

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

YASMIM ADARA AMORIM

UMA RELAÇÃO ENTRE SISTEMA DE RAÍZES E ÁLGEBRA  
CLUSTER

CURITIBA  
2018

YASMIM ADARA AMORIM

UMA RELAÇÃO ENTRE SISTEMA DE RAÍZES E ÁLGEBRA  
CLUSTER

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel e Licenciada, Curso de Matemática, Departamento de Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientadora: Profa. Dra. Heily Wagner

CURITIBA  
2018

# TERMO DE APROVAÇÃO

YASMIM ADARA AMORIM

## RELAÇÃO ENTRE SISTEMA DE RAÍZES E ÁLGEBRA CLUSTER

Monografia aprovada pela banca examinadora que segue abaixo, como requisito parcial à obtenção do grau de Bacharel e Licenciada em Matemática, pela Universidade Federal do Paraná - Setor de Ciências Exatas.

Orientadora: Profa. Dra. Heily Wagner  
Departamento de Matemática, UFPR

Prof. Dr. Cristian Schmidt  
Departamento de Matemática, PUC-PR

Curitiba, 19 de dezembro de 2018.

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a Deus por me dar a minha família. Sem a minha família não seria quem eu sou hoje, então muito obrigada por tudo, pela educação que me deram e pelas oportunidades, sobretudo pelo apoio, principalmente aos meus pais, Daniela e Muriel, e à minha irmã, Yohanna.

Gostaria de agradecer a minha orientadora, Professora Heily Wagner, por ter ficado comigo nesses quase cinco anos de orientação e por ter me ajudado a encontrar o caminho para este trabalho e para o que quero estudar no futuro.

Agradecer também ao meu orientador por seis meses, Professor Lucas, obrigada por aceitar orientar uma aluna de área tão distante e me ensinar um pouquinho de Otimização, uma área que eu sempre tive curiosidade e se tiver oportunidade, talvez ainda volte pra ela.

Agradecer ao meus amigos: às minhas amigas, que mesmo nos vendo uma vez ao ano, estou sempre pensando em vocês; aos amigos do FBDC, que me ajudam muito através da dança; e ainda, aos amigos e amigas da Matemática/Matemática Industrial, que durante esses cinco anos de curso me apoiaram de várias formas, às vezes me ajudavam a fazer contas, ou até mesmo me ensinavam uma matéria super complicada que eu não conseguiria passar, mas o maior apoio foi ter vocês do meu lado para enfrentar todas as emoções da faculdade (provas, RU's, intervalos, ...) e vocês acreditarem em mim.

Muito Obrigada!

“Mas sei tudo que eu quero viver  
Dos meus sonhos vou fazer  
Um caminho traçado por mim” - Jota Quest.

## RESUMO

As álgebras cluster foram introduzidas por Fomin e Zelevinsky no ano de 2002 como uma  $\mathbb{Z}$ -subálgebra do corpo  $\mathbb{Q}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . A partir do conjunto inicial de variáveis  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  construímos novas variáveis, chamadas *variáveis cluster*, utilizando uma regra que é chamada de *mutação* de variáveis. Para defini-la, utilizamos um quiver (grafo orientado) com  $n$  vértices, sem 2-ciclo e sem laço e um algoritmo chamado de mutação de quiver.

No caso desse quiver ser Dynkin tal processo de mutação é finito e, nessa situação, essa teoria se relaciona com sistema de raízes.

Um sistema de raízes é um subconjunto finito gerador de um espaço euclidiano (espaço vetorial com produto interno real usual) que satisfaz as seguintes propriedades: se  $\alpha$  é raiz, o único múltiplo de  $\alpha$  no sistema de raízes é  $-\alpha$  e a reflexão sobre  $\alpha$  deixa tal subconjunto invariante.

O objetivo deste trabalho é mostrar uma relação entre as variáveis cluster e as raízes do sistema de raízes.

**Palavras-chave:** Álgebra cluster; Sistema de raízes; Relação.

## ABSTRACT

The cluster algebras were introduced by Fomin and Zelevinsky on the year of 2002 as a  $\mathbb{Z}$ -subalgebra of the field  $\mathbb{Q}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . From the initial cluster  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  we build new variables, called *cluster variables*, using a rule that we call variable *mutation*. In order to define it, we use a quiver (oriented graph) with  $n$  vertex, without 2-cicle and loop and an algorithm called quiver mutation.

When this quiver is Dynkin the mutation process is finite and, in that case, this theory can be related to root system.

A root system is a finite subset generator of an Euclidean space (vector space with real dot product) which suffices the following: if  $\alpha$  is a root, the only multiple of  $\alpha$  in root system is  $-\alpha$  the reflexion under  $\alpha$  leave this subset unchanged.

The aim of this work is to exhibit a correlation between cluster variables and the roots of root system.

**Palavras-chave:** cluster algebra; root system; correlation.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Álgebra cluster</b>	<b>14</b>
1.1	Álgebra cluster com matriz . . . . .	14
1.1.1	Mutação de variável na direção $k$ . . . . .	15
1.1.2	Mutação de matriz na direção $k$ . . . . .	16
1.1.3	Propriedades da matriz antissimetrizável . . . . .	17
1.1.4	Mutação de semente na direção $k$ . . . . .	18
1.2	Álgebra cluster . . . . .	20
1.3	Mudança de matriz antissimétrica para quiver . . . . .	21
1.4	Álgebra cluster com quiver . . . . .	23
1.4.1	Mutação de variável na direção $k$ . . . . .	23
1.4.2	Mutação de quiver na direção $k$ . . . . .	23
1.4.3	Mutação de semente na direção $k$ . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Sistema de raízes</b>	<b>25</b>
2.1	Pares de raízes . . . . .	27
2.2	Base de um sistema de raízes . . . . .	30
2.2.1	Lemas sobre raízes simples . . . . .	35
2.3	Grupo de Weyl . . . . .	37
2.4	Exemplo: Sistema de raízes $A_3$ . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Relação entre sistema de raízes e álgebra cluster</b>	<b>43</b>
<b>4</b>	<b>Apêndice</b>	<b>46</b>
4.1	O que aconteceria se mudássemos o anel de entradas da matriz $B$ para o anel $\mathbb{Z}_m$ ? . . . . .	46

# Introdução

A Matemática é uma ciência composta por diversas áreas e subáreas que não só esclarecem as especificidades presentes nela, como também facilitam sua compreensão como um todo. Dentre essas variadas divisões, a área Álgebra merece destaque nesse trabalho, mais especificamente, dois assuntos que a constituem: a Álgebra cluster e o Sistema de Raízes.

A Álgebra cluster, por ser um tema não muito pesquisado ou estudado, existem poucos registros quanto a sua definição, porém analisando artigos e periódicos explica-se esse assunto da seguinte forma: aplicando-se um processo específico a um conjunto inicial de variáveis, obtemos novas variáveis, que junto às iniciais formam polinômios cujos coeficientes são números inteiros. À respeito do sistema de raízes, define-se como: um subconjunto de um espaço vetorial que satisfaz algumas propriedades, como se  $\alpha$  é raiz, o único múltiplo de  $\alpha$  no sistema de raízes é  $-\alpha$  e a reflexão sobre  $\alpha$  deixa tal subconjunto invariante.

Usualmente, ambos os assuntos explicados anteriormente são ligados, separadamente, a um terceiro tema também incluído na área Álgebra, chamado álgebras de Lie. Contudo, visto que esse assunto não será abordado neste trabalho, as propriedades específicas tanto do sistema de raízes quanto da álgebra cluster foram mais detalhadamente estudados, buscando uma relação direta entre esses dois tópicos sem utilizar as álgebras de Lie como mediador.

Neste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), nos orientamos por meio do exemplo de uma álgebra cluster gerada a partir de um conjunto inicial de três variáveis, e, ao final do trabalho, relacionaremos por uma bijeção o total de variáveis cluster distintas obtidas com um sistema de raízes cuja base é de dimensão também 3. Diante disso, o objetivo desse TCC foi obter uma relação entre as variáveis clusters distintas da álgebra cluster e de um conjunto específico do sistema de raízes.

# Preliminares

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos fundamentais para este trabalho.

**Definição 0.0.1.** Um **grupo** é um par que consiste de um conjunto  $G$  e uma operação  $\circ$  que associa a cada dois elementos  $x, y \in G$ , um elemento  $x \circ y \in G$  tal que

- $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z, \quad \forall x, y, z \in G$  (associatividade);
- Existe um elemento  $e \in G$  tal que  $e \circ x = x \circ e = x \in G$  (elemento neutro);
- A cada elemento  $x \in G$  corresponde um elemento  $x^{-1} \in G$  tal que  $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$  (elemento oposto).

Um grupo é dito **abeliano** se  $x \circ y = y \circ x, \quad \forall x, y \in G$ .

Um grupo importante é o **grupo simétrico**  $s_n$ , cujos  $n$  elementos são permutações de um conjunto nele mesmo, ou seja, funções bijetoras. A operação desse grupo é a composição de funções.

**Exemplo 0.0.1.** O **grupo linear geral** ( $GL(E)$ ) de grau  $n$  é o grupo formado pelas matrizes  $n \times n$  invertíveis, com a operação de multiplicação de matrizes.

**Definição 0.0.2.** Um **domínio de integridade**  $D$  é um anel com unidade, comutativo e sem divisores de zero, ou seja, para todo  $a, b, c, d \in D$ :

1.  $(a + b) + c = a + (b + c)$  (associatividade da soma)
2. Existe  $0 \in D$  tal que  $a + 0 = 0 + a = a$  (existência de elemento neutro para a soma)
3. Para todo  $x \in D$  existe um único  $y \in D$ , denotado por  $y = -x$ , tal que  $x + y = y + x = 0$  (existência de inverso aditivo)
4.  $a + b = b + a$  (comutatividade da soma)
5.  $a(b + c) = ab + ac; (a + b)c = ac + bc$  (distributividade à esquerda e à direita)
6. Existe  $1 \in D, 0 \neq 1$ , tal que  $x1 = 1x = x$ , para todo  $x \in D$  (unidade)
7. Para todo  $x, y \in D, \quad xy = yx$ ; (comutativo)

8.  $x, y \in D, \quad xy = 0 \implies x = 0 \text{ ou } y = 0.$  (sem divisores de zero)

**Definição 0.0.3.** Um **corpo**  $F$  é um conjunto não-vazio munido das seguintes propriedades:

- É um grupo abeliano em relação à operação adição;
- A multiplicação é comutativa  $xy = yx \quad \forall x, y \in F$ ;
- A multiplicação é associativa  $x(yz) = (xy)z \quad \forall x, y, z \in F$ ;
- Existe um único elemento não nulo  $1 \in F$  tal que  $x1 = x \in F$ ;
- A cada elemento não nulo  $x \in F$  existe um  $x^{-1} \in F$  tal que  $xx^{-1} = 1$ ;
- A multiplicação é distributiva em relação à adição, ou seja,  $x(y + z) = xy + xz \quad \forall x, y, z \in F$ .

**Definição 0.0.4.** Definimos o **corpo de frações de um domínio de integridade**  $D$  da seguinte forma: considere  $D^* = D \setminus \{0\}$  e definimos uma relação de equivalência em  $\mathcal{B} = D \times D^* = \{(a, b) \mid a \in D, b \in D^*\}$  por

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$$

Sejam  $(a, b) = \frac{a}{b}, (c, d) = \frac{c}{d} \in D \times D^*$ , definiremos as operações do corpo de frações:

- **Soma:**

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

- **Produto:**

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

**Exemplo 0.0.2.** •  $\mathbb{Q}$  é o corpo de frações de  $\mathbb{Z}$ .

- O conjunto  $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$  de todos os polinômios com coeficientes racionais em  $n$  variáveis, que é um domínio de integridade. Denotamos por  $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$  seu corpo de frações.

Alguns de seus elementos são :  $\frac{x_1}{x_2}, \frac{1 + x_2}{x_3}, \frac{1}{x_4} \dots$

**Definição 0.0.5.** Um **espaço vetorial** consiste de um corpo  $F$  de escalares e um conjunto  $V$  de vetores e de operações

- de *adição de vetores*, que associa a cada par de vetores  $x, y \in V$  um elemento  $x + y \in V$ , denominado *soma*. Com essa operação, um espaço vetorial é um grupo abeliano.
- de *multiplicação por escalar*, que associa um escalar do corpo  $c \in F$  e um vetor de  $x \in V$  denominado *multiplicação de  $c$  por  $x$* . Para todo  $x, y \in V$  e para todo  $c, c_1, c_2 \in F$

$$- 1x = x \quad \forall x \in V$$

$$- (c_1 c_2)x = c_1(c_2 x), \quad \forall c_1, c_2 \in F, \forall x \in V$$

$$- c(x + y) = cx + cy, \quad \forall c \in F, \forall x, y \in V$$

$$- (c_1 + c_2)x = c_1 x + c_2 x, \quad \forall c_1, c_2 \in F, \forall x \in V$$

**Definição 0.0.6.** Seja  $F$  o corpo dos números reais e seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $F$ . Um **produto interno** sobre  $V$  é uma função que associa a cada par de vetores  $\alpha, \beta \in V$  um escalar  $(\alpha, \beta) \in F$  tal que

- $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma), \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in V$
- $(c\alpha, \beta) = c(\alpha, \beta), \quad \forall c \in F, \forall \alpha, \beta \in V$
- $(\beta, \alpha) = (\alpha, \beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V$
- $(\alpha, \alpha) > 0$ , se  $\alpha \neq 0, \quad \alpha \in V$
- $(\alpha, c\beta + \gamma) = c(\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma), \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in V, \forall c \in F$

Ou ainda, geometricamente por

$$(x, y) = \|x\| \|y\| \cos \theta$$

Sendo  $\theta$  o ângulo entre  $x$  e  $y$ . Note que, o produto interno é bilinear.

O produto interno usual entre  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  em  $\mathbb{R}^n$  é definido por

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Em particular, o produto interno entre  $x = (x_1, x_2, x_3)$  e  $y = (y_1, y_2, y_3)$  em  $\mathbb{R}^3$  é dado por

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

**Definição 0.0.7.** Um *espaço euclidiano* é um espaço vetorial real munido do produto interno usual de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 0.0.8.** Seja  $F$  um corpo. Uma *álgebra sobre um corpo  $F$*  é um espaço vetorial  $\mathcal{A}$  sobre  $F$  com uma operação adicional dita multiplicação, que associa a cada par de vetores  $\alpha$  e  $\beta \in \mathcal{A}$  o produto  $\alpha\beta$  de tal maneira que

1.  $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$
2.  $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$  e  $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$
3.  $c(\alpha\beta) = (c\alpha)\beta = \alpha(c\beta) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{A}, \forall c \in F$

A álgebra  $\mathcal{A}$  é dita **comutativa** se  $\alpha\beta = \beta\alpha \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{A}$

# Capítulo 1

## Álgebra cluster

As álgebras cluster foram introduzidas por Fomin e Zelevinsky no ano de 2002 como uma  $\mathbb{Z}$ -subálgebra do corpo  $F = \mathbb{Q}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . A partir do conjunto inicial de variáveis  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  construímos novas variáveis, chamadas *variáveis cluster*, utilizando uma regra que é chamada de *mutação* de variáveis.

Vamos ver nesse trabalho a álgebra cluster definida de duas formas: com uma matriz específica e um quiver.

### 1.1 Álgebra cluster com matriz

A matriz usada para definir álgebra cluster é chamada *matriz antissimetrizável* e para definí-la precisamos saber matriz antissimétrica.

**Definição 1.1.1.** • Uma matriz  $B$  é **antissimétrica** se  $b_{ij} = -b_{ji}$  e  $b_{ii} = 0$ .

- Uma matriz  $B$ ,  $B \in M_n(\mathbb{Z})$ , é dita **antissimetrizável** se existe uma matriz diagonal com entradas positivas  $D$ , tal que  $DB$  é uma matriz antissimétrica. Neste caso,  $D$  é a matriz **antissimetrizante** de  $B$ .

**Observação 1.1.1.** Toda matriz antissimétrica é antissimetrizável, basta fazer  $D = Id$  na definição de matriz antissimetrizável.

**Exemplo 1.1.1.** Considere as matrizes  $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$  e  $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

Vamos calcular  $DB$ :

$$DB = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ -6 & 0 & 10 \\ 0 & -10 & 0 \end{bmatrix},$$

$DB$  é antissimétrica, portanto  $B$  é antissimetrizável.

Para encontrar as novas variáveis precisamos definir mutação, o processo usado para obtê-las.

### 1.1.1 Mutação de variável na direção $k$

Considere  $B = (b_{ij})_n$  uma matriz antissimetrizável e o conjunto  $X = \{x_1, \dots, x_k, \dots, x_n\}$  de variáveis algebricamente independentes, ou seja, não podemos obter  $x_i$  com uma combinação de  $X \setminus \{x_i\}$ . Para acharmos  $x'_k$  utilizamos a regra

$$x'_k x_k = \prod_{b_{ik} > 0} x_i^{b_{ik}} + \prod_{b_{ik} < 0} x_i^{-b_{ik}}$$

Denotaremos ainda produtório vazio como 1.

Após a mutação teremos o conjunto  $X' = \mu_k(X) = X \setminus \{x_k\} \cup \{x'_k\} = \{x_1, \dots, x'_k, \dots, x_n\}$ .

**Exemplo 1.1.2.** Dada a matriz antissimétrica, em particular antissimetrizável,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  e o conjunto de variáveis  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ . Vamos encontrar a nova variável  $x'_2$ . Logo,

$$\begin{aligned} x'_2 x_2 &= \prod_{b_{i2} > 0} x_i^{b_{i2}} + \prod_{b_{i2} < 0} x_i^{-b_{i2}} \\ x'_2 x_2 &= x_1 + x_3 \end{aligned}$$

Assim,

$$x'_2 = \frac{x_1 + x_3}{x_2}$$

Então o conjunto  $X'$  será:

$$X' = \left\{ x_1, \frac{x_1 + x_3}{x_2}, x_3 \right\}$$

**Lema 1.1.1.** O conjunto  $X' = \{x_1, \dots, x'_k, \dots, x_n\}$  gera o mesmo corpo  $F = \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$  que o conjunto  $X$ .

### Demonstração:

Se  $F' = \mathbb{Q}(x_1, \dots, x'_k, \dots, x_n)$ , devemos mostrar que  $F = F'$ . Como  $x_i \in X$  e  $x_i \in X'$ , para  $i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$ , temos que quaisquer combinações entre esses  $x_i$  estão em  $F$  e  $F'$ , assim basta mostrar que  $x_k \in F'$  e  $x'_k \in F$ .

De acordo com a regra de mutação, temos que

$$x'_k x_k = \prod_{b_{ik} > 0} x_i^{b_{ik}} + \prod_{b_{ik} < 0} x_i^{-b_{ik}}$$

Como  $x_i \in F, \forall i \neq k$ , então  $x'_k x_k \in F$ .

E como  $x_k \in F$  e  $F$  é corpo, então  $\frac{1}{x_k} \in F$ . Logo,

$$\frac{1}{x_k} x_k x'_k \in F \text{ e } x'_k \in F$$

Analogamente mostra-se que,  $x_k \in F'$ .

Assim,  $F = F'$

■

**Observação 1.1.2.** Como  $x'_k$  só pode ser obtido com  $x_k$ , segue que  $X' = X \setminus \{x_k\} \cup \{x'_k\}$  é algebricamente independente.

## 1.1.2 Mutação de matriz na direção k

Através de uma regra também podemos mutar a matriz antissimetrizável na direção  $k$ .

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij}, & \text{se } i = k \text{ ou } j = k \\ b_{ij} + \frac{|b_{ik}|b_{kj} + b_{ik}|b_{kj}|}{2}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

sendo  $B' = (b'_{ij}) = \mu_k(B)$ .

**Exemplo 1.1.3.** Vamos mutar a matriz  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  na direção 2.

$$B' = \mu_2(B)$$

Utilizando a regra trocamos o sinal dos elementos que estão na segunda coluna e na segunda linha e

$$b'_{11} = b_{11} + \frac{|b_{12}|b_{21} + b_{12}|b_{21}|}{2} = 0 + \frac{|1|(-1) + 1|(-1)|}{2} = 0 + 0 = 0$$

$$b'_{13} = b_{13} + \frac{|b_{12}|b_{23} + b_{12}|b_{23}|}{2} = 0 + \frac{|1|1 + 1|1|}{2} = 0 + 1 = 1$$

$$b'_{31} = b_{31} + \frac{|b_{32}|b_{21} + b_{32}|b_{21}|}{2} = 0 + \frac{|-1|(-1) + (-1)|-1|}{2} = 0 - 1 = -1$$

$$b'_{33} = b_{33} + \frac{|b_{32}|b_{23} + b_{32}|b_{23}|}{2} = 0 + \frac{|-1|1 + (-1)|1|}{2} = 0 + 0 = 0$$

Portanto,

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

### 1.1.3 Propriedades da matriz antissimetrizável

**Proposição 1.1.2.** Se  $B = (b_{ij})_n$  é uma matriz antissimetrizável então  $b_{ii} = 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$  e para  $i \neq j$  tem-se que  $b_{ij} = b_{ji} = 0$  ou  $b_{ij}b_{ji} < 0$ .

**Demonstração:**

Seja  $B = (b_{ij})_n$  antissimetrizável e  $D = (d_i)_n$  uma matriz diagonal positiva, tal que o produto  $DB$  seja uma matriz antissimétrica. Logo:

- $d_i b_{ii} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ , então, como  $d_i$  é maior que zero, implica  $b_{ii} = 0$ .
- $d_i b_{ij} = -d_j b_{ji}$

$$b_{ij} = -\frac{d_j}{d_i} b_{ji}$$

Como  $k \frac{d_j}{d_i} > 0$  temos que  $b_{ij} = -k b_{ji}$  e assim

$$b_{ij}b_{ji} = -k b_{ji}b_{ji} = -k b_{ji}^2 < 0$$

Então,  $b_{ij}b_{ji} < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

■

**Proposição 1.1.3.** A matriz  $B' = \mu_k(B)$  é uma matriz antissimetrizável e  $B$  e  $B'$  possuem a mesma matriz antissimetrizante  $D$ .

### Demonstração:

Seja  $D = (d_i)_n$  a matriz antissimetrizante de  $B = (b_{ij})_n$ , ou seja,

$DB = C$ , com  $C = (c_{ij})_n$  uma matriz antissimétrica.

Considerando a proposição anterior, temos que  $c_{ij} = -c_{ji} = d_i b_{ij} = -d_j b_{ji}$ , se  $i \neq j$ ; e  $c_{ij} = d_i b_{ii} = 0$ , se  $i = j$ .

Seja  $B' = (b'_{ij})_n$  a mutação da matriz  $B$ . Consideremos o produto  $DB'$

- Se  $i = k$  ou  $j = k$ , temos

$$d_i b'_{ij} = d_i (-b_{ij}) = -d_i b_{ij} = -(-d_j b_{ji}) = d_j b_{ji}, \text{ e portanto}$$

$$d_i b'_{ij} = -d_j b'_{ji}$$

- Se  $i, j \neq k$ , então

$$\begin{aligned} d_i b'_{ij} &= d_i \left( b_{ij} + \frac{|b_{ik}|b_{kj} + b_{ik}|b_{kj}|}{2} \right) = d_i b_{ij} + \frac{|d_i b_{ik}|b_{kj} + d_i b_{ik}|b_{kj}|}{2} \\ &= -d_j b_{ji} + \frac{|-d_k b_{ki}|b_{kj} - d_k b_{ki}|b_{kj}|}{2} = -d_j b_{ji} + \frac{|-b_{ki}|d_k b_{kj} - b_{ki}|d_k b_{kj}|}{2} \\ &= -d_j b_{ji} + \frac{|b'_{ki}| - d_j b_{jk} + b'_{ki}| - d_j b_{jk}|}{2} = -d_j b_{ji} + d_j \left( \frac{|b'_{ki}| - b_{jk} + b'_{ki}| - b_{jk}|}{2} \right) \\ &= -d_j \left( b_{ji} + \frac{|b'_{ki}|b'_{jk} + b'_{ki}|b'_{jk}|}{2} \right) = -d_j b'_{ji} \end{aligned}$$

Assim sendo, a matriz  $DB'$  também é antissimétrica. Logo,  $B'$  é antissimetrizável e  $D$  é, também, a matriz antissimetrizante de  $B'$ . ■

## 1.1.4 Mutações de semente na direção $k$

**Definição 1.1.2.** *Uma semente em um corpo  $F$  é um par  $(X, B)$  onde*

- $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  é um conjunto de variáveis algebricamente independentes e que geram  $F$ ;
- $B$  é uma matriz antissimetrizável de ordem  $n$  com entradas em  $\mathbb{Z}$ .

O conjunto  $X$  é chamado de **cluster** e cada variável  $x_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , é chamada **variável cluster**.

Seja  $S : (X, B)$  uma semente em  $F$ . Para cada  $k \in \{1, \dots, n\}$  definimos uma mutação na direção  $k$  por

$$\mu_k(X, B) = (X', B')$$

Com  $X' = \mu_k(X)$  e  $B' = \mu_k(B)$  e como visto anteriormente  $X'$  gera  $F$  e  $B'$  é antissimétrizável.

**Exemplo 1.1.4.** *Vamos mutar a semente*

$$S : \left( \{x_1, x_2, x_3\}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) \text{ na direção } 2.$$

Como feito anteriormente,  $x'_2 = \frac{x_1 + x_3}{x_2}$ , então  $X' = \left\{ x_1, \frac{x_1 + x_3}{x_2}, x_3 \right\}$  e

$$B' = \mu_2(B) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, se  $S' = \mu_2(S) = (X', B')$

$$S' : \left( \left\{ x_1, \frac{x_1 + x_3}{x_2}, x_3 \right\}, B' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

**Proposição 1.1.4.** *A mutação é uma operação involutiva, isto é,  $\mu_k^2(S) = (S)$ .*

Vamos calcular  $S'' = \mu_2 S'$ .

- Do mesmo modo que calculamos  $x'_2$  vamos calcular  $x''_2$ , assim

$$x''_k x'_k = \prod_{b'_{ik} > 0} x_i^{b'_{ik}} + \prod_{b'_{ik} < 0} x_i^{-b'_{ik}}$$

$$x''_2 x'_2 = \prod_{-b_{i2} > 0} x_i^{b_{i2}} + \prod_{-b_{i2} < 0} x_i^{-b_{i2}}$$

$$x''_2 x'_2 = \prod_{b_{i2} < 0} x_i^{-b_{i2}} + \prod_{b_{i2} > 0} x_i^{b_{i2}}$$

$$x''_2 x'_2 = x_3 + x_1$$

$$x''_2 = \frac{x_3 + x_1}{x'_2}$$

$$x_2'' = \frac{x_3 + x_1}{\frac{x_3 + x_1}{x_2}}$$

$$x_2'' = x_2$$

- Do mesmo modo que calculamos  $B'$  teremos que a segunda linha e a segunda coluna da matriz  $B''$  trocam de sinal novamente, logo voltam para o valor inicial e

$$b_{11}'' = b_{11}' + \frac{|b_{12}'b_{21}' + b_{12}'b_{21}'|}{2} = 0 + \frac{|-1|1 + (-1)|1|}{2} = 0 + 0 = 0$$

$$b_{13}'' = b_{13}' + \frac{|b_{12}'b_{23}' + b_{12}'b_{23}'|}{2} = 1 + \frac{|-1|(-1) + (-1)|-1|}{2} = 1 - 1 = 0$$

$$b_{31}'' = b_{31}' + \frac{|b_{32}'b_{21}' + b_{32}'b_{21}'|}{2} = -1 + \frac{|1|1 + 1|1|}{2} = -1 + 1 = 0$$

$$b_{33}'' = b_{33}' + \frac{|b_{32}'b_{23}' + b_{32}'b_{23}'|}{2} = 0 + \frac{|1|(-1) + 1|-1|}{2} = 0 + 0 = 0$$

Portanto,

$$B'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = B$$

Portanto,  $S''(X, B) = S(X, B)$ .

## 1.2 Álgebra cluster

A partir de uma semente inicial  $S : (X, B)$ , mudamos o conjunto de variáveis  $X$  e a matriz  $B$  em todas as  $k$  direções repetidamente. Considere o conjunto formado por todas as variáveis cluster obtidas, a  $\mathbb{Z}$ -subálgebra de  $F$  gerada pelo conjunto de variáveis cluster chamamos de *álgebra cluster*.

**Exemplo 1.2.1.** *O conjunto das variáveis obtidas com as mutações da semente*

$$S : \left( \{x_1, x_2, x_3\}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) \text{ é :}$$

$$\left\{ x_1, x_2, x_3, \frac{x_2 + 1}{x_1}, \frac{x_2 + 1}{x_3}, \frac{x_1 + x_3}{x_2}, \frac{x_1 + (1 + x_2)x_3}{x_1x_2}, \frac{x_3 + x_1(1 + x_2)}{x_2x_3}, \frac{(x_2 + 1)(x_1 + x_3)}{x_1x_2x_3} \right\}$$

E esse conjunto, a partir de combinações e operações do corpo  $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$  gera uma álgebra cluster.

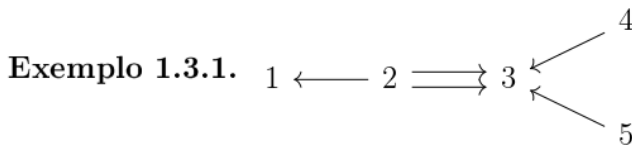
Realizando mutações em todas as direções, obtemos os seguintes 13 clusters:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1+x_2}{x_1}, x_2, x_3 \right\}, \left\{ x_1, \frac{x_1+x_3}{x_2}, x_3 \right\}, \left\{ x_1, x_2, \frac{1+x_2}{x_3} \right\}, \left\{ \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{x_1+(1+x_2)x_3}{x_1x_2}, x_3 \right\}, \\ & \left\{ \frac{x_1+(1+x_2)x_3}{x_1x_2}, \frac{x_1+x_3}{x_2}, x_3 \right\}, \left\{ x_1, \frac{x_1+x_3}{x_2}, \frac{x_3+(1+x_2)x_1}{x_2x_3} \right\}, \\ & \left\{ x_1, \frac{x_3+(1+x_2)x_1}{x_2x_3}, \frac{1+x_2}{x_3} \right\}, \left\{ \frac{1+x_2}{x_1}, x_2, \frac{1+x_2}{x_3} \right\}, \\ & \left\{ \frac{(x_1+x_3)(1+x_2)}{x_1x_2x_3}, \frac{x_3+(1+x_2)x_1}{x_2x_3}, \frac{1+x_2}{x_3} \right\}, \left\{ \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{(x_1+x_3)(1+x_2)}{x_1x_2x_3}, \frac{1+x_2}{x_3} \right\}, \\ & \left\{ \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{x_1+(1+x_2)x_3}{x_1x_2}, \frac{(x_1+x_3)(1+x_2)}{x_1x_2x_3} \right\}, \left\{ \frac{x_1+(1+x_2)x_3}{x_1x_2}, \frac{x_1+x_3}{x_2}, \frac{(x_1+x_3)(1+x_2)}{x_1x_2x_3} \right\}, \\ & \text{e } \left\{ \frac{x_1+(1+x_2)x_3}{x_1x_2}, \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{(x_1+x_3)(1+x_2)}{x_1x_2x_3} \right\} \end{aligned}$$

### 1.3 Mudança de matriz antissimétrica para quiver

Antes de explicar a mudança, vamos definir quiver.

**Definição 1.3.1.** Um **quiver**  $Q$  é uma quádrupla  $Q = (Q_o, Q_1, s, t)$  onde  $Q_o$  e  $Q_1$  são, respectivamente, conjuntos de vértices e de flechas e  $s, t$  são funções  $s, t : Q_o \rightarrow Q_1$ . Usaremos quivers finitos, sem laços e sem 2-ciclo.



**Definição 1.3.2.** Se  $Q$  é um quiver, então um **caminho em  $Q$**  é uma sequência de flechas  $a_n \rightarrow a_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow a_3 \rightarrow a_2 \rightarrow a_1$  tal que a cabeça de  $a_{i+1} =$  a cauda de  $a_i$ , usando a convenção de concatenação  $a_1a_2a_3 \dots a_{n-1}a_n$ .

**Observação 1.3.1.** O laço “ $1 \curvearrowright$ ” é um caminho que começa e termina no mesmo vértice do quiver e 2-ciclo “ $1 \rightleftarrows 2$ ” é o caminho que tem duas flechas, uma flecha começa em  $i$  e termina em  $j$  e a outra começa em  $j$  e termina em  $i$ .

Assim como fizemos com matriz, podemos obter variáveis usando quiver.

A ordem da matriz  $B$  define a quantidade de vértices do quiver e cada elemento  $b_{ij}$  corresponde ao número de flechas que vai do vértice  $i$  para o vértice  $j$ .

A direção da flecha é determinada pelo sinal de  $b_{ij}$ , se  $b_{ij}$  é positivo, então temos  $b_{ij}$  flechas de  $i$  para  $j$ . E se,  $b_{ij}$  é negativo, então temos  $|b_{ij}|$  flechas de  $j$  para  $i$ .

**Exemplo 1.3.2.** Considere a matriz  $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Como  $B$  tem ordem 3, teremos um quiver  $Q$  de 3 vértices. Temos  $b_{21} = 2$ , então há duas flechas com origem no vértice 2 que chegam no vértice 1.  $b_{23} = 1$  então temos uma flecha com origem no vértice 2 que chega no vértice 3.

Vemos que  $b_{13} = 0$ , então não há flechas ligando os vértices 1 e 3 e ainda  $b_{ii} = 0$ , para  $i = 1, 2, 3$ , logo não temos laço nesse quiver.

Assim o quiver é

$$1 \xleftarrow{2} 2 \rightarrow 3$$

**Observação 1.3.2.** O quiver será sem laços e sem 2-ciclo devido a essa mudança descrita anteriormente.

- Se tivéssemos um quiver com laço, ao fazer a mudança teríamos um elemento na diagonal principal diferente de zero, logo a matriz não seria antissimétrica.
- Se o quiver fosse

$$1 \longrightarrow 2 \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{array} 3$$

A matriz correspondente seria

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ou seja, não seria antissimétrica.

## 1.4 Álgebra cluster com quiver

### 1.4.1 Mutação de variável na dire o $k$

Dado o conjunto  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , o quiver  $Q$  e o vértice  $k$  definimos a nova variável  $x'_k$  pela seguinte regra

$$x'_k x_k = \prod_{i \rightarrow k} x_i + \prod_{k \rightarrow i} x_i$$

Onde,

$i \rightarrow k$  : flecha do quiver que chega em  $k$ .

$k \rightarrow i$  : flecha que tem origem em  $k$ .

Além disso, convencionam-se produtório vazio como 1.

**Exemplo 1.4.1.** *Considere o conjunto de variáveis  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$  e o quiver  $Q : 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$ . Vamos mutar o conjunto  $X$  na dire o 2, ou seja, achar uma nova variável  $x'_2$ .*

$$\begin{aligned} x'_k x_k &= \prod_{i \rightarrow k} x_i + \prod_{k \rightarrow i} x_i & x'_2 x_2 &= x_1 + x_3 \\ x'_2 x_2 &= \prod_{i \rightarrow 2} x_i + \prod_{2 \rightarrow i} x_i & x'_2 &= \frac{x_1 + x_3}{x_2} \end{aligned}$$

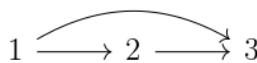
### 1.4.2 Muta o de quiver na dire o $k$

Assim como mutamos uma variável, podemos mutar um quiver na dire o  $k$

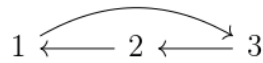
1. Se temos um caminho passando por  $k$  em  $Q$  da forma  $i \rightarrow k \rightarrow j$ , então acrescentamos uma flecha entre seus extremos,  $i \rightarrow j$ , em  $\mu_k(Q) = Q'$ .
2. Inverter as flechas que chegam e saem de  $k$ .
3. Apagar 2-ciclo se tiver.

**Exemplo 1.4.2.** *Vamos mutar o quiver  $Q : 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$  na dire o 2, ou seja,  $\mu_2(Q) = Q'$ .*

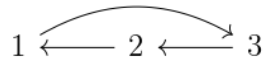
1. Pelo primeiro passo devemos acrescentar uma flecha de 1 para 3



2. Pelo segundo passo devemos inverter de sentido as flechas que saem e chegam em 2



3. Como não há 2-ciclo o quiver  $\mu_k(Q) = Q'$  é:



### 1.4.3 Mutaçãõ de semente na direçãõ $k$

Uma **semente** em um corpo  $F$  é um par  $(X, Q)$  onde

- $X = \{x_1, \dots, x_k\}$  é o conjunto de variáveis algebricamente independentes e que geram  $F$ ;
- $Q$  é um quiver finito, sem laços e sem 2-ciclo.

O conjunto  $X$  é chamado de *cluster* e cada variável  $x_i, i \in \{1, \dots, n\}$ , é chamada *variável cluster*.

Seja  $(X, Q)$  uma semente em  $F$ . Para cada  $k \in \{1, \dots, n\}$  definimos uma mutaçãõ na direçãõ  $k$  por

$$\mu_k(X, Q) = (X', Q')$$

Com  $X' = \mu_k(X)$  e  $Q' = \mu_k(Q)$  como definido anteriormente.

**Exemplo 1.4.3.** Com isso obtemos da semente  $S : (\{x_1, x_2, x_3\}, 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3)$  a semente mutada na direçãõ 2,  $S' = \mu_2(S)$ , que usando os cálculos anteriores temos

$$\mu_2(S) : \left( \left\{ x_1, \frac{x_1 + x_3}{x_2}, x_3 \right\}, 1 \xleftarrow{\quad} 2 \xleftarrow{\quad} 3 \right)$$

# Capítulo 2

## Sistema de raízes

Neste capítulo usaremos alguns resultados de Álgebra Linear, que podem ser encontrados na referência [4].

**Definição 2.0.1.** Chamamos de **reflexão de  $\beta$  por  $\alpha$**  a aplicação  $\sigma_\alpha$  definida por

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$$

em que  $\langle \beta, \alpha \rangle = 2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ , e  $(\cdot, \cdot)$  é o produto interno real usual.

A reflexão  $\sigma_\alpha$  fixa um hiperplano  $P_\alpha = \{\beta \in E \mid (\beta, \alpha) = 0\}$ , ou seja, se  $\beta \in P_\alpha$ ,  $\sigma_\alpha(\beta) = \beta$ .

**Definição 2.0.2.** Um subconjunto  $\Phi$  de um espaço euclidiano  $E$  é chamado de **sistema de raízes em  $E$**  se possui as seguintes propriedades:

1.  $\Phi$  é finito, gera o espaço vetorial  $E$ , e não contém o elemento neutro  $0$  (zero).
2. Se  $\alpha \in \Phi$ , os únicos múltiplos de  $\alpha$  em  $\Phi$  são  $\pm\alpha$ .
3. Se  $\alpha \in \Phi$ , a reflexão  $\sigma_\alpha$  deixa  $\Phi$  invariante.
4. Se  $\alpha, \beta \in \Phi$ , então  $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ .

Os elementos do sistema de raízes são chamados de **raízes**.

**Lema 2.0.1.** Seja  $\Phi$  um conjunto finito que gera  $E$ . Suponha que todas as reflexões  $\sigma_\alpha$  ( $\alpha \in \Phi$ ) deixam  $\Phi$  invariante. Se  $\sigma \in GL(E)$  deixa  $\Phi$  invariante, fixa um hiperplano  $P$  de  $E$ , e manda algum elemento não-nulo  $\alpha \in \Phi$  para seu oposto, então  $\sigma = \sigma_\alpha$  ( e  $P = P_\alpha$  ).

### Demonstração:

Seja  $\tau = \sigma\sigma_\alpha = \sigma\sigma_\alpha^{-1}$ , pois a reflexão é involutiva. Então  $\tau(\Phi) = \Phi$ , pois ambas  $\sigma$  e  $\sigma_\alpha$  deixam  $\Phi$  invariante e  $\tau(\alpha) = \alpha$ , pois  $\tau(\alpha) = \sigma\sigma_\alpha(\alpha) = \sigma(-\alpha) = \alpha$ .

Então  $\tau$  atua como identidade no espaço  $\mathbb{R}\alpha = \{c\alpha \mid c \in \mathbb{R} \text{ e } \alpha \in \Phi\}$ , pois

$$\tau(c\alpha) = \sigma\sigma_\alpha(c\alpha) = c\sigma\sigma_\alpha(\alpha) = c\alpha, \text{ pois } \sigma, \sigma_\alpha \in GL(E) \text{ e } \sigma\sigma_\alpha(\alpha) = \alpha$$

Ainda, atua como identidade no quociente  $E/\mathbb{R}\alpha$ . De fato, seja  $v \in E \setminus \{\mathbb{R}\alpha\}$ . Para que  $\tau(v) = v$  no quociente, devemos ter  $\tau(v) - v \in \mathbb{R}\alpha$ .

$$\sigma\sigma_\alpha(v) - v = \sigma(v - \langle v, \alpha \rangle \alpha) - v = \sigma(v) - \langle v, \alpha \rangle \sigma(\alpha) - v = \sigma(v) - v + \langle v, \alpha \rangle \alpha$$

Considere  $P = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$  o hiperplano fixado por  $\sigma$ . Seja  $B = \{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  uma base de  $E$ , então como  $\sigma$  fixa um hiperplano de dimensão  $n$  temos  $\sigma(\alpha) = -\alpha, \sigma(\alpha_i) = \alpha_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ .

Assim, se  $v = a\alpha + \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i$ ,

$$\sigma(v) - v = -a\alpha + \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i - a\alpha - \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i = -2a\alpha \in \mathbb{R}\alpha$$

Logo,

$$\sigma\sigma_\alpha(v) - v = \sigma(v) - v + \langle v, \alpha \rangle \alpha = -2a\alpha + \langle v, \alpha \rangle \alpha$$

$$\sigma\sigma_\alpha(v) - v \in \mathbb{R}\alpha$$

Portanto,  $\tau$  é identidade em  $E/\mathbb{R}\alpha$ .

Assim, por um lado,  $\tau = (Id)_{(n+1)}$ , logo o polinômio característico é dado por  $(1 - x)^{n+1}$ , então todos os autovalores são 1 e o polinômio minimal de  $\tau$  divide  $(1 - x)^{n+1}$ . (I)

Por outro lado, como  $\Phi$  é finito, para  $k \geq \text{card}\Phi$  e  $\beta \in \Phi$  nem todos os vetores  $\beta, \tau(\beta), \dots, \tau^k(\beta)$ , podem ser distintos. Então alguma potência de  $\tau$  fixa  $\beta$ .

De fato, suponha que  $\tau^m(\beta) = \tau^n(\beta), m > n$ , logo  $\tau^{m-n}(\beta) = \beta$ .

Então escolha  $k$  grande o suficiente tal que  $\tau^k$  fixe todo  $\beta \in \Phi$ . Como  $\Phi$  gera  $E$ , segue que  $\tau^k = (Id)_{n+1}$ , então o polinômio minimal de  $\tau$  divide  $x^k - 1$ . (II).

Com (I) e (II), temos que  $\tau$  tem o polinômio minimal  $x - 1 = \text{mdc}(x^k - 1, (x - 1)^{n+1})$ , ou seja,  $\tau = Id$ .

■

**Definição 2.0.3.** Chamamos de **grupo de Weyl**  $\mathcal{W}$  o subgrupo de  $GL(E)$  gerado pelas reflexões  $\sigma_\alpha (\alpha \in \Phi)$ ,  $\Phi$  um sistema de raízes.

Como as reflexões sobre as raízes deixam  $\Phi$  invariante, então temos que o conjunto formado por essas reflexões,  $\mathscr{W}$ , permuta o sistema de raízes.

Assim, vemos que  $\mathscr{W}$  é subgrupo do grupo simétrico  $s_n$ , e conseqüentemente, é um grupo finito.

**Lema 2.0.2.** *Seja  $\Phi$  um sistema de raízes em  $E$ , com grupo de Weyl  $\mathscr{W}$ . Se  $\sigma \in GL(E)$  deixa  $\Phi$  invariante, então  $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)}$  para todo  $\alpha$  em  $\Phi$  e  $\langle\beta, \alpha\rangle = \langle\sigma(\beta), \sigma(\alpha)\rangle$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \Phi$ .*

**Demonstração:**

Se  $\beta \in \Phi$ , então  $\sigma(\beta) \in \Phi$ , pois  $\sigma$  deixa  $\Phi$  invariante. Podemos aplicar  $\theta = \sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$  em  $\sigma(\beta)$ , logo

$$\theta(\sigma(\beta)) = \sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\beta)) = \sigma\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi, \text{ pois } \sigma_\alpha \text{ também deixa } \Phi \text{ invariante.}$$

Mas isso é igual a

$$(*) \quad \sigma\sigma_\alpha(\beta) = \sigma(\beta - \langle\beta, \alpha\rangle\alpha) = \sigma(\beta) - \langle\beta, \alpha\rangle\sigma(\alpha), \text{ pois } \sigma \text{ é linear.}$$

Como  $\sigma(\beta)$  percorre  $\Phi$  como  $\beta$  percorre  $\Phi$ , temos que  $\theta$  deixa  $\Phi$  invariante, enquanto fixa o hiperplano  $\sigma(P_\alpha)$  e manda  $\sigma(\alpha)$  em  $-\sigma(\alpha)$ . Então, pelo lema anterior,  $\theta = \sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)}$ .

De fato,

Se  $x \in P_\alpha$ , então  $\langle x, \alpha \rangle = 0$  e portanto

$$\theta(\sigma(x)) = \sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(x)) = \sigma\sigma_\alpha(x) = \sigma(x - \langle x, \alpha \rangle\alpha) = \sigma(x).$$

E,

$$\theta(\sigma(\alpha)) = \sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\alpha)) = \sigma\sigma_\alpha(\alpha) = \sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha).$$

Agora para a segunda afirmação, calculemos

$$\sigma_{\sigma(\alpha)}(\sigma(\beta)) = \sigma(\beta) - \langle\sigma(\beta), \sigma(\alpha)\rangle\sigma(\alpha)$$

Comparando com (\*), temos

$$\langle\beta, \alpha\rangle = \langle\sigma(\beta), \sigma(\alpha)\rangle$$

■

## 2.1 Pares de raízes

Pela **Definição 2.0.1**, se  $\alpha$  e  $\beta$  são raízes, então  $\langle\beta, \alpha\rangle = 2\frac{\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}$  é um número inteiro, isso limita os ângulos possíveis entre  $\alpha$  e  $\beta$ .

$$\langle \beta, \alpha \rangle = 2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 2 \frac{\|\beta\| \|\alpha\| \cos \theta}{\|\alpha\|^2} = 2 \frac{\|\beta\| \cos \theta}{\|\alpha\|}$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = 2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = 2 \frac{\|\alpha\| \|\beta\| \cos \theta}{\|\beta\|^2} = 2 \frac{\|\alpha\| \cos \theta}{\|\beta\|}$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4 \cos^2 \theta \geq 0$$

Note que  $\langle \alpha, \beta \rangle$  e  $\langle \beta, \alpha \rangle$  têm sinais iguais, pois o produto é positivo.

Considerando  $\beta \neq \pm \alpha$  e que  $\theta$  é o menor ângulo entre  $\alpha$  e  $\beta$ , temos os seguintes valores possíveis para  $\theta$ ,  $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$ .

De fato para esses valores de  $\theta$ , vamos calcular os valores possíveis para  $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4 \cos^2 \theta$ .

$$\text{Para } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6}, \quad \langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4 \cos^2 \theta = 4 \left( \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 3$$

$$\text{Para } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4}, \quad \langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4 \cos^2 \theta = 4 \left( \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 2$$

$$\text{Para } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3}, \quad \langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4 \cos^2 \theta = 4 \left( \pm \frac{1}{2} \right)^2 = 1$$

$$\text{Para } \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4 \cos^2 \theta = 4 (0)^2 = 0$$

Para calcular as reflexões sobre as raízes, precisamos dos valores de  $\langle \alpha, \beta \rangle$  e  $\langle \beta, \alpha \rangle$ , e consequentemente de  $\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}$  ( $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$ ) a fim de que sejam valores inteiros. Assim,

- Para  $\theta = \frac{\pi}{6}$ ,  $\langle \beta, \alpha \rangle = 2 \cos \theta \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} = \sqrt{3} \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}$ .

Portanto, pelo resultado do produto  $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle$ , temos

$$\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} = \sqrt{3}, \text{ ou seja, } \frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2} = 3.$$

$$\text{E } \langle \alpha, \beta \rangle = 1.$$

- Para  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ,  $\langle \beta, \alpha \rangle = 2 \cos \theta \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} = \sqrt{2} \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}$ .

Portanto, pelo resultado do produto  $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle$ , temos

$$\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} = \sqrt{2}, \text{ ou seja, } \frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2} = 2.$$

$$\text{E } \langle \alpha, \beta \rangle = 1.$$

- Para  $\theta = \frac{\pi}{3}$ ,  $\langle \beta, \alpha \rangle = 2 \cos \theta \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} = \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}$ .

Portanto, pelo resultado do produto  $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle$ , temos

$$\frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2} = 1, \text{ ou seja, } \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} = 1$$

$$\text{E } \langle \alpha, \beta \rangle = 1.$$

- Para  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\langle \beta, \alpha \rangle = 2 \cos \theta \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} = 0$ .

Portanto, pelo resultado do produto  $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle$

$$\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} \text{ é indeterminado.}$$

$$\text{E, temos } \langle \alpha, \beta \rangle = 2 \cos \theta \frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|} = 0.$$

- Para  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\langle \beta, \alpha \rangle = 2 \cos \theta \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} = -1 \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}$ .

Portanto, pelo resultado do produto  $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle$  temos

$$\frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2} = \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} = 1.$$

$$\text{E } \langle \alpha, \beta \rangle = -1.$$

- Para  $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ,  $\langle \beta, \alpha \rangle = 2 \cos \theta \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} = -\sqrt{2} \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}$ .

Portanto, pelo resultado do produto  $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle$  temos

$$\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} = \sqrt{2}, \text{ ou seja, } \frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2} = 2.$$

$$\text{E } \langle \alpha, \beta \rangle = -1.$$

- Para  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ ,  $\langle \beta, \alpha \rangle = 2 \cos \theta \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} = -\sqrt{3} \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}$ .

Portanto, pelo resultado do produto  $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle$  temos

$$\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} = \sqrt{3}, \text{ ou seja, } \frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2} = 3.$$

$$\text{E } \langle \alpha, \beta \rangle = -1.$$

Com isso, podemos montar a seguinte tabela:

$\langle \alpha, \beta \rangle$	$\langle \beta, \alpha \rangle$	$\theta$	$\ \beta\ ^2 / \ \alpha\ ^2$
1	3	$\frac{\pi}{6}$	3
1	2	$\frac{\pi}{4}$	2
1	1	$\frac{\pi}{3}$	1
0	0	$\frac{\pi}{2}$	Indefinido
-1	-1	$\frac{2\pi}{3}$	1
-1	-2	$\frac{3\pi}{4}$	2
-1	-3	$\frac{5\pi}{6}$	3

**Lema 2.1.1.** *Seja  $\Phi$  um sistema de raízes e sejam  $\alpha, \beta$  raízes não proporcionais. Se  $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$ , isto é, se o ângulo entre  $\alpha$  e  $\beta$  é agudo, então  $\alpha - \beta$  é uma raiz. Se  $\langle \alpha, \beta \rangle < 0$ , isto é, se o ângulo é obtuso, então  $\alpha + \beta$  é uma raiz.*

**Demonstração:**

Como  $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$  se, e somente se,  $\langle \alpha, \beta \rangle \geq 0$ , a tabela de pares de raízes mostra que  $\langle \alpha, \beta \rangle$  ou  $\langle \beta, \alpha \rangle$  é igual a 1.

Se  $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$ , então  $\sigma_\beta(\alpha) = \alpha - \langle \alpha, \beta \rangle \beta = \alpha - \beta \in \Phi$ , pois  $\sigma_\beta$  deixa  $\Phi$  invariante.

Analogamente, se  $\langle \beta, \alpha \rangle = 1$ , então  $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \alpha \in \Phi$  e assim  $\alpha - \beta$ , que é o oposto de  $\beta - \alpha$ , pertence a  $\Phi$ .

Como  $\langle \alpha, \beta \rangle < 0$  se, e somente se,  $\langle \alpha, \beta \rangle < 0$ , a tabela de pares de raízes mostra que  $\langle \alpha, \beta \rangle$  ou  $\langle \beta, \alpha \rangle$  é igual a -1.

Se  $\langle \alpha, \beta \rangle = -1$ , então  $\sigma_\beta(\alpha) = \alpha - \langle \alpha, \beta \rangle \beta = \alpha + \beta \in \Phi$ .

Analogamente, se  $\langle \beta, \alpha \rangle = -1$ , então  $\sigma_\alpha(\beta) = \beta + \alpha \in \Phi$ .

■

## 2.2 Base de um sistema de raízes

Agora, para construir um sistema de raízes, podemos definir uma base:

**Definição 2.2.1.** *Um subconjunto  $\Delta$  de  $\Phi$  é uma **base do sistema de raízes**  $\Phi$  se:*

1.  $\Delta$  é uma base do espaço vetorial  $E$ .
2. cada raiz  $\beta$  pode ser escrita como  $\beta = \sum k_\alpha \alpha$  ( $\alpha \in \Delta$ ) com coeficientes inteiros  $k_\alpha$  ou todos não negativos (**raízes positivas**) ou todos não positivos (**raízes negativas**).

**Observação 2.2.1.** *As raízes em  $\Delta$  são chamadas de **raízes simples**.*

Tendo em vista a unicidade da expressão de  $\beta$  na definição de base, podemos definir a *altura relativa a  $\Delta$*  por  $ht \beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha$ .

Daqui para frente denotaremos o conjunto de todas as raízes positivas por  $\Phi^+$ , e o conjunto de todas as raízes negativas por  $\Phi^-$ , além disso, por construção do sistema de raízes temos que  $\Phi^- = -\Phi^+$ .

**Lema 2.2.1.** *Se  $\Delta$  é uma base de  $\Phi$ , então  $(\alpha, \beta) \leq 0$  para  $\alpha \neq \beta$  em  $\Delta$ , e  $\alpha - \beta$  não é uma raiz.*

**Demonstração:**

Suponha por absurdo que  $(\alpha, \beta) > 0$ . Como  $\alpha \neq \beta$ , por hipótese, e como  $\alpha \neq -\beta$ , (se fosse,  $(\alpha, \beta) = (-\beta, \beta) \leq 0$ ) o que contradiz nossa suposição), pelo **Lema 2.1.1.** temos que  $\alpha - \beta$  é uma raiz.

Como  $\alpha, \beta \in \Delta$ ,  $\alpha - \beta = 1 \cdot \alpha + (-1) \cdot \beta$ , ou seja,  $\alpha - \beta$  não respeita a segunda condição de base, logo não é raiz e portanto  $(\alpha, \beta) \leq 0$ . ■

Agora que sabemos o que é uma base, é natural perguntarmos se todo sistema de raízes possui uma. O teorema a seguir mostrará, além da sua existência, a sua forma de construção. Antes disso, algumas definições:

**Definição 2.2.2.** *Para cada vetor  $\gamma \in E$ , definimos o conjunto  $\Phi^+(\gamma) = \{\alpha \in \Phi \mid (\gamma, \alpha) > 0\}$  das **raízes positivas em relação a  $\gamma$** .*

**Definição 2.2.3.** *Chamamos  $\gamma \in E$  de **regular** se  $\gamma \in E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$ , ou seja,  $(\gamma, \alpha) \neq 0$  para todo  $\alpha \in \Phi$ , e, caso contrário, chamamos de **singular**.*

**Definição 2.2.4.** *Chamamos  $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$  de **decomponível** se  $\alpha$  pode ser escrito como  $\alpha = \beta_1 + \beta_2$  para algum  $\beta_i \in \Phi^+(\gamma)$  e, caso contrário, chamamos  $\alpha$  de **indecomponível**.*

**Definição 2.2.5.** *O conjunto  $\Delta(\gamma)$  é o conjunto formado por raízes  $\alpha$  se  $\alpha$  for uma raiz indecomponível em  $\Phi^+(\gamma)$ .*

O lema a seguir ajudará na demonstração do teorema:

**Lema 2.2.2.** *Se  $\delta_i$  é a projeção de  $\gamma_i = \sum_{r_i > 0} r_i \delta_i$  no complemento ortogonal de um subespaço gerado por bases de vetores exceto  $\{\gamma_i\}$ .*

**Demonstração:**

Seja  $\Delta = \{\gamma_1, \dots, \gamma_\ell\}$  uma base de  $\Phi$ . Existe  $\gamma \in E$  tal que  $(\gamma, \alpha) > 0 \forall \alpha \in \Delta$ .

$\mathbb{H}_i = \langle \Delta - \{\gamma_i\} \rangle$  é um hiperplano. Então seu complemento ortogonal tem dimensão um e pode ser definido por

$$\mathbb{H}^\perp = \langle \alpha_i \rangle \quad (\|\alpha_i\| = 1)$$

Ou seja,  $(\alpha_j, \gamma_i) = 0 \forall i \neq j$

$$\delta_1 = \text{proj}_{\alpha_1} \gamma_1 = (\gamma_1, \alpha_1) \alpha_1$$

$$\delta_2 = \text{proj}_{\alpha_2} \gamma_2 = (\gamma_2, \alpha_2) \alpha_2$$

⋮

$$\delta_\ell = \text{proj}_{\alpha_\ell} \gamma_\ell = (\gamma_\ell, \alpha_\ell) \alpha_\ell$$

Seja  $\gamma \in E$  tal que  $\gamma = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_\ell$ , então

$$(\gamma, \gamma_i) = (\delta_1, \gamma_i) + (\delta_2, \gamma_i) + \dots + (\delta_\ell, \gamma_i) = (\gamma_1, \alpha_1)(\alpha_1, \gamma_i) + (\gamma_2, \alpha_2)(\alpha_2, \gamma_i) + \dots + (\gamma_\ell, \alpha_\ell)(\alpha_\ell, \gamma_i)$$

$$(\gamma, \gamma_i) = (\gamma_i, \alpha_i)(\alpha_i, \gamma_i) = (\gamma_i, \alpha_i)^2 > 0$$

(\*) Se  $(\gamma_i, \alpha_i) = 0$  então  $\delta_i = \text{proj}_{\alpha_i} \gamma_i = 0$ , o que implica  $\gamma_i \perp \alpha_i$ , portanto  $\gamma_i \in \mathbb{H}$ , contradição. ■

**Teorema 2.2.3.** *Seja  $\gamma \in E$  regular. Então o conjunto  $\Delta(\gamma)$  é uma base para  $\Phi$ , e toda base de  $\Phi$  é obtida dessa forma, ou seja, toda base de  $\Phi$  é formada por raízes indecomponíveis que formam ângulo agudo com  $\gamma$ .*

**Demonstração:**

1. Cada raiz em  $\Phi^+(\gamma)$  é uma combinação  $\mathbb{Z}$ -linear não-negativa de  $\Delta(\gamma)$ .

Caso contrário, algum  $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$  não pode ser escrito como uma combinação  $\mathbb{Z}$ -linear. Dentre elas escolha  $\alpha$  tal que  $(\gamma, \alpha)$  é o menor possível. Como  $\alpha$  não pode estar em  $\Delta(\gamma)$ , então  $\alpha = \beta_1 + \beta_2$  ( $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$ ), por isso  $(\gamma, \alpha) = (\gamma, \beta_1) + (\gamma, \beta_2)$ .

Mas cada  $(\gamma, \beta_i)$  é positivo (pela **Definição 2.2.2.**), então  $\beta_1$  e  $\beta_2$  devem, cada um, ser uma combinação  $\mathbb{Z}$ -linear não negativa de  $\Delta(\gamma)$ , ou seja,  $\beta_1 = \gamma_{11} + \gamma_{12}$  e  $\beta_2 = \gamma_{21} + \gamma_{22}$ , assim  $\alpha = \gamma_{11} + \gamma_{12} + \gamma_{21} + \gamma_{22}$  com cada  $\gamma_{ij}$  indecomponíveis, logo

$(\gamma, \alpha) > (\gamma, \gamma_{ij}), i, j \in \{1, 2\}$ , o que contradiz a minimalidade de  $\alpha$ .  $\alpha$  também é escrito como uma combinação  $\mathbb{Z}$ -linear.

2. Se  $\alpha, \beta \in \Delta(\gamma)$ , então  $(\alpha, \beta) \leq 0$  sempre que  $\alpha \neq \beta$ .

Caso contrário, pelo **Lema 2.1.1.**, se  $\alpha \neq -\beta$  então  $\alpha - \beta$  é uma raiz. Como  $\beta$  não pode ser  $-\alpha$ , senão pelo lema  $-\|\beta\| > 0$ , então  $\alpha - \beta$  ou  $\beta - \alpha$  está em  $\Phi^+(\gamma)$ . No primeiro caso,  $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$ , que diz que  $\alpha$  é decomponível, no segundo caso,  $\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$  é decomponível. Nos dois casos temos uma contradição com  $\alpha, \beta \in \Delta(\gamma)$ .

3.  $\Delta(\gamma)$  é um conjunto linearmente independente.

Suponha  $\sum_{\alpha \in \Delta(\gamma)} r_\alpha \alpha = 0$  ( $\alpha \in \Delta(\gamma), r_\alpha \in \mathbb{R}$ ). Separando os índices para os quais  $r_\alpha > 0$  dos quais  $r_\alpha < 0$ , podemos reescrever

$$\sum s_\alpha \alpha = \sum t_\beta \beta \quad \text{com } s_\alpha, t_\beta > 0$$

Observe que os conjuntos de  $\alpha$ 's e  $\beta$ 's são disjuntos.

Chamamos  $\epsilon = \sum s_\alpha \alpha$ . Então,

$$(\epsilon, \epsilon) = \left( \sum s_\alpha \alpha, \sum t_\beta \beta \right) = \sum_{\alpha, \beta} s_\alpha t_\beta (\alpha, \beta) \leq 0 \text{ por (2)}$$

Assim,  $(\epsilon, \epsilon) \leq 0 \implies \epsilon = 0$ .

Então, como  $(\gamma, \alpha) > 0 \forall \alpha \in \Delta(\gamma)$ , temos

$$0 = (\gamma, \epsilon) = \sum s_\alpha (\gamma, \alpha) \Rightarrow s_\alpha = 0$$

$$0 = (\gamma, \epsilon) = \sum t_\beta (\gamma, \beta) \Rightarrow t_\beta = 0$$

4.  $\Delta(\gamma)$  é uma base para  $\Phi$ .

Como  $\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma)$ , a segunda condição de base é satisfeita pelo passo (1) da demonstração. Segue que  $\Delta(\gamma)$  gera  $E$ , o que combinado com o passo (3) satisfaz a primeira condição de base (**Definição 2.2.1.**).

5. Cada base  $\Delta$  de  $\Phi$  tem a forma  $\Delta(\gamma)$  para algum  $\gamma \in E$  regular.

Dado  $\Delta$ , selecione  $\gamma \in E$  tal que  $(\gamma, \alpha) > 0 \quad \forall \alpha \in \Delta$  (**Lema 2.2.2.**).

Tendo em vista a segunda condição de base,  $\gamma$  é regular (pois  $(\gamma, \alpha) \neq 0$ ) e  $\Phi^+ \subset \Phi^+(\gamma)$ ,  $\Phi^- \subset -\Phi^+(\gamma)$ .

De fato, seja  $\beta \in \Phi^+$ , tal que  $\beta = \sum k_\alpha \alpha$ .

$$(\gamma, \beta) = \left( \gamma, \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha \right) = \sum k_\alpha (\gamma, \alpha) > 0.$$

E  $\Phi^+(\gamma) \subset \Phi^+$ , pois seja  $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ , então se  $\beta = \sum_{\alpha \in \Phi^+(\gamma)} k_\alpha \alpha$ ,  $k_\alpha > 0$ , temos  $\beta \in \Phi^+(\gamma)$  e pela própria definição de  $\beta$ ,  $\beta$  é uma raiz positiva.

Como  $\Phi^+ = \Phi^+(\gamma)$ ,  $\Delta$  consiste só de elementos indecomponíveis, isto é,  $\Delta \subset \Delta(\gamma)$ .

Suponha que os elementos de  $\Delta$  não são indecomponíveis, considere  $\alpha \in \Delta$ , em particular,  $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ .

$$\alpha = \beta_1 + \beta_2 \quad \beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$$

Considere  $\Delta = \{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ , logo

$$\begin{aligned} \alpha &= b_{o_1} \alpha + \sum_{i=1}^n b_{i_1} \alpha_i + b_{o_2} \alpha + \sum_{i=1}^n b_{i_2} \alpha_i \\ \alpha &= (b_{o_1} + b_{o_2}) \alpha + \left( \sum_{i=1}^n b_{i_1} + \sum_{i=1}^n b_{i_2} \right) \alpha_i \end{aligned}$$

Assim, como o lado direito deve resultar  $\alpha$ , se  $b_{o_1} = 0 \Rightarrow b_{o_2} = 1$  e  $b_{i_1} = -b_{i_2} \quad \forall i = 1, \dots, n$

Logo, contradiz  $\beta_2 \in \Phi^+ = \Phi^+(\gamma)$ . Portanto,  $\alpha$  é indecomponível.

Mas,  $\text{card} \Delta = \text{card} \Delta(\gamma) = l$  (por  $\Delta$  ser base de  $E$ ), então,  $\Delta = \Delta(\gamma)$ .

■

**Observação 2.2.2.** *O passo (3) mostra que qualquer conjunto de vetores em um lado do hiperplano em  $E$  e formando dois a dois ângulos obtusos, são linearmente independentes. Ou seja, as raízes simples formam entre si ângulos obtusos.*

**Definição 2.2.6.** *As componentes conexas de  $E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$  são chamadas de **câmaras de Weyl de  $E$** . E, ainda, definimos **câmara fundamental de Weyl** associada à base  $\Delta$  como o conjunto de pontos  $\gamma \in E$  tal que  $(\gamma, \alpha) > 0 \quad \forall \alpha \in \Delta$ .*

Com isso, vemos que cada  $\gamma \in E$  regular pertence a uma câmara de Weyl, que denotaremos por  $\mathcal{C}(\gamma)$ .

Para dizer que dois vetores regulares tem câmaras iguais, isto é,  $\mathcal{C}(\gamma) = \mathcal{C}(\gamma')$ , então  $(\gamma, \alpha)$  e  $(\gamma', \alpha)$ ,  $\alpha \in \Phi$ , são ao mesmo tempo positivo ou negativo. Portanto,  $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$  ( ou ainda,  $-\Phi^+(\gamma) = -\Phi^+(\gamma')$ ), também  $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$ , ou seja, *câmaras de Weyl estão em bijeção com bases*.

### 2.2.1 Lemas sobre raízes simples

Considere  $\Delta$  uma base fixada de  $\Phi$ .

**Lema 2.2.4.** *Se  $\alpha$  é uma raiz positiva mas não simples, então  $\alpha - \beta$  é uma raiz (necessariamente positiva) para algum  $\beta \in \Delta$ .*

**Demonstração:**

Se  $(\alpha, \beta) \leq 0$ , para todo  $\beta \in \Delta$ , a **Observação 2.2.2.** seria aplicável, mostrando que  $\Delta \cup \{\alpha\}$  é um conjunto linearmente independente. Isso é absurdo, pois  $\Delta$  já é base de  $E$ . Então  $(\alpha, \beta) > 0$  para algum  $\beta \in \Delta$  e assim, pelo **Lema 2.1.1.**,  $\alpha - \beta \in \Phi$ .

Escreva  $\alpha = \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma$  com todos  $k_\gamma \geq 0$ , algum  $k_\gamma > 0$  para  $\gamma \neq \beta$ , já que  $\alpha$  não é simples. Subtraindo  $\beta$  de  $\alpha$  temos uma combinação  $\mathbb{Z}$ -linear de raízes simples com pelo menos um coeficiente positivo. Isso força todos os coeficientes a serem positivos, pela unicidade da expressão obtida na definição de base. ■

**Corolário 2.2.5.** *Cada  $\beta \in \Phi^+$  pode ser escrito na forma  $\alpha_1 + \dots + \alpha_k$  ( $\alpha_i \in \Delta$ , não necessariamente distintos) de tal modo que cada soma parcial  $\alpha_1 + \dots + \alpha_i$  seja uma raiz.*

**Demonstração:**

Seja  $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$  e a altura de  $\beta$ ,  $ht(\beta) = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha$ . Vamos fazer indução sobre a altura.

Se  $ht(\beta) = 1$ , então  $\beta$  é simples,  $\beta = \alpha_1 \in \Delta$  e não há nada para fazer.

*Hipótese de Indução:*  $ht(\beta) = n$ , então  $\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  e cada soma parcial  $\alpha_1 + \dots + \alpha_i$  é raiz.

Seja  $\beta$  tal que  $ht(\beta) = n + 1$ . Pelo **Lema 2.2.4.**,  $\exists \epsilon \in \Delta$  tal que  $\beta - \epsilon$  é raiz positiva. Note que  $ht(\beta - \epsilon) = n$ . Pela Hipótese de Indução,

$\beta - \epsilon = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  e cada soma parcial é raiz. Chamando  $\epsilon = \alpha_{n+1}$ ,

$$\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1}$$

e cada soma parcial é raiz pela Hipótese de Indução. ■

**Lema 2.2.6.** *Seja  $\alpha$  uma raiz simples. Então  $\sigma_\alpha$  permuta as raízes positivas diferentes de  $\alpha$ .*

**Demonstração:**

Seja  $\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$ ,  $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma$  ( $k_\gamma > 0$ ), então  $\beta$  não é proporcional a  $\alpha$ , por hipótese. Portanto,  $k_\gamma \neq 0$  para algum  $\gamma \neq \alpha$ .

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha = \sum k_\gamma \gamma - \langle \sum k_\gamma \gamma, \alpha \rangle \alpha = \sum k_\gamma \gamma - \sum k_\gamma \langle \gamma, \alpha \rangle \alpha = \sum k_\gamma (\gamma - \langle \gamma, \alpha \rangle \alpha)$$

$$\sigma_\alpha(\beta) = \sum k_\gamma \sigma_\alpha(\gamma)$$

Logo,  $\sigma_\alpha(\beta)$  tem pelo menos um coeficiente positivo  $k_\gamma$ , ainda mais  $\sigma_\alpha(\beta) \neq \alpha$ , já que  $\alpha$  é a imagem de  $-\alpha$ . ■

**Corolário 2.2.7.** *Seja  $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$ . Então  $\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$  para todo  $\alpha \in \Delta$ .*

**Demonstração:**

$\sigma_\alpha(2\delta) = \sigma_\alpha \left( \sum_{\beta \in \Phi^+, \beta \neq \alpha} \beta + \alpha \right) = \sigma_\alpha \left( \sum_{\beta \in \Phi^+, \beta \neq \alpha} \beta \right) + \sigma_\alpha(\alpha)$  onde pelo lema anterior,  $\sigma_\alpha \left( \sum_{\beta \in \Phi^+, \beta \neq \alpha} \beta \right)$  é a mesma raiz positiva e  $\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha$ .

Temos

$$\sigma_\alpha(2\delta) = \sum_{\beta \in \Phi^+, \beta \neq \alpha} \beta - \alpha + (\alpha - \alpha), \text{ como } \sum_{\beta \in \Phi^+, \beta \neq \alpha} \beta + \alpha = 2\delta,$$

$$\sigma_\alpha(2\delta) = 2\delta - 2\alpha$$

$$\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$$

■

**Lema 2.2.8.** *Seja  $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \Delta$  (não necessariamente distintas). Escreva  $\sigma_i = \sigma_{\alpha_i}$ . Se  $\sigma_1 \cdots \sigma_{t-1}(\alpha_t)$  é uma raiz negativa, então para algum índice  $1 \leq s < t$ ,  $\sigma_1 \cdots \sigma_t = \sigma_1 \cdots \sigma_{s-1} \sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1}$ .*

**Demonstração:**

Escreva  $\beta_i = \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{t-1}(\alpha_t)$ ,  $0 \leq i \leq t-2$ , e  $\beta_{t-1} = \alpha_t$ . Como  $\beta_0 = \sigma_1 \cdots \sigma_{t-1}(\alpha_t)$  é negativa e  $\beta_{t-1}$  é positiva, podemos achar o menor índice  $s$  para qual  $\beta_s$  seja uma raiz positiva.

Então,  $\sigma_s(\beta_s) = \sigma_s \sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1}(\alpha_t) = \beta_{s-1}$  que é negativa, assim o **Lema 2.2.6.** nos diz que por  $\beta_s$  ser positivo,  $\beta_s = \alpha_s \in \Delta$ . Em geral,  $\sigma \in \mathscr{W}$  implica  $\sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma \sigma_\alpha \sigma^{-1}$

(Lema 2.0.2.), então em particular,  $\sigma_s = \sigma_{\alpha_s} = \sigma_{\beta_s}$ , então pelo lema

$$\sigma_s = \beta_s \sigma_{\alpha_t} \beta_s^{-1} = (\sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1}) \sigma_t (\sigma_{t-1} \cdots \sigma_{s+1})$$

$$\sigma_s (\sigma_{s+1} \cdots \sigma_t) = \sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1}$$

$$(\sigma_1 \cdots \sigma_{s-1}) \sigma_s (\sigma_{s+1} \cdots \sigma_t) = (\sigma_1 \cdots \sigma_{s-1}) (\sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1})$$

$$\sigma_1 \cdots \sigma_t = \sigma_1 \cdots \sigma_{s-1} \sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1}$$

■

**Corolário 2.2.9.** *Se  $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_t$  é uma expressão para  $\sigma \in \mathcal{W}$  em termos de reflexões correspondentes a raízes simples, com  $t$  menor possível, então  $\sigma(\alpha_t)$  é uma raiz negativa.*

■

## 2.3 Grupo de Weyl

**Teorema 2.3.1.** *Seja  $\Delta$  uma base de  $\Phi$ .*

1. *Se  $\gamma \in E$  é regular, então existe  $\sigma \in \mathcal{W}$  tal que  $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0 \quad \forall \alpha \in \Delta$ .*
2. *Se  $\Delta'$  é outra base de  $\Phi$ , então  $\sigma(\Delta') = \Delta$  para algum  $\sigma \in \mathcal{W}$ .*
3. *Se  $\alpha$  é uma raiz qualquer, então existe  $\sigma \in \mathcal{W}$  tal que  $\sigma(\alpha) \in \Delta$ .*
4.  *$\mathcal{W}$  é gerado por  $\sigma_\alpha (\alpha \in \Delta)$ .*
5. *Se  $\sigma(\Delta) = \Delta$ , para algum  $\sigma \in \mathcal{W}$ , então  $\sigma = 1$ .*

**Demonstração:**

Seja  $\mathcal{W}'$  o subgrupo de  $\mathcal{W}$  gerado por  $\sigma_\alpha (\alpha \in \Delta)$ .

1. Escreva  $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$ , e escolha  $\sigma \in \mathcal{W}'$  para o qual  $(\sigma(\gamma), \delta)$  é o maior possível. Se  $\alpha$  é simples, então  $\sigma_\alpha \sigma$  está em  $\mathcal{W}'$ , então a escolha de  $\sigma$  implica que

$$(\sigma(\gamma), \delta) \geq (\sigma_\alpha \sigma(\gamma), \delta) = (\sigma(\gamma), \sigma_\alpha(\delta)) = (\sigma(\gamma), \delta - \alpha) = (\sigma(\gamma), \delta) - (\sigma(\gamma), \alpha)$$

Logo,  $(\sigma(\gamma), \alpha) \geq 0$ , caso contrário, contradiz  $(\sigma(\gamma), \delta)$  ser o maior possível, pois se  $(\sigma(\gamma), \alpha) \leq 0$ ,  $(\sigma(\gamma), \delta) \geq (\sigma(\gamma), \delta) - (\sigma(\gamma), \alpha) > (\sigma(\gamma), \delta)$ . Mas como  $\gamma$  é

regular,  $(\sigma(\gamma), \alpha) \neq 0 \quad \forall \alpha$ , ou caso contrário  $\gamma$  seria ortogonal a  $\sigma^{-1}(\alpha)$ , então a desigualdade é estrita.

Portanto,  $\sigma(\gamma)$  está na câmara de Weyl fundamental, e  $\sigma$  manda  $\mathcal{C}(\gamma)$  em  $\mathcal{C}(\Delta)$ .

$$\sigma(\mathcal{C}(\gamma)) = \sigma(\mathcal{C}(\Delta(\gamma))) = \sigma(\{\beta \in E \mid (\beta, \alpha) > 0, \forall \alpha \in \Delta(\gamma)\})$$

$$= \{\sigma(\beta) \in E \mid (\beta, \alpha) > 0, \forall \alpha \in \Delta(\gamma)\} = \{\sigma(\beta) \in E \mid (\sigma(\beta), \sigma(\alpha)) > 0, \forall \alpha \in \Delta(\gamma)\}$$

$$= \{\beta \in E \mid (\beta, \alpha) > 0, \forall \alpha \in \sigma(\Delta(\gamma)) = \Delta(\sigma(\gamma))\} = \mathcal{C}(\Delta(\gamma)) = \mathcal{C}(\sigma(\gamma))$$

2. Como  $\mathcal{W}'$  permuta as câmaras de Weyl, por (1). Como cada base determina uma câmara, existe um elemento  $\sigma \in \mathcal{W}'$  que leva a câmara  $\mathcal{C}$  (correspondente a base  $\Delta$ ) a câmara  $\mathcal{C}'$  (correspondente a  $\Delta' = \Delta(\gamma)$ ). Pela indecomponibilidade de  $\Delta$  e  $\Delta'$ , elas devem ser a mesma, a menos de ordenação, logo também permuta as bases de  $\Phi$ .

$$\Delta = \Delta(\sigma(\gamma)) = \sigma(\Delta(\gamma))$$

3. Tendo em vista (2), basta provar que cada raiz pertence a pelo menos uma base. Seja  $\gamma \in E$  tal que  $(\gamma, \alpha) = \epsilon > 0$ ,  $\alpha$  uma raiz qualquer e  $|(\gamma, \beta)| > \epsilon$  para toda raiz  $\beta \neq \pm\alpha$ . Assim,  $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ , existe a base  $\Delta(\gamma)$  formada por elementos de  $\Phi^+(\gamma)$ . Suponha por absurdo que  $\alpha \notin \Delta(\gamma)$ ,

$$\Delta(\gamma) = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$$

Assim,  $\beta_i \neq \alpha$  e  $\beta_i \neq -\alpha$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Logo, podemos escrever

$$\alpha = \sum_{\beta \in \Phi^+(\gamma)} k_\beta \beta \quad (k_\beta > 0)$$

Portanto,

$$\epsilon = (\gamma, \alpha) \geq (\gamma, \beta_i) > \epsilon$$

Absurdo, logo  $\alpha \in \Delta(\gamma)$ .

4. Para provar que  $\mathcal{W}' = \mathcal{W}$ , basta mostrar que cada reflexão  $\sigma_\alpha$  ( $\alpha \in \Phi$ ) está em  $\mathcal{W}'$ . Escolha  $\sigma \in \mathcal{W}'$  tal que  $\beta = \sigma(\alpha) \in \Delta$ . Então,

$$\sigma_\beta = \sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma \sigma_\alpha \sigma^{-1}, \text{ pelo } \mathbf{Lema 2.0.2.}$$

Portanto, como  $\sigma$  é invertível,

$$\sigma_\alpha = \sigma^{-1}\sigma_\beta\sigma \in \mathcal{W}'$$

5. Seja  $\sigma(\Delta) = \Delta$ , mas  $\sigma \neq 1$ . Se  $\sigma$  é escrito como um produto de uma ou mais reflexões de raízes simples  $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_t$ , então iria contradizer o **Corolário 2.2.8.**, pois seja  $\alpha_t \in \Delta$ ,  $\sigma_t(\alpha_t) = -\alpha_t$ , logo esse elemento não pertencerá a  $\Delta$ . Portanto,  $\sigma = 1$ .

■

**Definição 2.3.1.** Um **sistema irredutível** é um sistema de raízes que não pode ser particionado na união de dois subconjuntos, tal que cada uma das raízes de um subconjunto sejam ortogonais à cada raiz do outro subconjunto.

**Definição 2.3.2.** Fixada uma ordenada  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$  de raízes simples de um sistema de raízes  $\Phi$ , a matriz  $C = (c_{ij}) = (\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)$ , é chamada a **matriz de Cartan** de  $\Phi$ . Suas entradas são chamadas **inteiros de Cartan**.

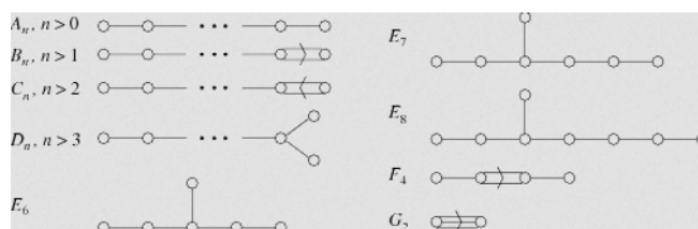
Pelo **Teorema 2.3.1.** temos que a matriz de Cartan não depende da escolha de base, mas depende da ordenação.

**Definição 2.3.3.** Se  $\alpha$  e  $\beta$  são raízes positivas distintas, sabemos que  $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 0, 1, 2, 3$ . Definimos o **grafo de Coxeter** de  $\Phi$  como sendo o grafo de  $\ell$  vértices, com o  $i$ -ésimo vértice unido com o  $j$ -ésimo vértice ( $i \neq j$ ) por  $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$  arestas.

Quando uma aresta dupla ou tripla ocorrer no grafo de Coxeter de  $\Phi$ , adicionamos uma flecha apontando para a menor das duas raízes, isso faz recuperar os inteiros de Cartan e ainda chamamos a figura resultante de **diagrama de Dynkin**.

A demonstração do seguinte teorema é longa e não foi possível estudá-la durante este período, mas usamos esse teorema para que possamos nomear o sistema de raízes em relação aos diagramas de Dynkin.

**Teorema 2.3.2. (Teorema da Classificação)** Se  $\Phi$  é um sistema de raízes irredutível de dimensão  $n$ , seu diagrama de Dynkin é um dos seguintes ( $n$  vértices em cada caso):



## 2.4 Exemplo: Sistema de raízes $A_3$

Considerando a base  $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  e os ângulos  $\frac{2\pi}{3}$  entre  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ ; e  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ , e  $\frac{\pi}{2}$  entre  $\alpha_1$  e  $\alpha_3$ , obtemos um sistema de raízes através das seguintes reflexões:

$$\sigma_{\alpha_1}(\alpha_2) = \alpha_2 - \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle \alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_1$$

$$\sigma_{\alpha_1}(-\alpha_2) = -(\sigma_{\alpha_1}(\alpha_2)) = -(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\sigma_{\alpha_2}(\alpha_3) = \alpha_3 - \langle \alpha_3, \alpha_2 \rangle \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_3$$

$$\sigma_{\alpha_2}(-\alpha_3) = -(\sigma_{\alpha_2}(\alpha_3)) = -(\alpha_2 + \alpha_3)$$

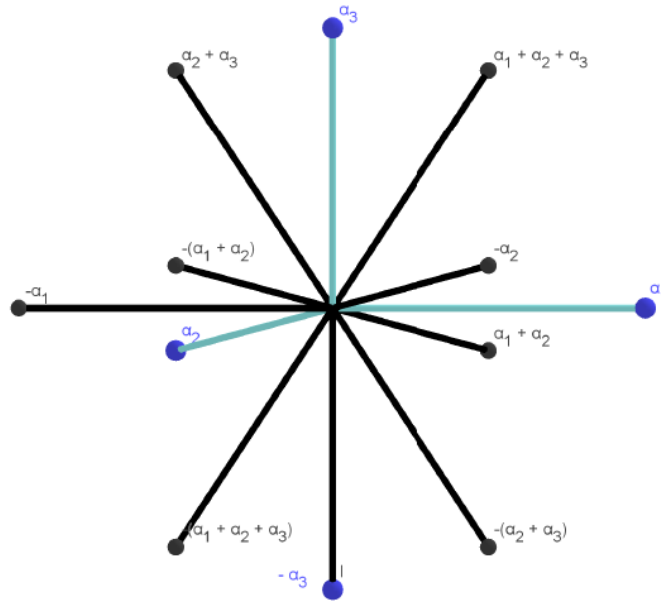
$$\sigma_{\alpha_3}(\alpha_1 + \alpha_2) = \sigma_{\alpha_3}(\alpha_1) + \sigma_{\alpha_3}(\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$\sigma_{\alpha_3}(-(\alpha_1 + \alpha_2)) = -(\sigma_{\alpha_3}(-(\alpha_1 + \alpha_2))) = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

E quanto aos ângulos que  $\alpha_1 + \alpha_2$ ,  $\alpha_2 + \alpha_3$  e  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$  formam com alguma raiz simples:

- $\langle \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \rangle = \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle + \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle = 2 - 1 = 1$
- $\langle \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2 \rangle = 2 \frac{(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2)}{(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2)} = 2 \frac{(\alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1, \alpha_1) + 2(\alpha_1, \alpha_2) + (\alpha_2, \alpha_2)} =$   
 $2 \frac{\|\alpha_1\|^2 - \frac{\|\alpha_1\|^2}{2}}{2\|\alpha_1\|^2 - 2\frac{\|\alpha_1\|^2}{2}} = 2 \frac{\frac{\|\alpha_1\|^2}{2}}{\|\alpha_1\|^2} = 1$
- $\langle \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 \rangle = \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle + \langle \alpha_3, \alpha_2 \rangle = 2 - 1 = 1$
- $\langle \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3 \rangle = 2 \frac{(\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3)}{(\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3)} = 2 \frac{(\alpha_2, \alpha_2) + (\alpha_2, \alpha_3)}{(\alpha_2, \alpha_2) + 2(\alpha_2, \alpha_3) + (\alpha_3, \alpha_3)} =$   
 $2 \frac{\|\alpha_1\|^2 - \frac{\|\alpha_1\|^2}{2}}{2\|\alpha_1\|^2 - 2\frac{\|\alpha_1\|^2}{2}} = 2 \frac{\frac{\|\alpha_1\|^2}{2}}{\|\alpha_1\|^2} = 1$
- $\langle \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 \rangle = \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle + \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle + \langle \alpha_3, \alpha_1 \rangle = 2 - 1 + 0 = 1$
- $\langle \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \rangle = 2 \frac{(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} =$   
 $2 \frac{(\alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_1, \alpha_2) + (\alpha_1, \alpha_3)}{(\alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2, \alpha_2) + 2(\alpha_1, \alpha_2) + 2(\alpha_2, \alpha_3) + (\alpha_3, \alpha_3)} = 2 \frac{\|\alpha_1\|^2 - \frac{\|\alpha_1\|^2}{2}}{3\|\alpha_1\|^2 - 2\|\alpha_1\|^2} =$   
 $2 \frac{\frac{\|\alpha_1\|^2}{2}}{\|\alpha_1\|^2} = 1$

Então pela tabela de pares de raízes vemos que os ângulos formados são de  $\frac{\pi}{3}$  radianos. Portanto, obtemos o sistema de raízes.



A partir da tabela de pares de raízes sabemos que

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle = -1$$

$$\langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle = \langle \alpha_3, \alpha_2 \rangle = -1$$

$$\langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle = \langle \alpha_3, \alpha_1 \rangle = 0$$

Com isso, obtemos a matriz de Cartan  $C$  do sistema de raízes.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Assim, vemos que

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle = 1$$

$$\langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle \langle \alpha_3, \alpha_2 \rangle = 1$$

$$\langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle \langle \alpha_3, \alpha_1 \rangle = 0$$

Portanto, obtemos o grafo de Coxeter onde temos ligação entre os vértices 1 e 2; 2 e 3, mas não temos ligação entre os vértices 1 e 3.

$$1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3$$

E podemos identificar este grafo com o diagrama de Dynkin  $A_3$ .

Ao listarmos as raízes de  $A_3$  vemos que as somas  $\alpha_1 + \alpha_2$ ,  $\alpha_2 + \alpha_3$  e  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$  são raízes, mas a soma  $\alpha_1 + \alpha_3$  não se encontra nas raízes de  $A_3$ .

**$\alpha_1 + \alpha_3$  não é raiz**

Suponha por absurdo que  $\alpha_1 + \alpha_3$  é uma raiz positiva, logo por [5],  $\sigma_{\alpha_i}$  permutam as raízes positivas, diferentes de  $\alpha_i$  para  $i = 1, 2, 3$ . Então,  $\sigma_{\alpha_1}(\alpha_1 + \alpha_3)$  deve ser uma raiz positiva.

$$\sigma_{\alpha_1}(\alpha_1 + \alpha_3) = \sigma_{\alpha_1}(\alpha_1) + \sigma_{\alpha_1}(\alpha_3) = -\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_3 - \alpha_1$$

Mas  $\alpha_3 - \alpha_1$  não é uma raiz pois contradiz a segunda condição de base. Portanto,  $\alpha_1 + \alpha_3$  não é raiz.

## Capítulo 3

# Relação entre sistema de raízes e álgebra cluster

Para mostrar uma relação entre sistema de raízes e álgebra cluster vamos definir o seguinte conjunto

$$\Phi_{\geq -1} = \Phi^+ \cup \{-\Delta\}$$

Ou seja, o conjunto das raízes positivas com as raízes negativas simples.

Podemos relacionar as variáveis cluster obtidas no **Exemplo 1.5.1.** e as raízes do sistema de raízes  $A_3$  da seguinte maneira

$$\begin{array}{ll} x_1 \mapsto -\alpha_1 & \frac{1+x_2}{x_3} \mapsto \alpha_3 \\ x_2 \mapsto -\alpha_2 & \frac{x_1+(1+x_2)x_3}{x_1x_2} \mapsto \alpha_1+\alpha_2 \\ x_3 \mapsto -\alpha_3 & \frac{x_3+(1+x_2)x_1}{x_2x_3} \mapsto \alpha_2+\alpha_3 \\ \frac{1+x_2}{x_1} \mapsto \alpha_1 & \frac{(x_2+1)(x_1+x_3)}{x_1x_2x_3} \mapsto \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \\ \frac{x_1+x_3}{x_2} \mapsto \alpha_2 & \end{array}$$

Ou seja, as variáveis cluster iniciais se relacionam com as raízes negativas simples, as seguintes olhamos apenas para o denominador das variáveis, assim essa relação independe do quiver usado e do numerador de suas variáveis obtidas.

E definimos, para um  $\alpha$  nesse conjunto  $\Phi_{\geq -1}$ , uma função  $s_i : \Phi_{\geq -1} \rightarrow \Phi_{\geq -1}$  como

$$s_i(\alpha) = \begin{cases} \sigma_i(\alpha) & \text{se } \sigma_i(\alpha) \in \Phi_{\geq -1} \\ \alpha & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Ao aplicar essa função em  $-\Delta$  obtemos 13 clusters, conjuntos de raízes algebricamente

independentes.

$$s_{\alpha_1}(-\Delta) = \{\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3\}$$

$$s_{\alpha_2}(-\Delta) = \{-\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3\}$$

$$s_{\alpha_3}(-\Delta) = \{-\alpha_1, -\alpha_2, \alpha_3\}$$

$$s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}(-\Delta) = \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, -\alpha_3\}$$

$$s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}(-\Delta) = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_3\}$$

$$s_{\alpha_3}s_{\alpha_1}(-\Delta) = s_{\alpha_1}s_{\alpha_3}(\Delta) = \{\alpha_1, -\alpha_2, \alpha_3\}$$

$$s_{\alpha_3}s_{\alpha_2}(-\Delta) = \{-\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3\}$$

$$s_{\alpha_2}s_{\alpha_3}(-\Delta) = \{-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3\}$$

$$s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_3}(-\Delta) = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\}$$

$$s_{\alpha_2}s_{\alpha_3}s_{\alpha_1}(-\Delta) = \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3\}$$

$$s_{\alpha_3}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}(-\Delta) = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3\}$$

$$s_{\alpha_3}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}(-\Delta) = \{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3\}$$

$$s_{\alpha_2}s_{\alpha_3}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}(-\Delta) = \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3\}$$

A mesma quantidade de cluster que no Capítulo 1, ainda, as 9 raízes relacionadas com as variáveis cluster (em negrito) são obtidas através dessa aplicação.

Essa bijeção não vale apenas para esse exemplo, mas vale em geral para todo diagrama de Dynkin.

# Capítulo 4

## Apêndice

### 4.1 O que aconteceria se mudássemos o anel de entradas da matriz B para o anel $\mathbb{Z}_m$ ?

Originalmente a mutação está definida pela matrizes antissimetrizáveis com entradas em  $\mathbb{Z}$ , mas durante o estudo nos perguntamos o que aconteceria se mudasse de  $\mathbb{Z}$  para  $\mathbb{Z}_m$ .

**Definição 4.1.1.** Se  $J=m\mathbb{Z}$ , a relação  $\equiv (\text{mod } m)$  pode também ser definida por

$$x, x' \in \mathbb{Z}, x \equiv x' (\text{mod } m) \iff x - x' \in J$$

e nesse caso usaremos a notação para classe de equivalência de  $x$  em relação  $a \equiv (\text{mod } m)$ . Usaremos  $\mathbb{Z}_m$  para simbolizar o **conjunto quociente de  $\mathbb{Z}$  pela relação  $\equiv (\text{mod } m)$** .

Quando nosso anel era  $\mathbb{Z}$  a regra de mutação de matriz era dada por

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij}, & \text{se } i = k \text{ ou } j = k \\ b_{ij} + \frac{|b_{ik}|b_{kj} + b_{ik}|b_{kj}|}{2}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Agora considerando os elementos em  $\mathbb{Z}_m$  não há necessidade de módulos e não está definida a divisão por 2, logo mudamos a regra para

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij}, & \text{se } i = k \text{ ou } j = k \\ b_{ij} + b_{ik}b_{kj}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Analisando o caso em que  $i = k$  ou  $j = k$  temos que

$$b'_{ij} = \overline{-b_{ij}} \text{ ou ainda } \overline{m - b_{ij}} \text{ e}$$

$$b''_{ij} = \overline{-(m - b_{ij})} = b_{ij}$$

Ou seja, o elemento  $b_{ij}$  será seu oposto quando o número  $\ell$  de mutações for ímpar e ele mesmo quando  $\ell$  for par, isto é

$$b_{ij}^{(\ell)} = (-1)^{(\ell)} b_{ij}$$

Agora analisando o outro caso, temos

$$b'_{ij} = \overline{b_{ij} + b_{ik}b_{kj}} \text{ e}$$

$$b''_{ij} = \overline{b'_{ij} + b'_{ik}b'_{kj}}$$

Substituindo o que temos

$$b''_{ij} = \overline{b_{ij} + b_{ik}b_{kj} + (-b_{ik})(-b_{kj})} = \overline{b_{ij} + 2b_{ik}b_{kj}}$$

Calculando a terceira mutação obtemos

$$b'''_{ij} = \overline{b''_{ij} + b''_{ik}b''_{kj}} = \overline{b_{ij} + 3b_{ik}b_{kj}}$$

Fazendo indução sobre  $\ell$  temos que

$$b_{ij}^{(\ell)} = \overline{b_{ij} + \ell(b_{ik}b_{kj})}$$

Vimos que a mutação feita com matrizes em  $\mathbb{Z}$  é involutiva, ou seja,  $\mu_k^2(B) = B$ . Em  $\mathbb{Z}_m$  o processo também é finito, mas depende da paridade de  $m$ .

- Se  $m$  é par, a matriz voltará à matriz inicial após  $\ell = m$  mutações;
- Se  $m$  é ímpar, a matriz voltará à matriz inicial após  $\ell = 2m$  mutações.

# Referências Bibliográficas

- [1] CARTER, R. Cluster Algebras, **Textos de Matemática**, Portugal, 2006.
- [2] FOMIN, S., ZELEVINSKY, A. Cluster algebras I: Foundations, **J. Amer. Math. Soc.**, v.15, p 497-529, 2002.
- [3] GONÇALVES, Adilson. **Introdução à álgebra**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. 194 p. (Projeto Euclides) ISBN.
- [4] HOFFMAN, K., KUNZE, R. **Linear Algebra**, Prentice Hall, 2 Ed.
- [5] HUMPHREYS, James. **Introduction to Lie Algebras and Representation Theory**. 3<sup>a</sup> impressão, 1980.
- [6] KELLER, B. Cluster algebras, quiver representations and triangulated categories. arXiv:0807.1960v11 [math.RT], 19 Mar 2010.
- [7] NGUEFACK, B. Introduction aux algèbres amassés: définitions et exemples. Université de Sherbrooke, Canadá, 2006. **Notas de seminário**.
- [8] ZELEVINSKY, A. What is a cluster algebra?, **Notices of the AMS**, v.54, n.11, p.1494-1495, 2007.