hidrográfica (GRISON; KOBAYAMA, 2011). Algumas das principais funções tipo potência descritas são dadas na forma

$$B = aQ^f, \quad (3.1)$$

$$H = cQ^d, \quad (3.2)$$

em que B , H e Q são largura, profundidade e vazão, respectivamente, enquanto a , c , d e f , são parâmetros de ajuste empíricos.

Perez et al. (2021) investigou as características morfométricas e hidráulicas de 481 estações fluviométricas de rios brasileiros, utilizando dados de séries históricas disponibilizados no software HidroAPP. O objetivo foi aplicar a teoria da geometria hidráulica para caracterizar as seções e definir o formato de uma seção por meio da seção de margens plenas e assim analisar a relação entre a forma e o tamanho dos rios, e seu comportamento hidrológico, especialmente em termos de vazão e velocidade da água. Os pesquisadores relacionaram as variáveis hidráulicas (largura, profundidade e velocidade) com a vazão em uma seção transversal de um rio. Desta forma, ajustaram, para cada seção, uma curva de potência para cada variável hidráulica em função da vazão e obtiveram os expoentes que indicam a sensibilidade de cada variável à mudança da vazão. Foi também avaliado o formato da seção transversão do rio, classificado como parabólico, trapezoidal, retangular e triangular. Eles encontraram que as seções em formato parabólico foram as mais frequentes e que a maioria dos rios apresenta maior estabilidade das margens que do leito, sendo a largura a variável menos sensível à oscilações na vazão. Concluíram que os rios brasileiros exibem uma ampla diversidade morfológica e hidráulica, mas ainda necessita de estudos relacionados à influência do clima, geologia e regionalização.

3.2 COEFICIENTE DE DISPERSÃO LONGITUDINAL

3.2.1 Definição

A partir do fluxo de massa de soluto em um escoamento turbulento, com uma velocidade média predominantemente longitudinal, a aplicação do princípio da conservação da massa conduz à equação de transporte (3.3).

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = D \left[\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right], \quad (3.3)$$

Para analisar os impactos do transporte turbulento, as grandezas instantâneas são substituídas pela sobreposição de flutuações turbulentas a seus valores médios temporais. A equação geral de difusão de um soluto, considerando o fluxo apenas na direção x , é apresentada na equação 3.4.

$$\frac{\partial(\bar{C} + C')}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial(\bar{C} + C')}{\partial x} = D \left[\frac{\partial^2(\bar{C} + C')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C'}{\partial y^2} \right], \quad (3.4)$$

em que C é a concentração ; u' e c' são as flutuações de velocidade e concentração, respectivamente; \bar{u} e \bar{C} são velocidade média e concentração média, respectivamente, e D é o coeficiente de difusão molecular.

Com base na equação 3.4 e nas soluções de Taylor, Fischer (1979) identificou que o transporte total de massa na direção do escoamento é proporcional ao gradiente de concentração nessa direção. Essa observação conduziu à definição do coeficiente de dispersão D_L , em analogia ao coeficiente de dispersão molecular D , levando à formulação da equação

$$D_L = \frac{-1}{hD} \int_0^h u' \int_0^y \int_0^y u' dy dy dy, \quad (3.5)$$

em que o D_L desempenha o mesmo papel para toda a seção transversal que o D , em escala microscópica.

Embora a equação 3.5 tenha sido desenvolvida para descrever escoamentos laminares, é possível estendê-la para incluir escoamentos turbulentos mediante a introdução do coeficiente de difusão transversal ε_t , resultando na equação 3.6.

$$D_L = \frac{-1}{h} \int_0^h u' \int_0^y \frac{1}{\varepsilon_t} \int_0^y u' dy dy dy \quad (3.6)$$

A partir dessas relações, desenvolveu-se a equação de advecção-dispersão unidimensional, que deriva da simplificação matemática da equação de transporte de solutos. A formulação engloba tanto o transporte advectivo, via corrente, quanto o transporte difusivo (dispersão molecular ou turbulenta) de uma substância em um fluxo de fluido (DEVENS; BARBOSA JÚNIOR; SILVA, 2006). Essa equação, largamente empregada em pesquisas ambientais e hidrológicas, pode ser expressa de maneira geral como

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -U \frac{\partial C}{\partial x} + D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (3.7)$$

em que $\frac{\partial C}{\partial t}$ representa a taxa de variação da concentração da substância em relação ao tempo, U é a velocidade do fluido na direção predominante constante, $\frac{\partial C}{\partial x}$ é a taxa de variação espacial da concentração, e D_L é o coeficiente de dispersão longitudinal (m^2/s).

Desta forma, coeficiente de dispersão longitudinal D_L , é um parâmetro empregado para caracterizar o fenômeno de dispersão de uma substância em um escoamento, ao longo de uma direção predominante, como a corrente de um rio ou a movimentação em um aquífero (SABERI-MOVAHED; NAJAFZADEH; MEHRPOOYA, 2020). Fischer (1979) propôs formulações que abrangem dispersão em outras dimensões, contudo, após a completa mistura do traçador na seção transversal, a variação mais significativa

da concentração passa a ocorrer longitudinalmente. Isso confere ao coeficiente de dispersão longitudinal uma maior relevância em estudos de dispersão em rios.

3.2.2 Determinação de D_L

Existem diferentes métodos para determinar o valor do coeficiente de dispersão longitudinal, sendo classificados em diretos e indiretos. Os métodos de cálculo direto comumente utilizados são o método do momento e o de propagação. Ambos fazem o uso de traçadores, que são substâncias não reativas e facilmente mensuráveis introduzidas no meio fluido (OLIVEIRA et al., 2017). Essa substância é injetada de forma instantânea ou contínua em um ponto específico do curso d'água e a concentração é monitorada ao longo do tempo em alguns pontos, após a zona de mistura, ao longo da direção do escoamento (Figura 1), permitindo a estimativa do efeito de dispersão por meio de ferramentas estatísticas e análise da curva de chegada, que indica o quanto rapidamente o traçador se mistura no rio (JÚNIOR et al., 2005).

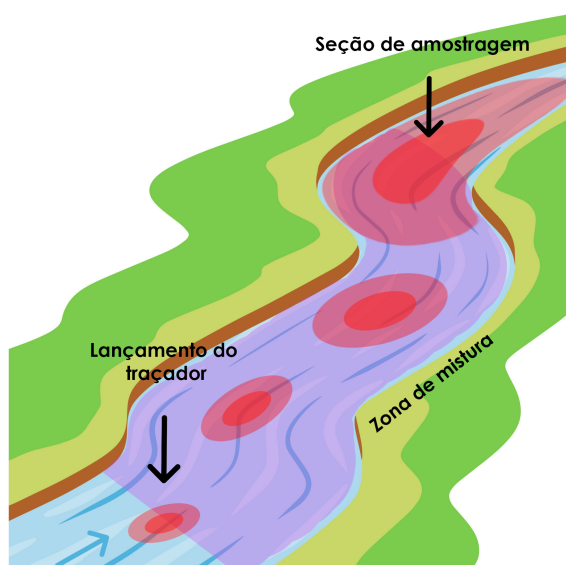


FIGURA 1 – Representação da medição de coeficiente de dispersão longitudinal a partir de lançamento de traçador

O método dos momentos se baseia na análise estatística das concentrações medidas em seções transversais do rio em diferentes instantes, provendo informações sobre a média e a variância da concentração do traçador ao longo do tempo em cada seção e fornecendo uma visão mais geral da dispersão longitudinal, é particularmente útil para avaliar a dispersão em grandes escalas, como trechos longos de rios ou bacias hidrográficas inteiras. Por outro lado, o método da propagação utiliza as medições da concentração em diferentes pontos ao longo do curso d'água para construir as funções de propagação, que descrevem como a concentração se propaga e se dispersa no rio. Esse método permite uma visão mais detalhada e localizada da dispersão,

permitindo melhor compreensão dos padrões espaciais e dos processos hidrodinâmicos envolvidos, sendo adequado para estudos em pequenas escalas, como trechos curtos de rios ou áreas específicas (TENEBE et al., 2016; JÚNIOR et al., 2005).

Já os métodos indiretos envolvem a coleta de dados *in situ*, como medições de velocidade da corrente em diferentes pontos, a largura do canal e a declividade longitudinal do leito do rio, que são combinadas com equações empíricas para estimar o D_L . Esses modelos podem ser baseados em princípios físicos e equações analíticas ou numéricas, que utilizam dados conhecidos, como profundidade, largura, declividade e velocidade do escoamento, para estimar a dispersão longitudinal (SOARES; PINHEIRO; ZUCCO, 2013).

É importante ressaltar que a medição e o cálculo do coeficiente de dispersão longitudinal podem ser influenciados por incertezas e limitações associadas aos métodos utilizados. A escolha adequada do método de medição e cálculo depende das condições específicas do ambiente aquático, da disponibilidade de recursos e dos objetivos da análise hidrodinâmica.

Embora os métodos diretos ofereçam uma precisão maior ao fornecer dados diretamente obtidos no local de interesse, o método indireto possui também vantagens significativas. Como exemplo do uso de modelos matemáticos que evitam os custos associados à realização de ensaios de campo e a necessidade de pessoal técnico qualificado para coletar e analisar os dados. Essa abordagem indireta pode ser particularmente benéfica em termos de custo e acessibilidade, permitindo uma estimativa razoável da dispersão longitudinal em rios sem a necessidade de recursos e infraestrutura extensivos (DEVENS; BARBOSA JÚNIOR; SILVA, 2006). Nesse contexto, Deng, Singh e Bengtsson (2001) aborda uma solução analítica promissora para o cálculo do coeficiente de dispersão longitudinal, fornecendo uma alternativa precisa e eficiente para a avaliação desse parâmetro hidrodinâmico.

3.2.3 Solução analítica de coeficiente de dispersão longitudinal em rios retilíneos

Deng, Singh e Bengtsson (2001) apresentaram um método analítico para determinar o coeficiente de dispersão longitudinal (D_L) em rios naturais usando a expressão de Fischer (1979) na forma de uma integral tripla, como

$$D_L = -\frac{1}{A} \int_0^B hu' \int_0^y \frac{1}{\varepsilon_t h} \int_0^y hu' dy dy dy, \quad (3.8)$$

Assim, nota-se que há três variáveis principais a serem determinadas: o coeficiente de difusão turbulenta transversal local (ε_t), o desvio da velocidade média na profundidade local (u') e a profundidade local (h). Se o campo de velocidade e a seção transversal forem conhecidos é possível estimar D_L com 3.8.

Deng, Singh e Bengtsson (2001) consideraram uma seção transversal parabólica para essa determinação, se baseando na relação de geometria hidráulica para rios estáveis, conforme figura 2.

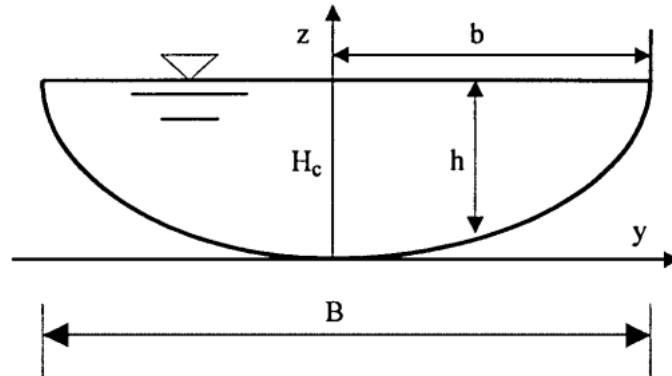


FIGURA 2 – Forma parabólica de um canal e as variáveis envolvidas. (FONTE: Deng, Singh e Bengtsson (2001))

Para rios aluviais retilíneos, uma nova equação de perfil transversal para a forma do canal e a profundidade do escoamento local é derivada por meio da equação tipo potência na forma $h(y) = H_c - py^q$, em que h é a profundidade, H_c é a profundidade máxima no centro do canal, e p e q são parâmetros.

Inicialmente considera-se que quando $h = 0$, $H_c = py^q = pb^q$. Assim, é possível encontrar a profundidade média da seção (H), conforme

$$H = \frac{1}{b} \int_0^b h(y) dy = \frac{1}{b} \left(H_c b - \frac{pb^{q+1}}{q+1} \right). \quad (3.9)$$

Pode-se obter uma relação entre H e H_c como

$$Hb = \left(H_c b - \frac{pb^{q+1}}{q+1} \right), \quad (3.10)$$

$$H = py^q - \frac{pb^q}{q+1} = \frac{qH_c}{q+1}. \quad (3.11)$$

Utilizando as equações 3.1 e 3.2 da teoria da geometria hidráulica, obtêm-se $B = eH^{1/\beta}$, em que $e = a/c^{1/\beta}$ e $\beta = d/f$. Sabendo que $2b = B$, a seguinte relação foi obtida

$$2b = eH^{1/\beta} \quad (3.12)$$

$$(2b)^\beta = e^\beta H = e^\beta \frac{H_c q}{q+1} = e^\beta pb^q \frac{q}{q+1} \quad (3.13)$$

$$2^\beta b^\beta = \frac{e^\beta pq}{q+1} b^q \rightarrow \beta = q \quad (3.14)$$

Retornando a equação inicial da forma geral de $h(y) = H_c - py^q$, substituindo $q = \beta$, tem-se

$$\frac{h(y)}{H_c} = 1 - \frac{py^q}{H_c} = 1 - \frac{py^q}{pb^q} \quad (3.15)$$

$$h(y) = H_c \left(1 - \left(\frac{y}{b} \right)^\beta \right) \quad (3.16)$$

A equação 3.16 relaciona agora um perfil suficientemente amplo e simétrico da seção transversal que pode variar de triangular ($\beta = 1$), parabólico ($\beta = 2$) até retangular ($\beta = \infty$), com o parâmetro β que advém das relações geométricas de canais. A figura 3 ilustra as diferentes formas em função de β .

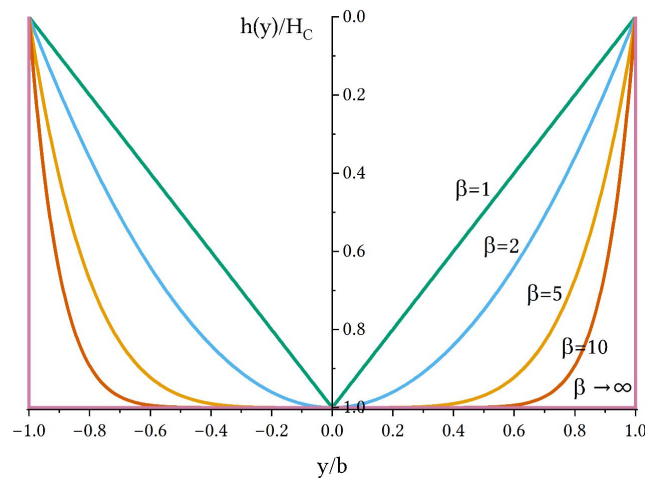


FIGURA 3 – Relação de β para diferentes formas.

A partir da hipótese que para canais largos o raio hidráulico pode ser aproximado pela profundidade média da seção na equação de Manning, Deng, Singh e Bengtsson (2001) considerou a velocidade média como sendo

$$U = \frac{\sqrt{S}}{n} R_h^{2/3} \approx \frac{\sqrt{S}}{n} H^{2/3}. \quad (3.17)$$

Deng, Singh e Bengtsson (2001) considerou a equação de Manning válida também para a velocidade média local (na vertical) para canais com relação $B/H > 10$, de modo que

$$u(y) = \alpha \frac{\sqrt{S}}{n} h(y)^{2/3},$$

em que α é um coeficiente de correção introduzido para representar a diferença entre a altura e o raio hidráulico, considerado único para a seção.

Assim, a distribuição lateral do desvio da velocidade local em relação ao valor médio na seção transversal foi determinada como

$$\begin{aligned}
 u' &= u(y) - U \\
 &= \alpha \frac{\sqrt{S}}{n} h^{2/3} - U \\
 &= \alpha \frac{\sqrt{S}}{n} H^{2/3} \left(\frac{h}{H} \right)^{2/3} - U \\
 &= \left(\alpha \left(\frac{h}{H} \right)^{2/3} - 1 \right) U \\
 u' &= \left[\alpha \left(1 - \left(\frac{y}{b} \right)^\beta \right)^{2/3} \left(\frac{\beta + 1}{\beta} \right)^{2/3} - 1 \right] U
 \end{aligned}$$

Para determinar a equação do coeficiente de mistura transversal Deng, Singh e Bengtsson (2001) somam a equação de coeficiente de difusão turbulenta encontrada por *Rutherford* à equação do coeficiente de dispersão transversal, proposta por um estudo realizado em 11 rios do Estados Unidos que resultou em

$$\varepsilon_t = \underbrace{\left[0,145 + \left(\frac{1}{3.520} \right) \left(\frac{U}{u_*} \right) \left(\frac{B}{H} \right)^{1,38} \right]}_{\varepsilon_{t0}} u_* h. \quad (3.18)$$

Por fim, Deng, Singh e Bengtsson (2001) avaliaram as integrais estabelecendo a relação $\beta = \ln(B/H)$ a fim de ajustar uma curva capaz de relacionar de forma analítica as variáveis. O resultado final foi a expressão

$$\frac{D_L}{H u_*} = \frac{0,15}{8 \varepsilon_{t0}} \left(\frac{B}{H} \right)^{5/3} \left(\frac{U}{u_*} \right)^2. \quad (3.19)$$

Ao comparar com 73 conjuntos de dados de campo e as equações propostas por outros pesquisadores, Deng, Singh e Bengtsson (2001) mostraram que a equação derivada contendo o coeficiente de mistura transversal melhorado prevê o coeficiente de dispersão longitudinal de rios naturais com mais acurácia.

3.2.4 Equações encontradas na literatura

Fan (2013) compilou diversas equações para estimar o coeficiente de dispersão D_L , encontradas na literatura (Tabela 1). Entre as abordagens mais referenciadas nos estudos revisados nesta pesquisa, destaca-se a proposta de Seo e Cheong (1998), que utilizaram ajuste por métodos de multiregressão não linear, e Kashefipour e Falconer

(2002) que desenvolveu uma nova equação a partir de métodos de análise dimensional e de regressão. Ambos validaram suas equações para um conjunto de medições em rios do Estados Unidos.

No contexto nacional, o estudo realizado por Ribeiro et al. (2010) desenvolveu uma solução baseada em análise dimensional e ajustada por regressão linear múltipla aplicada em rios brasileiros, sua validação combinou 4 dados medidos também em rios do Brasil.

TABELA 1 – Equações desenvolvidas por outros autores.

Autores	Equação
Taylor (1954)	$D_L = 10,1 R_H u_*$ (3.20)
Elder (1959)	$D_L = u_* H \alpha_E$ $\alpha_E = 5,93$ (3.21)
Bowie et al. (1985)	$D_L = 14,3(R_H)^{3/2}\sqrt{2} S$ (3.22)
Glover (1964)	$D_L = 500 R_H u_*$ (3.23)
McQuivey e Keefer (1974)	$D_L = 0,058 \frac{Q}{S B}$ (3.24)
Fischer (1975)	$D_L = 0,011 \frac{u^2 B^2}{H U}$ (3.25)
Liu (1977)	$D_L = \beta_L \frac{Q^2}{u_* R_H^3}$ $\beta_L = 0,18 \left(\frac{u_*}{U}\right)^{1,5}$ (3.26)
Devens, Barbosa Júnior e Silva (2010)	$D_L = \beta_{VM} \frac{U^2 B^2}{u_* H}$ (3.27)
Seo e Cheong (1998)	$D_L = 5,915 (H u_*) \left(\frac{B}{H}\right)^{0,62} \left(\frac{U}{u_*}\right)^{1,428}$ (3.28)
Koussis e Rodriguez-Mirasol (1998)	$D_L = \phi \frac{u_* B^2}{H}$ $\phi \approx 0,6$ (3.29)
Kashefipour e Falconer (2002)	$D_L = 10,612 \frac{H U^2}{u_*}$ (3.30)
Devens, Barbosa Júnior e Silva (2006)	$D_L = 0,000355 \frac{U^{-0,793} B^{0,793}}{H^{1,610} S^{0,026}}$ (3.31)
Ribeiro et al. (2010)	$D_L = 7,326 (u_*)^{0,303} (H)^{1,316} (B)^{0,445} (U)^{1,458}$ (3.32)

Essas equações desempenham um papel crucial na estimativa do D_L , uma

vez que estão intrinsecamente ligadas às características hidráulicas e geométricas dos rios. A análise cuidadosa para determinar qual equação melhor se adéqua ao contexto do rio estudado, utilizando os dados disponíveis e considerando as limitações de cada equação, é essencial para uma aplicação eficaz. Muitas dessas equações são obtidas por meio de ajustes aos dados, sendo a equação proposta por Deng, Singh e Bengtsson (2001) notável por sua abordagem analítica e aplicação dos dados.

4 MATERIAL E MÉTODOS

Esta seção aborda as estratégias metodológicas associadas aos objetivos propostos. Inclui a construção de um banco de dados nacional de D_L , a elaboração de uma equação que contemple as características geométricas de canais no Brasil e a comparação com os dados experimentais.

4.1 DADOS EXPERIMENTAIS DE D_L

Foi realizada uma investigação bibliográfica em várias fontes de dados, tais como Web of Science, Scopus e Google Scholar, utilizando as palavras-chave: ("dispersion"OR "transport"OR "diffusion") AND ("coefficient"OR "rate"OR "index") AND ("river*"OR "waterway*"OR "watershed") AND ("Brazil"), e as temáticas: Environmental Science; Water Resources; Geosciences Multidisciplinary; Geography Physical; Engineering Civil; Engineering Environmental; Multidisciplinary Sciences; Physics Multidisciplinary; Engineering Multidisciplinary; Mathematics Interdisciplinary Applications; Physics Particles Fields; Environmental Studies; Computer Science Interdisciplinary Applications; Mathematics Applied; Transportation Science Technology. Foram então selecionados inicialmente pela leitura dos títulos e posteriormente pelos resumos, de artigos, teses e monografias, com o objetivo de obter pesquisas com informações relevantes para estimar o coeficiente de dispersão longitudinal, como velocidade média U , declividade S , área da seção transversal A , largura B e profundidade média H , por meio de estudos conduzidos em corpos hídricos no contexto geográfico do Brasil.

4.2 APRIMORAMENTO DA EQUAÇÃO DE DENG, SINGH E BENGTSSON

Adicionalmente, em conjunto com a revisão, procedeu-se a uma análise minuciosa do artigo fundamental utilizado como base para este projeto, com o intuito de examinar em detalhes todos os procedimentos adotados pelos autores, a fim de compreender plenamente o seu conteúdo e possibilitar a replicação do estudo com as alterações necessárias propostas.

Posteriormente, foi adotada a abordagem proposta por Deng, Singh e Bengtsson (2001) com o objetivo de eliminar a consideração que $\beta = \ln(B/H)$, que foi apresentada em base argumentativa e não fruto de um ajuste de dados empíricos. Buscou-se, desta forma, desvincular a forma do canal da sua dimensão. Para isso, foram realizados os seguintes passos: (I) reavaliar a integral tripla e as etapas subsequentes, a fim de obter uma nova formulação; (II) estabelecer uma relação entre a integral e o coeficiente β das características geomorfológicas dos rios brasileiros,

utilizando a base de dados construída por Perez et al. (2021); (III) e comparar os resultados obtidos com os dados medidos disponíveis nos estudos identificados durante a etapa de revisão.

4.3 COMPARAÇÃO DA EQUAÇÃO COM DADOS EXPERIMENTAIS

Após o aprimoramento da equação ter sido concluído, sua aplicação foi direcionada aos valores medidos em campo, conforme obtidos por meio da revisão. O objetivo foi realizar uma comparação entre os resultados gerados pelo presente estudo e as equações desenvolvidas por Deng, Singh e Bengtsson (2001), Seo e Cheong (1998), Kashefipour e Falconer (2002) e Ribeiro et al. (2010).

Para avaliar e comparar a equação final gerada, foram aplicadas análises estatísticas, como Erro absoluto percentual médio (*MAPE*), Razão de discrepância (*R_d*), Raiz do erro quadrático médio (*RMSE*) e Coeficiente de desempenho (*c*).

A fim de calcular o percentual da diferença absoluta (*APE*) dos valores medidos e calculados, foi aplicada a equação 4.2 para cada dado *i*, em que *O* é o valor observado e *E* o valor estimado.

$$APE_i(\%) = \frac{|O_i - E_i|}{O_i} \cdot 100 \quad (4.1)$$

E depois calculado a média desses valores,

$$MAPE(\%) = \frac{\sum_{i=1}^n APE_i}{n} \quad (4.2)$$

Foi também calculada a razão de discrepância (*R_d*), definida por White, Mill e Crabbe (1972) como

$$R_d = \log\left(\frac{E_i}{O_i}\right), \quad (4.3)$$

em que seu valor é classificado conforme a tabela 2 e quanto maior for o valor de *R_d*, mais distante está os valores estimados dos observados.

TABELA 2 – Classificação da razão de discrepância

<i>R_d</i>	Classificação
< 0	<i>D_L</i> subestimado
= 0	<i>D_L</i> estimado igual ao observado
> 0	<i>D_L</i> superestimado

A equação padrão do *RMSE* (4.4) foi utilizada para avaliar a proximidade dos valores estimados aos valores reais.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (E_i - O_i)^2} \quad (4.4)$$

Por fim, para avaliar o desempenho de valores modelados, utilizou-se a equação desenvolvida por Camargo e Sentelhas (1997), por meio da multiplicação do coeficiente de correlação r pelo índice de concordância d (WILLMOTT et al., 1985). Segundo os autores, o coeficiente r representa a precisão dos dados modelados, enquanto que o índice d demonstra a exatidão, variando de 0, para nenhuma concordância, a 1 para total concordância.

$$d = 1 - \left[\frac{\sum (E_i - O_i)^2}{\sum (|E_i - \bar{O}| + |O_i - \bar{O}|)^2} \right] \quad (4.5)$$

Como as medições de D_L foram conduzidas em diversos rios de dimensões variadas, resultando em uma ampla gama de valores, abrangendo desde valores muito baixos até elevados. Para proporcionar uma compreensão mais precisa e evitar viés, realizou-se a média dos dados observados (\bar{O}) para cada rio individualmente. Portanto, a média reflete os valores observados específicos de cada curso d'água.

O coeficiente de desempenho c é então determinado por

$$c = r \cdot d, \quad (4.6)$$

E classificado por seu valor:

TABELA 3 – Classificação de c

c	Classificação
> 0,85	Ótimo
0,76 a 0,85	Muito bom
0,66 a 0,75	Bom
0,61 a 0,65	Mediano
0,51 a 0,60	Sofrível
0,41 a 0,50	Mau
≤ 0,40	Péssimo

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

5.1 ELABORAÇÃO DE UM BANCO DE DADOS NACIONAL DE D_L

A pesquisa nas bases de dados retornou 366 resultados, dos quais 149 foram filtrados pela temática. Desses, após a filtragem por resumos e títulos, somente 11 continham as informações relevantes para esse estudo.

Os valores encontrados na literatura para D_L medido em rios brasileiros, está apresentado na tabela 4.

TABELA 4 – Resultados encontrados na literatura para D_L

Autores	Local	Rio / Curso d'água	Q (m ³ /s)	U (m/s)	u _c (m/s)	S (m/m)	B(m)	H(m)	A (m ²)	D _L (m ² /s)	Rh (m)	Método	Traçador	
(RODRIGUES et al., 2013)	Rio de Janeiro - RJ	São Pedro	0,45	0,42	-	-	2,4	0,43	1,05	1,21	-	Pico de concentração	NaCl	
		São Pedro	0,54	0,51	-	-	2,4	0,43	1,05	1,21	-	Pico de concentração	NaCl	
		São Pedro	0,45	0,6	-	-	2,4	0,43	0,74	1,72	-	Pico de concentração	NaCl	
		São Pedro	0,54	0,6	-	-	2,4	0,43	0,74	1,72	-	Pico de concentração	NaCl	
		São Pedro	0,45	0,62	-	-	2,4	0,43	0,72	2,71	-	Chatwin	NaCl	
		São Pedro	0,54	0,62	-	-	2,4	0,43	0,87	2,71	-	Chatwin	NaCl	
		São Pedro	-	0,5	-	-	2,4	0,43	1,06	1,41	-	Advecção-dispersão	NaCl	
		São Pedro	-	0,7	-	-	2,4	0,43	0,86	0,37	-	Zona morta de dispersão	NaCl	
(PALU; JULIEN, 2019)	Mariana - MG	Doce	-	1,12	0,06	0,0005	195	0,69	-	120	-	Equação de advecção-dispersão	-	
		Doce	-	1,12	0,05	0,0005	260	0,45	-	120	-	Equação de advecção-dispersão	-	
		Doce	-	0,35	0,08	0,0005	303	1,33	-	35	-	Equação de advecção-dispersão	-	
		Doce	-	0,37	0,08	0,0005	360	1,37	-	40	-	Equação de advecção-dispersão	-	
		Doce	-	0,37	0,08	0,0005	434	1,15	-	40	-	Equação de advecção-dispersão	-	
		Doce	-	0,35	0,09	0,0008	536	1,08	-	30	-	Equação de advecção-dispersão	-	
		Doce	-	0,35	0,09	0,0008	622	1,07	-	30	-	Equação de advecção-dispersão	-	
		Doce	-	0,36	0,1	0,0008	627	1,38	-	30	-	Equação de advecção-dispersão	-	
(OLIVEIRA et al., 2017)	Uberaba, Minas Gerais	Jau	0,272	0,31	0,15	0,00812	3,1	0,3	-	3,39	-	Propagação	NaCl	
		Jau	0,324	0,16	0,18	0,00812	3,5	0,4	-	0,7	-	Propagação	NaCl	
		Jau	0,445	0,27	0,27	0,00812	3,6	0,5	-	1,46	-	Propagação	NaCl	
		Jau	1,113	0,32	0,21	0,00812	4,9	0,7	-	1,06	-	Propagação	NaCl	
		Jau	1,106	0,56	0,21	0,00812	4,9	0,7	-	5,37	-	Propagação	NaCl	
		Jau	2,839	0,45	0,26	0,00812	3,9	1,4	-	1,56	-	Propagação	NaCl	
		Jau	2,519	0,42	0,26	0,00812	3,9	1,4	-	1,5	-	Propagação	NaCl	
		Lageado	0,037	0,05	0,11	0,00956	2,4	0,2	-	0,47	-	Propagação	NaCl	
		Lageado	1,234	0,71	0,17	0,00956	3,8	0,5	-	9,89	-	Propagação	NaCl	
		Lageado	2,092	0,49	0,2	0,00956	4,6	0,4	-	1,39	-	Propagação	NaCl	
		Lageado	1,947	0,65	0,2	0,00956	4,6	0,4	-	4,03	-	Propagação	NaCl	
		Lageado	2,222	0,58	0,2	0,00956	4,6	0,4	-	8,77	-	Propagação	NaCl	
		Lageado	1,564	0,82	0,2	0,00956	4,6	0,4	-	7,37	-	Propagação	NaCl	
		Lageado	1,546	0,94	0,2	0,00956	4,6	0,4	-	10,44	-	Propagação	NaCl	
Lageado	1,710	0,66	0,2	0,00956	4,6	0,4	-	3,87	-	Propagação	NaCl			
(SILVA; PECLY; AZEVEDO et al., 2017)	Rio de Janeiro	Piabanha	0,75	0,28	-	-	-	-	-	3,96	-	Ajuste da equação de Taylor	Amidrodamina	
		Piabanha	1,63	0,262	-	-	-	-	-	4,2	-	Ajuste da equação de Taylor	Amidrodamina	
		Piabanha	3,44	0,221	-	-	-	-	-	0,7	-	Ajuste da equação de Taylor	Amidrodamina	
		Piabanha	1,52	0,282	-	-	-	-	-	0,3	-	Ajuste da equação de Taylor	Uranina	
		Piabanha	6,19	0,286	-	-	-	-	-	0,3	-	Ajuste da equação de Taylor	Uranina	
		Piabanha	36,9	0,208	-	-	-	-	-	0,7	-	Ajuste da equação de Taylor	Uranina	
		Piabanha	13,1	0,525	-	-	-	-	-	2,6	-	Ajuste da equação de Taylor	Amidrodamina	
		Piabanha	13,2	0,363	-	-	-	-	-	2,3	-	Ajuste da equação de Taylor	Amidrodamina	
		Piabanha	14,3	0,481	-	-	-	-	-	2,0	-	Ajuste da equação de Taylor	Amidrodamina	
		Piabanha	4,8	0,452	-	-	-	-	-	1,5	-	Ajuste da equação de Taylor	Amidrodamina	
		Piabanha	39,7	0,375	-	-	-	-	-	4,5	-	Ajuste da equação de Taylor	Amidrodamina	
		Piabanha	22,6	0,521	-	-	-	-	-	2,6	-	Ajuste da equação de Taylor	Uranina	
		Piabanha	24,4	0,368	-	-	-	-	-	2,3	-	Ajuste da equação de Taylor	Uranina	
		Piabanha	32,5	0,473	-	-	-	-	-	2,0	-	Ajuste da equação de Taylor	Uranina	
Piabanha	43,6	0,455	-	-	-	-	-	1,5	-	Ajuste da equação de Taylor	Uranina			
(DEVENS; BARBOSA JÚNIOR; SILVA, 2010)	Ouro Preto - MG	Ribeirão Caldas	0,45	0,317	-	0,00231	9,1	0,156	-	1,99	-	Propagação	NaCl	
		Ribeirão Caldas	0,48	0,302	-	0,00143	9,1	0,175	-	4,51	-	Propagação	NaCl	
		Ribeirão Caldas	3,00	0,706	-	0,00231	10,0	0,395	-	7,69	-	Propagação	NaCl	
		Ribeirão Caldas	0,80	0,456	-	0,00231	10,0	0,175	-	8,00	-	Propagação	NaCl	
		Ribeirão Caldas	0,84	0,393	-	0,00143	10,0	0,214	-	7,28	-	Propagação	NaCl	
		Jau	0,329	-	-	0,00812	4,4	0,25	-	-	-	-	-	NaCl
		Jau	0,329	-	-	0,00812	4,40	0,25	-	-	-	-	-	NaCl
		Jau	0,272	0,31	0,15	0,00812	3,00	0,35	-	28,05	-	Concentração de pico	NaCl	
		Jau	0,272	0,31	0,15	0,00812	3,00	0,35	-	3,39	-	Propagação	NaCl	
		Jau	0,334	-	-	0,00812	4,40	0,25	-	-	-	-	-	NaCl
Jau	0,334	-	-	0,00812	4,40	0,25	-	-	-	-	-	NaCl		
Jau	0,324	0,16	0,18	0,00812	3,74	0,50	-	2,73	-	Concentração de pico	NaCl			
Jau	0,324	0,16	0,18	0,00812	3,74	0,50	-	0,70	-	Propagação	NaCl			
Jau	0,445	0,27	0,27	0,00812	3,20	0,64	-	2,38	-	Concentração de pico	NaCl			
Jau	0,445	0,27	0,27	0,00812	3,20	0,64	-	1,46	-	Propagação	NaCl			
Jau	1,113	0,32	0,21	0,00812	3,70	0,80	-	2,54	-	Concentração de pico	NaCl			
Jau	1,113	0,32	0,21	0,00812	3,70	0,80	-	1,06	-	Propagação	NaCl			
Jau	1,106	0,56	0,21	0,00812	3,70	0,80	-	1,20	-	Concentração de pico	NaCl			
Jau	1,106	0,56	0,21	0,00812	3,70	0,80	-	5,37	-	Propagação	NaCl			
Jau	2,839	0,45	0,26	0,00812	3,70	1,55	-	2,61	-	Concentração de pico	NaCl			
Jau	2,839	0,45	0,26	0,00812	3,70	1,55	-	1,56	-	Propagação	NaCl			
Jau	2,519	0,42	0,26	0,00812	3,70	1,55	-	2,48	-	Concentração de pico	NaCl			
Jau	2,519	0,42	0,26	0,00812	3,70	1,55	-	1,50	-	Propagação	NaCl			
(OLIVEIRA, 2013)	Uberaba - MG	Lageado	0,111	-	-	0,00956	3,60	0,18	-	-	-	-	NaCl	
		Lageado	0,043	-	-	0,00956	2,64	0,14	-	-	-	-	NaCl	
		Lageado	0,043	-	-	0,00956	2,64	0,14	-	-	-	-	NaCl	
		Lageado	0,037	0,05	0,11	0,00956	1,90	0,16	-	1,26	-	Concentração de pico	NaCl	
		Lageado	0,037	0,05	0,11	0,00956	1,90	0,16	-	0,47	-	Propagação	NaCl	
		Lageado	1,234	0,71	0,17	0,00956	3,65	0,36	-	8,62	-	Concentração de pico	NaCl	
		Lageado	1,234	0,71	0,17	0,00956	3,65	0,36	-	9,89	-	Propagação	NaCl	
		Lageado	2,092	0,49	0,20	0,00956	4,50	0,53	-	3,63	-	Concentração de pico	NaCl	
		Lageado	2,092	0,49	0,20	0,00956	4,50	0,53	-	1,39	-	Propagação	NaCl	
		Lageado	1,947	0,65	0,20	0,00956	4,50	0,53	-	4,03	-	Concentração de pico	NaCl	
		Lageado	1,947	0,65	0,20	0,00956	4,50	0,53	-	3,46	-	Propagação	NaCl	
		Lageado	2,222	0,58	0,20	0,00956	4,50	0,53	-	3,72	-	Concentração de pico	NaCl	
		Lageado	2,222	0,58	0,20	0,00956	4,50	0,53	-	8,77	-	Propagação	NaCl	
		Lageado	1,564	0,82	0,20	0,00956	4,50	0,53	-	3,19	-	Concentração de pico	NaCl	
		Lageado	1,564	0,82	0,20	0,00956	4,50	0,53	-	7,37	-	Propagação	NaCl	
		Lageado	1,546	0,94	0,20	0,00956	4,50	0,53	-	3,44	-	Concentração de pico	NaCl	
		Lageado	1,546	0,94	0,20	0,00956	4,50	0,53	-	10,44	-	Propagação	NaCl	
		Lageado	1,710	0,66	0,20	0,00956	4,50	0,53	-	2,57	-	Concentração de pico	NaCl	
Lageado	1,710	0,66	0,20	0,00956	4,50	0,53	-	3,87	-	Propagação	NaCl			
(RIBEIRO et al., 2010)	Zona da Mata Mineira - MG	Paraibuna	42,5	0,92	0,09	0,001	26	1,79	-	35	-	Modelo Fickiano	Uranina	
		Paraibuna	19,60	0,66	0,08	0,001	25,5	1,17	-	10,0	-	Modelo Fickiano	Amidrodamina	
		Paraibuna	16,20	0,57	0,08	0,001	21	1,36	-	8,5	-	Modelo Fickiano	Amidrodamina	
		Paraibuna	23,20	0,77	0,08	0,001	23	1,31	-	12,0	-	Modelo Fickiano	Uranina	
		Paraibuna	33,03	0,83	0,08	0,001	28	1,43	-	15,0	-	Modelo Fickiano	Amidrodamina	
		Pomba	38,08	0,65	0,14	0,002	44	1,34	-	19,0	-	Modelo Fickiano	Amidrodamina	
		Pomba	98,00	0,50	0,20	0,002	81	2,42	-	33,0	-	Modelo Fickiano	Amidrodamina	
		Pomba	36,00	0,65	0,15	0,002	40	1,37	-	19,0	-	Modelo Fickiano	Amidrodamina	

Continua

TABELA 4 – Resultados encontrados na literatura para D_L (continuação)

Autores	Local	Rio / Curso d'água	Q (m^3/s)	U (m/s)	u_c (m/s)	S (m/m)	B(m)	H(m)	A (m^2)	D_L (m^2/s)	Rh (m)	Método	Traçador		
(SOARES; PINHEIRO; ZUCCO, 2013)	Blumenau - SC	Ribeirão Concórdia	0,074	0,297	-	0,04	1,8	0,2	-	1,04	-	Propagação	Rodamina-WT		
		Ribeirão Concórdia	0,076	0,325	-	0,040	1,050	0,198	-	0,86	-	Propagação	Rodamina-WT		
		Ribeirão Concórdia	0,076	0,325	-	0,310	1,050	0,198	-	0,52	-	Propagação	Rodamina-WT		
		Ribeirão Concórdia	0,225	0,200	-	0,005	3,600	0,387	-	0,36	-	Propagação	Rodamina-WT		
		Ribeirão Concórdia	0,225	0,200	-	0,005	3,600	0,387	-	0,58	-	Coroa de concentração	Rodamina-WT		
		Ribeirão Concórdia	0,227	0,527	-	0,005	2,150	0,258	-	0,60	-	Propagação	Rodamina-WT		
		Ribeirão Concórdia	0,227	0,527	-	0,005	2,150	0,258	-	0,67	-	Coroa de concentração	Rodamina-WT		
		Arroio Dona Lúcia	0,020	0,120	-	0,043	1,175	0,174	-	1,16	-	Propagação	Rodamina-WT		
		Arroio Dona Lúcia	0,020	0,120	-	0,043	1,175	0,174	-	0,51	-	Coroa de concentração	Rodamina-WT		
		Arroio Dona Lúcia	0,020	0,090	-	0,043	1,325	0,318	-	0,10	-	Propagação	Rodamina-WT		
		Arroio Dona Lúcia	0,020	0,090	-	0,043	1,325	0,318	-	0,09	-	Coroa de concentração	Rodamina-WT		
		Arroio Dona Lúcia	0,022	0,141	-	0,043	1,325	0,155	-	1,21	-	Propagação	Rodamina-WT		
		Arroio Dona Lúcia	0,022	0,141	-	0,043	1,325	0,155	-	0,14	-	Coroa de concentração	Rodamina-WT		
		Arroio Dona Lúcia	0,023	0,103	-	0,043	1,575	0,323	-	0,13	-	Propagação	Rodamina-WT		
		Arroio Dona Lúcia	0,023	0,103	-	0,043	1,575	0,323	-	0,22	-	Coroa de concentração	Rodamina-WT		
		Arroio Braço do Concórdia	0,070	0,254	-	0,002	2,365	0,189	-	0,51	-	Propagação	Rodamina-WT		
		Arroio Braço do Concórdia	0,070	0,254	-	0,002	2,365	0,189	-	1,42	-	Coroa de concentração	Rodamina-WT		
		Arroio Braço do Concórdia	0,074	0,244	-	0,002	2,850	0,268	-	0,23	-	Propagação	Rodamina-WT		
		Arroio Braço do Concórdia	0,074	0,244	-	0,002	2,850	0,268	-	0,67	-	Coroa de concentração	Rodamina-WT		
		Arroio Braço do Concórdia	0,073	0,260	-	0,002	2,150	0,213	-	0,62	-	Propagação	Rodamina-WT		
		Arroio Braço do Concórdia	0,073	0,260	-	0,002	2,150	0,213	-	1,53	-	Coroa de concentração	Rodamina-WT		
		Ribeirão Garcia	4,220	0,424	-	0,004	13,780	0,350	-	6,57	-	Propagação	Rodamina-WT		
		Ribeirão Garcia	4,220	0,424	-	0,004	13,780	0,350	-	14,30	-	Coroa de concentração	Rodamina-WT		
		Ribeirão Garcia	4,485	0,402	-	0,002	14,610	0,341	-	10,55	-	Propagação	Rodamina-WT		
		Ribeirão Garcia	4,485	0,402	-	0,002	14,610	0,341	-	47,00	-	Coroa de concentração	Rodamina-WT		
		Ribeirão da Velha	0,874	0,413	-	0,002	6,950	0,369	-	17,04	-	Propagação	Rodamina-WT		
		Ribeirão da Velha	0,874	0,413	-	0,002	6,950	0,369	-	60,27	-	Coroa de concentração	Rodamina-WT		
		Ribeirão da Velha	0,952	0,406	-	0,002	8,350	0,320	-	13,90	-	Propagação	Rodamina-WT		
		Ribeirão da Velha	0,952	0,406	-	0,002	8,350	0,320	-	24,06	-	Coroa de concentração	Rodamina-WT		
		Ribeirão Fortaleza	0,446	0,310	-	0,002	5,250	0,292	-	4,64	-	Propagação	Rodamina-WT		
		Ribeirão Fortaleza	0,446	0,310	-	0,002	5,250	0,292	-	9,14	-	Coroa de concentração	Rodamina-WT		
(DEVENS; BARBOSA JÚNIOR; SILVA, 2006)	Ouro Preto - MG	Capela	0,00706	0,317	0,0472	0,00772	0,75	0,03	-	0,242	-	Propagação	NaCl		
		Capela	0,00706	0,321	0,0470	0,00772	0,75	0,029	-	0,243	-	Propagação	NaCl		
		Capela	0,00521	0,264	0,0457	0,00772	0,72	0,028	-	0,270	-	Propagação	NaCl		
		Capela	0,00521	0,272	0,0449	0,00772	0,72	0,027	-	0,240	-	Propagação	NaCl		
		Capela	0,00521	0,236	0,0482	0,00772	0,72	0,031	-	0,246	-	Propagação	NaCl		
		Capela	0,00521	0,227	0,0492	0,00772	0,72	0,032	-	0,387	-	Propagação	NaCl		
		Capela	0,01317	0,317	0,0320	0,00552	2,20	0,019	-	1,070	-	Propagação	NaCl		
		Capela	0,01317	0,316	0,0320	0,00552	2,20	0,019	-	1,290	-	Propagação	NaCl		
		Capela	0,01317	0,312	0,0322	0,00552	2,20	0,019	-	1,119	-	Propagação	NaCl		
		Capela	0,01317	0,340	0,0309	0,00552	2,20	0,018	-	0,986	-	Propagação	NaCl		
		Capela	0,01317	0,331	0,0313	0,00552	2,20	0,018	-	1,068	-	Propagação	NaCl		
		Chapada	0,01134	0,094	0,0794	0,00745	1,40	0,086	-	0,185	-	Propagação	NaCl		
		Chapada	0,01134	0,083	0,0844	0,00745	1,40	0,098	-	0,143	-	Propagação	NaCl		
		Maracujá	0,17630	0,308	0,0406	0,00221	7,50	0,076	-	1,235	-	Propagação	NaCl		
		Maracujá	0,15790	0,290	0,0396	0,00221	7,50	0,073	-	1,165	-	Propagação	NaCl		
		(JÚNIOR et al., 2005)	Ouro Preto - MG	Córrego da Capela	0,00706	0,317	-	0,00772	0,75	0,030	-	0,446	-	Propagação	NaCl
				Córrego da Capela	0,00706	0,317	-	0,00772	0,75	0,030	-	4,264	-	Momentos	NaCl
				Córrego da Capela	0,00706	0,317	-	0,00772	0,75	0,030	-	0,107	-	Chatwin	NaCl
				Córrego da Capela	0,00706	0,321	-	0,00772	0,75	0,029	-	0,372	-	Propagação	NaCl
				Córrego da Capela	0,00706	0,321	-	0,00772	0,75	0,029	-	2,840	-	Momentos	NaCl
Córrego da Capela	0,00706			0,321	-	0,00772	0,75	0,029	-	0,116	-	Chatwin	NaCl		
Córrego da Capela	0,00521			0,264	-	0,00772	0,72	0,028	-	0,325	-	Propagação	NaCl		
Córrego da Capela	0,00521			0,264	-	0,00772	0,72	0,028	-	1,438	-	Momentos	NaCl		
Córrego da Capela	0,00521			0,264	-	0,00772	0,72	0,028	-	0,096	-	Chatwin	NaCl		
Córrego da Capela	0,00521			0,272	-	0,00772	0,72	0,027	-	0,273	-	Propagação	NaCl		
Córrego da Capela	0,00521			0,272	-	0,00772	0,72	0,027	-	0,344	-	Momentos	NaCl		
Córrego da Capela	0,00521			0,272	-	0,00772	0,72	0,027	-	0,138	-	Chatwin	NaCl		
Córrego da Capela	0,00521			0,236	-	0,00772	0,72	0,031	-	0,315	-	Propagação	NaCl		
Córrego da Capela	0,00521			0,236	-	0,00772	0,72	0,031	-	1,159	-	Momentos	NaCl		
Córrego da Capela	0,00521			0,236	-	0,00772	0,72	0,031	-	0,118	-	Chatwin	NaCl		
Córrego da Capela	0,00521			0,227	-	0,00772	0,72	0,032	-	0,438	-	Propagação	NaCl		
Córrego da Capela	0,00521			0,227	-	0,00772	0,72	0,032	-	-	-	Momentos	NaCl		
Córrego da Capela	0,00521			0,227	-	0,00772	0,72	0,032	-	-	-	Chatwin	NaCl		
Córrego da Capela	0,01317			0,317	-	0,00552	2,20	0,019	-	1,220	-	Propagação	NaCl		
Córrego da Capela	0,01317			0,317	-	0,00552	2,20	0,019	-	1,753	-	Momentos	NaCl		
Córrego da Capela	0,01317			0,317	-	0,00552	2,20	0,019	-	0,215	-	Chatwin	NaCl		
Córrego da Capela	0,01317			0,316	-	0,00552	2,20	0,019	-	1,290	-	Propagação	NaCl		
Córrego da Capela	0,01317			0,316	-	0,00552	2,20	0,019	-	1,468	-	Momentos	NaCl		
Córrego da Capela	0,01317			0,316	-	0,00552	2,20	0,019	-	0,244	-	Chatwin	NaCl		
Córrego da Capela	0,01317			0,312	-	0,00552	2,20	0,019	-	1,150	-	Propagação	NaCl		
Córrego da Capela	0,01317			0,312	-	0,00552	2,20	0,019	-	2,351	-	Momentos	NaCl		
Córrego da Capela	0,01317			0,312	-	0,00552	2,20	0,019	-	0,215	-	Chatwin	NaCl		
Córrego da Capela	0,01317			0,340	-	0,00552	2,20	0,018	-	1,110	-	Propagação	NaCl		
Córrego da Capela	0,01317			0,340	-	0,00552	2,20	0,018	-	1,466	-	Momentos	NaCl		
Córrego da Capela	0,01317			0,340	-	0,00552	2,20	0,018	-	0,230	-	Chatwin	NaCl		
Córrego da Capela	0,01317	0,331	-	0,00552	2,20	0,018	-	1,120	-	Propagação	NaCl				
Córrego da Capela	0,01317	0,331	-	0,00552	2,20	0,018	-	1,617	-	Momentos	NaCl				
Córrego da Capela	0,01317	0,331	-	0,00552	2,20	0,018	-	0,212	-	Chatwin	NaCl				
Córrego do Fundão	0,01134	0,094	-	0,00745	1,40	0,086	-	0,226	-	Propagação	NaCl				
Córrego do Fundão	0,01134	0,083	-	0,00745	1,40	0,098	-	0,275	-	Momentos	NaCl				
Córrego do Fundão	0,01134	0,083	-	0,00745	1,40	0,098	-	0,121	-	Chatwin	NaCl				
Córrego do Fundão	0,01134	0,083	-	0,00745	1,40	0,098	-	0,167	-	Propagação	NaCl				
Córrego do Fundão	0,01134	0,083	-	0,00745	1,40	0,098	-	0,234	-	Momentos	NaCl				
Córrego do Fundão	0,01134	0,083	-	0,00745	1,40	0,098	-	0,116	-	Chatwin	NaCl				
Laranja Azeda	0,52000	0,255	-	0,00265	4,50	0,510	-	1,100	-	Propagação	Rodamina-WT				
Laranja Azeda	0,52000	0,255	-	0,00265	4,50	0,510	-	3,770	-	Momentos	Rodamina-WT				
Laranja Azeda	0,52000	0,255	-	0,00265	4,50	0,510	-	0,680	-	Chatwin	Rodamina-WT				
Laranja Azeda	1,20000	0,329	-	0,00265	4,50	0,811	-	2,010	-	Propagação	Rodamina-WT				
Laranja Azeda	1,20000	0,329	-	0,00265	4,50	0,811	-	3,620	-	Momentos	Rodamina-WT				
Laranja Azeda	1,20000	0,329	-	0,00265	4,50	0,811	-	0,920	-	Chatwin	Rodamina-WT				
Feijão	2,80000	0,519	-	0,00387	10,00	0,539	-	4,22	-	Propagação	Rodamina-WT				
Feijão	2,80000	0,519	-	0,00387	10,00	0,539	-	5,48	-	Momentos	Rodamina-WT				
Feijão	2,80000	0,519	-	0,00387	10,00	0,539	-	2,41	-	Chatwin	Rodamina-WT				
Feijão	4,30000	0,598	-	0,00387	11,00	0,654	-	6,09	-	Propagação	Rodamina-WT				
Feijão	4,30000	0,598	-	0,00387	11,00	0,654	-	6,75	-	Momentos	Rodamina-WT				
Feijão	4,30000	0,598	-	0,00387	11,00	0,654	-	3,04	-	Chatwin	Rodamina-WT				
Jacaré Guaçu	11,25000	0,412	-	0,00050	20,00	1,365	-	6,00	-	Propagação	Rodamina-WT				
Jacaré Guaçu</															

profundidade de 0,018 a 45m e vazões entre 0,005 a 98m³/s, evidenciando a notável diversidade dos rios brasileiros.

Ao examinar os métodos utilizados para o cálculo de D_L , constatou-se que o método da propagação foi o mais comumente adotado pela comunidade acadêmica, e que os traçados mais utilizados foram Rodamina e NaCl. Outro aspecto relevante observado é a predominância de estudos científicos que abordam rios localizados no estado de Minas Gerais, o que pode ser atribuído à importância hidrográfica da região, com rios de relevância socioambiental e econômica.

A partir desses valores foi possível calcular o D_L por meio da equação definida por Deng, Singh e Bengtsson (2001) e comparar os resultados, conforme ilustra a figura 4.

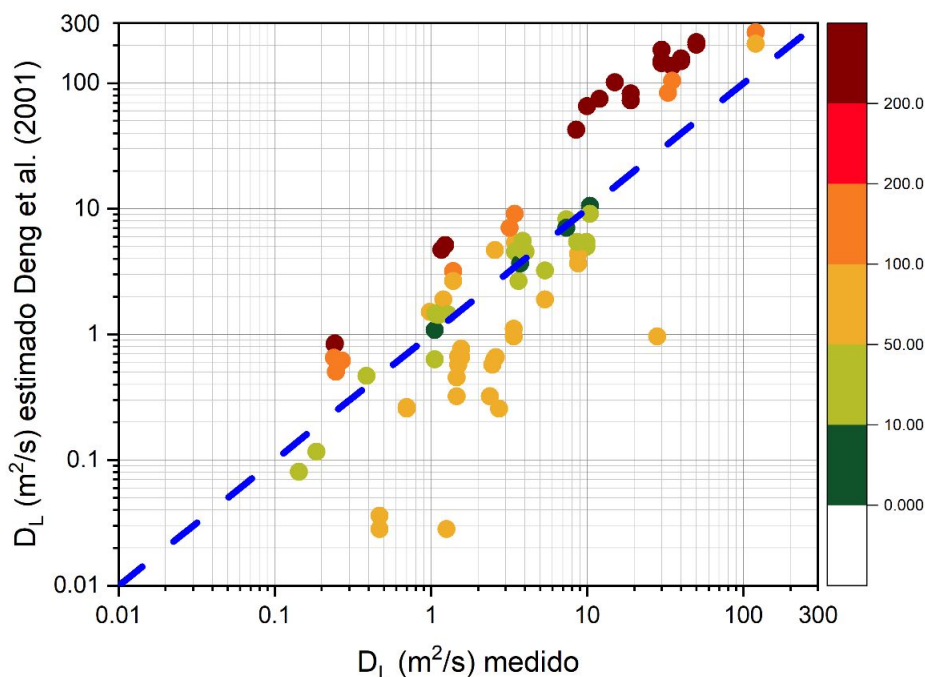


FIGURA 4 – Relação de D_L medido e estimado pela equação 3.19. A escala de cores representa a diferença percentual absoluta e a linha pontilhada uma reta da relação 1:1.

Os valores de D_L calculados apresentam, em sua maioria, uma diferença percentual > 50%, com alguns valores chegando a 200%. O gráfico mostra a baixa exatidão na maioria dos valores calculados, porém não é possível ver uma tendência de relação entre a diferença e o valor do D_L .

5.2 PARÂMETRO β

Perez et al. (2021) apresentou dados de B , H e β obtidos para 481 estações fluviométricas. A figura 5 apresenta a relação de β em função das dimensões dos canais. Não há evidências, por inspeção visual dos dados, de relações entre β e B/H .

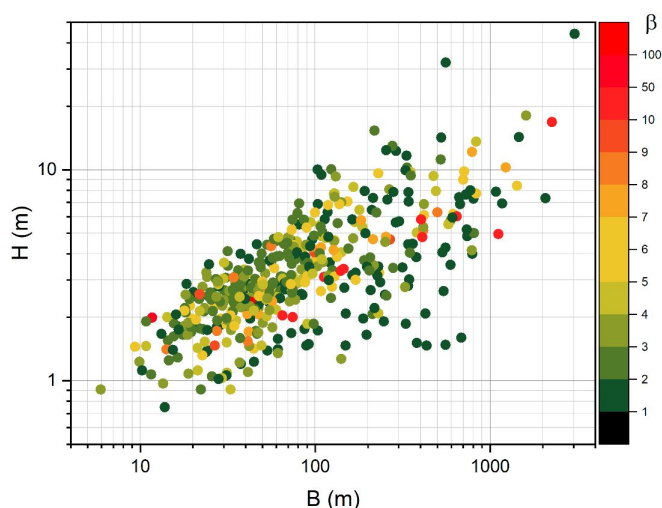


FIGURA 5 – Relação de B , H e β

Para analisar a consideração feita por Deng, Singh e Bengtsson (2001) de que $\beta = \ln(B/H)$, a figura 6 foi gerada ilustrando a diferença da aproximação e dos valores reais encontrados nas séries históricas.

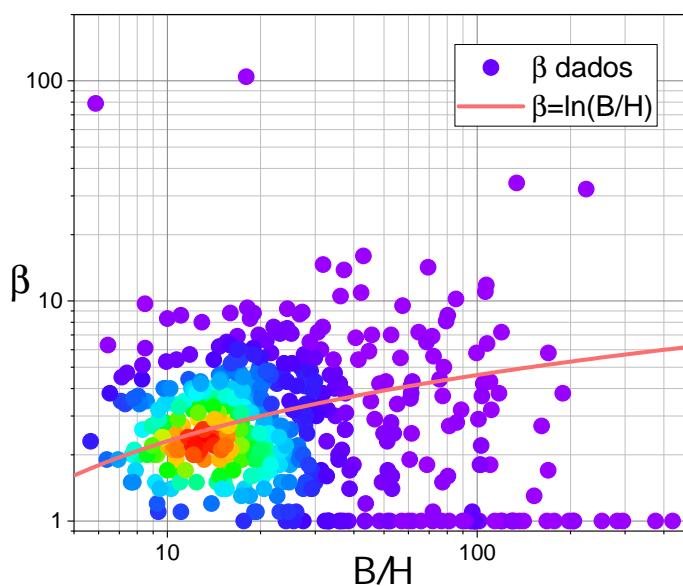


FIGURA 6 – Relação de β e (B/H) para dados de Perez et al. (2021) e a equação $\beta = \ln(B/H)$, proposta por Deng, Singh e Bengtsson (2001)

A correlação e o erro médio absoluto entre os dados reais de β e calculados

pela simplificação de Deng, Singh e Bengtsson (2001) foi de $-0,0189$ e $77,61\%$, respectivamente. Embora alguns valores demonstrem uma proximidade em relação ao centro de calor na figura, a maioria deles permanecem em regiões distantes das esperadas, evidenciando, claramente, que pelo menos para os rios brasileiros avaliados por Perez et al. (2021), a relação $\beta = \ln(B/H)$ proposta por Deng, Singh e Bengtsson (2001) não é suficientemente geral para ser aplicada, demonstrando que a forma do canal e suas dimensões são características independentes e ambas devem ser consideradas na determinação de D_L .

5.2.1 Comparação de largura e profundidade

A partir dos dados encontrados na revisão para medição de D_L no Brasil e a base de dados de Deng, Singh e Bengtsson (2001), foi possível comparar as larguras e profundidades dos rios.

As representações visuais na Figura 7 evidenciam que os rios analisados na base de dados de Deng, Singh e Bengtsson (2001) apresentam, em média, dimensões de largura e profundidades superiores quando comparados aos rios medidos no contexto brasileiro. Contudo, é importante notar que certas medições dos rios brasileiros revelaram valores excepcionalmente altos em termos de largura. Como resultado, a razão entre a largura (B) e a profundidade (H) para os rios brasileiros apresentou, em média, valores menores, embora uma variedade de dados tenha razões relativamente altas, chegando a se aproximar de 1000 em determinados casos.

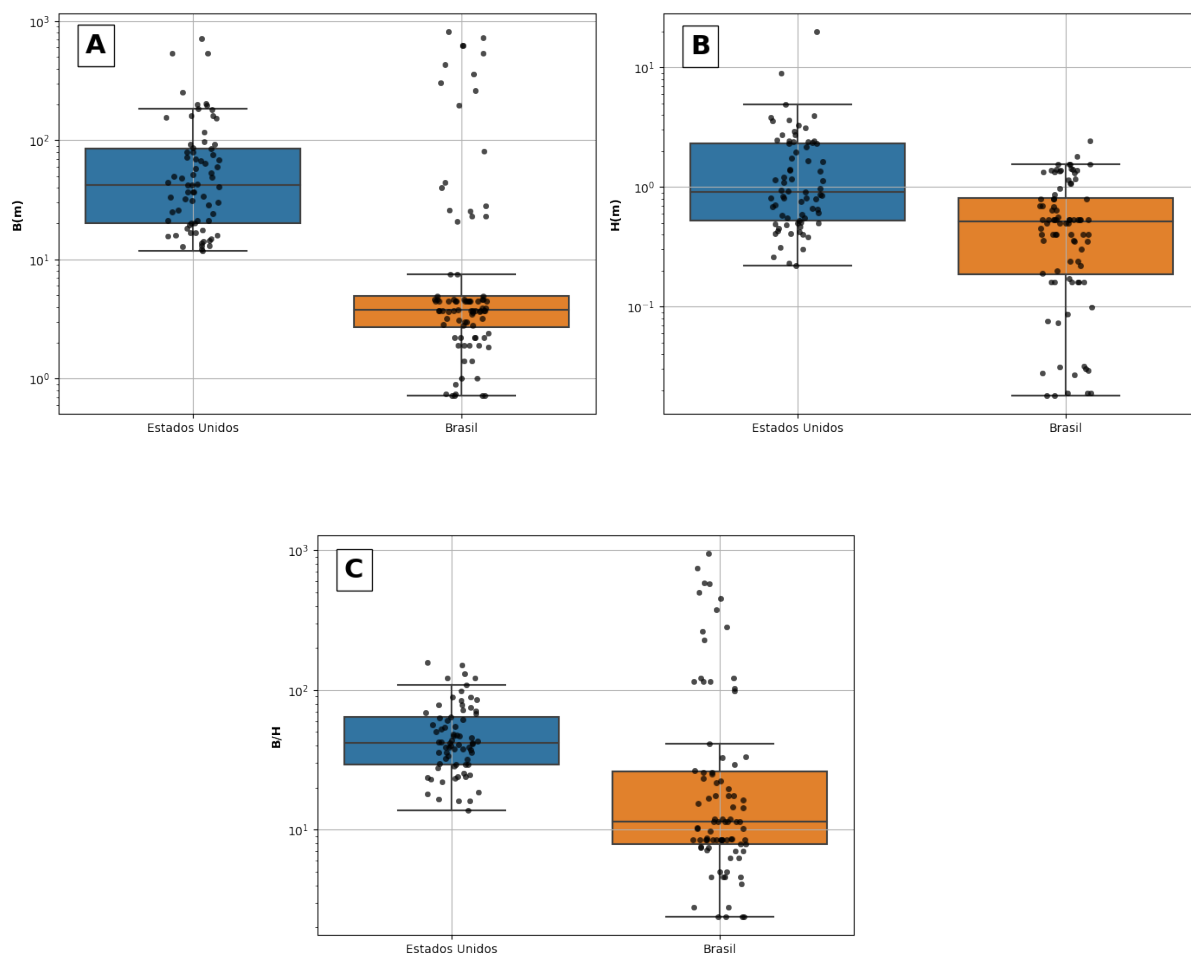


FIGURA 7 – Comparação das características morfológicas dos rios para Largura (Figura A), Profundidade (Figura B) e a razão de Largura por Profundidade (Figura C).

Na formulação proposta por Deng, Singh e Bengtsson (2001), os autores sugerem a aplicação da equação para razões de $B/H > 10$. Observa-se que os valores derivados da revisão realizada no presente estudo, em média, encontram-se dentro dessa faixa recomendada. No entanto, é notável a existência de uma parcela significativa de valores que excede substancialmente essa relação. Nas seções subsequentes, serão analisadas as implicações desses valores que se situam fora da faixa recomendada, explorando seu impacto nos resultados finais.

5.3 PROPOSIÇÃO DE UMA NOVA EQUAÇÃO PARA D_L

Para elaborar a equação final, objetivo desse estudo, foram eliminadas as hipóteses simplificadoras adotadas por Deng, Singh e Bengtsson (2001). Desta forma, α será alterado bem como a solução da integral tripla (3.8).

A seção do canal foi utilizada conforme proposto por Deng, Singh e Bengtsson

(2001), porém considerando (y/b) em módulo, diferentemente dos autores, que não explicitaram essa consideração. Isso tornou o processo matemático mais formal.

5.3.1 Determinação de α por Deng, Singh e Bengtsson

A definição do parâmetro de correção α não foi explicitada por Deng, Singh e Bengtsson (2001), então foi feita a dedução a partir da hipótese descrita na equação 3.17, em que α_H é um parâmetro corretor para descrever a velocidade local ($u(y)$) em função da profundidade local ($h(y)$), inspirada na fórmula de Manning, como:

$$U = \frac{\sqrt{S}}{n} H^{2/3}$$

$$u = \alpha_H \frac{\sqrt{S}}{n} h(y)^{2/3}$$

Os cálculos realizados para encontrar α_H se baseiam nas equações de determinação da vazão, velocidade local e profundidade local, conforme já descrito nas seções anteriores. A dedução detalhada está descrita no Apêndice A. O fator de correção conforme as hipóteses de Deng, Singh e Bengtsson (2001) é dado por

$$\alpha_H = \left(\frac{\beta}{\beta + 1} \right) \frac{1}{\int_0^1 (1 - \xi^\beta)^{5/3} d\xi}, \quad (5.1)$$

onde $\xi = y/b$.

A equação 5.1 carrega a hipótese de que a velocidade média no rio pode ser obtida por Manning utilizando a aproximação $R \approx H$. Desta forma, foi obtida uma nova formulação sem utilizar a simplificação de que o raio hidráulico é aproximadamente igual à profundidade média. O R e o novo α , mais geral, foram então determinados conforme consta no Apêndice B, como:

$$\frac{R}{H} = \frac{1}{\int_0^1 \left[1 + \left(2(\beta + 1) \frac{H}{B} \right)^2 \xi^{2(\beta-1)} \right]^{1/2} d\xi} \longrightarrow \frac{R}{H} = f\left(\beta, \frac{H}{B}\right) \quad (5.2)$$

$$\alpha_R = \frac{\left(\frac{\beta}{\beta + 1} \right)^{5/3} \cdot \left(\frac{R}{H} \right)^{2/3}}{\int_0^1 (1 - \xi^\beta)^{5/3} d\xi} \quad (5.3)$$

A Figura 8 (A) ilustra a relação entre o parâmetro α , definido por 5.3, e as variáveis β e B/H . Observa-se que, para valores de $B/H > 10$, os valores de α ultrapassam 0,7, indicando uma maior proximidade da simplificação de $R \approx H$ à realidade. Este padrão é corroborado pela Figura 8 (B), que demonstra que a razão

R/H se aproxima de 1 dentro dessa mesma faixa de valores. Essa observação ressalta a importância da recomendação de Deng, Singh e Bengtsson (2001) de aplicar a equação para $B/H > 10$, uma vez que isso resulta em uma redução do erro associado ao modelo.

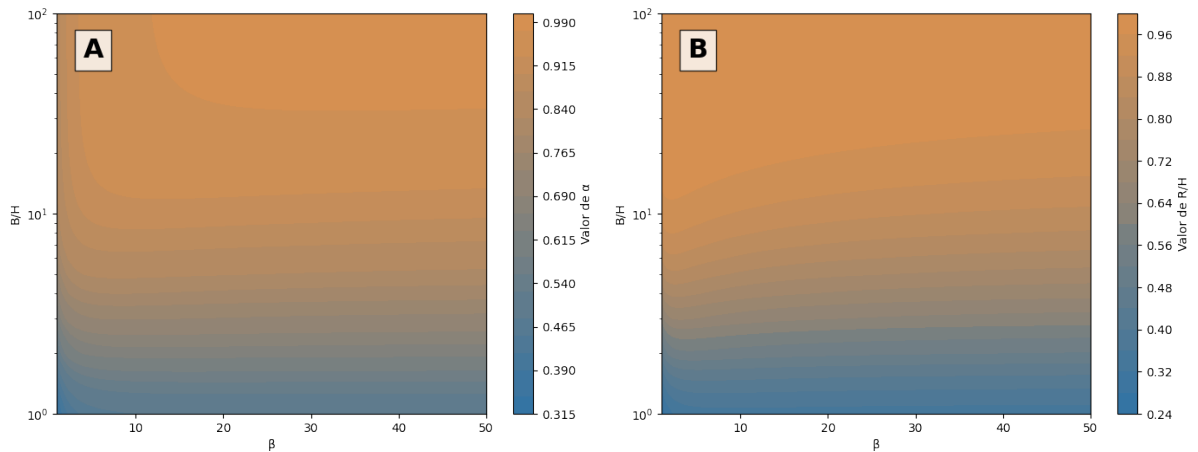


FIGURA 8 – Relação de B/H e β com α (A) e R/H (B)

Ao substituir o novo α (5.3) na definição de u' , notou-se que a inclusão do raio hidráulico foi cancelada e a equação retornou a original descrita por Deng, Singh e Bengtsson (2001), demonstrando que a hipótese adotada era desnecessária e o resultado pode ser mais abrangente.

$$\begin{aligned}
u' &= u(y) - U = \alpha_R \frac{\sqrt{S}}{n} h^{2/3} - \frac{\sqrt{S}}{n} R^{2/3} \\
&= (\alpha_R h^{2/3} - R^{2/3}) \frac{\sqrt{S}}{n} = \left(\alpha_R \left(\frac{h}{R} \right)^{2/3} - 1 \right) \underbrace{\frac{\sqrt{S}}{n} R^{2/3}}_U \\
&= \left(\alpha_R \left(\frac{h}{R} \right)^{2/3} - 1 \right) \cdot U \\
&= \left(\frac{\left(\frac{\beta}{\beta+1} \right)^{5/3} \cdot \left(\frac{R}{H} \right)^{2/3}}{\int_0^1 (1 - \xi^\beta)^{5/3} d\xi} \left(\frac{h}{R} \right)^{2/3} - 1 \right) \cdot U \\
&= \left(\underbrace{\frac{\left(\frac{\beta}{\beta+1} \right)^{5/3}}{\int_0^1 (1 - \xi^\beta)^{5/3} d\xi}}_{\alpha_H} \left(\frac{h}{H} \right)^{2/3} - 1 \right) \cdot U \\
&= \left(\alpha_H \left(\frac{h}{H} \right)^{2/3} - 1 \right) \cdot U \\
&= \left[\alpha_H (1 - |\xi|^\beta)^{2/3} \left(\frac{\beta+1}{\beta} \right)^{2/3} - 1 \right] \cdot U
\end{aligned}$$

5.3.2 Solução da integral tripla

A partir da equação inicial 3.8, Deng, Singh e Bengtsson (2001) substituiu as equações para A , h , u' e ε_t , obtendo

$$\frac{D_L}{B \cdot u_*} = -\frac{1}{8\varepsilon_{t0}} \left(\frac{B}{H} \right) \left(\frac{U}{u_*} \right)^2 I(\beta), \quad (5.4)$$

com $I(\beta)$ definido por

$$\begin{aligned}
I &= \int_{+1}^{-1} (1 - |\xi|^\beta) \left[\alpha (1 - |\xi|^\beta)^{2/3} \left(\frac{\beta+1}{\beta} \right)^{2/3} - 1 \right] \int_1^\xi \frac{1}{(1 - |\xi|^\beta)^2} \cdot \\
&\quad \int_1^\xi (1 - |\xi|^\beta) \left[\alpha (1 - |\xi|^\beta) \left(\frac{\beta+1}{\beta} \right)^{2/3} - 1 \right] d\xi d\xi d\xi
\end{aligned} \quad (5.5)$$

A integral $I(\beta)$, dada por 5.5 foi resolvida utilizando a biblioteca *scipy.integrate.tplquad* da linguagem de programação Python, que utiliza integração numérica com um erro ab-

soluto e relativo de $1,49\text{e-}08$. Em um código feito para resolver a integral, foi calculado para valores de β variando de 1 a 100, com incremento de 0,1.

A fim de simplificar o cálculo da integral no uso da equação 5.4 na determinação de D_L , foram testados diferentes ajustes da equação 5.5. A tabela 5 apresenta as equações testadas, com a escolhida destacada, em função do menor MSE e maior R^2 .

TABELA 5 – Ajustes realizados em diferentes equações

Equação	R^2	MSE
$-I = a \cdot \beta + b$	0,196422	$6,67184 \times 10^{-07}$
$-I = a \cdot \beta^{-b+c}$	0,990800	$7,63829 \times 10^{-09}$
$-I = \frac{a}{\beta + b}$	0,965282	$2,88250 \times 10^{-08}$
$-I = a \cdot \beta^b$	0,983683	$1,35474 \times 10^{-08}$
$-I = a \cdot e^{\beta-b}$	0,977401	$1,87631 \times 10^{-08}$
$-I = (a + b \cdot \beta^{c-1})^{-1}$	0,999668	$2,75288 \times 10^{-10}$
$-I = a_0 + a_1 \cdot \beta$	0,196422	$6,67184 \times 10^{-07}$
$-I = a_0 + a_1 \cdot \beta + a_2 \cdot \beta^2$	0,407213	$4,92171 \times 10^{-07}$
$-I = a_0 + a_1 \cdot \beta + a_2 \cdot \beta^2 + a_3 \cdot \beta^3$	0,587804	$3,42233 \times 10^{-07}$
$-I = a_0 + a_1 \cdot \beta + a_2 \cdot \beta^2 + a_3 \cdot \beta^3 + a_4 \cdot \beta^4$	0,725378	$2,28010 \times 10^{-07}$
$-I = a_0 + a_1 \cdot \beta + a_2 \cdot \beta^2 + a_3 \cdot \beta^3 + a_4 \cdot \beta^4 + a_5 \cdot \beta^5$	0,822820	$1,47107 \times 10^{-07}$

A melhor equação ajustada foi $-I = (a + b \cdot \beta^{c-1})^{-1}$, onde: $a = 71,13$; $b = 38,38$ e $c = 2,64$.

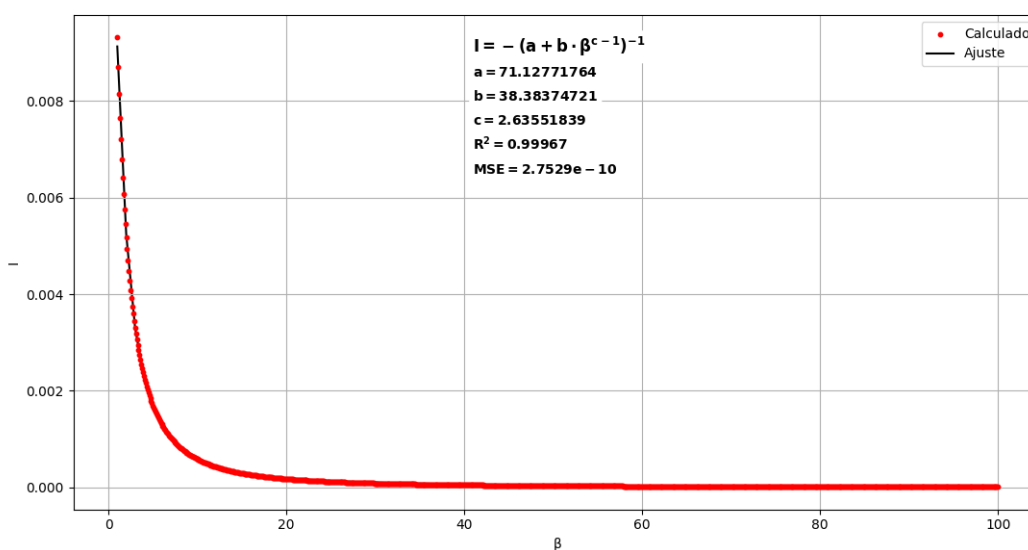


FIGURA 9 – Ajuste e resultados da integral tripla da equação 5.5

A Figura 9 apresenta a comparação dos valores da equação 5.5 e equação de melhor ajuste.

Observa-se que a integral é assintótica, aproximando-se de zero à medida que o parâmetro β aumenta. Isso ocorre porque, à medida que o canal se torna mais retangular (conforme ilustrado na Figura 3), a profundidade $h(y)$ permanece constante. Como resultado, não há gradiente de velocidade transversal, pois, $u(y)$ é constante e igual a U . Portanto, $u' = 0$, o que leva a integral a se tornar nula.

5.3.3 Equação final

A equação ajustada foi então substituída na equação 5.4, retornando a formulação:

$$\frac{D_L}{B \cdot u_*} = \frac{1}{8\varepsilon_{t0}} \left(\frac{B}{H}\right) \left(\frac{U}{u_*}\right)^2 \cdot (71,1277 + 38,3837 \cdot \beta^{1,6355})^{-1} \quad (5.6)$$

A partir dos experimentos conduzidos por Fischer (1967) em ambientes de laboratório, nos quais tanto margens lisas quanto rugosas foram estudadas, observou-se que o coeficiente de dispersão longitudinal nas margens rugosas era aproximadamente 15 vezes maior do que nas margens lisas. Uma vez que a equação utilizada na análise pressupôs que o canal era liso, foi necessário introduzir um ajuste multiplicativo para tornar a equação aplicável a rios e córregos naturais, pois nos ambientes naturais, as margens costumam ser mais rugosas e irregulares devido a erosões, assoreamento, tipo de solo e vegetação natural.

Assim, a equação final ficou:

$$\frac{D_L}{B \cdot u_*} = \frac{15}{8\varepsilon_{t0}} \left(\frac{B}{H}\right) \left(\frac{U}{u_*}\right)^2 \cdot (71,1277 + 38,3837 \cdot \beta^{1,6355})^{-1} \quad (5.7)$$

5.3.4 Validação

Com base na revisão de dados, foram selecionados apenas aqueles que continham todas as informações necessárias para realizar os cálculos. Isso resultou em um conjunto de 88 dados provenientes de 12 rios diferentes. Para determinar o parâmetro de forma β , utilizou-se os dados de Perez et al. (2021), os quais incluíam as coordenadas de cada seção. Esses dados foram importados para o software QGIS, juntamente com a hidrografia da Agência Nacional de Águas (ANA) (AGÊNCIA NACIONAL DE ÁGUAS (ANA), 2023), a fim de determinar o valor de β representativo para cada rio. Para os rios em que continham mais de um β foi utilizado o mais próximo do local de medição do experimento para determinação de D_L .

Vale ressaltar que muitos dos estudos encontrados na revisão foram realizados em córregos e rios de menor porte, nos quais não há estações fluviométricas. Desta forma, dos 88 dados iniciais, apenas 18 deles continham o valor de β para o rio

originalmente medido. Para estimar o valor de β para os outros rios, adotou-se um critério de proximidade, obtendo β com base no rio mais próximo, conforme mostra a figura 10, de uma região ampliada com a hidrografia filtrada para os rios de medição.

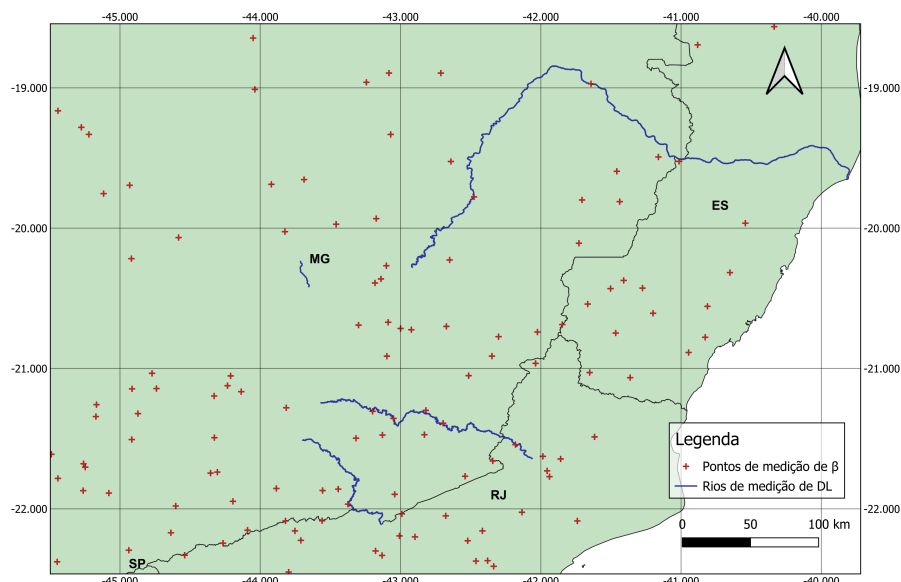


FIGURA 10 – Mapa de rios de medição de D_L , e β obtidos por Perez et al. (2021)

Os dados foram divididos em duas categorias: os que possuíam β medido nos rios de origem (Conjunto A), e o restante, cujo β foi estimado com base na proximidade geográfica, somado com o Conjunto A (Conjunto B).

Os cálculos de D_L utilizando a equação proposta 5.7, e as demais apresentadas na seção 3.2, juntamente com os dados utilizados, estão apresentados na tabela 6 e 7, para os conjuntos A e B, respectivamente.

TABELA 6 – Dados e cálculos de D_L para o conjunto A

Dado	U (m/s)	H (m)	B (m)	u^* (m/s)	β	Medido	D_L				
							Equação 3.19	Equação 5.7	Equação 3.28	Equação 3.30	Equação 3.32
1	0,57	1,36	21	0,08	3,3	8,5	42,48	30,96	57,99	58,61	8,72
2	0,66	1,17	25,5	0,08	3,3	10	65,58	53,62	76,16	67,61	9,66
3	0,77	1,31	23	0,08	3,3	12	75,06	57,11	92,93	103,03	13,41
4	0,83	1,43	28	0,08	3,3	15	101,46	80,04	120,82	130,68	18,32
5	0,65	1,34	44	0,14	2,5	19	82,83	109,19	86,59	42,91	17,06
6	0,65	1,37	40	0,15	2,5	19	72,96	92,48	79,92	40,95	17,19
7	0,35	1,08	536	0,09	10,2	30	144,24	31,30	187,61	15,60	13,86
8	0,35	1,07	622	0,09	10,2	30	150,25	34,37	205,01	15,46	14,63
9	0,36	1,38	627	0,1	10,2	30	183,85	38,74	225,85	18,98	22,07
10	0,5	2,42	81	0,2	2,6	33	83,81	106,22	93,40	32,10	37,03
11	0,92	1,79	26	0,09	3,3	35	104,33	74,51	138,42	178,64	28,68
12	0,35	1,33	303	0,08	10,2	35	136,75	22,89	149,94	21,61	13,65
13	0,37	1,37	360	0,08	10,2	40	157,28	27,61	182,68	24,88	16,61
14	0,37	1,15	434	0,08	10,2	40	149,28	29,57	191,93	20,88	14,34
15	0,5	0,97	720	0,04	10,2	50	211,96	52,61	509,24	64,34	18,05
16	0,5	0,86	815	0,04	10,2	50	201,81	54,34	525,33	57,04	16,28
17	1,12	0,69	195	0,06	10,2	120	254,33	45,75	529,39	153,08	23,63
18	1,12	0,45	260	0,05	10,2	120	205,19	46,85	581,54	119,81	14,48

TABELA 7 – Dados e cálculos de D_L para os dados com β obtido pelo critério de proximidade

U (m/s)	H (m)	B (m)	u* (m/s)	β	D_L					
					Medido	Equação 3.19	Equação 5.7	Equação 3.28	Equação 3.30	Equação 3.32
0,91	0,17	2,85	0,09	9,30	0,045	11,214	1,859	14,079	16,417	0,478
0,93	0,16	2,80	0,09	9,30	0,050	11,622	1,955	14,310	16,880	0,446
0,41	0,24	1,90	0,11	9,30	0,124	1,334	0,172	3,701	3,928	0,208
0,08	0,10	1,40	0,08	7,10	0,143	0,081	0,019	0,248	0,085	0,005
0,41	0,24	1,90	0,11	9,30	0,144	1,334	0,172	3,701	3,928	0,208
0,39	0,16	1,00	0,07	9,30	0,165	0,818	0,098	2,369	3,587	0,075
0,09	0,09	1,40	0,08	7,10	0,185	0,117	0,029	0,290	0,102	0,005
0,93	0,16	2,80	0,09	9,30	0,225	11,622	1,955	14,310	16,880	0,446
0,27	0,03	0,72	0,04	7,10	0,240	0,651	0,191	0,719	0,472	0,003
0,32	0,03	0,75	0,05	7,10	0,242	0,834	0,239	0,935	0,678	0,005
0,32	0,03	0,75	0,05	7,10	0,243	0,849	0,246	0,942	0,675	0,005
0,39	0,16	1,00	0,07	9,30	0,245	0,818	0,098	2,369	3,587	0,075
0,24	0,03	0,72	0,05	7,10	0,246	0,504	0,141	0,600	0,380	0,003
0,26	0,03	0,72	0,05	7,10	0,270	0,619	0,179	0,693	0,453	0,003
0,33	0,19	1,85	0,10	9,30	0,299	1,016	0,140	2,514	2,153	0,108
0,23	0,03	0,72	0,05	7,10	0,387	0,467	0,129	0,570	0,356	0,003
0,05	0,20	2,40	0,11	3,40	0,470	0,036	0,023	0,197	0,048	0,008
0,05	0,16	1,90	0,11	3,40	0,470	0,028	0,018	0,157	0,039	0,006
0,16	0,40	3,50	0,18	3,40	0,700	0,264	0,153	1,381	0,604	0,157
0,16	0,50	3,74	0,18	3,40	0,700	0,256	0,141	1,567	0,755	0,218
0,37	0,22	0,90	0,08	9,30	0,900	0,485	0,050	2,233	4,046	0,104
0,34	0,02	2,20	0,03	7,10	0,986	1,510	0,736	1,988	0,715	0,004
0,32	0,70	4,90	0,21	3,40	1,060	1,083	0,583	5,302	3,622	1,100
0,32	0,80	3,70	0,21	3,40	1,060	0,632	0,296	4,687	4,140	1,157
0,33	0,02	2,20	0,03	7,10	1,068	1,466	0,715	1,903	0,669	0,004
0,32	0,02	2,20	0,03	7,10	1,070	1,446	0,692	1,809	0,633	0,004
0,31	0,02	2,20	0,03	7,10	1,119	1,421	0,680	1,764	0,610	0,004
0,29	0,07	7,50	0,04	7,10	1,165	4,721	2,172	5,189	1,645	0,035
0,56	0,80	3,70	0,21	3,40	1,200	1,901	0,892	10,421	12,678	2,616
0,31	0,08	7,50	0,04	7,10	1,235	5,149	2,337	5,681	1,884	0,041
0,05	0,16	1,90	0,11	3,40	1,260	0,028	0,018	0,157	0,039	0,006
0,32	0,02	2,20	0,03	7,10	1,290	1,442	0,690	1,801	0,629	0,004
0,49	0,40	4,60	0,20	3,40	1,390	3,192	2,029	7,734	5,096	0,939
0,49	0,53	4,50	0,20	3,40	1,390	2,663	1,529	8,490	6,752	1,347
0,27	0,50	3,60	0,27	3,40	1,460	0,455	0,247	2,715	1,433	0,519
0,27	0,64	3,20	0,27	3,40	1,460	0,321	0,154	2,772	1,834	0,681
0,42	1,40	3,90	0,26	3,40	1,500	0,669	0,265	8,060	10,080	3,923
0,42	1,55	3,70	0,26	3,40	1,500	0,574	0,216	8,109	11,160	4,382
0,45	1,40	3,90	0,26	3,40	1,560	0,767	0,304	8,895	11,571	4,338
0,45	1,55	3,70	0,26	3,40	1,560	0,658	0,248	8,948	12,811	4,845
0,58	0,56	23,04	0,25	9,30	1,920	27,272	6,098	27,788	8,127	4,077
0,27	0,64	3,20	0,27	3,40	2,380	0,321	0,154	2,772	1,834	0,681
0,42	1,55	3,70	0,26	3,40	2,480	0,574	0,216	8,109	11,160	4,382
0,32	0,80	3,70	0,21	3,40	2,540	0,632	0,296	4,687	4,140	1,157
0,66	0,53	4,50	0,20	3,40	2,570	4,694	2,696	12,991	12,250	2,079
0,45	1,55	3,70	0,26	3,40	2,610	0,658	0,248	8,948	12,811	4,845
0,16	0,50	3,74	0,18	3,40	2,730	0,256	0,141	1,567	0,755	0,218
0,82	0,53	4,50	0,20	3,40	3,190	7,057	4,053	17,712	18,909	2,853
0,31	0,30	3,10	0,15	3,40	3,390	1,106	0,678	3,193	2,040	0,254
0,31	0,35	3,00	0,15	3,40	3,390	0,965	0,556	3,318	2,380	0,306
0,94	0,53	4,50	0,20	3,40	3,440	9,096	5,225	21,526	24,848	3,481
0,65	0,40	4,60	0,20	3,40	3,460	5,401	3,433	11,578	8,967	1,418
0,65	0,53	4,50	0,20	3,40	3,460	4,560	2,619	12,711	11,881	2,033
0,49	0,53	4,50	0,20	3,40	3,630	2,663	1,529	8,490	6,752	1,347
0,58	0,53	4,50	0,20	3,40	3,720	3,674	2,110	10,802	9,460	1,722
0,66	0,40	4,60	0,20	3,40	3,870	5,556	3,531	11,834	9,245	1,449
0,66	0,53	4,50	0,20	3,40	3,870	4,694	2,696	12,991	12,250	2,079
0,65	0,53	4,50	0,20	3,40	4,030	4,560	2,619	12,711	11,881	2,033
0,56	0,70	4,90	0,21	3,40	5,370	3,216	1,732	11,790	11,093	2,487
0,56	0,80	3,70	0,21	3,40	5,370	1,901	0,892	10,421	12,678	2,616
0,82	0,40	4,60	0,20	3,40	7,370	8,259	5,249	16,134	14,271	1,989
0,82	0,53	4,50	0,20	3,40	7,370	7,057	4,053	17,712	18,909	2,853
0,71	0,36	3,65	0,17	3,40	8,620	5,463	3,329	11,720	11,328	1,205
0,58	0,40	4,60	0,20	3,40	8,770	4,374	2,780	9,840	7,140	1,201
0,58	0,53	4,50	0,20	3,40	8,770	3,674	2,110	10,802	9,460	1,722
0,71	0,50	3,80	0,17	3,40	9,890	4,965	2,748	13,614	15,734	1,891
0,71	0,36	3,65	0,17	3,40	9,890	5,463	3,329	11,720	11,328	1,205
0,94	0,40	4,60	0,20	3,40	10,440	10,560	6,711	19,608	18,754	2,427
0,94	0,53	4,50	0,20	3,40	10,440	9,096	5,225	21,526	24,848	3,481
0,31	0,35	3,00	0,15	3,40	28,050	0,965	0,556	3,318	2,380	0,306

As Figuras 11 e 12 mostram a comparação dos valores medidos e calculados nas diferentes equações, para cada conjunto de dados.

O conjunto A exhibe uma tendência nos valores calculados por várias equações, propostas por Seo e Cheong (1998), Deng, Singh e Bengtsson (2001), Kashefipour e Falconer (2002), bem como a equação proposta desta pesquisa. Essa tendência sugere que, em geral, as equações superestimam o valor de D_L . No entanto, a equação fornecida por Ribeiro et al. (2010) tende a subestimar D_L .

Para valores menores de D_L , observa-se uma correlação nos dados, com o cálculo de Ribeiro et al. (2010) se aproximando mais do valor real, seguido pela equação proposta e de Deng, Singh e Bengtsson (2001). No entanto, para $D_L > 20m^2/s$, a correlação se torna menos aparente, e os valores calculados pela equação de Kashefipour e Falconer (2002) se aproximam mais do valor real, seguidos por Ribeiro et al. (2010) e a equação proposta.

No conjunto B, observa-se novamente a tendência das equações de Seo e Cheong (1998) e Kashefipour e Falconer (2002) em superestimar os valores. Por outro lado, a equação proposta demonstrou uma tendência a subestimar o D_L para valores menores, e superestimar para valores maiores.

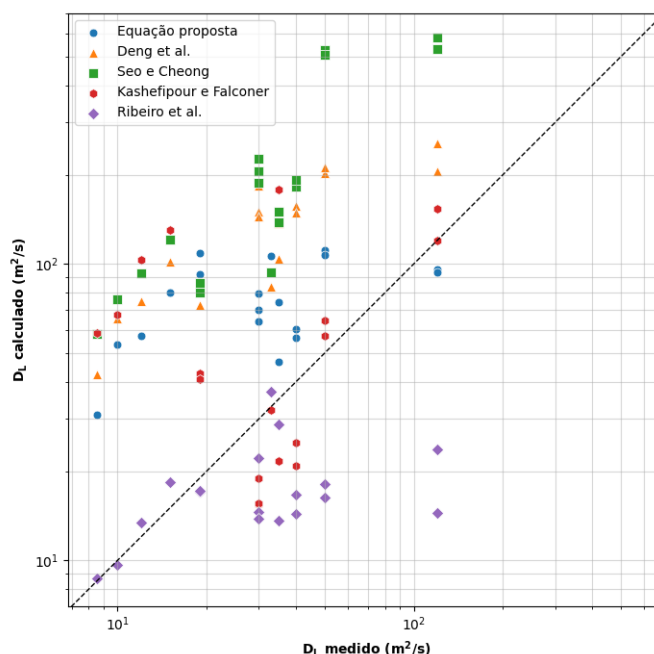


FIGURA 11 – Comparação dos valores de D_L medidos e estimados, para o conjunto A

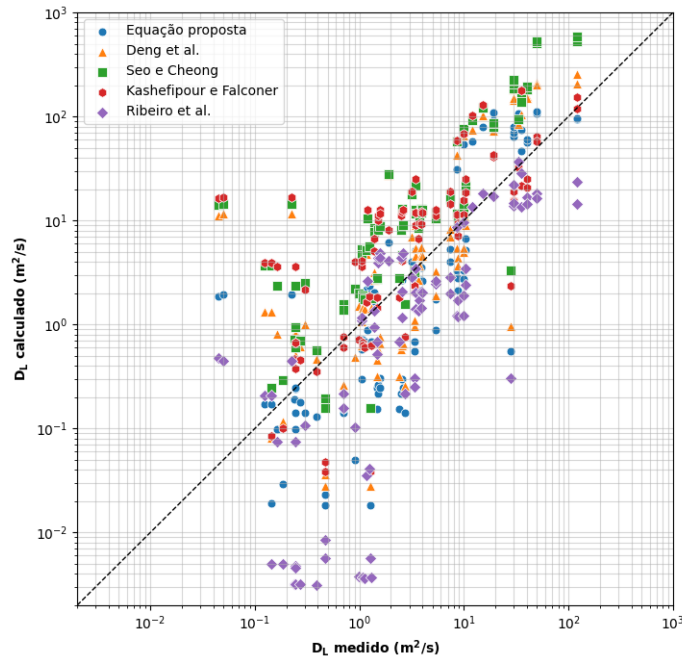


FIGURA 12 – Comparação dos valores de D_L medidos e estimados, para o conjunto B

A diferença percentual absoluta para o conjunto A (figura 13) revela uma proximidade notável da equação proposta em relação à equação desenvolvida por Deng, Singh e Bengtsson (2001), com a equação proposta frequentemente apresentando valores inferiores. As equações de Deng, Singh e Bengtsson (2001) e Seo e Cheong (1998) demonstram uma consistência nos valores de diferença percentual absoluta, na maioria dos casos, com poucas oscilações notáveis. Vale ressaltar que as discrepâncias na formulação de Ribeiro et al. (2010) tendem a aumentar à medida que o valor de D_L cresce, enquanto o oposto ocorre com a Equação 5.7, que demonstra uma tendência à redução das diferenças nesse contexto.

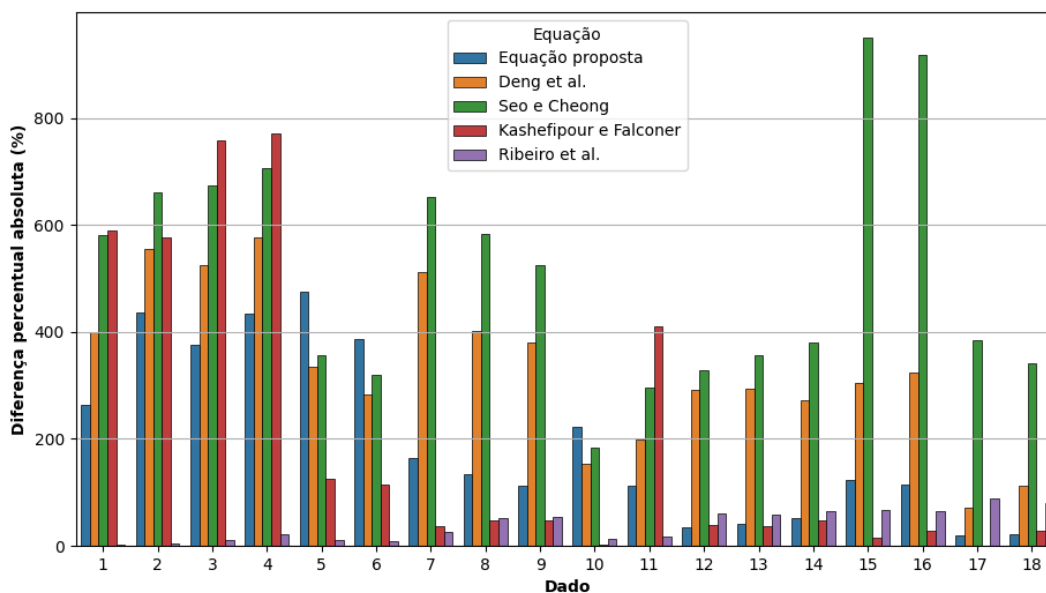


FIGURA 13 – Comparação dos percentuais de diferença absoluta dos valores de D_L estimados, para o conjunto A, em ordem crescente de D_L

O conjunto B exibiu uma ampla gama de diferenças percentuais (figura 14), com um acúmulo maior de 0% a 100%, sendo a maioria dessas diferenças concentrada na faixa de 50% a 100%. Notavelmente, a formulação de Ribeiro et al. (2010) foi a que registrou o maior número de ocorrências nessa faixa, seguida pela Equação 5.7. Nas faixas com as maiores diferenças percentuais, a Equação 5.7 apresentou a menor frequência, sugerindo que a grande maioria dos cálculos se situou na faixa de erro entre 0% e 100%.

Além disso, a equação de Seo e Cheong (1998) revelou uma estabilidade notável na frequência de ocorrências em várias classes de diferença percentual. Sua incidência mais pronunciada concentrou-se na faixa de 200% a 500%, sugerindo uma parcela substancial de cálculos com um percentual alto de imprecisões ao longo dos dados. Por outro lado, o estudo de Kashefipour e Falconer (2002) também evidenciou consistência, mantendo-se próxima da equação de Seo e Cheong (1998). No entanto, observou-se uma prevalência mais significativa na faixa de 0% a 50%, indicando também uma frequência considerável de valores com diferenças maiores.

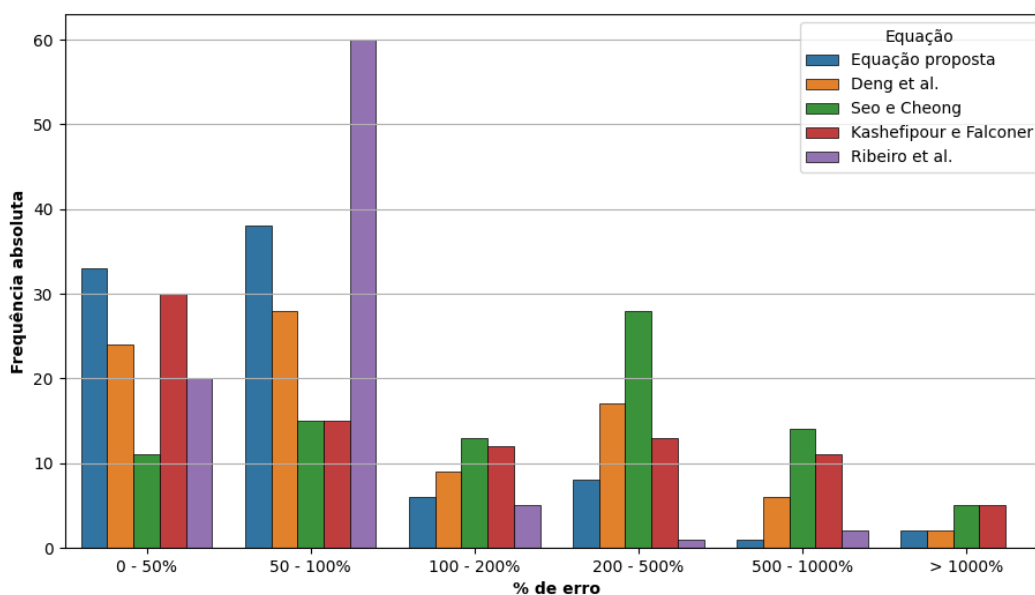


FIGURA 14 – Comparação dos percentuais de diferença absoluta dos valores de D_L estimados, para o conjunto B

As figuras 15 e 16 apresentam a frequência da razão de discrepância (R_d) para ambos os conjuntos. No conjunto A, as equações de Deng, Singh e Bengtsson (2001), Seo e Cheong (1998) e a equação proposta demonstram uma maior frequência na faixa de 0,3 a 1. Isso confirma, mais uma vez, que essas equações tendem a superestimar os valores, distanciando-se consideravelmente dos dados medidos.

No intervalo de $-0,3$ a $0,3$, as equações de Kashefipour e Falconer (2002) e Ribeiro et al. (2010) exibiram maior frequência, sugerindo uma maior proximidade com os dados medidos. Por outro lado, na faixa de -1 a $-0,3$, a única equação visível foi a de Ribeiro et al. (2010), que apresentou a mesma frequência notada na outra faixa de valores em que aparece. Isso corrobora com a tendência dessa equação em subestimar os valores, conforme observado na figura 11.

No caso do conjunto B, é observado que a equação proposta demonstra sua maior frequência dentro da faixa de maior concordância com os dados medidos ($-0,3$ a $0,3$). Sua frequência é ligeiramente inferior apenas quando comparada à equação proposta por Kashefipour e Falconer (2002). Por outro lado, a equação desenvolvida por Ribeiro et al. (2010) exibe uma frequência mais elevada em intervalos de amplitude maior.

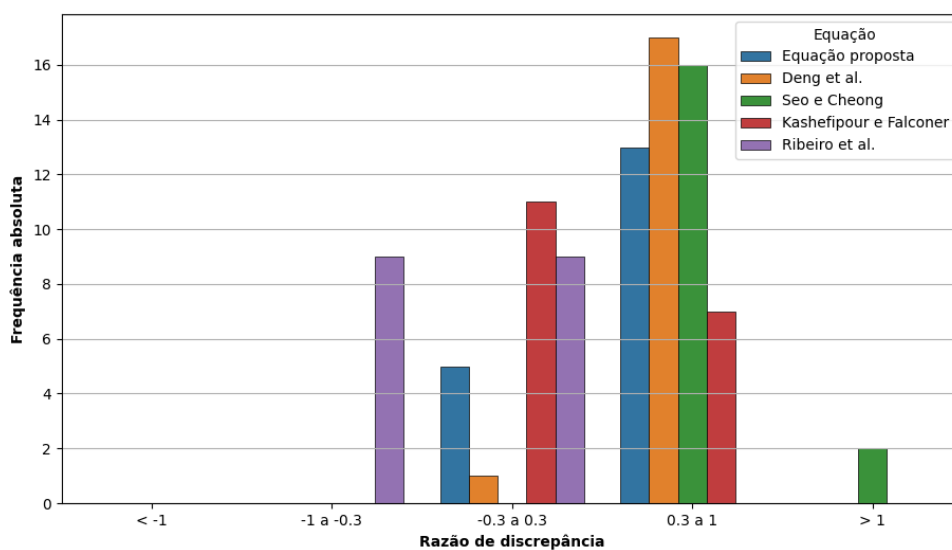


FIGURA 15 – Frequência das razões de discrepância dos valores de D_L estimados, para o conjunto A

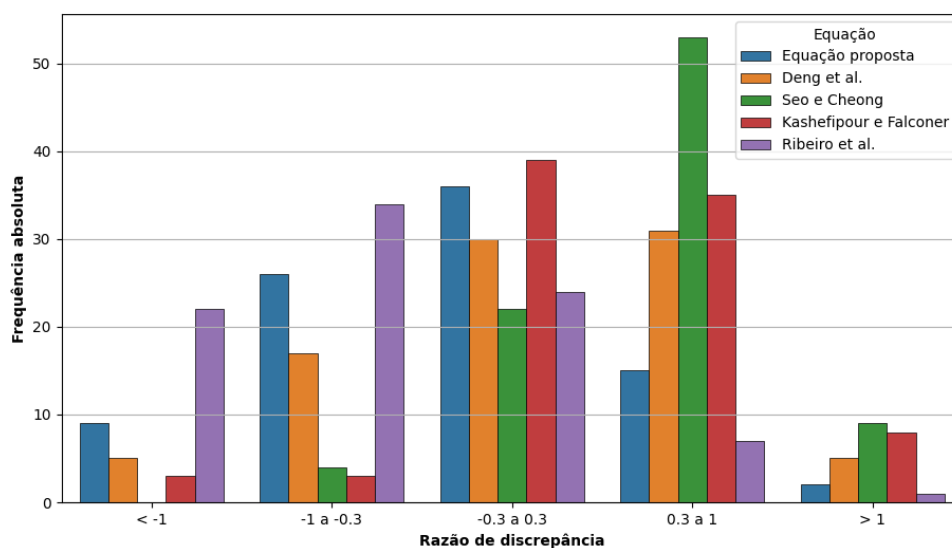


FIGURA 16 – Frequência das razões de discrepância dos valores de D_L estimados, para o conjunto B

A análise abrangente do conjunto A (Tabela 8) revelou uma correlação consideravelmente baixa para as equações de Ribeiro et al. (2010), Kashefipour e Falconer (2002) e a Equação 5.7, sugerindo uma relação fraca com os dados observados. Especificamente, a equação de Ribeiro et al. (2010) exibiu a menor correlação ($r = 0,193$), apesar do menor $RMSE$ e $MAPE$. O índice de concordância d apresentou valores próximos em todas as análises, com a equação de Seo e Cheong (1998) registrando o menor valor, enquanto as equações de Kashefipour e Falconer (2002), Ribeiro et

al. (2010) e a equação proposta se destacaram com valores relativamente maiores, embora nenhuma delas tenha se aproximado de uma precisão perfeita ($d=1$).

TABELA 8 – Análises estatísticas do conjunto A

Autores	Equação	r	d	c	R_d médio	$RMSE$	$MAPE$
Deng, Singh e Bengtsson (2001)	3.19	0,802	0,344	0,276	0,609	103,245	332,857
Seo e Cheong (1998)	3.28	0,848	0,213	0,181	0,760	237,478	511,111
Presente estudo	5.7	0,401	0,401	0,161	0,390	49,157	195,751
Kashefipour e Falconer (2002)	3.30	0,397	0,584	0,232	0,207	53,669	204,302
Ribeiro et al. (2010)	3.32	0,193	0,472	0,091	-0,253	37,177	39,143

O índice de desempenho c de todas as equações foi classificado como Pésimo. Notavelmente, a equação de Deng, Singh e Bengtsson (2001) obteve o maior valor, enquanto a equação de Ribeiro et al. (2010) registrou o menor desempenho. A razão de discrepância média foi mais acentuada para as equações de Deng, Singh e Bengtsson (2001) e Seo e Cheong (1998), indicando uma maior distância em relação ao conjunto de dados real. Além disso, todas as equações demonstraram uma tendência a superestimar os valores, exceto a equação de Ribeiro et al. (2010), que mostrou uma tendência a subestimar os valores calculados de coeficiente de dispersão.

O valor do $RMSE$ demonstrou valores elevados no conjunto A, com os maiores valores associados às equações de Seo e Cheong (1998) e Deng, Singh e Bengtsson (2001), apontando para um maior erro médio dos dados quando essas equações são aplicadas. A equação proposta apresentou os menores valores de $RMSE$ e $MAPE$, superiores somente à equação de Ribeiro et al. (2010).

No contexto do conjunto B, observaram-se diferenças notáveis nos resultados (Tabela 9). A equação proposta apresentou valor consideravelmente maior de coeficiente de correlação e , como resultado, um índice de desempenho superior. Esse índice subiu significativamente para esse conjunto, com valores se aproximando de 0,4 (classificação Mau), além de Deng, Singh e Bengtsson (2001) e equação proposta apresentarem o mesmo valor.

TABELA 9 – Análises estatísticas do conjunto B

Autores	Equação	r	d	c	R_d médio	$RMSE$	$MAPE$
Deng, Singh e Bengtsson (2001)	3.19	0,875	0,343	0,300	0,137	46,940	767,370
Seo e Cheong (1998)	3.28	0,915	0,213	0,195	0,545	107,617	1097,116
Presente estudo	5.7	0,757	0,397	0,300	-0,218	22,524	183,627
Kashefipour e Falconer (2002)	3.30	0,696	0,571	0,397	0,329	25,206	1160,773
Ribeiro et al. (2010)	3.32	0,691	0,460	0,318	-0,616	17,271	89,505

Nota-se também que os valores de $MAPE$ aumentaram significativamente para este conjunto, sendo o maior deles associado às equações de Kashefipour e Falconer (2002) e Seo e Cheong (1998). Um aspecto interessante a ser avaliado é que a razão de discrepância da equação proposta, embora tenha diminuído em módulo,

assumiu um sinal oposto. Isso sugere que, no contexto do conjunto B, essa equação tende a subestimar os valores calculados, ao passo que, no conjunto A, ela tendia a superestimá-los.

Ao analisar todas as equações e comparar os conjuntos, observa-se que a Equação 5.7 foi a única que melhorou em todas as análises após a adição de mais dados (Conjunto B).

Chama a atenção o fato de que a única equação de referência neste estudo, ajustada e validada especificamente para rios brasileiros, apresentou um índice de desempenho muito baixo para o conjunto A, embora no estudo desenvolvido por Ribeiro et al. (2010) tenha obtido um índice de desempenho em torno de 0,5, sendo classificada como "Mau".

No que diz respeito à correlação dos valores calculados com a razão B/H , Figura 17 ilustra a relação entre a B/H e E_i/O_i para as equações de Deng, Singh e Bengtsson (2001) e a Equação 5.7. Apesar de os autores recomendarem o emprego da equação para $B/H > 10$, não é possível discernir uma diferença substancial nos valores para $B/H < 10$. Contudo, observa-se que, nessa faixa, os valores calculados tendem a ser inferiores aos valores medidos.

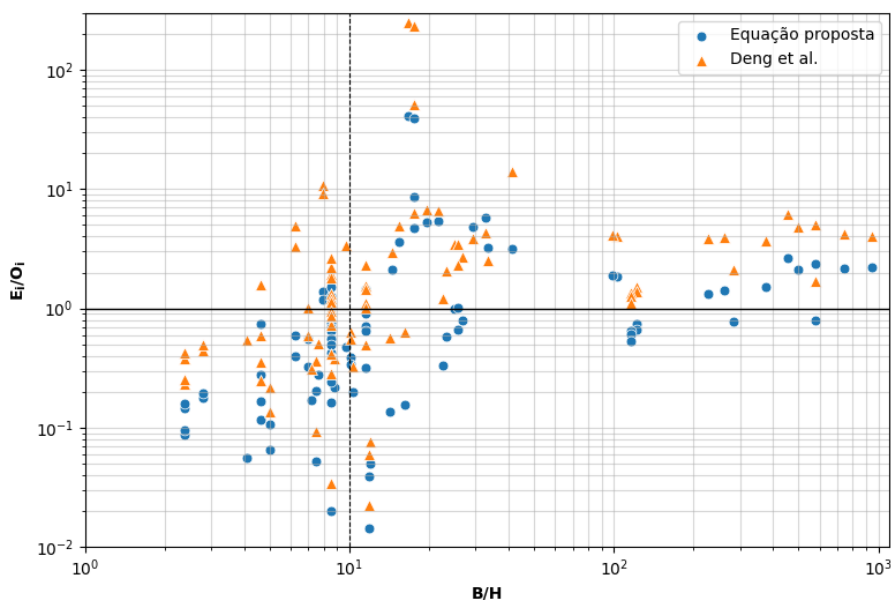


FIGURA 17 – Relação dos valores calculados com a razão B/H para o conjunto B

5.3.5 Limitações

Este estudo estabelece limitações na aplicabilidade da equação desenvolvida (5.7) para o coeficiente de dispersão longitudinal, restringindo sua utilização a rios que são teoricamente retos e uniformes. As disparidades entre os coeficientes de dispersão

observados e os previstos são predominantemente atribuídas a fenômenos como zonas mortas, sinuosidade, correntes secundárias e outras características irregulares, as quais não são explicitamente contempladas na equação proposta. A validade da integral tripla de Fischer (1979) (3.8) para o D_L , que serve como base para a equação 5.7, está condicionada para pontos após a zona de mistura, a uma distância L a jusante da fonte, onde é alcançado um equilíbrio entre advecção e difusão. A determinação da distância L requer a satisfação da condição $L > 0,4U B^2/\varepsilon_t$, conforme indicado por Fischer (1979). Conforme ressaltado por Deng, Singh e Bengtsson (2001), a derivação de 3.8 é específica para canais com $B/H > 6$ e a equação de Manning deve ser aplicada para $B/H > 10$. Importante destacar também que a sinuosidade do rio não é contemplada na equação proposta, sendo esta aplicável apenas a rios suficientemente retos.

6 CONCLUSÃO

O presente estudo apresentou uma alternativa para a estimativa do coeficiente de dispersão longitudinal (D_L) em rios retos, uniformes e simétricos ao incorporar o parâmetro de forma β , destacando, contudo, a possível otimização do método mediante a obtenção precisa dos valores de β no local específico da medição. A imprecisão resultante da ausência de exatidão nesse processo, aliada à falta de valores para β em outros rios analisados, pode ter contribuído para aumento dos erros nos resultados da equação proposta.

Os resultados evidenciam que, embora a equação proposta por Deng, Singh e Bengtsson (2001) ofereça uma estimativa adequada para os valores de D_L , a hipótese de correlacionar o parâmetro de forma β com a largura e profundidade, com a relação $\beta = \ln(B/H)$, não se confirma. A inclusão desse parâmetro, por sua vez, demonstra ser crucial para a obtenção de estimativas mais acuradas.

Destaca-se a limitação do estudo de medição de D_L em regiões específicas do Brasil, fora do estado de Minas Gerais, que predominou nas análises de D_L . A lacuna de pesquisas em outras regiões do país ressalta a necessidade de uma abordagem mais abrangente, incorporando diferentes localidades e contextos geográficos, para uma maior verificação da equação com os demais parâmetros de forma em outras regiões.

Recomenda-se, para investigações futuras, a obtenção precisa dos valores de β no local exato da medição, assim como a expansão das medições para rios em diversas regiões do Brasil. Essa abordagem aprimorada permitirá uma refinada compreensão do D_L , contribuindo para a melhoria da equação proposta e consolidando os resultados em uma base mais abrangente e representativa. Este refinamento é de suma importância para melhoria e otimização de estudos de dispersão de poluentes em ambientes carentes de dados e limitações para medições experimentais.

REFERÊNCIAS

- AGÊNCIA NACIONAL DE ÁGUAS (ANA). **Base Hidrográfica Ottocodificada Multiescalas 2017 5k (BHO 2017 5k)**. Disponível em: <https://metadados.snirh.gov.br/geonetwork/srv/por/catalog.search#/home>. Acessado em 10 de agosto de 2023. 2023. Citado 1 vez na página 39.
- BENEDINI, Marcello et al. Dispersion in rivers and streams. **Water Quality Modelling for Rivers and Streams**, Springer, p. 49–56, 2013. Citado 1 vez na página 12.
- BOWIE, George L et al. Rates, constants, and kinetics formulations in surface water quality modeling. **Epa**, v. 600, p. 3–85, 1985. Citado 0 vez na página 23.
- CAMARGO, AP de; SENTELHAS, Paulo Cesar. Avaliação do desempenho de diferentes métodos de estimativa da evapotranspiração potencial no Estado de São Paulo, Brasil. **Revista Brasileira de agrometeorologia**, Santa Maria, v. 5, n. 1, p. 89–97, 1997. Citado 1 vez na página 27.
- DENG, Zhi-Qiang; SINGH, Vijay P; BENGTSSON, Lars. Longitudinal dispersion coefficient in straight rivers. **Journal of hydraulic engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 127, n. 11, p. 919–927, 2001. Citado 42 vezes nas páginas 13–15, 19–22, 24–26, 31–37, 42, 43, 45, 47–50.
- DEVENS, Julimara Alves; BARBOSA JÚNIOR, Antenor Rodrigues; SILVA, Gilberto Queiroz da. Modelo de quantificação do coeficiente de dispersão longitudinal de pequenos cursos de água naturais. **Engenharia Sanitaria e Ambiental**, SciELO Brasil, v. 11, p. 269–276, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 17, 19, 23, 30.
- _____. Modelos empiricos e semi-empiricos para a obtenção do coeficiente de dispersão longitudinal de pequenos cursos de água., 2010. Citado 0 vezes nas páginas 23, 29.
- ELDER, JW104430. The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow. **Journal of fluid mechanics**, Cambridge University Press, v. 5, n. 4, p. 544–560, 1959. Citado 0 vez na página 23.
- FAN, Fernando Mainardi. Simulação dos impactos de lançamentos de poluentes sobre a qualidade da água de bacias hidrográficas integrada com Sistema de Informação Geográfica, 2013. Citado 1 vez na página 22.
- FISCHER, Hugo B. Discussion of “simple method for predicting dispersion in streams”. **Journal of the Environmental Engineering Division**, American Society of Civil Engineers, v. 101, n. 3, p. 453–455, 1975. Citado 0 vez na página 23.
- _____. **Mixing in inland and coastal waters**. [S.l.]: Academic press, 1979. Citado 7 vezes nas páginas 12, 13, 17, 19, 49.

FISCHER, Hugo B. The mechanics of dispersion in natural streams. **Journal of the Hydraulics division**, American Society of Civil Engineers, v. 93, n. 6, p. 187–216, 1967. Citado 1 vez na página 39.

GLOVER, Robert Ellsworth. **Dispersion of dissolved or suspended materials in flowing streams**. [S.l.]: US Government Printing Office, 1964. Citado 0 vez na página 23.

GOND, Lorris et al. Transverse mixing in rivers with longitudinally varied morphology. **Water Resources Research**, Wiley Online Library, v. 57, n. 6, e2020wr029478, 2021. Citado 1 vez na página 15.

GRISON, Fernando; KOBAYAMA, Masato. Teoria e aplicação da geometria hidráulica: revisão. **Revista Brasileira de Geomorfologia**, v. 12, n. 2, 2011. Citado 1 vez na página 15.

JÚNIOR, Antenor Rodrigues Barbosa et al. Métodos diretos de determinação do coeficiente de dispersão longitudinal em cursos d'água naturais Parte 1-Fundamentos teóricos. **Rem: Revista Escola de Minas**, Universidade Federal de Ouro Preto, v. 58, n. 1, p. 27–32, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 18, 19, 30.

KASHEFIPOUR, Seyed M; FALCONER, Roger A. Longitudinal dispersion coefficients in natural channels. **Water Research**, Elsevier, v. 36, n. 6, p. 1596–1608, 2002. Citado 11 vezes nas páginas 22, 23, 26, 42, 44–47.

KOUSSIS, Antonis D; RODRIGUEZ-MIRASOL, José. Hydraulic estimation of dispersion coefficient for streams. **Journal of hydraulic Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 124, n. 3, p. 317–320, 1998. Citado 0 vez na página 23.

LEOPOLD, Luna Bergere; MADDOCK, Thomas. **The hydraulic geometry of stream channels and some physiographic implications**. [S.l.]: US Government Printing Office, 1953. v. 252. Citado 1 vez na página 15.

LIU, Henry. Predicting dispersion coefficient of streams. **Journal of the Environmental Engineering Division**, American Society of Civil Engineers, v. 103, n. 1, p. 59–69, 1977. Citado 0 vez na página 23.

MCQUIVEY, Raul S; KEEFER, Thomas N. Simple method for predicting dispersion in streams. **Journal of the Environmental Engineering Division**, American Society of Civil Engineers, v. 100, n. 4, p. 997–1011, 1974. Citado 0 vez na página 23.

MORAES, Danielle Serra de Lima; JORDÃO, Berenice Quinzani. Degradação de recursos hídricos e seus efeitos sobre a saúde humana. **Revista de saúde pública**, SciELO Public Health, v. 36, p. 370–374, 2002. Citado 1 vez na página 12.

OLIVEIRA, Vanessa Vaz de et al. Prediction of the longitudinal dispersion coefficient for small watercourses. **Acta Scientiarum. Technology**, v. 39, n. 3, p. 291–299, 2017. Citado 1 vez nas páginas 18, 29.

OLIVEIRA, Vanessa Vaz de. **Quantificação e avaliação do coeficiente de dispersão longitudinal em cursos d'água**. 2013. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Citado 0 vez na página 29.

PALU, Marcos C; JULIEN, Pierre Y. Modeling the sediment load of the Doce River after the Fundão tailings dam collapse, Brazil. **Journal of Hydraulic Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 145, n. 5, p. 05019002, 2019. Citado 0 vez na página 29.

PEREIRA, Carlos Eugenio et al. Dispersion of pollutants in watercourses intercepted by highway BR-050, in the Triângulo Mineiro region, Minas Gerais, Brazil. **Acta Scientiarum. Technology**, v. 38, n. 2, p. 153–161, 2016. Citado 0 vez na página 30.

PEREZ, Alondra Beatriz Alvarez et al. MORFOMETRIA E GEOMETRIA HIDRÁULICA DE RIOS BRASILEIROS. **XXIV SBRH - Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos**, 2021. Citado 7 vezes nas páginas 13, 14, 16, 26, 32, 33, 39, 40.

RAMEZANI, Mostafa et al. Numerical modelling-based comparison of longitudinal dispersion coefficient formulas for solute transport in rivers. **Hydrological Sciences Journal**, Taylor & Francis, v. 64, n. 7, p. 808–819, 2019. Citado 1 vez na página 13.

RIBEIRO, Celso Bandeira de Melo et al. Development and validation of an equation to estimate longitudinal dispersion coefficient in medium-sized rivers. **Engenharia Sanitaria e Ambiental**, SciELO Brasil, v. 15, p. 393–400, 2010. Citado 18 vezes nas páginas 13, 23, 26, 29, 42–48.

RODRIGUES, Pedro Paulo Gomes Watts et al. Evaluation of dispersion parameters for river Sao Pedro, Brazil, by the simulated annealing method. **Inverse Problems in Science and Engineering**, Taylor & Francis, v. 21, n. 1, p. 34–51, 2013. Citado 0 vez na página 29.

SABERI-MOVAHED, Farid; NAJAFZADEH, Mohammad; MEHRPOOYA, Adel. Receiving more accurate predictions for longitudinal dispersion coefficients in water pipelines: training group method of data handling using extreme learning machine conceptions. **Water Resources Management**, Springer, v. 34, n. 2, p. 529–561, 2020. Citado 1 vez na página 17.

SEO, Il Won; CHEONG, Tae Sung. Predicting longitudinal dispersion coefficient in natural streams. **Journal of hydraulic engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 124, n. 1, p. 25–32, 1998. Citado 12 vezes nas páginas 22, 23, 26, 42–47.

SILVA, PVRM da; PECLY, JOG; AZEVEDO, JPS de et al. Use of dye tracers to determine transport and dispersion parameters in Piabanha River (RJ) for its quali-quantitative modeling with HEC-RAS. **Engenharia Sanitaria e Ambiental**, ABES (Brazilian Association of Sanitary e Environmental Engineering), v. 22, n. 3, p. 463–472, 2017. Citado 0 vez na página 29.

SOARES, Pétrick Anderson; PINHEIRO, Adilson; ZUCCO, Evelyn. Determinação do coeficiente de dispersão longitudinal em rios. **Revista de Gestão de Água da América Latina**, v. 10, n. 2, p. 27–36, 2013. Citado 1 vez nas páginas 19, 30.

TAYLOR, Geoffrey Ingram. The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences**, The Royal Society London, v. 223, n. 1155, p. 446–468, 1954. Citado 0 vez na página 23.

TENEBE, Imokhai Theophilus et al. Estimation of longitudinal dispersion co-efficient: A review. **Cogent Engineering**, Taylor & Francis, v. 3, n. 1, p. 1216244, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 12, 19.

WHITE, WR; MILL, H; CRABBE, AD. Sediment Transport: an Appraisal of Available Methods: VOLUME 1: Summary of Existing Theories: VOLUME 2: Performance of Theoretical Methods when Applied to Flume and Field Data. HR Wallingford, 1972. Citado 1 vez na página 26.

WILLMOTT, Cort J et al. Statistics for the evaluation and comparison of models. **Journal of Geophysical Research: Oceans**, Wiley Online Library, v. 90, n. C5, p. 8995–9005, 1985. Citado 1 vez na página 27.

ZENG, Yuhong; HUAI, Wenxin. Estimation of longitudinal dispersion coefficient in rivers. **Journal of hydro-environment research**, Elsevier, v. 8, n. 1, p. 2–8, 2014. Citado 1 vez na página 13.

APÊNDICES

APÊNDICE A – DEFINIÇÃO DE α

$$\begin{aligned}
 Q &= U \overbrace{H}^A \underbrace{B}_{2b} = \int_0^A u \, dA = \int_{-b}^b u \, h \, dy \\
 &= 2 \int_0^b u \, h \, dy \\
 &= 2 \int_0^b \frac{\sqrt{S}}{n} h^{2/3} h \, dy \\
 &= 2 \int_0^b \frac{\sqrt{S}}{n} h^{5/3} \, dy \\
 &= 2 \frac{\sqrt{S}}{n} \int_0^b \underbrace{H_c^{5/3} \left[1 - \left(\frac{y}{b} \right)^\beta \right]}_h^{5/3} dy \\
 &= 2 \frac{H_c^{5/3} \sqrt{S}}{n} \int_0^b \left[1 - \left(\frac{y}{b} \right)^\beta \right]^{5/3} dy \\
 \xi = \frac{y}{b} &\rightarrow \frac{2H_c^{5/3} \sqrt{S}}{nb} \int_0^1 (1 - \xi^\beta)^{5/3} d\xi \\
 UH \underbrace{2\beta}_B &= \frac{2\beta H_c^{5/3} \sqrt{S} \alpha}{n} \int_0^1 (1 - \xi^\beta)^{5/3} d\xi \\
 \frac{\sqrt{S}}{n} H^{2/3} H &= \alpha H_c^{5/3} \frac{\sqrt{S}}{n} \int_0^1 (1 - \xi^\beta)^{5/3} d\xi \\
 \left(\frac{H}{H_c} \right)^{5/3} &= \alpha \int_0^1 (1 - \xi^\beta)^{5/3} d\xi \\
 \left(\frac{\beta}{\beta + 1} \right)^{5/3} &= \alpha \int_0^1 (1 - \xi^\beta)^{5/3} d\xi \\
 \alpha &= \left(\frac{\beta}{\beta + 1} \right) \frac{1}{\int_0^1 (1 - \xi^\beta)^{5/3} d\xi}
 \end{aligned}$$

APÊNDICE B – DEFINIÇÃO DE α COM RAIOS HIDRÁULICO

$$R = \frac{A}{P}$$

$$A = 2 \int_0^b h(y) dy = 2b \overbrace{\frac{H_c \beta}{\beta + 1}}^H$$

$$\begin{aligned} P &= 2 \int_0^b \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} dy \\ &= 2 \int_0^b \left[1 + \left(\frac{H_c \beta}{b}\right)^2 \left(\frac{y}{b}\right)^{2(\beta-1)} \right]^{1/2} dy \\ &= 2b \int_0^1 \left[1 + \left(\frac{H_c \beta}{b}\right)^2 \xi^{2(\beta-1)} \right]^{1/2} d\xi \end{aligned}$$

$$R = \frac{2bH}{2b \int_0^1 \left[1 + \left(\frac{H_c \beta}{b}\right)^2 \xi^{2(\beta-1)} \right]^{1/2} d\xi}$$

$$\frac{H_c \beta}{b} = \frac{2H_c \beta}{B} = \frac{2H(\beta + 1)}{B} = 2(\beta + 1) \frac{H}{B}$$

$$\frac{R}{H} = \frac{1}{\int_0^1 \left[1 + \left(2(\beta + 1) \frac{H}{B}\right)^2 \xi^{2(\beta-1)} \right]^{1/2} d\xi} \rightarrow \frac{R}{H} = f\left(\beta, \frac{H}{B}\right)$$

Com z definido por:

$$\begin{aligned} z &= H_c - h \\ &= H_c - H_c \left(1 - \left(\frac{y}{b}\right)^\beta\right) \\ z &= H_c \left(\frac{y}{b}\right)^\beta \end{aligned}$$

Assim, o α pôde ser novamente calculado:

$$\begin{aligned}
u' &= u(y) - U = \alpha \frac{\sqrt{S}}{n} h^{2/3} - \frac{\sqrt{S}}{n} R^{2/3} \\
Q &= \int u h dy = 2 \int_0^b u h dy \\
&= 2 \int_0^b \frac{\alpha}{n} \sqrt{S} h^{2/3} \cdot h dy \\
&= 2\alpha \sqrt{S} \int_0^b h^{5/3} dy \\
&= 2\alpha \frac{\sqrt{S}}{n} b \int_0^1 h^{5/3} d\xi \\
&= \underbrace{2b}_B \frac{\sqrt{S}}{n} \alpha \int_0^1 H_c^{5/3} (1 - \xi^\beta)^{5/3} d\xi \\
&= \alpha B \frac{\sqrt{S}}{n} H_c^{5/3} \int_0^1 (1 - \xi^\beta)^{5/3} d\xi
\end{aligned}$$

Utilizando também a relação $Q = U \cdot A$:

$$\begin{aligned}
Q &= U \cdot A = \frac{\sqrt{S}}{n} B \cdot H \cdot R^{2/3} \\
\frac{\sqrt{S}}{n} B H R^{2/3} &= \alpha \frac{\sqrt{S}}{n} B H_c^{5/3} \int_0^1 (1 - \xi^\beta)^{5/3} d\xi \\
H^{5/3} \left(\frac{R}{H}\right)^{2/3} &= \alpha H_c^{5/3} \int_0^1 (1 - \xi^\beta)^{5/3} d\xi \\
\underbrace{\left(\frac{H}{H_c}\right)^{5/3}}_{\frac{\beta}{\beta + a}} \cdot \left(\frac{R}{H}\right)^{2/3} &= \alpha \int_0^1 (1 - \xi^\beta)^{5/3} d\xi \\
\alpha &= \frac{\left(\frac{\beta}{\beta + 1}\right)^{5/3} \cdot \left(\frac{R}{H}\right)^{2/3}}{\int_0^1 (1 - \xi^\beta)^{5/3} d\xi}
\end{aligned}$$