

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EYGON TITOSHI YAMAGUTI

ANÁLISE DE ERROS MATEMÁTICOS:  
UMA PROPOSTA DE INTERVENÇÃO EM SALA DE AULA



CURITIBA

2018

EYGON TITOSHI YAMAGUTI

ANÁLISE DE ERROS MATEMÁTICOS:  
UMA PROPOSTA DE INTERVENÇÃO EM SALA DE AULA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Graduação em Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Neila Tonin Agranionih.

CURITIBA

2018

Aos meus pais, irmãos e minha noiva que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus em primeiro lugar. Pelo cuidado e direcionamento.

Aos meus pais pelo incentivo e dedicação, contribuindo para meu desenvolvimento pessoal e acadêmico.

Aos meus familiares pelo exemplo, auxiliando no caminho a ser percorrido.

Aos amigos pela compreensão e descontração durante o decorrer do curso.

À minha orientadora Dra. Neila Tonin Agranionih que me passou conhecimentos extremamente valiosos durante este curso. Inicialmente na disciplina de Metodologia do Ensino da Matemática e posteriormente na orientação da monografia.

Aos professores, pedagoga, diretor e alunos da escola pesquisada, pela receptividade e importante contribuição ao trabalho desenvolvido.

A todos os professores da minha vida e colegas de classe com os quais tive a oportunidade de aprender.

Mas quem garante que os acertos mostram o que o aluno sabe? E quem diz que os erros evidenciam somente o que ele não sabe? (CURY, 2007, p.13)

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta de intervenção em sala de aula através da análise de erros em uma turma de Ensino Médio de Educação de Jovens e Adultos. O objetivo principal é o de possibilitar aos alunos processos de aprendizagem a partir da análise de seus próprios erros. Ainda procura-se verificar as contribuições da análise de erros na aprendizagem matemática, principalmente como ferramenta capaz de conectar conteúdos novos aos já aprendidos. Entendendo o erro como lacuna entre o conhecimento a ser aprendido e o já adquirido, evitando seu caráter punitivo, é que as atividades aqui descritas foram desenvolvidas. Para tanto, foram aplicados dois instrumentos avaliativos abordando o conteúdo de porcentagem, o primeiro com o objetivo de identificar os erros apresentados e os procedimentos adotados no desenvolvimento das resoluções e o segundo, seguindo os moldes do primeiro, com o objetivo de identificar os erros que continuaram a aparecer. Após a aplicação do primeiro instrumento avaliativo, os exercícios foram corrigidos com os alunos, que participaram identificando onde os erros apareceram e sugerindo soluções para os mesmos. Durante o levantamento e análise dos dados, os erros foram categorizados em: erros nas operações, erros conceituais, erros de interpretação e outros erros. Os erros nas operações consistiram basicamente em erros na multiplicação de decimais. Os erros conceituais ficaram divididos entre erros na aplicação da “regra de três” e erros com porcentagens sucessivas. Os erros de interpretação foram considerados os erros provenientes da má compreensão do enunciado. Os erros que não se enquadraram nos anteriores foram classificados como “outros erros”. Dos 33 erros identificados no primeiro instrumento avaliativo, 4 foram erros nas operações, 17 conceituais, 2 de interpretação, 1 classificado como “outros erros” e 9 foram questões deixadas sem resposta. No segundo instrumento de avaliação todos os 4 erros apresentados foram decorrentes de erros nas operações. Os resultados apontam para a importância de se considerar o erro como um obstáculo a ser superado e a análise de erros como ferramenta capaz de promover um ambiente propício à construção do conhecimento por parte do próprio aluno. Além disso, a análise de erros sugere um novo encaminhamento metodológico, utilizando-se dos erros para, a partir da superação dos mesmos, desenvolver o aprendizado de novos conteúdos.

Palavras-chave: Erro. Análise de erros. Educação de Jovens e Adultos.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – TAXIONOMIA DE BORASI .....	19
FIGURA 2 – EXEMPLO DE QUESTÕES CONTIDAS NO TESTE .....	21
FIGURA 3 – EXEMPLOS DE “SOBREGENERALIZAÇÕES” .....	24
FIGURA 4 – PEÇAS DO QUEBRA-CABEÇA TRIANGULAR .....	27
FIGURA 5 – INSTRUMENTO AVALIATIVO 1 .....	36
FIGURA 6 – INSTRUMENTO AVALIATIVO 2 .....	38
FIGURA 7 – ERRO COMETIDO NA QUESTÃO 1) C. PELO ALUNO 4 .....	42
FIGURA 8 – ERRO COMETIDO NA QUESTÃO 1) D. PELO ALUNO 7 .....	43
FIGURA 9 – PRIMEIRO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 2 .....	43
FIGURA 10 – SEGUNDO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 2 .....	43
FIGURA 11 – PRIMEIRO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 3 .....	44
FIGURA 12 – SEGUNDO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 3 .....	44
FIGURA 13 – RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 4 .....	45
FIGURA 14 – PRIMEIRO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 5 .....	45
FIGURA 15 – SEGUNDO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 5 .....	46
FIGURA 16 – RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 6 .....	46
FIGURA 17 – PRIMEIRO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 7 .....	47
FIGURA 18 – SEGUNDO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 7 .....	47
FIGURA 19 – TERCEIRO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 7 .....	47
FIGURA 20 – QUARTO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 7 .....	48
FIGURA 21 – QUINTO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 7 .....	48
FIGURA 22 – PRIMEIRO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 8 .....	49
FIGURA 23 – SEGUNDO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 8 .....	49
FIGURA 24 – TERCEIRO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 8 .....	50
FIGURA 25 – RESOLUÇÃO FINAL DA QUESTÃO 8 .....	51
FIGURA 26 – PRIMEIRO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 9 .....	51
FIGURA 27 – SEGUNDO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 9 .....	52
FIGURA 28 – TERCEIRO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 9 .....	52
FIGURA 29 – RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 10 .....	53
FIGURA 30 – RESOLUÇÃO FINAL DA QUESTÃO 10 .....	53
FIGURA 31 – RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 11 .....	54

FIGURA 32 – RESOLUÇÃO FINAL DA QUESTÃO 11 .....	54
FIGURA 33 – PRIMEIRO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 12 .	55
FIGURA 34 – SEGUNDO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 12.	55
FIGURA 35 – ERRO COMETIDO NA QUESTÃO 1. C) .....	61

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – RESULTADO GERAL OBTIDO.....	22
TABELA 2 – RESULTADO OBTIDO PELOS ALUNOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA.....	22
TABELA 3 – ETAPAS DA PESQUISA .....	34
TABELA 4 – ERROS E ACERTOS POR ALUNO EM CADA QUESTÃO - 1ª AVALIAÇÃO.....	41
TABELA 5 – QUANTIDADE DE ERROS POR QUESTÃO - 1ª AVALIAÇÃO.....	41
TABELA 6 – QUANTIDADE DE ERROS POR ALUNO - 1ª AVALIAÇÃO.....	41
TABELA 7 – QUANTIDADE DE ACERTOS POR QUESTÃO - 1ª AVALIAÇÃO.....	42
TABELA 8 – QUANTIDADE DE ACERTOS POR ALUNO - 1ª AVALIAÇÃO .....	42
TABELA 9 – CLASSIFICAÇÃO DOS ERROS - 1ª AVALIAÇÃO.....	57
TABELA 10 – TIPOS DE ERROS - 1ª AVALIAÇÃO .....	58
TABELA 11 – ERROS E ACERTOS POR ALUNO EM CADA QUESTÃO - 2ª AVALIAÇÃO.....	61
TABELA 12 – CLASSIFICAÇÃO DOS ERROS - 2ª AVALIAÇÃO.....	62
TABELA 13 – TIPOS DE ERROS - 2ª AVALIAÇÃO .....	63

## **LISTA DE ABREVIATURAS OU SIGLAS**

ABNT	- Associação Brasileira de Normas Técnicas
EJA	- Educação de Jovens e Adultos
Enade	- Exame Nacional de Desempenho
Enem	- Exame Nacional do Ensino Médio
Pisa	- Programa Internacional de Avaliação de Alunos
Saeb	- Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>12</b>
<b>2 HISTÓRICO DA ANÁLISE DE ERROS .....</b>	<b>15</b>
2.1 APLICAÇÃO DA ANÁLISE DE ERROS NO ENSINO SUPERIOR .....	19
2.2 APLICAÇÃO DA ANÁLISE DE ERROS NO ENSINO FUNDAMENTAL .....	28
<b>3 PROCEDIMENTOS DA PESQUISA .....</b>	<b>33</b>
<b>4 LEVANTAMENTO E ANÁLISE DOS DADOS.....</b>	<b>40</b>
4.1 LEVANTAMENTO E ANÁLISE DOS ERROS DO PRIMEIRO INSTRUMENTO AVALIATIVO .....	40
4.2 QUANTIFICAÇÃO E CLASSIFICAÇÃO DOS ERROS DO PRIMEIRO INSTRUMENTO AVALIATIVO .....	56
4.3 LEVANTAMENTO E ANÁLISE DOS ERROS DO SEGUNDO INSTRUMENTO AVALIATIVO .....	60
4.4 QUANTIFICAÇÃO E CLASSIFICAÇÃO DOS ERROS DO SEGUNDO INSTRUMENTO AVALIATIVO .....	62
<b>5 CONCLUSÃO .....</b>	<b>64</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>67</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Como aproximar conceitos assimilados pelos alunos com conceitos a serem aprendidos, realizando conexão entre conteúdos?

Observando a escola percebe-se que em sua organização aparecem divisões que podem ser: por períodos do dia, turmas, idade, entre outras, o que é importante para o bom funcionamento da instituição.

Além dessas divisões, existe a separação do conteúdo em disciplinas, e as próprias disciplinas podem ter suas subdivisões. Por exemplo, a matemática pode ser dividida em álgebra, trigonometria e geometria, a química em orgânica e inorgânica e assim para as demais matérias.

No livro didático, os conteúdos de álgebra são separados em capítulos e estes são apresentados pelo professor de maneira fragmentada em determinada quantidade de aulas.

Desta forma, o conteúdo ensinado é apresentado ao aluno de maneira fracionada, o que se justifica pela quantidade e diversidade de conteúdos.

Segundo Morin (2003, p.24) o ensino tem se caracterizado de tal forma a privilegiar a separação em detrimento da ligação e a análise em detrimento da síntese. Com isso em mente, o autor defende que a educação deva se pautar no desenvolvimento da aptidão para contextualizar e globalizar os saberes.

Esta contextualização e globalização dos saberes fazem com que as distâncias entre as disciplinas possam ser diminuídas e que a aprendizagem possa ter mais sentido e conseqüentemente ser mais duradoura.

Seguindo este mesmo raciocínio, a aproximação entre os conteúdos apresentados em uma mesma disciplina pode auxiliar na aprendizagem dos alunos. Uma das formas de se fazer isso é aproveitando um conteúdo já assimilado pelo aluno para servir como base para os próximos.

Entendendo o erro como consequência do espaço existente entre o conhecimento prévio e o a ser aprendido, conforme Abrahão (2004, p.34), é que a análise de erros pode ajudar, aproximando conhecimentos, fazendo com que um erro cometido pelo aluno possa ser analisado e forneça informações necessárias para superá-lo.

Assim, os conteúdos ensinados a respeito de determinado assunto podem ser tratados sob o ponto de vista da análise de erros, criando um aprendizado inter-relacionado e mais consistente.

A análise de erros também se faz importante por tornar o aprendizado um processo construído pelo próprio aluno, processo autônomo em que o professor aparece como facilitador e não apenas como agente centralizador e detentor da verdade.

Além disso, faz com que o erro perca o caráter punitivo, relacionado ao fracasso escolar, tornando-o um obstáculo a ser superado durante o processo de construção do conhecimento (Abrahão 2004, p.31).

Com o objetivo de possibilitar aos alunos processos de aprendizagem a partir da análise de seus próprios erros, é que o presente trabalho se apresenta.

Além disso, procura-se verificar as contribuições do processo de análise de erros na aprendizagem matemática e apresentar uma proposta de intervenção em sala de aula através da análise de erros, principalmente como ferramenta de ensino capaz de realizar a conexão entre conteúdos já assimilados pelos alunos com aqueles a serem aprendidos.

O presente trabalho foi realizado num Colégio Estadual, localizado na cidade de Curitiba/PR, com alunos do Ensino Médio da Educação de Jovens e Adultos.

Primeiramente foram coletadas informações, obtidas em conversa com o professor da turma, sobre conteúdos já ensinados e aqueles que seriam abordados futuramente.

A partir dessas informações foi definido, com o professor, o conteúdo matemático a ser desenvolvido na pesquisa.

Um instrumento de avaliação, que passou pela aprovação do professor da classe, envolvendo o conteúdo matemático escolhido, foi desenvolvido e aplicado aos alunos.

As informações coletadas por este instrumento avaliativo foram analisadas e diante dessa análise foram elaboradas duas aulas onde os erros levantados foram apresentados aos alunos, de modo que eles pudessem perceber onde estavam errando.

A seguir foi aplicado um novo instrumento de avaliação com vistas a identificar se os alunos continuam cometendo os mesmos erros ou não, e que tipo de erros cometem.

O trabalho está organizado da seguinte forma: o primeiro capítulo, após a introdução, apresenta o histórico da análise de erros. O tema é relatado sob o ponto de vista de Cury (2007) e Rico (1998), apresentando duas aplicações da análise de erros desenvolvidas por Cury (2006) e Pinto (2000).

No próximo capítulo são descritos os procedimentos da pesquisa, pontuando as etapas percorridas durante a elaboração e aplicação das atividades.

Em seguida, são apresentados os dados levantados e as análises dos mesmos, ressaltando as contribuições da análise de erros no aprendizado do público alvo.

A conclusão retoma a questão inicial sobre o erro como elemento de conexão entre os conteúdos, capaz de orientar o professor de modo a promover um ambiente propício à construção do conhecimento pelo aluno.

## 2 HISTÓRICO DA ANÁLISE DE ERROS

Radatz (1979, 1980 apud CURY, 2007, p.19) discorrendo sobre o estudo dos erros realizados na Europa e Estados Unidos, desde o começo do século XX, identificou diferenças em termos de pesquisas educacionais e psicológicas, políticas educacionais e estruturas escolares, que originaram investigações de caráter distinto. O que justifica a dificuldade em consolidar a análise de erros como tendência claramente definida (Cury, 2007, p.19).

Baseando-se em pesquisas realizadas por Radatz (1980), Rico (1998, p.77) destaca as contribuições relacionadas à análise de erros, desde o início do século XX até final dos anos 70, agrupando por países. Na Alemanha, o interesse no estudo dos erros no período compreendido entre as duas grandes guerras pode ser atribuído à importância dada à pedagogia empírica, que empregava técnicas de introspecção próprias da psicologia experimental. É possível perceber que estes trabalhos sofreram influência predominante da Psicanálise, da teoria de Gestalt e da psicologia do pensamento.

Ainda conforme Rico (1998, p.77) considera-se Weiner (1922) o fundador da investigação didática orientada ao estudo dos erros. Weiner estabeleceu padrões de erros que explicassem os equívocos individuais realizados por alunos em todas as disciplinas e idades. Além disso, dentro do conceito de incorreto, distinguiu equívoco, falsificação e erro. Agrupando os erros em cinco categorias: erros familiares, erros persistentes, erros por semelhança, erros mistos e erros devidos a situações emocionais.

Kiessling (1925 apud RICO, 1998, p.78) trabalhou principalmente com a chamada tendência ao erro, espécie de predisposição em se equivocar, presente em um grupo de pessoas. Também realizou estudos referentes à avaliação e tratamento do erro.

Rose (1928 apud RICO, 1998, p.78) classificou as causas dos erros em educação matemática: desatenção, desconhecimento das regras, confusão de conceitos e incapacidade de reconhecer os traços característicos de um problema matemático.

Voltando-se para o ensino da matemática, Seseman (1931 apud RICO, 1998, p.78) considerava os erros fenômenos resultante da combinação incorreta de

tendências. Este estudioso classificou os erros em aritmética como sendo de três tipos: mecânicos, associativos e funcionais.

A partir da análise da resolução de problemas em uma prova, Schlaak (1968 apud RICO, 1998, p.78) observou dois focos pontuais de erros: compreensão inadequada dos enunciados e determinação incorreta dos números.

Trabalhando com os erros de cálculo, Glück (1971 apud RICO, 1998, p.78) encontrou cinco tipos de erros: troca de operação, aproximação aditiva ou multiplicativa, resultados parciais, apenas o primeiro dígito correto e erros de transcrição.

Pippig (1977 apud RICO, 1998, p.78) trabalha, em especial, com os erros e dificuldades que surgem em problemas aritméticos, conseguindo descrever causas dos erros nas diferentes etapas do processo de resolução.

Rico (1998, p.78) continua com os estudos realizados na União Soviética, no começo dos anos 60. Dentre os soviéticos destacam-se Kuzmitskaya e Menchinskaya. Kusmitskaya (apud RICO, 1998, p.78) determinou quatro causas dos erros: insuficiência na memória de curto prazo; compreensão insuficiente das condições do problema; ausência de regras verbais para a realização de cálculos; o uso incorreto das quatro operações básicas. Menchinskaya (apud RICO, 1998, p.79) localizou outras quatro causas do aparecimento dos erros: realização incorreta de uma operação; compreensão conceitual qualitativamente insuficiente; erros mecânicos por distração ou falta de interesse; erros devidos à aplicação de regras ou algoritmos inadequados.

Nos Estados Unidos destacam-se os trabalhos de Thorndike (1917 apud RICO, 1998, p. 79) e sua Psicologia da Aritmética, no estudo da determinação de erros.

Buswell (1925 apud RICO, 1998, p.79) identificou uma série de erros típicos nas quatro operações aritméticas, aplicando um método de análise mais completo, que incluía exercícios escritos, entrevistas e observações em sala de aula.

Brueckner (1935 apud RICO, 1998, p.79) pautou seu trabalho sobre cinco objetivos: listar todas as técnicas errôneas; determinar a distribuição de frequências dessas técnicas, segundo as idades; analisar dificuldades especiais, em particular as relacionadas à divisão e operações com zero; determinar a persistência de técnicas errôneas individuais; classificar e agrupar os erros.

Na Espanha, os autores Villarejo e Fernández Huerta (1953 apud RICO, 1998, p.80) publicam uma reflexão relacionada aos erros mais frequentes na aritmética escolar e fornecem subsídios para o ensino baseado em métodos derivados da análise de erros.

Centeno (1988 apud RICO, 1998, p.80) sugere a necessidade de interpretação dos erros para orientar o processo de ensino.

Continuando com os precursores da educação matemática, Cury (2007, p.20) apresenta seis pesquisadores importantes e cuja obra fornece contribuições relevantes para a análise de erros.

Um desses autores é o, já citado anteriormente, psicólogo americano Edward Thorndike. Rocha Falcão (2003 apud CURY, 2007, p.20) comenta que as experiências feitas por Thorndike e Pavlov utilizando animais no final do século XIX e começo do século XX que deram início à abordagem comportamentalista da aprendizagem.

Thorndike (1936 apud CURY, 2007, p.21) enuncia a lei do exercício – o uso fortifica e o desuso enfraquece as conexões mentais – e a lei do efeito – as conexões seguidas de estados de satisfação tendem a fortalecer-se e as seguidas de estados de aborrecimento tentem a enfraquecer-se.

O segundo pesquisador citado por Cury (2007, p.22) é Hadamard, que foi inspirado pelos pensamentos de Poincaré. Poincaré (2000 apud CURY, 2007, p.23) descrevendo sobre a criação de um determinado tipo de função, narra que durante um período de descanso, deixando de lado suas preocupações com o problema a resolver, encontrou a solução desejada. Poincaré defende que é nessa alternância entre o pensamento consciente e inconsciente que o trabalho científico e a descoberta vêm à tona. A partir dessa ideia questiona se durante o processo de aprendizagem, os erros não estariam neste espaço entre o consciente e o inconsciente e se a imposição das regras não prejudicaria o processo cognitivo.

Hadamard (1945 apud CURY 2007, p.24) considera que comete mais erros que seus próprios alunos, porém, logo que percebe, os corrige não sendo perceptível no resultado final. Por terem contato apenas com o resultado final, os estudantes ficam tentados a reproduzi-lo eliminando os erros, ao invés de aproveitá-los para superar suas dificuldades.

O terceiro pesquisador é o psicólogo russo Vladim Andreevich Krutetskii (1976 apud CURY 2007, p.26) que critica os testes psicométricos ocidentais

utilizados para avaliação das habilidades. Enfatizando a importância de se analisar o processo e não apenas o resultado.

Nesta análise Krutetskii (1976 apud CURY 2007, p.28) propõe o registro do pensamento em voz alta dos estudantes e o questionamento de suas respostas, com o objetivo de verificar como pensavam durante a execução das tarefas.

Cury continua citando as contribuições de Newell e Simon (1972 apud CURY 2007, p.29) que suportados pela cibernética e a teoria da informação, entendem o ser humano como sendo um processador de informações e analisam a maneira como essas informações são processadas durante a resolução de problemas.

O quinto estudioso é o francês Guy Brousseau (1983 apud CURY 2007, p.31) que trabalhou com a noção de obstáculos epistemológicos, conceito apresentado por Bachelard (1996 apud CURY 2007, p.31) como sendo o causador da estagnação no conhecimento científico. Entende-se que o aprendizado acontece sobrepondo-se a um conhecimento anterior, superando um conteúdo mal estabelecido, um obstáculo epistemológico.

A última pesquisadora citada por Cury é a italiana Raffaella Borasi (1996 apud CURY 2007, p.35) que influenciando a matemática escolar dos Estados Unidos, sugeriu aos professores que modificassem o papel do aluno no aprendizado, de passivo para construtor do próprio conhecimento.

Nesta concepção o erro é trabalhado provocando novos questionamentos, ao invés de ser apenas combatido e eliminado. Evidenciando que mais importante que o resultado é o processo percorrido.

A tabela a seguir mostra a chamada, pela própria pesquisadora, “taxionomia de usos dos erros como trampolins para a pesquisa” e resumem as principais contribuições da autora para a análise de erros.

FIGURA 1 – TAXIONOMIA DE BORASI

Objetivo da aprendizagem	Nível de discurso matemático		
	Realização de uma tarefa matemática específica	Compreensão de algum conteúdo técnico-matemático	Compreensão sobre a natureza da Matemática
<b>Remediação</b>	Análise de erros detectados, para compreender o que houve de errado e corrigir, de forma a realizar a tarefa com sucesso.	Análise de erros detectados, para esclarecer más interpretações de um conteúdo técnico-matemático.	Análise de erros detectados, para esclarecer más interpretações sobre a natureza da Matemática ou de conteúdos específicos.
<b>Descoberta</b>	Uso construtivo de erros no processo de resolução de um novo problema ou tarefa; monitoramento do trabalho de alguém, para identificar potenciais enganos.	Uso construtivo de erros ao aprender novos conceitos, regras, tópicos, etc.	Uso construtivo de erros ao aprender sobre a natureza da Matemática ou de algum conteúdo matemático.
<b>Pesquisa</b>	Erros e resultados intrigantes motivam questões que geram pesquisas em novas direções e servem para desenvolver novas tarefas matemáticas.	Erros e resultados intrigantes motivam questões que podem levar a novas perspectivas sobre um conceito, regra ou tópico não contemplado no planejamento original.	Erros e resultados intrigantes motivam questões que podem levar a <i>insights</i> e perspectivas inesperadas sobre a natureza da Matemática ou de algum conteúdo matemático.

FONTE: CURY (2007, p.37).

A partir das contribuições desses precursores, novos estudos foram desenvolvidos, contribuindo para o aprofundamento no conhecimento sobre análise de erros.

Dentre esses estudos, destacam-se os trabalhos de Cury (2006) e Pinto (2000), os quais serão comentados a seguir.

## 2.1 APLICAÇÃO DA ANÁLISE DE ERROS NO ENSINO SUPERIOR

Em seu artigo “Análise de Erros e Formação de Professores: Sugestões para Ensino e Pesquisa em cursos de Licenciatura em Matemática”, Cury (2006) entende que os cursos de formação de professores de matemática necessitam

oferecer referenciais que fundamentem os processos de avaliação na disciplina de matemática. Esses referenciais levam à percepção de que a avaliação, não importando qual instrumento seja empregado, aparece como parcial e incapaz de extrair todo o conhecimento do avaliado.

Além disso, devem ser consideradas as questões afetivas, inerentes a cada estudante. Cury (2006, p.96) enumera como componentes emocionais o medo de receber uma nota baixa, a baixa autoestima e os prejulgamentos em relação à Matemática. Diante desses componentes o aluno pode ser levado a evitar falar sobre suas dificuldades e até inibir a ação do professor, dificultando sua ação no auxílio ao aprendizado do aluno.

Cury (2006, p. 96) continua dizendo que a avaliação não deve se restringir a pontuar os erros e acertos, sendo esta apenas uma das formas de se avaliar o desempenho.

Sobre a análise de erros, ela aparece desde o início do século passado, como uma abordagem de pesquisa seguindo as tendências pedagógicas vigentes no decorrer dos anos.

Diante dos atuais exames como o do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb), do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa), do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e o Exame Nacional de Desempenho (Enade), a análise de erros reaparece observando os erros cometidos nestes exames, para melhor entender onde o ensino e a aprendizagem aparecem deficientes.

Nas grades curriculares dos cursos de licenciatura em matemática, são levados em consideração não apenas o conhecimento matemático, mas também o conhecimento prático necessário para a futura atuação profissional. No uso da análise de erros é necessário entender que ela não é somente uma técnica aplicada para desempenhar um determinado procedimento. O erro e a investigação sobre suas possíveis causas fazem parte do saber docente, ou seja, da prática em sala de aula, isto porque, a partir dos erros cometidos, o desenvolvimento das aulas pode ser alterado. Essa investigação envolve também um profundo conhecimento do conteúdo matemático.

Desta forma, a análise de erros atente tanto aos quesitos da prática docente, como das questões disciplinares, no sentido do conteúdo matemático.

Em seu projeto “Análise de erros em disciplinas matemáticas de cursos superiores”, desenvolvido em conjunto por oito docentes de Instituições de Ensino Superior do Rio Grande do Sul, Cury (2006, p.97) procurou analisar e classificar erros cometidos por alunos ingressantes em disciplinas matemáticas de cursos superiores; elaborar e desenvolver atividades de sala de aula para explorar as dificuldades detectadas; avaliar os resultados da experiência e a possibilidade de reaplicação em diferentes Instituições de Ensino Superior do Rio Grande do Sul e do país.

As atividades foram aplicadas a 368 alunos de 12 turmas de cursos da área de Ciências Exatas das Instituições envolvidas. As atividades consistiam em um teste de múltipla escolha, onde além de assinalar a alternativa considerada correta, o aluno deveria desenvolver a questão, de forma que fosse possível, na segunda fase, analisar qualitativamente suas produções.

Diante da dificuldade apresentada pelos alunos ingressantes no Ensino Superior frente às disciplinas de Cálculo, foram elaboradas questões que envolvessem assuntos do Ensino Fundamental necessárias para resolução de exercícios envolvendo gráfico de funções, limites e derivadas. Segue abaixo, para exemplificar os dados obtidos na pesquisa, o enunciado de três questões contidas no teste aplicado:

FIGURA 2 – EXEMPLO DE QUESTÕES CONTIDAS NO TESTE

**Questão A:** Se  $x \neq 2$  e  $x \neq 0$  então a expressão  $\frac{x^3 + x^2 - 6x}{8x^2 - 16x}$  pode ser escrita como:

a)  $x + 3$     b)  $\frac{x+3}{8}$     c)  $8x$     d)  $\frac{4}{x+3}$     e)  $16$ .

**Questão B:** O valor de dois carros de mesmo preço, adicionado ao de uma moto, soma R\$ 41.000,00. No entanto, o valor de duas dessas motos, adicionado ao de um carro do mesmo tipo, é de R\$ 28.000,00. A diferença entre o valor do carro e o da moto, em reais, é:

a) 5.000    b) 13.000    c) 18.000    d) 23.000    e) 41.000

**Questão C:** O conjunto-solução, em  $\mathcal{R}$ , da equação  $\frac{1}{x+5} + \frac{1}{2x+9} = \frac{2}{2x^2+19x+45}$  é

a)  $\{-4, -5\}$     b)  $\{-5\}$     c)  $\{-4\}$     d)  $\{4\}$     e)  $\{5\}$

A tabela a seguir apresenta o resultado obtido na aplicação do teste:

TABELA 1 – RESULTADO GERAL OBTIDO

Questão	Nº de acertos	%	Nº de itens sem resposta	%
A	121	32,9	124	33,7
B	232	63,0	48	13,0
C	67	18,2	128	34,8

FONTE: CURY (2006, p.99).

A tabela mostra que das questões apresentadas, a questão B apresentou o maior número de acertos, a questão C o menor e a questão A ficou entre as duas. Relacionando o número de acertos com o grau de dificuldade da questão, concluiu-se que a questão A apresentou dificuldade média, a C dificuldade alta e a B foi a mais fácil.

Querendo saber qual o desempenho dos alunos provenientes dos dois cursos de Licenciatura em Matemática, os pesquisadores apresentaram a seguinte tabela:

TABELA 2 – RESULTADO OBTIDO PELOS ALUNOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Questão	% de acertos no Curso 1	% de acertos no Curso 2
A	33	39
B	78	43
C	6	7

FONTE: (CURY 2006, p.99).

O resultado obtido pelos alunos de Licenciatura em Matemática não foi tão diferente do resultado geral, com a ressalva de que a questão C apresentou-se ainda mais difícil para este grupo de alunos.

Diante da limitação da análise quantitativa de erros e acertos, a autora partiu para a segunda parte da pesquisa, que abordou a análise qualitativa das questões.

Em relação à questão A, a autora percebeu que a maior dificuldade apareceu na fatoração das expressões e nas operações com potências de  $x$ . Na questão B a dificuldade foi na tradução dos dados do problema para um sistema de equações, o que levou à resolução por tentativa. Outro erro foi o de se obter apenas

o valor de um dos elementos, esquecendo-se de encontrar o outro para ter a diferença entre os veículos, que era a solução desejada.

A questão C foi a que apresentou maior número de erros e conseqüentemente o maior número de tipo de erros. O erro mais recorrente indica que os alunos tendem a aplicar a fórmula de Bhaskara a qualquer expressão quadrática, sem entender o que está sendo pedido. A autora notou também que alguns alunos não sabem adicionar frações algébricas, realizando a soma, separadamente, dos numeradores e denominadores, sem encontrar um denominador comum.

Focando na resolução dos alunos de Licenciatura em Matemática, em termos qualitativos não se notou diferença em comparação com os demais alunos analisados.

O resultado da análise, em especial com relação aos estudantes de Licenciatura em Matemática, levou ao seguinte questionamento: se estes estudantes que, em princípio, escolheram a Matemática porque querem ser professores dessa disciplina, evidenciam tais problemas para resolver questões da Educação Básica, como esperar que possam se graduar com condições de entender as dificuldades de seus alunos e de auxiliá-los a desenvolver suas habilidades matemáticas?

Esse questionamento fez com que, nos cursos de Licenciatura em Matemática das Instituições envolvidas no projeto, os dados obtidos na pesquisa fossem trabalhados, entre os graduandos, nas disciplinas de Metodologia do Ensino de Matemática.

A cada erro encontrado durante a análise de erros, Cury (2006, p.101) pontua que é possível buscar teóricos que já estudaram sobre a dificuldade de se aprender tal conteúdo ou sobre as habilidades a serem desenvolvidas para resolução de determinado problema. Com relação à Álgebra, Cury (2006, p.101) cita Hoch e Dreyfus (2004 apud CURY 2006, p.101), que consideram que uma estrutura algébrica pode ser definida em termos de forma ou ordem. Em uma das atividades realizadas com alunos do Ensino Médio, em Israel, foi proposta a resolução da seguinte equação:  $1 - 1/(n+2) - (1 - 1/(n+2)) = 1/110$ , os investigadores constataram que a maior parte dos estudantes tentaram encontrar um denominador comum e posteriormente cancelaram os termos, ao invés de notar que a estrutura algébrica dentro e fora do parênteses era a mesma e estava separada por um sinal de menos e por isso a equação não possuía solução.

Linchevski e Livneh (1999 apud CURY 2006, p.102) pesquisaram estudantes do Ensino Fundamental, em Israel e Canadá, solicitando que resolvessem expressões numéricas, verificando se conheciam a ordem das operações. Além disso, as pesquisadoras confrontavam as respostas dos alunos, entre os próprios colegas de sala, questionando qual resposta estava correta. A pesquisa buscou também verificar as mudanças que surgiam quando no emprego dos parênteses.

Kirshner e Awtry (2004 apud CURY 2006, p.102) pesquisaram estudantes do Ensino Fundamental, nos Estados Unidos, e discutem sobre os erros causados pela “sobregeneralização” de regras para transformações algébricas. Abaixo segue figura apresentando alguns desses erros:

FIGURA 3 – EXEMPLOS DE “SOBREGENERALIZAÇÕES”

ERRADO	CORRETO
$(a + b)^c = a^c + b^c$	$(a + b)c = ac + bc$
$\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}$
$a^{mn} = a^m a^n$	$a^{m+n} = a^m a^n$
$a^{m+n} = a^m + a^n$	$a(m + n) = am + an$
$\frac{a}{b + c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$	$\frac{b + c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$
$\frac{a + x}{b + x} = \frac{a}{b}$	$\frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$

FONTE: (KIRSHNER e AWTRY 2004, p.5).

Os autores afirmam que certas regras parecem ter um apelo visual, caracterizado por eles como “sentido estético da forma”, estas regras seriam compreendidas mais facilmente pelos alunos.

Pierce e Stacey (2004 apud CURY 2006, p.103) apresentam uma estrutura para caracterizar a introspecção algébrica necessária para que o estudante consiga

lidar com símbolos algébricos em uma atividade envolvendo transformações. A introspecção algébrica pode ser dividida em dois aspectos: a expectativa algébrica e a habilidade para unir representações. As autoras definem expectativa algébrica como sendo o pensamento que considera a natureza do resultado com consequência de algum processo algébrico. Esta expectativa está relacionada com a observação de padrões e a habilidade de antever a ocorrência dos mesmos.

Após a apresentação de alguns teóricos que fundamentam a Educação Algébrica, Cury (2006, p.103) começa a citar alguns estudiosos dedicados à Análise de Erros em Matemática. O primeiro a ser citado é Borasi (1996 apud CURY 2006, p.103) que sugere que os erros sejam utilizados como ferramentas para aprendizagem e sua aplicação pode acontecer de três formas, não exclusivas, sendo elas: remediação, descoberta e exploração. A primeira procura reapresentar um assunto mal compreendido pelo aluno, a segunda busca monitorar a atividade dos alunos, na tentativa de entender como o conhecimento é construído por eles e a última consiste em investigar a origem de um dado resultado.

Como já citado anteriormente, as habilidades de visualização de padrões, reconhecimento de estruturas algébricas, manipulação de símbolos e estimativa de resultados, estão relacionadas com a aprendizagem Algébrica. Cury (2006, p.104) pontua que as pesquisas realizadas mostraram que os calouros nos cursos de Ciências Exatas apresentam dificuldades quanto a estas habilidades. Empregando a análise de erros, segundo Borasi (1996 apud CURY 2006, p.104), pode-se monitorar a atividade algébrica dos alunos e a partir desse monitoramento, descobrir quais habilidades apresentam maiores problemas e então elaborar estratégias que as desenvolvam.

Tsamiret al. (2004 apud CURY 2006, p.104) apresentam outra abordagem para a análise de erros, onde o estudo está voltado para as atitudes dos professores frente às produções dos alunos. Esses autores gravaram a aula de um professor de Ensino Médio e posteriormente apresentaram esta gravação ao docente. Ao assistir à gravação, o professor identificou erros nas perguntas e respostas dos alunos e sugeriu formas de superá-los. Os pesquisadores ainda propuseram outros erros, relacionado com o tema ensinado, que os alunos cometem com frequência e questionaram o professor quanto à abordagem que seria adotada nestas situações. Após análise das respostas, os pesquisadores classificaram as reações do docente em dois casos. O primeiro caso, reação econômica, consistia em ignorar o erro,

continuando com a aula e o segundo, chamado de reação elaborada, onde a solução correta é repetida pelo aluno e exposta aos colegas.

A análise dos pesquisadores concluiu que o professor dedicava mais tempo aos erros relacionados a um conteúdo novo e menos aos antigos. Como se a obrigação do ensino e aprendizagem estivesse apenas relacionada com o conteúdo atual, o que pode ser um problema, principalmente em Matemática, onde usualmente os conteúdos estão inter-relacionados.

Cury (2006, p.107), durante as aulas de Metodologia do Ensino de Matemática, aplicou o teste original citado anteriormente, aplicado aos calouros de cursos de Ciências Exatas, substituindo as questões de múltipla escolha para questões abertas. A seguir os alunos analisaram as respostas dos colegas de turma, discutindo as estratégias e erros detectados.

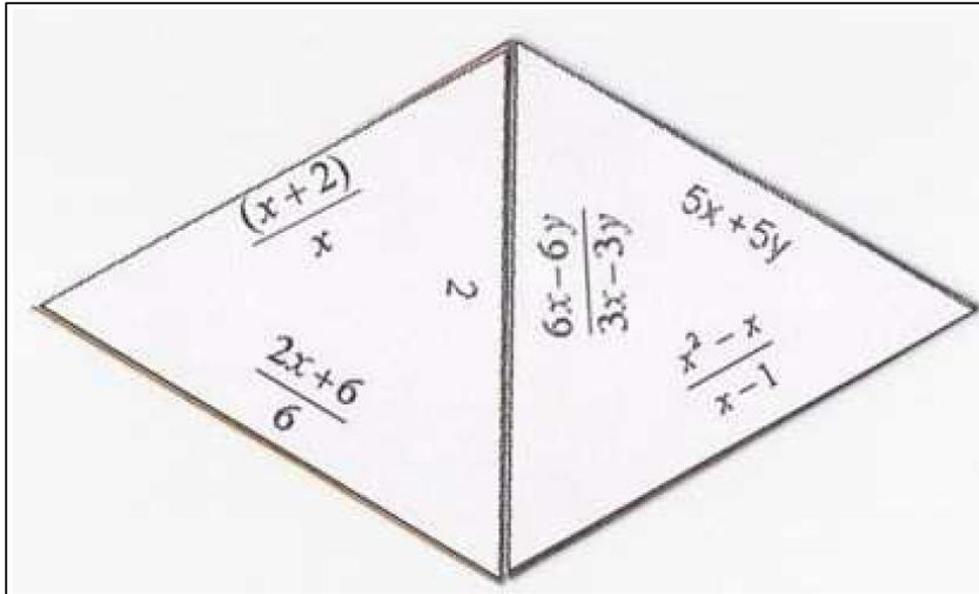
Continuando com a atividade, os licenciandos receberam as produções realizadas pelos calouros e a partir das respostas, elaboraram um texto-síntese analisando e categorizando os erros apresentados. A comparação daquilo que produziram com as soluções dos calouros auxiliaram no levantamento das dificuldades de aprendizagem e na percepção da avaliação escolar como instrumento de ensino e não apenas como ferramenta utilizada para aprovação ou reprovação do aluno.

No sentido de desenvolver as habilidades necessárias para a aprendizagem de conteúdos matemáticos, Cury (2006, p.108) propõe as seguintes atividades. A primeira apresenta uma sequência de quatro números, onde os números centrais foram substituídos por zero e não se sabe quais são. Sabe-se apenas que para chegar ao último número é necessário efetuar alguma operação que também se desconhece. A partir desse enunciado o aluno precisa descobrir quais são os números da sequência e qual fórmula permite continuá-la. As sequências propostas foram: 0 0 0 24; -4 0 0 32; 1,5 0 0 -0,75; 128 0 0 2. Ao final da atividade o aluno é incentivado a criar outras sequências e apresentá-la aos demais colegas, para que tentem completá-las.

A segunda atividade pede para que o aluno escolha um número, se for par, deve-se dividir por 2, se for ímpar, deve-se multiplicar por 3 e somar 1. O processo deverá ser repetido sucessivamente até que se atinja 1. O aluno é questionado a pensar se sempre o número 1 será atingido e para ajudar nessa questão pede-se para que sejam testados os números 32, 160 e 7.

A última atividade trata-se de um jogo, chamado de Quebra-cabeça Triangular das Frações Algébricas. O jogo contém 16 peças com formato de triângulos equiláteros, de 6 cm de lado, que devem se encaixar, relacionando questão à resposta, conforme figura abaixo.

FIGURA 4 – PEÇAS DO QUEBRA-CABEÇA TRIANGULAR



FONTE: CURY (2006, p.110).

Essas peças serão colocadas sobre uma moldura com o formato de um triângulo equilátero de 24 cm de lado. O jogo termina quando todas as peças estão encaixadas na moldura triangular.

É interessante perceber as discussões que aparecem durante a resolução dos exercícios propostos. Os erros apresentados são detectados no momento em que surgem e permite ao professor atuar diretamente no problema, algo que dificilmente acontece durante uma aula tradicional ou na realização de uma prova (Cury, 2006, p.110).

A autora finaliza concluindo que os erros apresentados evidenciam a falta do “sentido da estrutura”, proveniente desde o Ensino Fundamental (Cury, 2006, p.111). Tal estrutura está relacionada com as habilidades de visualização e reconhecimento de padrões, manipulação de símbolos e estimativa de resultados e afetam diretamente a aprendizagem Algébrica.

## 2.2 APLICAÇÃO DA ANÁLISE DE ERROS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Partindo agora para a experiência desenvolvida por Pinto (2000, p.87), para a coleta de dados, utilizou-se das técnicas: observação, entrevista e análise documental.

As observações foram realizadas durante as reuniões pedagógicas, conselhos de classe e também durante o desenrolar das aulas.

O foco das observações tinha como objetivo as modalidades de correção, tipos de atividades, os critérios de escolha dos alunos para efetuar a correção, participação do grupo-classe, modalidades de intervenção da professora, tipos de erros praticados pelos alunos, utilização do tempo e as mudanças ocorridas no contexto da correção.

Após receberem as atividades propostas, um subgrupo de alunos era deslocado para outra sala e neste ambiente era possível conversar a respeito de suas dificuldades durante a realização da tarefa.

Este acompanhamento aconteceu por dez encontros e com a participação inicial de seis alunos, porém dois deles não apresentaram grandes dificuldades com relação ao tema tratado, portanto apenas quatro alunos participaram integralmente desta observação.

A análise documental baseou-se em dois tipos de documentos: um relacionado às situações de ensino e aprendizagem e outro de ordem administrativa.

Os documentos administrativos eram relatórios de avaliação, plano diretor da escola e deliberações oficiais sobre a avaliação da aprendizagem,

Os documentos relativos ao ensino e aprendizagem eram os cadernos dos alunos, provas realizadas e materiais didáticos utilizados pelo professor.

As entrevistas com a professora foram realizadas durante as trocas de turmas e com curta duração.

Além disso, Pinto (2000, p.90) realizou entrevistas com a diretora e com a coordenadora pedagógica, esclarecendo dúvidas relacionadas com as ações pedagógicas desenvolvidas pela escola, voltadas para a aprendizagem dos alunos.

Outra modalidade de entrevista foi a chamada entrevista clínica, seguindo técnicas semelhantes às utilizadas nas pesquisas psicogenéticas, tendo como objetivo conhecer o pensamento espontâneo da criança.

Essas entrevistas foram realizadas com o subgrupo de aluno, separados durante a realização das atividades e tinham como objetivo conhecer a opinião dos alunos e os pontos de vista dos alunos sobre os erros, localizar suas origens e identificar principais dificuldades com relação aos temas abordados.

Passando para a análise de dados, primeiramente Pinto (2000, p.91) sintetizou os relatos de aula, priorizando os relatos mais relevantes ao estudo.

Posteriormente, a autora confrontou sua análise com o fundamento teórico já existente e consagrado, observando que seria necessária a complementação da leitura em virtude das novas informações coletadas.

Após a análise dos dados, Pinto (2000, p.93) categorizou a correção de erros em: contexto; características; participação dos alunos; intervenções da professora; observação.

Com relação ao contexto da correção de erros, a pesquisa aconteceu em uma turma de 4ª série, cujas aulas de matemática aconteciam quatro vezes por semana, das 13:00h às 14:40h.

O grupo-classe era formado por 35 alunos, sendo 60% meninos. A maioria dos alunos pertencentes à classe média-baixa.

Os alunos ocupavam lugar fixo na sala e as carteiras eram organizadas em cinco filas.

A proposta curricular tinha uma abordagem construtivista da matemática e a orientação metodológica trazia consigo a ideia da matemática viva, em que se exige mais compreensão e raciocínio do que memorização.

O material didático consistia na publicação intitulada “Atividades Matemáticas” formada pelas folhas de atividades e orientações metodológicas sobre como trabalhar.

Com relação às características das correções, primeiramente, a autora verificou que não havia muita tarefa de casa, a professora justificava que como as mães resolviam as tarefas dos filhos, não fazia sentido deixar lição de casa para os alunos.

Não era costume a verificação dos cadernos por parte da professora. Os exercícios eram corrigidos pelos próprios alunos.

Nas provas, os erros eram corrigidos e identificados com um “X”. Havia poucos indícios de correção dos procedimentos, limitando-se apenas ao resultado final.

Voltando aos exercícios em sala de aula, após determinado tempo, suficiente para que os alunos pudessem terminar de resolvê-los, a professora escolhia um aluno para ler em voz alta o enunciado e outro para resolvê-lo, não podendo consultar o caderno.

Raras eram as vezes em que mais de um aluno ia ao quadro para resolver a mesma questão, o que poderia ser utilizado para apresentar novos procedimentos de resolução, enriquecer o aprendizado e valorizar o trabalho de outros alunos.

Pinto (2000, p.100) ainda atentou-se a conhecer que era o aluno que participava da correção, o que era escolhido para ir à lousa.

Este aluno era o considerado “bom aluno”, que terminava a tarefa mais cedo, que estava mais confiante, que se oferecia para resolução da questão. Na maioria das oportunidades era um menino, que sentava nas primeiras carteiras e que principalmente não apresentava erros durante sua resolução.

O aluno em questão tinha o papel de apresentador das formas corretas e não o de corretor dos erros. Este ponto é fundamental para perceber o papel do erro no aprendizado. Procura-se evitá-lo, difundindo o procedimento correto, os esforços são dirigidos para reprodução do acerto e não para superação do erro.

A pesquisadora entende que o aluno que está no quadro confronta-se com a situação problemática, tendo uma participação mais ativa, fazendo-o perceber mais claramente os erros cometidos. Para os demais, a correção é menos participativa, o que dificulta a percepção, por parte da professora, da forma como os erros foram compreendidos por esses alunos.

Na tentativa de envolver o máximo de alunos durante as atividades, os alunos foram organizados em duplas, o que de fato gerou maior participação da classe. Porém os extrovertidos levaram vantagem sobre os tímidos, o que para a professora era explicado pelo fato de terem mais medo de expor suas ideias.

A pesquisadora acredita que o aluno não tem medo de expor suas ideias por timidez, mas por sofrer a discriminação dos demais colegas.

A professora constatou que os alunos aprendiam melhor uns com os outros do que com ela e em determinada atividade a turma foi separada em duplas, formadas por um aluno considerado “forte” e outro “fraco”.

Nesta atividade percebeu-se que o aluno mais “forte” ditava os cálculos que deveriam ser realizados pelo outro aluno, momento em que foi sugerido que ao invés de ditar, perguntasse o que o aluno mais “fraco” estava compreendendo da

tarefa e a partir daí outras perguntas foram formuladas, fazendo com que o aluno compreendesse onde o erro aparecia.

Na tentativa de fugir da matemática tida como autoritária, o que havia sido traumatizante durante a formação da professora, ela procura relacionar a escola com o cotidiano do aluno e desenvolver a autonomia dos estudantes, incentivando que construam seu próprio conhecimento.

Porém, há momentos em que esta visão construtivista é negada, por exemplo, quando a professora compreende que os erros são fruto da falta de atenção e raciocínio, decorrentes de problemas de ordem emocional.

Em determinada atividade, a professora fornecia o modelo e pedia ao aluno que o reproduzisse, conduzindo ao acerto, o que se opõe novamente ao caráter construtivista da aprendizagem.

Sobre a observação dos erros, Pinto (2000, p.124) pontua que tanto nos discursos dos docentes, como dos discentes, havia uma forte relação entre erro e fracasso escolar.

Os erros estavam relacionados com a indisciplina mental, incapacidade de raciocinar com clareza, inabilidade para lidar com o código escrito, falta de hábitos corretos de estudo e problemas emocionais. O que para a autora era um fator limitante para que o erro fosse trabalhado de maneira mais consistente.

Ainda observando os erros cometidos pelos alunos, Pinto (2000, p.135) verificou que a percepção do erro por parte do aluno torna-se mais evidente quando a matemática escolar se aproxima da utilizada no cotidiano da criança.

Esta evidência indica uma tendência do aluno em buscar explicações em situações que lhe são familiares e que há um conhecimento informal pouco explorado pelo professor.

No último capítulo de seu livro, Pinto (2000, p.139) explica que parte da premissa de que o erro apresenta-se como oportunidade didática para o professor. Guiando para um planejamento de ensino mais eficaz, além de oferecer novos direcionamentos para suas práticas pedagógicas.

A autora observa que durante a produção do conhecimento, a partir de uma resposta pessoal a um problema, o aluno percebe o erro não como uma incapacidade ou falta de atenção, mas como algo a ser ultrapassado.

O erro aparece como problema ao aluno quando se torna um “observável”. Para compreender melhor esta questão Pinto (2000, p.145) caracteriza os diferentes níveis de relação do aluno com o erro, segundo a teoria psicogenética.

Nível A: Este aluno não consegue identificar as relações entre a forma errada e a correta. Neste nível o aluno precisa da ajuda do professor para compreender a noção que está sendo construída. Os erros são geralmente conceituais.

Nível B: O erro é percebido como algo que precisa ser retificado. Neste nível a criança consegue identificar e avaliar seus erros, os quais podem ser superados com a ajuda de colegas e livros.

Nível C: O erro é um “observável”. O aluno tem consciência do erro e de seu valor. Ele sabe por que errou. Os erros que aqui aparecem são causados por distrações.

Pinto (2000, p.147) esclarece que o erro será um observável para o aluno apenas quando for um observável para o professor, é preciso que o erro gere um conflito cognitivo no professor, provocando questionamentos em relação à natureza do erro. O professor precisa adotar uma postura investigativa perante o erro.

A autora conclui enfatizando que diagnosticar o erro do aluno sem levar em conta quem erra e por que erra, é desconhecer que os erros são produtos históricos. Acrescenta ainda que os erros devem ser considerados, como acontece com os matemáticos no processo de construção do conhecimento, obstáculos a serem ultrapassados e não como sinônimo de fracasso.

### 3 PROCEDIMENTOS DA PESQUISA

Este trabalho tem como objetivo possibilitar aos alunos processos de aprendizagem a partir da análise de seus próprios erros, bem como verificar as contribuições do processo de análise de erros na aprendizagem matemática, apresentando uma proposta de intervenção em sala de aula através da análise de erros, principalmente como ferramenta de ensino capaz de realizar a conexão entre conteúdos já assimilados pelos alunos com aqueles a serem aprendidos.

As atividades aqui descritas foram realizadas com uma turma de 11 alunos de Ensino Médio de EJA (Educação de Jovens e Adultos) relativas ao conteúdo de Porcentagem e envolveram 6 aulas de 50 minutos cada.

- 1ª etapa:

Aplicação de instrumento avaliativo com 12 questões referentes ao conteúdo de Porcentagem;

- 2ª etapa:

Correção das questões do instrumento avaliativo, identificação e categorização dos diferentes tipos de erros;

- 3ª etapa:

Correção das questões do instrumento avaliativo com os alunos, promovendo a análise coletiva dos diferentes tipos de erros.

- 4ª etapa:

Aplicação de um novo instrumento avaliativo com 10 questões referentes ao conteúdo de Porcentagem;

- 5ª etapa:

Correção das questões do novo instrumento avaliativo, identificação e categorização dos diferentes tipos de erros.

A ideia inicial contemplava ainda mais duas etapas sendo elas:

- 6ª etapa:

Correção das questões do novo instrumento avaliativo com os alunos, promovendo a análise coletiva dos diferentes tipos de erros;

- 7ª etapa:

Aplicação de um terceiro instrumento avaliativo com 5 questões referentes ao conteúdo de Porcentagem que envolvam os diferentes tipos de erros identificados anteriormente.

Porém essas duas últimas etapas não foram realizadas em virtude da inexistência de erros significativos após a aplicação do segundo instrumento avaliativo.

As etapas da pesquisa podem ser vistas resumidamente na tabela a seguir.

TABELA 3 – ETAPAS DA PESQUISA

<b>Etapa</b>	<b>Atividade</b>	<b>Quantidade de aulas</b>
1	Aplicação do 1º Instrumento	2
2	Correção do 1º Instrumento (identificação e classificação dos erros)	Etapa realizada em horário diverso da aula
3	Correção do 1º Instrumento com os alunos	2
4	Aplicação do 2º Instrumento	2
5	Correção do 2º Instrumento (identificação e classificação dos erros)	Etapa realizada em horário diverso da aula

FONTE: O autor (2018).

Cabe ressaltar que a escolha do assunto porcentagem aconteceu após conversa com a professora regente da turma e atendia às exigências do conteúdo a ser ministrado para o momento.

Antes de serem aplicadas à turma, as questões escolhidas para comporem os instrumentos avaliativos foram analisadas pela professora regente, que orientou quanto ao grau de dificuldade das mesmas.

As questões de 1 a 6 exigiam do aluno habilidades aritméticas, principalmente com relação às operações de multiplicação de decimais. Nas questões de 7 a 9 esperava-se que a “regra de três” fosse utilizada para resolvê-las e as questões de 10 a 12, questões envolvendo porcentagens sucessivas, avaliavam a capacidade de organização do aluno.

Além disso, todas as questões tinham como objetivo verificar o domínio, por parte do aluno, do conceito de porcentagem como uma relação entre duas grandezas avaliada sobre a centena e também a capacidade de interpretação dos enunciados.

Considerando que os alunos já possuíam um conhecimento prévio sobre Porcentagem, o primeiro instrumento avaliativo tinha como objetivo identificar os erros apresentados e o procedimento adotado no desenvolvimento das resoluções.

O instrumento avaliativo aplicado continha 12 questões, que foram elaboradas a partir de livros didáticos, material obtido na *internet* e vestibulares do país e pode ser visualizado a seguir.

FIGURA 5 – INSTRUMENTO AVALIATIVO 1

1. Calcule:
  - a) 14% de R\$3000,00
  - b) 9% de R\$250,00
  - c) 0,6% de R\$300,00
  - d) 240% de R\$1000,00
2. Vinicius paga R\$500,00 na prestação mensal de seu carro. Este mês, ele atrasou o pagamento e pagou 7% de multa sobre a prestação. Qual foi o valor da multa?
3. João comprou uma TV e resolveu pagar à prazo, pois não podia pagar à vista. Sabendo que o valor à vista é de R\$ 1500,00 e que o valor total à prazo é 15% maior que o valor à vista, responda: Quanto João vai pagar no total?
4. Na compra de um televisor, cujo preço era de R\$650,00, foi concedido um desconto de 9%. Quanto custou o televisor?
5. Maria comprou um vestido à vista para ganhar um desconto de 5% no valor original dele. Se o vestido custa R\$ 60,00, quanto Maria pagou?
6. Na sala de aula, a professora descobriu que 40% dos alunos são atleticanos, 30% torcem pro Coritiba, 20% são paranistas e o resto não gosta de futebol. Sabendo que existem 40 alunos na sala, quantos torcem para o Coritiba?
7. Promoções do tipo leve 5 pague 4 oferecem um desconto de quantos por cento?
8. (UFG) Uma empresa concedeu aumento de 8% a seus funcionários. Após o aumento, um dos funcionários passou a receber R\$237,60. Qual era o salário desse funcionário?
9. Uma mercadoria custava R\$12,50 e teve um aumento, passando a valer R\$13,50. De quanto por cento foi o aumento sobre o preço antigo?
10. (Acafe-SC) A inflação medida na Argentina no ano de 2008, foi de 20%. No ano seguinte, a inflação neste mesmo país foi de 30%. Qual foi a inflação acumulada nestes dois anos?
11. (UFSC 2013) Na segunda-feira, um comerciante decide vender um produto com um desconto de 10%. Na sexta-feira, como não obteve muito sucesso, decide acrescentar um novo desconto de 20% sobre o valor obtido após o primeiro desconto. Calcule o desconto total no preço original do produto.
12. No dia 1º deste mês, um produto estava sendo vendido por R\$ 400,00. No dia 10, esse produto sofreu uma redução de 50% no seu preço. No dia 20, ele foi reajustado com um aumento de 50%. Qual o valor final do produto?

FONTE: O autor (2018).

Os alunos tiveram duas aulas de 50 minutos para resolverem as questões. Durante a resolução foi permitido o uso de calculadoras.

Na correção das questões atentou-se tanto para o resultado obtido como para o procedimento adotado. Como a turma era pequena, foi possível levantar todos os erros cometidos e registrar as resoluções mais relevantes, com a intenção de apresentar no quadro mais de uma resolução esperando que o aluno identificasse onde estaria o erro.

O instrumento avaliativo foi aplicado numa segunda-feira e a correção com os alunos aconteceu na quinta-feira da mesma semana.

A partir das resoluções obtidas do primeiro instrumento avaliativo, a correção com os alunos aconteceu, conforme planejado, apresentando no quadro os diferentes resultados obtidos, pedindo para que procurassem o erro.

Nesta etapa foi importante instigar no aluno o desejo de encontrar a solução correta e orientá-lo nesse caminho. Tentou-se evitar a exposição direta da solução, fazendo com que o aluno construísse-a a partir da identificação do erro.

Maiores detalhes sobre a correção do instrumento serão apresentados na seção 4.1. Levantamento e análise dos erros do primeiro instrumento avaliativo.

Somente após a correção do primeiro instrumento é que foi aplicado o segundo instrumento de avaliação, com o objetivo de identificar os erros que continuaram a aparecer, ficando assim elaborado:

FIGURA 6 – INSTRUMENTO AVALIATIVO 2

1. Calcule:

- 14% de R\$30000,00
- 8,5% de R\$100,00
- 0,8% de R\$700,00
- 120% de R\$1000,00

2. Na última liquidação de verão, uma loja vendia todos os seus produtos com um desconto de 15%. Se uma camisa antes da liquidação custava R\$ 145,00, quanto passou a custar na liquidação?

3. Em uma indústria, o setor de qualidade constatou que um lote com 4500 peças, 180 apresentavam algum defeito. Para um lote ser aprovado é necessário que o número de peças com defeito seja inferior a 3%. Neste caso, o lote foi aprovado ou reprovado?

4. Os vendedores de uma loja recebem mensalmente um salário fixo no valor de R\$ 1200,00 e uma comissão de 6% referente ao valor total do que venderam no mês. Sendo assim, qual será o valor recebido por um vendedor que vendeu no mês R\$14000,00?

5. Em uma loja, uma máquina de lavar roupas custava R\$ 1500,00 e seu preço sofreu um aumento de 3%. Logo após o aumento a loja resolveu fazer uma promoção oferecendo um desconto de 3% no mesmo produto. Com esse desconto o valor da máquina de lavar roupas voltou ao valor inicial? Qual o valor do produto após o aumento e após o desconto?

6. Promoções do tipo leve 3 pague 2 oferecem um desconto de quantos por cento?

7. As tarifas de ônibus foram reajustadas, passando de R\$1,60 para R\$2,16. Qual o percentual de aumento?

8. Carlos recebia um salário de R\$1200,00 e em 2016 recebeu um aumento de 20%. Em 2017 recebeu novamente um aumento, mas desta vez foi de 10%. Qual o salário de Carlos, em reais, e qual o aumento total, em porcentagem, após esses dois aumentos?

9. No dia 1º deste mês, um produto estava sendo vendido por R\$ 400,00. No dia 10, esse produto sofreu uma redução de 25% no seu preço. No dia 20, ele foi reajustado com um aumento de 30%. Qual o valor final do produto?

10. Se 5% de  $x$  é igual a 12, então qual o valor de  $x$ ?

FONTE: O autor (2018).

Os alunos tiveram duas aulas de 50 minutos para resolverem as questões e durante a resolução foi permitido o uso de calculadoras e a consulta às anotações referentes à correção do primeiro instrumento avaliativo.

As questões de 1 a 4 exigiam do aluno habilidades aritméticas, sendo que na questão 3 era preciso ainda saber interpretar o significado da porcentagem

calculada. As questões 5, 8 e 9, tratavam de porcentagens sucessivas e nas questões 6, 7 e 10 esperava-se que os alunos adotassem a “regra de três” como ferramenta de resolução.

Este instrumento avaliativo foi elaborado com duas questões a menos em comparação ao primeiro instrumento. Foram retiradas duas questões similares às de 1 a 4. A retirada destas questões foi motivada pela baixa quantidade de erros apresentada em questões parecidas do primeiro instrumento avaliativo.

Assim como na primeira avaliação, o segundo instrumento avaliativo foi corrigido, identificando e classificando os erros cometidos em casa questão.

A ideia inicial era que a partir dessa correção, os erros identificados seriam corrigidos com a turma e posteriormente uma última avaliação seria realizada na tentativa de realizar uma última observação dos erros.

A correção com a turma e a aplicação do último instrumento fariam parte das 6ª e 7ª etapas do trabalho, porém, como já mencionado, os erros identificados nesta etapa não foram significativos e desta forma, essas duas últimas etapas não foram realizadas.

No próximo capítulo estes erros serão apresentados e analisados.

## 4 LEVANTAMENTO E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo serão levantados e analisados os erros apresentados nos dois instrumentos avaliativos. Além disso, os erros apresentados serão quantificados e classificados.

Por se tratar de uma turma com poucos alunos, cada erro será tratado individualmente, apresentando também como foi o processo de correção com a turma.

Nas questões onde não foram identificados erros, a correção se limitou à apresentação dos diferentes procedimentos de resolução adotados pela turma.

Nas questões onde os erros apareceram, os mesmos foram transcritos no quadro e sugerido à turma que os identificassem, encontrando, posteriormente, o procedimento de resolução correto.

### 4.1 LEVANTAMENTO E ANÁLISE DOS ERROS DO PRIMEIRO INSTRUMENTO AVALIATIVO

Por se tratar de uma turma de Educação de Jovens e Adultos a rotatividade dos alunos durante a semana é alta, desta forma, os alunos que participaram do primeiro instrumento não foram os mesmos do segundo. Cinco alunos participaram dos dois instrumentos avaliativos. Na análise dos dados foram considerados todos os sete que responderam ao primeiro instrumento e os seis alunos que responderam ao último instrumento avaliativo. No total, a pesquisa foi realizada por oito alunos diferentes, sendo os alunos de 1 a 5 aqueles que responderam aos dois instrumentos de avaliação, os alunos 6 e 7 os que responderam apenas ao primeiro e o aluno 8, que respondeu apenas ao segundo instrumento.

Esta rotatividade acontece, na maioria dos casos, pela dificuldade em conciliar trabalho e estudo. Levando essa questão em consideração, as atividades escolares são focadas apenas no momento das aulas, sem atividades para casa.

O primeiro instrumento avaliativo foi realizado por sete alunos e a quantidade de erros e acertos em cada questão pode ser visualizada na tabela a seguir:

TABELA 4 – ERROS E ACERTOS POR ALUNO EM CADA QUESTÃO - 1ª AVALIAÇÃO

Questão	Aluno 1	Aluno 2	Aluno 3	Aluno 4	Aluno 5	Aluno 6	Aluno 7
1	acertou	acertou	acertou	parcial	parcial	acertou	acertou
2	acertou						
3	acertou						
4	acertou						
5	acertou						
6	acertou						
7	acertou	errou	errou	errou	acertou	acertou	acertou
8	errou	errou	errou	errou	errou	acertou	errou
9	errou	errou	acertou	não fez	acertou	errou	errou
10	errou	não fez	errou	não fez	errou	errou	não fez
11	errou	não fez	errou	não fez	errou	errou	não fez
12	acertou	não fez	acertou	errou	acertou	acertou	não fez

FONTE: O autor (2018).

Na análise da tabela acima verifica-se que as questões 10 e 11 foram as que apresentaram maior número de erros e que o aluno 4 foi o que cometeu uma maior quantidade deles. Considerando as questões em branco e as parcialmente corretas como erros, tem-se que:

TABELA 5 – QUANTIDADE DE ERROS POR QUESTÃO - 1ª AVALIAÇÃO

Questão	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Quantidade de erros	2	0	0	0	0	0	3	6	5	7	7	3

FONTE: O autor (2018).

TABELA 6 – QUANTIDADE DE ERROS POR ALUNO - 1ª AVALIAÇÃO

Aluno	1	2	3	4	5	6	7
Quantidade de erros	4	6	4	7	4	3	5

FONTE: O autor (2018).

Tendo em vista que 7 alunos realizaram o instrumento avaliativo e que o instrumento era composto por 12 questões, todos os alunos erraram as questões 10 e 11. Além disso, o aluno 4 cometeu 7 erros, ou seja, errou 58% das questões.

Analisando pelo ponto de vista dos acertos tem-se que:

TABELA 7 – QUANTIDADE DE ACERTOS POR QUESTÃO - 1ª AVALIAÇÃO

Questão	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Quantidade de acertos	5	7	7	7	7	7	4	1	2	0	0	4

FONTE: O autor (2018).

TABELA 8 – QUANTIDADE DE ACERTOS POR ALUNO - 1ª AVALIAÇÃO

Aluno	1	2	3	4	5	6	7
Quantidade de acertos	8	6	8	5	8	9	7

FONTE: O autor (2018).

As questões de 2 a 6 foram acertadas por todos os alunos e o aluno 6 acertou 9 questões, ou seja, acertou 75% das questões.

Analisando cada questão separadamente segue que:

- Questão 1:

Os alunos que acertaram parcialmente a questão 1, erraram apenas uma das porcentagens solicitadas. O aluno 4 errou a letra c e o aluno 7 a letra d e os erros são os apresentados a seguir.

FIGURA 7 – ERRO COMETIDO NA QUESTÃO 1) C. PELO ALUNO 4

c) 0,6% de R\$300,00	
<del>12</del> 18,00	$\begin{array}{r} 300 \\ \times 0,6 \\ \hline 1800 \\ \hline 000 \\ \hline 18,00 \end{array}$
d) 240% de R\$1000,00	
<del>12</del> 2400	

FONTE: O autor (2018).

FIGURA 8 – ERRO COMETIDO NA QUESTÃO 1) D. PELO ALUNO 7

d) 240% de R\$1000,00       $1000,00 \times 240\% = 240.000$

FONTE: O autor (2018).

Os erros apresentados na questão 1 foram erros nos cálculos. No momento da correção no quadro foram apresentados, a questão 1c), os valores R\$1,80 e R\$18,00 e, no caso da questão 1.d), os valores R\$2.400,00 e R\$240.000,00, em seguida os alunos foram questionados a escolher a resposta correta e identificar o erro. Com facilidade, os alunos identificaram o erro na contagem das casas decimais e apontaram para a resposta correta.

- Questão 2:

A questão 2 foi resolvida de duas maneiras diferentes, sendo elas apresentadas a seguir.

FIGURA 9 – PRIMEIRO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 2

2. Vinicius paga R\$500,00 na prestação mensal de seu carro. Este mês, ele atrasou o pagamento e pagou 7% de multa sobre a prestação. Qual foi o valor da multa?

$$\frac{7}{100} \cdot 500 = 35,00$$

FONTE: O autor (2018).

FIGURA 10 – SEGUNDO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 2

2. Vinicius paga R\$500,00 na prestação mensal de seu carro. Este mês, ele atrasou o pagamento e pagou 7% de multa sobre a prestação. Qual foi o valor da multa?

$$500 + 7\% = 535,00 - 500,00 = \text{Valor da multa } 35,00$$

FONTE: O autor (2018).

O primeiro procedimento calcula direto 7% de R\$500,00 chegando em R\$35,00.

O segundo procedimento calcula o valor da prestação total e em seguida retira o valor da prestação, chegando ao valor da multa. Esta resolução apresenta um equívoco na representação dos cálculos quando subtrai R\$500,00 de R\$535,00 e iguala a R\$35,00, isto porque, da maneira que foi escrito, pode-se chegar à conclusão de que  $R\$500,00 + 7\% = R\$35,00$ . Tal representação retrata bem o uso da calculadora durante a resolução da questão, onde o resultado de uma operação é prontamente utilizado na realização da próxima conta, conforme pode ser visto na FIGURA 10.

Quando o segundo procedimento foi apresentado no quadro um dos alunos achou desnecessário encontrar o valor total da prestação e em seguida o valor da multa, mas aceitou como outra forma de resolução.

Nesta questão, assim como nas demais resolvidas corretamente pelos alunos, limitou-se apenas à apresentação das diferentes formas de resolução encontradas.

- Questão 3:

A questão 3 também foi resolvida de duas maneiras diferentes.

FIGURA 11 – PRIMEIRO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 3

3. João comprou uma TV e resolveu pagar à prazo, pois não podia pagar à vista. Sabendo que o valor à vista é de R\$ 1500,00 e que o valor total à prazo é 15% maior que o valor à vista, responda: Quanto João vai pagar no total?

$$1.500,00 \times 15 = 225,00$$

$$1.500,00 + 225,00 = 1.725,00$$

R. VALOR TOTAL = 1.725,00

FONTE: O autor (2018).

FIGURA 12 – SEGUNDO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 3

3. João comprou uma TV e resolveu pagar à prazo, pois não podia pagar à vista. Sabendo que o valor à vista é de R\$ 1500,00 e que o valor total à prazo é 15% maior que o valor à vista, responda: Quanto João vai pagar no total?

$$\frac{15}{100} \cdot 1.500,00 = 225,00 + 1.500,00 = 1.725,00$$

FONTE: O autor (2018).

Os dois procedimentos são semelhantes. Os alunos calcularam o valor da diferença entre o valor a prazo e o valor à vista e em seguida somaram com o valor do televisor. A diferença está no fato de o segundo procedimento possuir o mesmo equívoco da questão anterior, levando à conclusão de que 15% de R\$1500,00 é igual a R\$1725,00.

- Questão 4:

Na questão 4 um dos alunos apresentou a seguinte resolução:

FIGURA 13 – RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 4

4. Na compra de um televisor, cujo preço era de R\$650,00, foi concedido um desconto de 9%. Quanto custou o televisor?

$$\frac{9}{100} \cdot 650,00 = 58,50 - 650,00 = 591,50$$

FONTE: O autor (2018).

Ao apresentar esta solução no quadro o próprio autor identificou que a maneira que as contas estavam apresentadas não estavam corretas e que o resultado de  $58,50 - 650$  seria  $-591,50$ .

- Questão 5:

Os alunos apresentaram 2 maneiras para resolver a questão 5.

FIGURA 14 – PRIMEIRO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 5

5. Maria comprou um vestido à vista para ganhar um desconto de 5% no valor original dele. Se o vestido custa R\$ 60,00, quanto Maria pagou?

$$60,00 - 5\% = 57,00$$

FONTE: O autor (2018).

FIGURA 15 – SEGUNDO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 5

5. Maria comprou um vestido à vista para ganhar um desconto de 5% no valor original dele. Se o vestido custa R\$ 60,00, quanto Maria pagou?

$$\begin{array}{r} 60. \\ - 3.00 \\ \hline 57.00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5610 \\ - 03 \\ \hline 57 \end{array}$$

o R\$ - 57.00

FONTE: O autor (2018).

O primeiro procedimento evidencia a utilização da calculadora durante a realização da avaliação.

-Questão 6:

Na questão 6 a quantidade de informação era maior do que a necessária para a resolução da questão, porém os alunos não apresentaram dificuldades para coletar e interpretar os dados do problema.

FIGURA 16 – RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 6

6. Na sala de aula, a professora descobriu que 40% dos alunos são atleticanos, 30% torcem pro Coritiba, 20% são paranistas e o resto não gosta de futebol. Sabendo que existem 40 alunos na sala, quantos torcem para o Coritiba?

$$40 \times 30\% = 12$$

FONTE: O autor (2018).

- Questão 7:

Os alunos apresentaram dificuldade na compreensão do enunciado da questão 7. Eles compreenderam que na promoção leve 5 pague 4 o cliente leva 1 produto de graça, porém não conseguiram associar este valor a uma porcentagem. Isso foi percebido nas perguntas que se levantaram durante a resolução da questão.

Dois alunos resolveram da seguinte maneira.

FIGURA 17 – PRIMEIRO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 7

7. Promoções do tipo leve 5 pague 4 oferecem um desconto de quantos por cento?

$$5 - 4 = 1$$

$$\frac{5}{1} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = \frac{100}{5} = 20\%$$

FONTE: O autor (2018).

Uma aluna resolveu conforme segue.

FIGURA 18 – SEGUNDO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 7

7. Promoções do tipo leve 5 pague 4 oferecem um desconto de quantos por cento?

$$\frac{100}{5} = 20 \cdot 4 = 80$$

$$100 - 80 = 20$$

FONTE: O autor (2018).

Um aluno colocou apenas a resposta.

FIGURA 19 – TERCEIRO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 7

7. Promoções do tipo leve 5 pague 4 oferecem um desconto de quantos por cento?

R: vinte por cento

FONTE: O autor (2018).

Talvez esse terceiro não possa ser considerado um procedimento de resolução por não detalhar o desenvolvimento da questão. Ao conversar com o aluno que adotou essa resolução, ele disse que fez “de cabeça”, evidenciando uma

possível dificuldade de apresentar de maneira formal um raciocínio já assimilado por outras vias, fora do ambiente escolar.

Com relação aos erros, um aluno apresentou a seguinte solução.

FIGURA 20 – QUARTO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 7

7. Promoções do tipo leve 5 pague 4 oferecem um desconto de quantos por cento?

$$\frac{80}{100} = \frac{400}{400}$$

80%

FONTE: O autor (2018).

O quarto procedimento pode indicar uma tentativa em relacionar os números 5 e 4 que aparecem no enunciado da questão e nesta tentativa, o valor de 80% demonstrou, para esse aluno, ser o resultado do problema.

Tiveram dois alunos que apresentaram a mesma solução.

FIGURA 21 – QUINTO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 7

7. Promoções do tipo leve 5 pague 4 oferecem um desconto de quantos por cento?

$$\frac{5}{100} \cdot 4 = 20$$

FONTE: O autor (2018).

Assim como no quarto procedimento, os alunos que adotaram o quinto procedimento tentaram relacionar os números 5 e 4 e neste caso, apresentaram como resposta o valor de 20%, que de fato é o resultado esperado, porém não efetuaram o procedimento correto.

Na segunda avaliação, a questão 6, semelhante a esta, foi aplicada na tentativa de perceber se esse procedimento de solução permanece.

Durante a correção com os alunos foram apresentados no quadro o primeiro, o quarto e o quinto procedimento de resolução.

O primeiro procedimento foi desenvolvido a partir da “regra de três”, o quarto teve como resultado 80% e o quinto teve como resultado 20%, porém utilizava o procedimento equivocado.

Os alunos apontaram o resultado 20% como sendo o correto, porém não diferenciaram a resolução utilizando a “regra de 3” e a que calculava  $\frac{5}{100} * 4 = 20\%$ . Como não diferenciaram as duas resoluções, foi explicado no quadro como o procedimento utilizando a “regra de 3” pode ser aplicado neste tipo de questão.

Quando questionados sobre o erro cometido ao se apresentar a resposta 80%, um dos alunos respondeu que quem encontrou essa resposta encontrou a porcentagem paga e não o desconto.

- Questão 8:

A questão 8 apresentou três soluções distintas. Cinco alunos responderam da seguinte maneira.

FIGURA 22 – PRIMEIRO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 8

8. (UFG) Uma empresa concedeu aumento de 8% a seus funcionários. Após o aumento, um dos funcionários passou a receber R\$237,60. Qual era o salário desse funcionário?

R =  $237,60 \div 1,08 = 19,00$   
 $237,60 - 19,00 =$   
 R \$218,60 ERA DE \$218,60

FONTE: O autor (2018).

Um aluno adotou o seguinte procedimento.

FIGURA 23 – SEGUNDO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 8

8. (UFG) Uma empresa concedeu aumento de 8% a seus funcionários. Após o aumento, um dos funcionários passou a receber R\$237,60. Qual era o salário desse funcionário?

237.60 / 1,08  
 237.60 / 1,08 = 219,70

FONTE: O autor (2018).

Por último, uma aluna respondeu conforme segue.

FIGURA 24 – TERCEIRO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 8

8. (UFG) Uma empresa concedeu aumento de 8% a seus funcionários. Após o aumento, um dos funcionários passou a receber R\$237,60. Qual era o salário desse funcionário?

$$237,60 - 8\% = 220,00$$

FONTE: O autor (2018).

No primeiro procedimento os alunos encontraram 8% de R\$237,60 e em seguida subtraíram de R\$237,60 encontrando R\$218,60.

No segundo procedimento o aluno dividiu R\$237,60 por 8 e depois multiplicou o resultado por 100. O que pode ser entendido como uma tentativa de entregar alguma resposta, mesmo não sendo a mais coerente.

A princípio o aluno compreendeu que não era possível subtrair 8% do salário final para encontrar o salário inicial e tentou alternativas diferentes para solução do problema.

O terceiro procedimento teve como resultado final R\$220,00 que é a resposta correta para a questão, porém quando questionada quanto a resolução, a aluna explicou que fez a conta indicada,  $R\$237,60 - 8\%$ , na calculadora e obteve aproximadamente R\$218,60, como no primeiro procedimento adotado por alguns alunos.

Após chegar ao valor de R\$218,60 ela somou 8% e, como não obteve R\$237,60, resolveu aumentar o salário inicial para R\$220,00 obtendo assim o valor desejado de R\$237,60.

Durante a correção no quadro o primeiro procedimento de resolução foi apresentado. Em seguida, foi pedido para que os alunos calculassem um aumento de 8% sobre o resultado e que comparassem com o valor esperado. O resultado obtido pelo primeiro procedimento foi um salário de R\$218,60. Acrescentando 8% a esse valor tem-se R\$236,08, que é diferente do valor esperado de R\$237,60.

Observou-se que neste momento os alunos perceberam que a solução não estava correta e até conseguiram apontar que o erro estava em considerar 8% do salário final ao invés de considerar o salário inicial.

Na sequência, foi perguntado aos alunos: “Se fosse estabelecido um salário inicial de R\$100,00 e o funcionário recebesse 8% de aumento qual seria o salário

final? E esse valor representaria qual porcentagem do valor inicial?” Um dos alunos respondeu que o salário final seria de R\$108,00 e que isso representaria 108% do salário inicial.

Com essa informação, uma nova indagação foi direcionada aos alunos: “Qual seria a porcentagem que representaria os R\$237,60 na questão 8?”. A partir disso, os alunos montaram a “regra de três” e apresentaram a solução que segue.

FIGURA 25 – RESOLUÇÃO FINAL DA QUESTÃO 8

8. (UFG) Uma empresa concedeu aumento de 8% a seus funcionários. Após o aumento, um dos funcionários passou a receber R\$237,60. Qual era o salário desse funcionário?

$$\begin{array}{l} 237,60 \\ \times \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 108\% \\ \times \\ \hline \end{array} = 220,00$$

$$\begin{array}{l} 237,60 \\ \times \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 100\% \\ \times \\ \hline \end{array}$$

FONTE: O autor (2018).

Vale a pena comentar que durante a correção no quadro um dos alunos não conseguiu compreender muito bem como relacionar R\$237,60 com o valor de 108%, momento em que outro colega lhe informa que esse é o valor dos 100% acrescidos do aumento de 8%.

- Questão 9:

Na questão 9 foram apresentados 3 procedimentos diferentes, cada procedimento foi adotado por dois alunos e um aluno não respondeu a questão.

FIGURA 26 – PRIMEIRO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 9

9. Uma mercadoria custava R\$12,50 e teve um aumento, passando a valer R\$13,50. De quanto por cento foi o aumento sobre o preço antigo?

$$13,50 - 12,50 = 1,00$$

$$12,50 \cdot 8 \cdot 100 = 4,00$$

8%

FONTE: O autor (2018).

FIGURA 27 – SEGUNDO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 9

9. Uma mercadoria custava R\$12,50 e teve um aumento, passando a valer R\$13,50. De quanto por cento foi o aumento sobre o preço antigo?

$$13,50 - 12,50 = 1$$

$$\frac{1}{12,50} = \frac{x}{100} = 7,40\%$$

FONTE: O autor (2018).

FIGURA 28 – TERCEIRO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 9

9. Uma mercadoria custava R\$12,50 e teve um aumento, passando a valer R\$13,50. De quanto por cento foi o aumento sobre o preço antigo?

$$R = 12,50 \times 100 = 1,25$$

$$R = 13,50 - 12,50 = 1,00 \text{ Aumento}$$

$$R = 12,50 \times 0,08 = 1,00$$

(R. 801 50 0,8%)

FONTE: O autor (2018).

Durante a resolução da questão no quadro as três soluções foram apresentadas, focando as atenções nos dois primeiros procedimentos de resolução. No primeiro o aumento era calculado em relação à R\$12,50 e no segundo o aumento era em relação à R\$13,50.

Logo no início da correção um dos alunos, que apresentou a solução correta, afirmou que apenas colocou um valor como resposta, sem refletir muito sobre a questão. Este mesmo aluno disse, talvez influenciado pelo exercício anterior, que deveria ter usado a “regra de 3”.

Quando questionados sobre qual valor deveriam considerar como referência, um aluno, que adotara o preço atual como referência, percebeu que a porcentagem deveria ser calculada sobre o preço antigo, conforme descrito no enunciado.

Com relação aos alunos que adotaram o terceiro procedimento, foi explicado que 8% é equivalente a 0,08, o que é diferente de 0,8%.

- Questão 10:

A questão 10 foi respondida por quatro alunos, que adotaram o mesmo procedimento de resolução.

FIGURA 29 – RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 10

10. (Acafe-SC) A inflação medida na Argentina no ano de 2008, foi de 20%. No ano seguinte, a inflação neste mesmo país foi de 30%. Qual foi a inflação acumulada nestes dois anos?

$20\% + 30\% = 50\%$

FONTE: O autor (2018).

Três alunos deixaram esta questão em branco e durante a correção das questões os alunos explicaram que a solução não deveria ser simplesmente a soma das duas inflações.

Foi sugerido aos alunos que definissem um valor conveniente para a realização dos cálculos, por exemplo, 100 e a partir desse valor calculassem a primeira inflação e em seguida a segunda.

Com a sugestão adotada o resultado final foi o seguinte.

FIGURA 30 – RESOLUÇÃO FINAL DA QUESTÃO 10

10. (Acafe-SC) A inflação medida na Argentina no ano de 2008, foi de 20%. No ano seguinte, a inflação neste mesmo país foi de 30%. Qual foi a inflação acumulada nestes dois anos?

$100 + 20\% = 120\%$   
 $120 + 30\% = 156$   
 $156 - 100 = 56\%$

onde 100 é a nossa referência, tem descontar ao final.

FONTE: O autor (2018).

- Questão 11:

A questão 11 apresentou os mesmos erros da questão 10 e o procedimento adotado pelos alunos foi o que segue.

FIGURA 31 – RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 11

11. (UFSC 2013) Na segunda-feira, um comerciante decide vender um produto com um desconto de 10%. Na sexta-feira, como não obteve muito sucesso, decide acrescentar um novo desconto de 20% sobre o valor obtido após o primeiro desconto. Calcule o desconto total no preço original do produto.

S, F - 10%  
 S, F + 20,00  
 30%  
 Foi de 30%

FONTE: O autor (2018).

Seguindo a mesma sugestão da questão anterior, os alunos resolveram novamente adotando a seguinte solução.

FIGURA 32 – RESOLUÇÃO FINAL DA QUESTÃO 11

11. (UFSC 2013) Na segunda-feira, um comerciante decide vender um produto com um desconto de 10%. Na sexta-feira, como não obteve muito sucesso, decide acrescentar um novo desconto de 20% sobre o valor obtido após o primeiro desconto. Calcule o desconto total no preço original do produto.

S, F - 10%  
 S, F + 20,00  
 30%  
 Foi de 30%

R 28%  
 $100 - 10\% = 90$   
 $90 - 20\% = 72$   
 $100 - 72 = 28$

FONTE: O autor (2018).

Antes de começarem a resolver a questão, um dos alunos indagou que seria melhor apresentar no quadro a solução, ao invés de resolverem individualmente. Mesmo contrariado o aluno resolveu a questão sem maiores dificuldades.

A indagação do aluno remete à visão de professor como sendo aquele que apresenta as soluções corretas sem ser questionado e à visão do aluno como reproduzidor dos modelos ensinados pelo professor.

- Questão 12:

A questão 12 foi respondida por cinco alunos que apresentaram duas soluções distintas.

FIGURA 33 – PRIMEIRO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 12

12. No dia 1 deste mês, um produto estava sendo vendido por R\$ 400,00. No dia 10, esse produto sofreu um redução de 50% no seu preço. No dia 20, ele foi reajustado com um aumento de 50%. Qual o valor final do produto?

$$\begin{array}{r}
 400 \\
 \times 50 \\
 \hline
 200 \\
 \times 50 \\
 \hline
 400
 \end{array}$$

FONTE: O autor (2018).

FIGURA 34 – SEGUNDO PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 12

12. No dia 1 deste mês, um produto estava sendo vendido por R\$ 400,00. No dia 10, esse produto sofreu um redução de 50% no seu preço. No dia 20, ele foi reajustado com um aumento de 50%. Qual o valor final do produto?

$$\begin{array}{l}
 400 \times 50\% = 200 \\
 200 \times 50\% = 100 \\
 \hline
 300,00 \\
 \text{Valor final } 300,00
 \end{array}$$

FONTE: O autor (2018).

O primeiro procedimento apresenta um erro nos cálculos quando multiplicando 200 por 50 obtém-se como resultado 400. O aluno até compreendeu o enunciado e calculou uma redução de 50% sobre o valor inicial e em seguida um aumento de 50%, porém errou ao considerar que esta operação não alteraria o valor final do produto.

Esta questão é parecida com as questões 10 e 11, porém apresenta o valor inicial do produto, o que facilitou a compreensão e resolução da questão.

Durante a resolução em sala de aula os alunos relataram que, à primeira vista, uma redução de 50% seguida de um aumento de 50% não alteraria o valor

inicial do produto. Porém, na realização das contas perceberam que é preciso primeiro reduzir 50% e em seguida, sobre o resultado dessa conta, acrescentar 50%.

Foi interessante perceber que, conversando com os alunos, eles identificaram que o procedimento de resolução e o raciocínio empregado nas questões 10, 11 e 12 foram semelhantes e que é necessário realizar cada aumento ou desconto separadamente.

#### 4.2 QUANTIFICAÇÃO E CLASSIFICAÇÃO DOS ERROS DO PRIMEIRO INSTRUMENTO AVALIATIVO

A classificação dos erros apresentou ser um momento delicado, tendo em vista que para identificar em que etapa do procedimento de resolução o aluno encontrou dificuldade, seria necessário saber o que o aluno estava pensando naquele instante.

Mesmo diante dessa dificuldade, os erros foram classificados nas seguintes categorias:

- a) Erros nas operações: aqueles que aparecem por erros nas contas, por exemplo, erros de multiplicação;
- b) Erros conceituais: aqueles onde o aluno não adota a ferramenta correta de resolução, por exemplo, erros decorrentes do desconhecimento da “regra de três”;
- c) Erros de interpretação: aqueles provenientes da má interpretação do enunciado;
- d) Outros erros: aqueles que não se enquadraram nas categorias anteriores.

Exemplificando, neste trabalho, erros na multiplicação de decimais foram considerados erros nas operações, em que uma revisão nas contas já seria o suficiente para que o aluno identificasse e corrigisse o erro.

Dificuldades em cálculos utilizando a “regra de 3”, embora pudessem ser consideradas como erros nas operações, caso a “regra de três” fosse classificada como técnica operatória, foram consideradas erros conceituais, isto porque, percebeu-se que o aluno não identificou que a questão poderia ser resolvida utilizando tal procedimento. Foi necessário apresentar a ferramenta de resolução para que o aluno identificasse o procedimento correto a ser adotado.

Seguindo esta classificação, os erros cometidos na primeira avaliação ficaram assim dispostos.

TABELA 9 – CLASSIFICAÇÃO DOS ERROS - 1ª AVALIAÇÃO

Questão	Erros nas operações	Erros conceituais	Erros de interpretação	Outros erros	Em branco
1	2	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	0	3	0	0	0
8	0	5	0	1	0
9	2	0	2	0	1
10	0	4	0	0	3
11	0	4	0	0	3
12	0	1	0	0	2
<b>TOTAL</b>	<b>4</b>	<b>17</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>9</b>

FONTE: O autor (2018).

Os dois erros nas operações que apareceram na primeira questão foram decorrentes da multiplicação de decimais, mais precisamente na contagem das casas decimais.

Outros dois erros nas operações apareceram na questão 9, decorrentes, também, de erro na contagem das casas decimais.

Três erros conceituais apareceram no desenvolvimento da questão 7 e cinco na questão 8. Estes erros surgiram da dificuldade em se trabalhar com a “regra de três”.

Os nove erros conceituais verificados nas questões 10, 11 e 12 foram decorrentes dos erros ao analisar aumentos e descontos percentuais sucessivos.

Em dois erros de interpretação na questão 9, os alunos consideraram a porcentagem sobre o valor de R\$13,50, sendo que o correto seria considerar o valor de R\$12,50, conforme mencionado do enunciado da questão.

O erro não identificado nas categorias anteriores apareceu na questão 8, onde o aluno, talvez desejando entregar algo, efetuou desordenadamente contas de divisão e multiplicação entre os algarismos apresentados no enunciado.

Com a descrição acima é possível elaborar uma segunda tabela contendo o tipo dos erros cometidos durante a resolução dos exercícios, conforme segue.

TABELA 10 – TIPOS DE ERROS - 1ª AVALIAÇÃO

Questão	Tipos de erros	Quantidade
1	multiplicação de decimais	2
2	sem erros	0
3	sem erros	0
4	sem erros	0
5	sem erros	0
6	sem erros	0
7	regra de três	3
8	outros	1
	regra de três	5
9	não fez	1
	multiplicação de decimais	2
	interpretação do enunciado	2
10	não fez	3
	porcentagens sucessivas	4
11	não fez	3
	porcentagens sucessivas	4
12	não fez	2
	porcentagens sucessivas	1

FONTE: O autor (2018).

A respeito dos erros obtidos na multiplicação de decimais, Esteves (2012, p.194) considera que este conteúdo deve ser relacionado com o conceito de frações e trabalhado de maneira conectada ao sistema de medidas e monetário. Evitando aquilo que Brousseau (1980 apud ESTEVES, 2012, p.195) identificou na França dos

anos 60 e 70, em que o número decimal era considerado como um número natural separado por uma vírgula.

Esteves (2012, p. 196) identificou ainda que os próprios professores possuem dificuldades em relacionar os números decimais com seu sistema de numeração, ao tratarem os decimais da mesma forma que os números naturais. Os professores pesquisados por Esteves (2012, p. 198) se surpreendiam com o fato de, por exemplo, obterem um quociente maior que o dividendo na operação  $\frac{148}{0,5}$ , demonstrando que esperavam da operação com números decimais o mesmo que acontece com os naturais.

Por este breve relato, percebe-se que os erros decorrentes da multiplicação de decimais não devem ser encarados apenas como erros na posição da vírgula, tendo em vista que sugerem uma abordagem diferente da adotada com os números naturais.

Erros provenientes da falha ou desconhecimento na utilização da “regra de três”, conforme Guerra e Silva (2011, p.5), podem indicar uma interpretação reducionista apresentada pelos livros didáticos. Nessa interpretação, a “regra de três” é aplicada apenas em determinados tipos de problemas, sem despertar no aluno a ideia de proporcionalidade.

Historicamente a “regra de três” possui origem nas práticas sociais evidenciadas pelo comércio, onde o valor unitário de determinado produto servia de referência para a venda de outras quantidades. (Guerra e Silva 2011, p.7). Esta informação histórica sugere um encaminhamento metodológico interessante para o ensino da “regra de três”, utilizando situações financeiras do cotidiano do aluno.

Os autores terminam seu artigo concluindo que a prioridade não está em fazer com que o aluno identifique as questões onde a “regra de três” é aplicada, mas sim no desenvolvimento de uma consciência de proporcionalidade, capaz de criar as relações entre as grandezas numéricas, evoluindo para relações algébricas com uso de variáveis.

Damm (1998 apud Vizolli, 2004, p.464) entende que a porcentagem é a relação entre duas grandezas, avaliada sobre a centena. Vizolli (2004, p.468) afirma que problemas envolvendo porcentagem podem ser resolvidos basicamente através de uma função linear ou por “regra de três”. Porém, em sua pesquisa, identificou que os alunos utilizaram métodos diferentes destes.

Em um dos exemplos o autor relatou que como solução para a questão que pedia 60% de determinado valor, o aluno, primeiramente, encontrou o valor correspondente a 10% e em seguida multiplicou o resultado por 6. Outro aluno resolveu a questão encontrando, primeiramente, metade do valor inicial e em seguida adicionou 10%.

Vizolli (2004, p.471) conclui que os alunos procuram taxas percentuais conhecidas, como 10% e 50%, que servem como representação intermediária entre o questionamento e a resposta, apontando para uma aprendizagem onde os novos conceitos são desenvolvidos a partir de conhecimentos prévios do próprio aluno.

Sobre os enunciados matemáticos, Barguil, Moraes e Lendl (2017, p.281) entendem que o desafio para compreender, interpretar e representar matematicamente, não recai somente sobre o professor de Português. Tendo em vista que o problema não está somente na dificuldade de leitura e interpretação dos alunos, mas também na qualidade, relacionada à contextualização e relevância, dos enunciados das atividades propostas.

Os autores ainda afirmam que, muitas vezes, ao se deparar com uma questão, o estudante procura no texto apenas os dados que entende ser suficiente para encontrar a solução. Tal comportamento fica mais evidente em questões descontextualizadas e que provocam desinteresse por parte do estudante.

Os autores finalizam enfatizando que os enunciados precisam estar relacionados com situações reais, permitindo o desenvolvimento da criatividade, o levantamento de hipóteses e a escolha dos métodos adequados. (Barguil, Moraes e Lendl 2017, p.287).

#### 4.3 LEVANTAMENTO E ANÁLISE DOS ERROS DO SEGUNDO INSTRUMENTO AVALIATIVO

O segundo instrumento avaliativo foi realizado por seis alunos e a quantidade de erros e acertos em cada questão pode ser visualizada na tabela a seguir:

TABELA 11 – ERROS E ACERTOS POR ALUNO EM CADA QUESTÃO - 2ª AVALIAÇÃO

Questão	Aluno 1	Aluno 2	Aluno 3	Aluno 4	Aluno 5	Aluno 8
1	parcial	parcial	parcial	acertou	acertou	parcial
2	acertou	acertou	acertou	acertou	acertou	acertou
3	acertou	acertou	acertou	acertou	acertou	acertou
4	acertou	acertou	acertou	acertou	acertou	acertou
5	acertou	acertou	acertou	acertou	acertou	acertou
6	acertou	acertou	acertou	acertou	acertou	acertou
7	acertou	acertou	acertou	acertou	acertou	acertou
8	acertou	acertou	acertou	acertou	acertou	acertou
9	acertou	acertou	acertou	acertou	acertou	acertou
10	acertou	acertou	acertou	acertou	acertou	acertou

FONTE: O autor (2018).

Os alunos de 1 a 5 são os mesmos alunos que realizaram o primeiro instrumento avaliativo. O aluno 8 participou apenas do segundo instrumento.

Os alunos que acertaram parcialmente a questão 1 erraram apenas a letra c. O erro cometido por todos foi o mesmo.

FIGURA 35 – ERRO COMETIDO NA QUESTÃO 1. C)

1. Calcule:

a) 14% de R\$30000,00  $\frac{14}{100} \cdot 30000 = 4200,00$

b) 8,5% de R\$100,00  $\frac{8,5}{100} \cdot 100,00 = 8,50$

c) 0,8% de R\$700,00  $\frac{0,8}{100} \cdot 700,00 = 56,00$

d) 120% de R\$1000,00  $\frac{120}{100} \cdot 1000,00 = 1.200,00$

FONTE: O autor (2018).

Uma possível causa deste erro, tendo em vista que a representação escrita das contas estava correta, pode ser o uso incorreto da calculadora. Ao digitar 0,8 o

aluno pode ter se esquecido de pressionar o dígito da vírgula, encontrando um resultado 10 vezes maior.

#### 4.4 QUANTIFICAÇÃO E CLASSIFICAÇÃO DOS ERROS DO SEGUNDO INSTRUMENTO AVALIATIVO

Seguindo os mesmos critérios adotados na primeira avaliação, a classificação dos erros do segundo instrumento avaliativo ficou assim disposta.

TABELA 12 – CLASSIFICAÇÃO DOS ERROS - 2ª AVALIAÇÃO

Questão	Erros nas operações	Erros conceituais	Erros de interpretação	Outros erros	Em branco
1	4	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0
<b>TOTAL</b>	<b>4</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>

FONTE: O autor (2018).

Conforme já comentado na seção anterior, os quatro erros nas operações que apareceram na primeira questão foram decorrentes da multiplicação de decimais, mais precisamente na contagem das casas decimais.

Com a descrição acima é possível construir a seguinte tabela:

TABELA 13 – TIPOS DE ERROS - 2ª AVALIAÇÃO

<b>Questão</b>	<b>Tipos de erros</b>	<b>Quantidade</b>
1	multiplicação de decimais	4
2	sem erros	0
3	sem erros	0
4	sem erros	0
5	sem erros	0
6	sem erros	0
7	sem erros	0
8	sem erros	0
9	sem erros	0
10	sem erros	0

FONTE: O autor (2018).

## 5 CONCLUSÃO

A análise de erros se mostrou importante recurso para a reflexão do aprendizado, não apenas para o aluno, mas também ao professor, fazendo com que as correções de avaliações e exercícios tenham um novo significado, deixando de evidenciar o caráter punitivo do erro, sob uma perspectiva de fracasso, passando a encará-lo sob um olhar de superação, onde o erro é encarado como obstáculo a ser transposto.

Sob este olhar, o ensino e a aprendizagem não são mais vistos como imposição e reprodução de modelos, pelo contrário, ensinar torna-se compreender aquilo que o aluno não entende e aprender torna-se superar aquilo que não se sabe. Neste sentido, a compreensão do que o aluno desconhece ganha grande importância na prática docente.

A compreensão do que os alunos desconheciam foi necessária na classificação dos erros cometidos. O que se mostrou ser de difícil execução, talvez por conta do pouco tempo em sala de aula com os alunos e pouca experiência com a atividade docente, tendo em vista a complexidade na identificação daquilo que os alunos pretendiam ao adotar determinado procedimento de resolução.

No geral, os erros apareceram em decorrência da multiplicação de decimais, erros na “regra de três”, com porcentagens sucessivas e leitura do enunciado. Erros na multiplicação de decimais foram classificados como erros nas operações, os erros na “regra de três” e nas porcentagens sucessivas foram classificados como erros conceituais e erros na leitura do enunciado foram classificados como erros de interpretação. Os erros que não se enquadraram em nenhuma classe de erros, foram considerados como outros erros.

No primeiro instrumento avaliativo foram identificados 33 erros, 12% foram classificados como erros nas operações, 52% classificados como erros conceituais, 6% como erros de interpretação, 3% como outros erros e 27% das questões foram deixadas em branco.

No segundo instrumento avaliativo aplicado foram identificados 4 erros e todos eles foram classificados como erros nas operações, mais precisamente, foram erros na multiplicação de decimais.

Vale ressaltar que o segundo instrumento avaliativo foi elaborado nos moldes do primeiro e que durante a resolução os alunos puderam consultar suas

anotações. Grande parte da melhora no desempenho, em comparação com o primeiro instrumento, foi decorrente dessa possibilidade de consulta.

Esta possibilidade de consulta é também resultado da própria análise de erros, isto porque, considerando a correção junto aos alunos, fazendo com que identificassem os erros e individualmente corrigissem sua própria avaliação, os alunos puderam registrar a correta solução, que posteriormente foi utilizada na resolução do novo instrumento avaliativo.

Essa mudança na forma como as avaliações são corrigidas é mais um dos benefícios extraídos da análise de erros. O erro é objeto de análise tanto do professor como do aluno, ambos participam do processo de correção. Durante a correção faz-se importante também incentivar que procedimentos de solução alternativos sejam levantados e que os alunos que adotaram tal procedimento possam explicá-los, proporcionando novos pontos de vista e um aumento nas vias de aprendizagem.

Durante a aplicação das atividades em sala de aula, percebeu-se inicialmente certa resistência por parte dos alunos, tanto à avaliação quanto para a correção do instrumento avaliativo. Com relação à aplicação do primeiro instrumento avaliativo, estranharam o fato de o professor não explicar a matéria antes da avaliação. Como o primeiro instrumento de avaliação tinha a intenção de identificar o que os alunos já sabiam sobre o tema, não foi ministrada nenhuma aula anterior à aplicação da avaliação. Com relação à correção, os alunos esperavam que apenas fossem apresentadas as soluções corretas, sem a discussão sobre os erros apresentados. A atividade tornou-se mais interessante quando os alunos começaram a participar da correção, identificando os erros e sugerindo soluções.

Finalmente, retomando o questionamento inicial sobre a conexão entre os conteúdos a serem aprendidos no ambiente escolar, propiciando um aprendizado inter-relacionado e duradouro, observou-se no presente trabalho que a análise de erros se apresenta como ferramenta capaz de atender a tal finalidade. Além disso, permite ao professor a promoção de um ambiente propício à construção do conhecimento pelo próprio aluno, à medida que identifica e supera seus erros.

Em suma, verificou-se que a análise de erros contribui na aprendizagem matemática ao permitir a reflexão sobre os erros cometidos pelos alunos, que ao invés de esperarem uma resposta pronta, precisam identificar e construir uma solução diferente, tornando-se participantes do processo de correção. Ainda, esta

forma de correção dá oportunidades para o surgimento de novos procedimentos de solução, permitindo um aumento nos canais de aprendizagem e também auxiliando o professor a compreender melhor o pensamento adotado pelo aluno durante a resolução dos problemas.

Essas mudanças provocam uma alteração na forma de atuação do professor, não mais como aquele que impõe as regras e modelos a serem reproduzidos, mas sim aquele que identifica os erros cometidos e propõe alternativas metodológicas capazes de auxiliar o aluno a construir seu conhecimento, a partir da superação do próprio erro. Sob esta perspectiva o professor possui uma atuação mais dinâmica, o que contribui para sua motivação e desenvolvimento profissional.

Observou-se que a cada erro registrado, uma nova oportunidade de estudo aparecia. Exemplificando, ao identificar que os alunos erravam na multiplicação de decimais, a princípio imaginou-se que erravam apenas por não contarem as casas decimais corretamente, porém encarar os decimais como números naturais separados por vírgula, já se apresenta como um equívoco, conforme Esteves (2012, p. 196).

Sendo assim, futuros trabalhos envolvendo análise de erros podem se dedicar a erros específicos, cometidos com maior frequência, criando-se um registro de erros e de possíveis encaminhamentos metodológicos destinados à superação dos mesmos.

## REFERÊNCIAS

ABRAHÃO, M. H. M. B. (Org.). **Avaliação e erro, construtivo libertador: uma teoria-prática** includente em educação. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004.

AMADEU, M. S. U. S.; ASSIS, T. T. S.; MENGATTO, A. P. F.; STROPARO E. M. **Manual de normalização de documentos científicos de acordo com as normas da ABNT**. Curitiba: UFPR, 2017.

BARGUIL, P. M.; MORAES F. R. F.; LENDL A. Interpretação de enunciados matemáticos: contribuições da teoria dos gêneros discursivos. In: ANDRADE F. A.; TAHIM A. P. V. O.; CHAVES F. M. **Educação e contemporaneidade: debates e dilemas**. Curitiba: CRV, 2017. P. 277-290.

**Brainly: Questione tudo, responda a tudo**. Disponível em: <<https://brainly.com.br>>. Acesso em: 27 maio 2018.

CURY, H. N. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

CURY, H. N. Análise de erros e formação de professores: Sugestão para ensino e pesquisa em cursos de licenciatura em matemática. **Revista Contexto e Educação**, Ijuí, Ano 21, n. 76, p. 95-113, jul./dez. 2006.

ESTEVES, A. K.; SOUZA, N. M. M. Números decimais na sala de aula: os conhecimentos de um grupo de professores e a relação com sua prática pedagógica. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, v. 6, n. 1, p. 188-205, mai. 2012.

GUERRA, R. B.; Silva D. P. Para que ensinar regra de três? In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais...** Recife: CIAEM, 2011.

KIRSHNER, D.; AWTRY, T. Visual salience of algebraic transformations. **Journal for Research in Mathematics Education**, Louisiana, v. 35, n. 4, p. 224-257, jul. 2004.

MORIN, E. **A cabeça bem feita: repensar a reforma, reformar o pensamento**. Tradução de Eloá Jacobina. 8ª ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2003.

PINTO, N. B. **O erro como estratégia didática no ensino da matemática elementar**. 174. Tese (Doutorado em Educação: área de Didática) – Setor de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1998.

PINTO, N. B. **O erro como estratégia didática: Estudo do erro no ensino de matemática elementar**. Campinas: Papirus, 2000.

**Racha Cuca**. Disponível em: <<https://rachacuca.com.br>>. Acesso em: 27 maio 2018.

RICO, L.; KILPATRICK, J.; GÓMEZ, P. (Org.). **Errores y dificultades de los Estudiantes, Resolución de problemas, Evaluación, Historia**. Bogotá: Una empresa docente, 1998.

**Toda matéria: Conteúdos escolares para alunos e professores**. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br>>. Acesso em: 27 maio 2018.

VIZOLLI I. Análise dos procedimentos utilizados por alunos da educação de jovens e adultos, na resolução de situações-problema de proporção-porcentagem. **Revista Contrapontos**, Itajaí, Ano 4, n. 3, p. 461-473, set./dez. 2004.