

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

KEVIN MAURICIO MENON RIBEIRO

DETERMINAÇÃO DE RIGIDEZ À FLEXÃO E FATOR DE PERDA EQUIVALENTE DE
CABOS CONDUTORES AÉREOS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO

CURITIBA

2023

KEVIN MAURICIO MENON RIBEIRO

DETERMINAÇÃO DE RIGIDEZ À FLEXÃO E FATOR DE PERDA EQUIVALENTE DE
CABOS CONDUTORES AÉREOS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO

Tese apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Eduardo Márcio de Oliveira Lopes, PhD.

Coorientador: Prof. Alexandre de Macêdo Wahrhaftig, DSc.

Coorientador: Prof. José Manoel Balthazar, DSc.

CURITIBA

2023

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Ribeiro, Kevin Mauricio Menon

Determinação de rigidez à flexão e fator de perda equivalente de cabos condutores aéreos de linhas de transmissão / Kevin Mauricio Menon Ribeiro.
– Curitiba, 2023.

1 recurso on-line : PDF.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Orientador: Eduardo Márcio de Oliveira Lopes

Coorientadores: Alexandre de Macêdo Wahrhaftig; José Manoel Balthazar

1. Energia elétrica. 2. Cabos elétricos. 3. Linhas elétricas aéreas. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Lopes, Eduardo Márcio de Oliveira. IV. Wahrhaftig, Alexandre de Macêdo. V. Balthazar, José Manoel. VI. Título.

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO ENGENHARIA
MECÂNICA - 40001016040P5

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação ENGENHARIA MECÂNICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **KEVIN MAURICIO MENON RIBEIRO** intitulada: **DETERMINAÇÃO DE RIGIDEZ À FLEXÃO E FATOR DE PERDA EQUIVALENTE DE CABOS CONDUTORES AÉREOS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO**, sob orientação do Prof. Dr. EDUARDO MÁRCIO DE OLIVEIRA LOPES, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 27 de Outubro de 2023.

Assinatura Eletrônica

28/10/2023 14:58:16.0

EDUARDO MÁRCIO DE OLIVEIRA LOPES

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

28/10/2023 23:15:48.0

JUCÉLIO TOMÁS PEREIRA

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

28/10/2023 09:39:24.0

MARCO ANTÔNIO LUERSEN

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO
PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

27/10/2023 19:29:49.0

HERALDO NÉLIO CAMBRAIA

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Dedico este trabalho aos meus pais, à minha esposa e a todos os professores(as) que me acompanharam desde a infância até aqui.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, o maior dos orientadores, fonte de sabedoria e infinita bondade, por ter me concedido saúde, inteligência e capacidade de chegar até aqui.

À minha mãezinha do céu, Nossa Senhora Aparecida, por sua inesgotável intercessão durante todo o período de realização desta tese de doutorado.

Aos meus pais, pelo apoio incondicional em todas as horas, por todo amor e carinho recebidos, e por terem, desde a infância, me elucidado quanto à importância do estudo e do trabalho. Sem vocês este trabalho seria impossível, amo vocês.

Agradeço imensamente à minha esposa Fernanda Cordeiro, cujo apoio incansável e incentivo foram fundamentais durante todo o cansativo processo de desenvolvimento desta tese de doutorado. Sua presença e amor foram a força motriz que me impulsionou. Amo você profundamente.

Ao meu orientador, professor Eduardo Márcio de Oliveira Lopes, pela orientação exercida com indiscutível competência e seriedade e, principalmente, pelo apoio e incentivo ao longo de todo período de realização deste trabalho.

Aos meus coorientadores, professores Alexandre de Macêdo Wahrhaftig e José Manoel Balthazar, por toda ajuda recebida.

Ao colega e amigo Gabriel Ruggiero do Amaral, por proporcionar a condução dos ensaios experimentais nos Institutos Lactec. Aproveito também para agradecer por todo o suporte prestado e pela ajuda fundamental para a realização deste trabalho.

À minha irmã, pelo amor e carinho recebidos.

Ao meu sogro, pela inabalável disponibilidade e apoio sempre presentes.

À Academia de Taekwondo ATA - Ponta Grossa, em especial ao professor Higor Carneiro, por me incentivar e me fazer acreditar que posso superar os meus limites. Uma faixa preta não muda uma pessoa, é a pessoa que muda para ser faixa preta.

Agradeço aos meus coordenadores de curso, Kelly Iarosz e Maicon Ramon Bueno, pelo apoio e suporte que me proporcionaram durante todo esse período.

Por fim, agradeço a todos aqueles que me ajudaram, de alguma forma, para a conclusão deste trabalho.

*Comece fazendo o que é necessário,
depois o que é possível,
e de repente você estará fazendo o impossível.
(São Francisco de Assis)*

RESUMO

As vibrações induzidas pelo vento têm sido, a nível global, um grave problema a ser superado no setor de transmissão e distribuição de energia elétrica. O desprendimento alternado dos vórtices de Von Kármán, decorrente do escoamento do ar ao redor de cabos aéreos, induz a oscilações que, se não compreendidas e controladas, podem levar à falha desses cabos por fadiga. Em decorrência, há uma drástica redução da vida útil das linhas e grandes prejuízos aos consumidores e às concessionárias podem ser ocasionados. Sabe-se que esses cabos, a baixas amplitudes de oscilação, comportam-se praticamente como vigas maciças. Com o aumento da amplitude, no entanto, observa-se a ocorrência de deslizamento entre as suas partes constituintes, o que ocasiona redução na rigidez e leva o cabo a se comportar como um conjunto de vigas que deslizam entre si. Além disso, esse deslizamento acarreta em uma maior dissipação de energia (ou seja, maior amortecimento), o que, devido à alta densidade modal do sistema, desempenha um papel fundamental na predição do comportamento dinâmico. Nesse contexto, a presente tese visa apresentar e testar uma metodologia para descrição e quantificação de parâmetros elásticos e de dissipação de energia, por meio do uso de técnicas de otimização não linear aplicadas a modelos representativos do sistema em análise, baseados em viga de Euler – Bernoulli sujeita a forças axiais, e a dados experimentais. A identificação paramétrica é realizada por meio de uma técnica de otimização híbrida que combina algoritmos genéticos com uma técnica local de programação quadrática sequencial. São empregadas, na modelagem, três abordagens distintas, a saber: obtenção de solução analítica na forma fechada, obtenção de solução via expansão modal e método de elementos finitos. Os ensaios experimentais são conduzidos utilizando o método da varredura harmônica discreta e o teste de impacto, em uma bancada de ensaio com um cabo típico de linhas aéreas de transmissão, sob diferentes forças de tração. Os resultados decorrentes dos procedimentos de otimização são bem satisfatórios, indicando que a rigidez à flexão tende a aumentar com a força de tração, enquanto o fator de perda equivalente tende a diminuir, em linha com o que se encontra na literatura pertinente. A metodologia proposta no presente trabalho demonstra relevância e se apresenta como uma nova alternativa para uma estimação mais precisa dos parâmetros elásticos e de amortecimento dos cabos, em avanço ao corrente procedimento de norma.

Palavras-chaves: Cabos aéreos. Linhas de transmissão. Rigidez à flexão. Amortecimento. Identificação paramétrica. Técnicas de otimização não linear.

ABSTRACT

Wind-induced vibrations have been a serious global challenge in the electric power transmission and distribution sector. The alternating shedding of Von Kármán vortices, resulting from the airflow around overhead cables, induces oscillations that, if not understood and controlled, can lead to cable failure due to fatigue. Consequently, there is a significant reduction in the lifespan of these lines, leading to substantial losses for consumers and utility companies. It is known that at low oscillation amplitudes, these cables behave almost like solid beams. However, as the amplitude increases, sliding occurs between their constituent wires, reducing stiffness and causing the cable to behave like a set of sliding beams. Additionally, this sliding behavior results in greater energy dissipation (i.e., increased damping), which, due to the high modal density of the system, plays a crucial role in predicting its dynamic behavior. In this context, the current thesis aims to provide means of describing and quantifying elastic and energy dissipation parameters, using nonlinear optimization techniques applied to representative models of the analyzed system based on the Euler-Bernoulli beam subjected to axial forces, along with experimental data. Parametric identification is carried out through a hybrid optimization technique that combines genetic algorithms with a local sequential quadratic programming technique. Three distinct approaches are employed in the modeling: obtaining analytically closed-form solutions, obtaining solutions via modal expansion, and the finite element method. Experimental tests are conducted using the discrete harmonic sweep method and impact testing, on a test bench with a typical transmission overhead line cable under varying tensile forces. The results obtained from the optimization procedures are highly satisfactory, indicating that flexural stiffness tends to increase with tensile force, while the equivalent loss factor tends to decrease, consistent with findings in the relevant literature. The methodology proposed in this work demonstrates significance and presents itself as a new alternative for a more accurate estimation of cable elastic and damping parameters, advancing beyond the current normative procedures.

Key-words: Overhead cables. Transmission lines. Flexural stiffness. Damping. Parametric identification. Nonlinear optimization techniques.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – PRINCIPAIS ELEMENTOS DAS LINHAS DE TRANSMISSÃO . .	30
FIGURA 2 – CONFIGURAÇÃO GEOMÉTRICA PARA DIFERENTES TIPOS DE CABOS	31
FIGURA 3 – DISTRIBUIÇÃO ESTATÍSTICA DAS VELOCIDADES DO VENTO	33
FIGURA 4 – DESPRENDIMENTO DE VÓRTICES EM CABOS AÉREOS . . .	33
FIGURA 5 – EQUILÍBRIO DAS FORÇAS AXIAIS EM UM ELEMENTOS DIFERENCIAL DE UM TÊNTO CONSTITUINTE	35
FIGURA 6 – RIGIDEZ À FLEXÃO EM FUNÇÃO DA CURVATURA DE FLEXÃO	36
FIGURA 7 – AUTOAMORTECIMENTO DO CONDUTOR DRAKE COM CARGA DE ESTICAMENTO DE 28,5 KN	37
FIGURA 8 – AUTOAMORTECIMENTO DO CONDUTOR DRAKE COM CARGA DE ESTICAMENTO DE 28,5 KN	39
FIGURA 9 – ASPECTO CARACTERÍSTICO DA AMPLITUDE DE DESLOCAMENTO DE UM CABO QUANDO REMOVIDA A FORÇA DE EXCITAÇÃO	39
FIGURA 10 – RIGIDEZ À FLEXÃO VERSUS CURVATURA ATRAVÉS DO MÉTODO DA RIGIDEZ TANGENTE	46
FIGURA 11 – VALORES EXPERIMENTAIS DA RAZÃO DE AMORTECIMENTO PARA OS CINCO PRIMEIROS MODOS, PARA DIFERENTES COMPRIMENTOS DE CABO E DIFERENTES CARGAS DE PRÉ-TENSIONAMENTO	48
FIGURA 12 – CURVA DE DEPENDÊNCIA EM FREQUÊNCIA DO MÓDULO DINÂMICO DE ELASTICIDADE.	49
FIGURA 13 – COMPARAÇÃO ENTRE RECEPÇÕES OBTIDAS NUMERICAMENTE E EXPERIMENTALMENTE PARA UM CABO CONDUTOR	52
FIGURA 14 – COMPARAÇÃO ENTRE RECEPÇÕES OBTIDAS NUMERICAMENTE E EXPERIMENTALMENTE PARA UM CABO CONDUTOR	53
FIGURA 15 – MODELO ESTRUTURAL DE UMA VIGA SUJEITA A UMA CARGA AXIAL DE TRAÇÃO CONSTANTE	54
FIGURA 16 – VIGA APOIADA COM MOLAS TORCIONAIS NAS EXTREMIDADES	61
FIGURA 17 – REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE EULER - BERNOULLI COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE POR NÓ	79
FIGURA 18 – REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO CABO EM BANCADA .	87

FIGURA 19 – MÁQUINA DE TRAÇÃO E EXTREMIDADES DE FIXAÇÃO	87
FIGURA 20 – FIXAÇÃO ACELERÔMETROS	88
FIGURA 21 – SEÇÃO TRANSVERSAL DO CABO ENSAIADO	89
FIGURA 22 – CONEXÃO FLEXÍVEL SHAKER - CABO	90
FIGURA 23 – ILUSTRAÇÃO DA CONFIGURAÇÃO EXPERIMENTAL DO EN- SAIO POR VARREDURA HARMÔNICA	90
FIGURA 24 – ILUSTRAÇÃO DA CONFIGURAÇÃO EXPERIMENTAL DO EN- SAIO POR MARTELO DE IMPACTO	92
FIGURA 25 – CONDIÇÕES DE CONTORNO USADAS PARA OS MODELOS DOS CABO	95
FIGURA 26 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL - EVH - 16% RMC - $T = 8727N$.	98
FIGURA 27 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL - EVH - 18% RMC - $T = 9818N$.	99
FIGURA 28 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL - EVH - 20% RMC - $T = 10909N$.	99
FIGURA 29 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL - EVH - 22% RMC - $T = 12000N$.	100
FIGURA 30 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL - EVH - 24% RMC - $T = 13090N$.	100
FIGURA 31 – AMPLITUDES EXPERIMENTAIS - 16% RMC - $T = 8727N$	101
FIGURA 32 – AMPLITUDES EXPERIMENTAIS - 18% RMC - $T = 9818N$	101
FIGURA 33 – AMPLITUDES EXPERIMENTAIS - 20% RMC - $T = 10909N$. . .	102
FIGURA 34 – AMPLITUDES EXPERIMENTAIS - 22% RMC - $T = 12000N$. . .	102
FIGURA 35 – AMPLITUDES EXPERIMENTAIS - 24% RMC - $T = 13090N$. . .	102
FIGURA 36 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL - EMI - 16% RMC - $T = 8727N$. .	103
FIGURA 37 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL - EMI - 18% RMC - $T = 9818N$. .	104
FIGURA 38 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL - EMI - 20% RMC - $T = 10909N$.	104
FIGURA 39 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL - EMI - 22% RMC - $T = 12000N$.	105
FIGURA 40 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL - EMI - 24% RMC - $T = 13090N$.	105
FIGURA 41 – FUNÇÃO COERÊNCIA - EMI - 16% RMC - $T = 8727N$	106
FIGURA 42 – FUNÇÃO COERÊNCIA - EMI - 18% RMC - $T = 9818N$	106
FIGURA 43 – FUNÇÃO COERÊNCIA - EMI - 20% RMC - $T = 10909N$	106
FIGURA 44 – FUNÇÃO COERÊNCIA - EMI - 22% RMC - $T = 12000N$	107
FIGURA 45 – FUNÇÃO COERÊNCIA - EMI - 24% RMC - $T = 13090N$	107
FIGURA 46 – INERTÂNCIA - EVH X EMI - 16% RMC - $T = 8727N$	108
FIGURA 47 – INERTÂNCIA - EVH X EMI - 18% RMC - $T = 9818N$	108
FIGURA 48 – INERTÂNCIA - EVH X EMI - 20% RMC - $T = 10909N$	109
FIGURA 49 – INERTÂNCIA - EVH X EMI - 22% RMC - $T = 12000N$	109
FIGURA 50 – INERTÂNCIA - EVH X EMI - 24% RMC - $T = 13090N$	110
FIGURA 51 – INERTÂNCIA IDENTIFICADA - EVH - MÉTODO LSRF - 16% RMC - $T = 8727N$	111
FIGURA 52 – INERTÂNCIA IDENTIFICADA - EVH - MÉTODO LSRF - 18% RMC - $T = 9818N$	111

FIGURA 53 – INERTÂNCIA IDENTIFICADA - EVH - MÉTODO LSRF - 20% RMC	
- $T = 10909N$	112
FIGURA 54 – INERTÂNCIA IDENTIFICADA - EVH - MÉTODO LSRF - 22% RMC	
- $T = 12000N$	112
FIGURA 55 – INERTÂNCIA IDENTIFICADA - EVH - MÉTODO LSRF - 24% RMC	
- $T = 13090N$	112
FIGURA 56 – RAZÕES DE AMORTECIMENTO EM FUNÇÃO DA FORÇA DE TRAÇÃO - EVH	115
FIGURA 57 – INERTÂNCIA IDENTIFICADA - EMI - MÉTODO LSRF - 16% RMC	
- $T = 8727N$	117
FIGURA 58 – INERTÂNCIA IDENTIFICADA - EMI - MÉTODO LSRF - 18% RMC	
- $T = 9818N$	117
FIGURA 59 – INERTÂNCIA IDENTIFICADA - EMI - MÉTODO LSRF - 20% RMC	
- $T = 10909N$	117
FIGURA 60 – INERTÂNCIA IDENTIFICADA - EMI - MÉTODO LSRF - 22% RMC	
- $T = 12000N$	118
FIGURA 61 – INERTÂNCIA IDENTIFICADA - EMI - MÉTODO LSRF - 24% RMC	
- $T = 13090N$	118
FIGURA 62 – RAZÕES DE AMORTECIMENTO EM FUNÇÃO DA FORÇA DE TRAÇÃO - EMI	121
FIGURA 63 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL X NUMÉRICA - EVH - 16% RMC - $T = 8727N$	123
FIGURA 64 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL X NUMÉRICA - EVH - 18% RMC - $T = 9818N$	125
FIGURA 65 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL X NUMÉRICA - EVH - 20% RMC - $T = 10909N$	126
FIGURA 66 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL X NUMÉRICA - EVH - 22% RMC - $T = 1200N$	128
FIGURA 67 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL X NUMÉRICA - EVH - 24% RMC - $T = 13090N$	129
FIGURA 68 – VALOR MÉDIO LAC - EVH	132
FIGURA 69 – VARIAÇÃO DA RIGIDEZ À FLEXÃO EM FUNÇÃO DA FORÇA DE TRAÇÃO - ENSAIOS DE VARREDURA HARMÔNICA	134
FIGURA 70 – VARIAÇÃO DO FATOR DE PERDA MATERIAL EQUIVALENTE EM FUNÇÃO DA FORÇA DE TRAÇÃO - ENSAIOS DE VARREDURA HARMÔNICA	134
FIGURA 71 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL X NUMÉRICA - EMI - 16% RMC - $T = 8727N$	136

FIGURA 72 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL X NUMÉRICA - EMI - 18% RMC - $T = 9818N$	137
FIGURA 73 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL X NUMÉRICA - EMI - 20% RMC - $T = 10909N$	139
FIGURA 74 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL X NUMÉRICA - EMI - 22% RMC - $T = 12000N$	140
FIGURA 75 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL X NUMÉRICA - EMI - 24% RMC - $T = 13090N$	142
FIGURA 76 – VALOR MÉDIO LAC - EMI	145
FIGURA 77 – VARIAÇÃO DA RIGIDEZ À FLEXÃO EM FUNÇÃO DA FORÇA DE TRAÇÃO - ENSAIO DE IMPACTO	147
FIGURA 78 – VARIAÇÃO DO FATOR DE PERDA MATERIAL EQUIVALENTE EM FUNÇÃO DA FORÇA DE TRAÇÃO - ENSAIO DE IMPACTO	147
FIGURA 79 – VARIAÇÃO DA RIGIDEZ À FLEXÃO EM FUNÇÃO DA FORÇA DE TRAÇÃO - EVH X EMI	148
FIGURA 80 – VARIAÇÃO DO FATOR DE PERDA MATERIAL EM FUNÇÃO DA FORÇA DE TRAÇÃO - EVH X EMI	149
FIGURA 81 – SÉTIMO MODO DE VIBRAR DA CONDIÇÃO ENGASTADA - EN- GASTADA	171
FIGURA 82 – OITAVO MODO DE VIBRAR DA CONDIÇÃO ENGASTADA - EN- GASTADA	171
FIGURA 83 – SÉTIMO MODO DE VIBRAR DA CONDIÇÃO ENGASTADA - APOI- ADA	172
FIGURA 84 – OITAVO MODO DE VIBRAR DA CONDIÇÃO ENGASTADA - APOI- ADA	172
FIGURA 85 – INERTÂNCIA NUMÉRICA - CONDIÇÃO SIMPLEMENTE APOI- ADA - PONTO DA EXCITAÇÃO: $\xi = 1.219 (m)$ - PONTO DA RES- POSTA: $x = 1.219 (m)$	173
FIGURA 86 – INERTÂNCIA NUMÉRICA - CONDIÇÃO SIMPLEMENTE APOI- ADA - PONTO DA EXCITAÇÃO: $\xi = 1.219 (m)$ PONTO DA RES- POSTA: $x = 2.032 (m)$	174
FIGURA 87 – INERTÂNCIA NUMÉRICA - CONDIÇÃO SIMPLEMENTE APOI- ADA - PONTO DA EXCITAÇÃO: $\xi = 1.219 (m)$ PONTO DA RES- POSTA: $x = 16.253 (m)$	174
FIGURA 88 – INERTÂNCIA NUMÉRICA - CONDIÇÃO ENGASTADA - ENGAS- TADA - PONTO DA EXCITAÇÃO: $\xi = 1.219 (m)$ PONTO DA RES- POSTA: $x = 1.219 (m)$	175

FIGURA 89 – INERTÂNCIA NUMÉRICA - CONDIÇÃO ENGASTADA - ENGASTADA - PONTO DA EXCITAÇÃO: $\xi = 1.219 (m)$ PONTO DA RESPOSTA: $x = 2.032 (m)$	175
FIGURA 90 – INERTÂNCIA NUMÉRICA - CONDIÇÃO ENGASTADA - ENGASTADA - PONTO DA EXCITAÇÃO: $\xi = 1.219 (m)$ PONTO DA RESPOSTA: $x = 16.253 (m)$	175
FIGURA 91 – INERTÂNCIA NUMÉRICA - CONDIÇÃO ENGASTADA - APOIADA - PONTO DA EXCITAÇÃO: $\xi = 1.219 (m)$ PONTO DA RESPOSTA: $x = 1.219 (m)$	176
FIGURA 92 – INERTÂNCIA NUMÉRICA - CONDIÇÃO ENGASTADA - APOIADA - PONTO DA EXCITAÇÃO: $\xi = 1.219 (m)$ PONTO DA RESPOSTA: $x = 2.032 (m)$	176
FIGURA 93 – INERTÂNCIA NUMÉRICA - CONDIÇÃO ENGASTADA - APOIADA - PONTO DA EXCITAÇÃO: $\xi = 1.219 (m)$ PONTO DA RESPOSTA: $x = 16.253 (m)$	177
FIGURA 94 – ROTA PARA ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL	178
FIGURA 95 – RESUMO DA FUNÇÃO MODALFIT	182
FIGURA 96 – MÍNIMO LOCAL X MÍNIMO GLOBAL	184
FIGURA 97 – FLUXOGRAMA GENÉRICO DE UM PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO	186
FIGURA 98 – LAC - ACELERÔMETRO R1 - 16% RMC - $T = 8727N$	190
FIGURA 99 – LAC - ACELERÔMETRO R2 - 16% RMC - $T = 8727N$	190
FIGURA 100–LAC - ACELERÔMETRO R1 - 18% RMC - $T = 9818N$	191
FIGURA 101–LAC - ACELERÔMETRO R2 - 18% RMC - $T = 9818N$	191
FIGURA 102–LAC - ACELERÔMETRO R1 - 20% RMC - $T = 10909N$	192
FIGURA 103–LAC - ACELERÔMETRO R2 - 20% RMC - $T = 10909N$	192
FIGURA 104–LAC - ACELERÔMETRO R1 - 22% RMC - $T = 12000N$	193
FIGURA 105–LAC - ACELERÔMETRO R2 - 22% RMC - $T = 12000N$	193
FIGURA 106–LAC - ACELERÔMETRO R1 - 24% RMC - $T = 13090N$	194
FIGURA 107–LAC - ACELERÔMETRO R2 - 24% RMC - $T = 13090N$	194
FIGURA 108–LAC - ACELERÔMETRO R1 - 16% RMC - $T = 8727N$	195
FIGURA 109–LAC - ACELERÔMETRO R2 - 16% RMC - $T = 8727N$	195
FIGURA 110–LAC - ACELERÔMETRO R1 - 18% RMC - $T = 9818N$	196
FIGURA 111–LAC - ACELERÔMETRO R2 - 18% RMC - $T = 9818N$	196
FIGURA 112–LAC - ACELERÔMETRO R1 - 20% RMC - $T = 9818N$	197
FIGURA 113–LAC - ACELERÔMETRO R2 - 20% RMC - $T = 9818N$	197
FIGURA 114–LAC - ACELERÔMETRO R1 - 22% RMC - $T = 12000N$	198
FIGURA 115–LAC - ACELERÔMETRO R2 - 22% RMC - $T = 12000N$	198
FIGURA 116–LAC - ACELERÔMETRO R2 - 24% RMC - $T = 24000N$	199

FIGURA 117–LAC - ACELERÔMETRO R2 - 24% RMC - $T = 24000N$	199
FIGURA 118–AMPLITUDE RESSONÂNCIA - EVH - ACELERÔMETRO R1 . . .	211
FIGURA 119–AMPLITUDES RESSONÂNCIAS- EVH - ACELERÔMETRO R2 . .	212
FIGURA 120–FREQUÊNCIAS NATURAIS - EVH - ACELERÔMETRO R1	214
FIGURA 121–AMPLITUDE RESSONÂNCIA - EVH - ACELERÔMETRO R2 . .	216
FIGURA 122–AMPLITUDE RESSONÂNCIA - EMI - ACELERÔMETRO R1 . . .	229
FIGURA 123–AMPLITUDE RESSONÂNCIA - EMI - ACELERÔMETRO R2 . . .	230
FIGURA 124–FREQUÊNCIAS NATURAIS - EMI - ACELERÔMETRO R1	232
FIGURA 125–AMPLITUDE RESSONÂNCIA - EMI - ACELERÔMETRO R2 . . .	234
FIGURA 126–CONEXÃO FLEXÍVEL - DESENHO EM CONJUNTO	240
FIGURA 127–CONEXÃO FLEXÍVEL - DETALHAMENTO	241

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – PARÂMETROS DA RIGIDEZ TORCIONAL PARA OS CASOS LIMITES	63
TABELA 2 – PROPRIEDADES E CARACTERÍSTICAS DO CABO ENSAIADO	88
TABELA 3 – FREQUÊNCIAS NATURAIS (HZ) - EVH	113
TABELA 4 – RAZÃO DE AMORTECIMENTO - EVH	114
TABELA 5 – FREQUÊNCIAS NATURAIS (HZ) - EMI	119
TABELA 6 – RAZÃO DE AMORTECIMENTO - EMI	120
TABELA 7 – LIMITES DOS PARÂMETROS DE INTERESSE	122
TABELA 8 – VALORES FINAIS DA FUNÇÃO OBJETIVO - EVH	131
TABELA 9 – PARÂMETROS IDENTIFICADOS - ENSAIO POR VARREDURA HARMÔNICA	133
TABELA 10 – VALORES FINAIS DA FUNÇÃO OBJETIVO - EMI	144
TABELA 11 – PARÂMETROS IDENTIFICADOS - ENSAIO DE IMPACTO	146
TABELA 12 – VALORES DAS OITO PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS NATURAIS (f_{n_j}) PARA A CONDIÇÃO ENGASTADA - ENGASTADA	171
TABELA 13 – VALORES DAS OITO PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS NATURAIS (f_{n_j}) PARA A CONDIÇÃO ENGASTADA - APOIADA	172
TABELA 14 – TERMOS EMPREGADOS EM ALGORITMOS GENÉTICOS	187
TABELA 15 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS - AC-R1 - [dB (ref. 1 m/s ² /N)] - 16% RMC - $T = 8727N$ - EVH	200
TABELA 16 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - (Hz) - 16% RMC - $T = 8727N$ - EVH	201
TABELA 17 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - [dB (ref. 1 m/s ² /N)] - 18% RMC - $T = 9818N$ - EVH	201
TABELA 18 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - (Hz) - 18% RMC - $T = 9818N$ - EVH	202
TABELA 19 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - [dB (ref. 1 m/s ² /N)] - 20% RMC - $T = 10909N$ - EVH	202
TABELA 20 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - (Hz) - 20% RMC - $T = 10909N$ - EVH	203
TABELA 21 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - [dB (ref. 1 m/s ² /N)] - 22% RMC - $T = 12000N$ - EVH	203

TABELA 22 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS	
AC-R1 - (Hz) - 22% RMC - $T = 12000N$ - EVH	204
TABELA 23 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - [dB (ref.	
1 m/s ² /N)] - 24% RMC - $T = 13090N$ - EVH	204
TABELA 24 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS	
AC-R1 - (Hz) - 24% RMC - $T = 13090N$ - EVH	205
TABELA 25 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS - AC-R2 - [dB	
(ref. 1 m/s ² /N)] - 16% RMC - $T = 8727N$ - EVH	205
TABELA 26 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS	
AC-R2 - (Hz) - 16% RMC - $T = 8727N$ - EVH	206
TABELA 27 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R2 - [dB (ref.	
1 m/s ² /N)] - 18% RMC - $T = 9818N$ - EVH	206
TABELA 28 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS	
AC-R2 - (Hz) - 18% RMC - $T = 9818N$ - EVH	207
TABELA 29 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R2 - [dB (ref.	
1 m/s ² /N)] - 20% RMC - $T = 10909N$ - EVH	207
TABELA 30 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS	
AC-R2 - (Hz) - 20% RMC - $T = 10909N$ - EVH	208
TABELA 31 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - [dB (ref.	
1 m/s ² /N)] - 22% RMC - $T = 12000N$ - EVH	208
TABELA 32 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS	
AC-R1 - (Hz) - 22% RMC - $T = 12000N$ - EVH	209
TABELA 33 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R2 - [dB (ref.	
1 m/s ² /N)] - 24% RMC - $T = 13090N$ - EVH	209
TABELA 34 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS	
AC-R2 - (Hz) - 24% RMC - $T = 13090N$ - EVH	210
TABELA 35 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS - AC-R1 - [dB	
(ref. 1 m/s ² /N)] - 16% RMC - $T = 8727N$ - EMI	218
TABELA 36 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS	
AC-R1 - (Hz) - 16% RMC - $T = 8727N$ - EMI	219
TABELA 37 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - [dB (ref.	
1 m/s ² /N)] - 18% RMC - $T = 9818N$ - EMI	219
TABELA 38 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS	
AC-R1 - (Hz) - 18% RMC - $T = 9818N$ - EMI	220
TABELA 39 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - [dB (ref.	
1 m/s ² /N)] - 20% RMC - $T = 10909N$ - EMI	220
TABELA 40 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS	
AC-R1 - (Hz) - 20% RMC - $T = 10909N$ - EMI	221

TABELA 41 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - [dB (ref. 1 m/s ² /N)] - 22% RMC - $T = 12000N$ - EMI	221
TABELA 42 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - (Hz) - 22% RMC - $T = 12000N$ - EMI	222
TABELA 43 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - [dB (ref. 1 m/s ² /N)] - 24% RMC - $T = 13090N$ - EMI	222
TABELA 44 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - (Hz) - 24% RMC - $T = 13090N$ - EMI	223
TABELA 45 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS - AC-R2 - [dB (ref. 1 m/s ² /N)] - 16% RMC - $T = 8727N$ - EMI	223
TABELA 46 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R2 - (Hz) - 16% RMC - $T = 8727N$ - EMI	224
TABELA 47 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R2 - [dB (ref. 1 m/s ² /N)] - 18% RMC - $T = 9818N$ - EMI	224
TABELA 48 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R2 - (Hz) - 18% RMC - $T = 9818N$ - EMI	225
TABELA 49 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R2 - [dB (ref. 1 m/s ² /N)] - 20% RMC - $T = 10909N$ - EMI	225
TABELA 50 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R2 - (Hz) - 20% RMC - $T = 10909N$ - EMI	226
TABELA 51 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - [dB (ref. 1 m/s ² /N)] - 22% RMC - $T = 12000N$ - EMI	226
TABELA 52 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - (Hz) - 22% RMC - $T = 12000N$ - EMI	227
TABELA 53 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R2 - [dB (ref. 1 m/s ² /N)] - 24% RMC - $T = 13090N$ - EMI	227
TABELA 54 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R2 - (Hz) - 24% RMC - $T = 13090N$ - EMI	228

LISTA DE ABREVIATURAS E DE SIGLAS

AAAC	<i>All Aluminium Alloy Conductor</i>
AAC	<i>All Aluminium Conductor</i>
AACSR	<i>Aluminium Alloy Conductor Steel Reinforced</i>
ACAR	<i>Aluminium Conductor Alloy Reinforced</i>
ACSR	<i>Aluminium Conductor Steel Reinforced</i>
AME	Análise Modal Experimental
CA	Condutor de alumínio puro
CAA	Condutor de alumínio com alma de aço
CAAL	Condutor de alumínio com alma de liga de alumínio
CAL	Condutor de liga de alumínio
CALA	Condutor de liga de alumínio com alma de aço
COMAC	<i>Coordinate Modal Assurance Criterion</i>
DTFM	Distributed Transfer Function Method
EMI	Ensaio de impacto
EVH	Ensaio de varredura harmônica
FRF	Função de Resposta em Frequência
GDL	Graus de liberdade
GHM	Modelo de Golla – Hughes – McTavish
LAC	<i>Local Amplitude Criterion</i>
LSCE	<i>Least Squares Complex Exponential</i>
LSRF	<i>Least Squares Rational Function</i>
MAC	<i>Modal Assurance Criterion</i>
MDOF	Múltiplos graus de liberdade
MEF	Método dos Elementos Finitos

PP	<i>Peak picking</i>
RMC	Resistência mecânica calculada
SAFF	Solução analítica na forma fechada
SDOF	Um grau de liberdade
SEM	Solução via expansão modal
SQP	Programação quadrática sequencial
TONL	Técnicas de otimização não linear

LISTA DE SÍMBOLOS

F_o	Amplitude complexa da força de excitação
F_e	Amplitude da força de entrada
A_s	Área da seção transversal do cabo
$Y_{n_j}(x)$	Autofunção
$\varepsilon(x, t)$	Campo de deformação
$\sigma(x, t)$	Campo de tensão
L	Comprimento do cabo condutor
$\hat{U}$	Constante adimensional de força axial
$\hat{\Omega}^4$	Constante adimensional de frequência
$\hat{\beta}$	Constante adimensional de rigidez à flexão
$\tilde{\Omega}^4$	Constante complexa de frequência
$\tilde{\beta}$	Constante complexa de rigidez
$\tilde{U}$	Constante complexa de tensão
K_{Ti}	Constante das molas torcionais
τ	Constante de tempo da janela exponencial
${}_nA_{ij}$	Constante modal
$\hat{x}$	Coordenada adimensional
$q_i(t)$	Coordenada modal
δ_d	Decremento logarítmico
$y(x, t)$	Deflexão
d_A	Diâmetro dos fios de aço
d_s	Diâmetro dos fios de alumínio
d	Diâmetros dos fios
v	Distância à linha neutra da seção transversal

U_d	Energia dissipada
V	Energia potencial total
η	Fator de perda material
η_{n_j}	Fator de perda modal
T	Força de tração
$p(x, t)$	Força transversal externa por unidade de comprimento
f_s	Frequência de desprendimento
ω_n	Frequência natural
$G(x, \xi)$	Função de Green
$G(x, \xi)_{EA}$	Função de Green - condição engastada - apoiada
$G(x, \xi)_{EE}$	Função de Green - condição engastada - engastada
$G(x, \xi)_{AA}$	Função de Green - condição simplesmente apoiada
$u(x - \xi)$	Função degrau unitário
$\chi_{rs}(\omega)$	Indicador LAC
$I(\omega)$	Inertância
M_i	Massa modal
ρA	Massa por unidade de comprimento
$\mathbf{I}(\omega)$	Matriz de inertância
$\mathbf{M}(\omega)$	Matriz de mobilidade
$\alpha(\omega)$	Matriz de receptância
$M(\omega)$	Mobilidade
E	Módulo de elasticidade
E_A	Módulo de elasticidade do aço
E_s	Módulo de elasticidade do alumínio
$M(x, t)$	Momento fletor
S	Número de <i>Strouhal</i>

N_A	Número de fios de aço
N_s	Número de fios de alumínio
N_{fios}	Número de fios por camada
EI_{im}	Parcela imaginária da rigidez à flexão complexa
EI_{re}	Parcela real da rigidez à flexão complexa
T_{aq}	Período de aquisição
x	Posição
ξ	Posição arbitrária qualquer da força de excitação
P_c	Potência dissipada pelo cabo condutor
P_e	Potência mecânica de entrada
R	Raio da última camada de fios
ζ_n	Razão de amortecimento
$\alpha(\omega)$	Receptância
$\alpha(x, \xi, \omega)_{EA}$	Receptância - condição engastada - apoiada
$\alpha(x, \xi, \omega)_{EE}$	Receptância - condição engastada - engastada
$\alpha(x, \xi, \omega)_{AA}$	Receptância - condição simplesmente apoiada
$\tilde{EI}$	Rigidez à flexão complexa
$EI_{\text{máx}}$	Rigidez à flexão máxima
$EI_{\text{mín}}$	Rigidez à flexão mínima
K_i	Rigidez modal
t	Tempo
$\bar{\chi}_{rs}(\omega)$	Valor médio do indicador LAC
V_e	Velocidade de vibração do cabo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	26
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO	26
1.2	OBJETIVOS	28
1.2.1	Objetivo Geral	28
1.2.2	Objetivos Específicos	28
1.3	JUSTIFICATIVA	28
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO	29
2	CABOS AÉREOS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO	30
2.1	VISÃO GERAL	30
2.2	VIBRAÇÕES INDUZIDAS PELO VENTO	32
2.3	ASPECTOS DINÂMICOS DOS CABOS AÉREOS	34
2.3.1	Rigidez à Flexão Máxima e Mínima	35
2.3.2	Autoamortecimento	36
2.4	ENSAIOS DE AUTOAMORTECIMENTO	37
2.4.1	Método da Potência	37
2.4.2	Método da Onda Estacionária	38
2.4.3	Método do Decremento Logarítmico	38
3	CONTRIBUIÇÕES PERTINENTES EM CABOS AÉREOS	41
3.1	ABORDAGENS DESTACADAS	41
3.2	CONTRIBUIÇÕES EM AMORTECIMENTO	44
3.2.1	Variação da Rigidez à Flexão e do Atrito	45
3.2.2	Efeitos Viscosos/Histeréticos/Viscoelásticos	47
4	MODELAGEM DE CABOS AÉREOS	54
4.1	DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DO SISTEMA EM FORMA CONTÍNUA	54
4.2	SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA PARÂMETROS MODAIS	56
4.2.1	Condição Simplesmente Apoiada	58
4.2.2	Condição Engastada — Engastada	59
4.2.3	Condição Engastada — Apoiada	60
4.2.4	Condição de Apoio com Molas Torcionais nas Extremidades	61
4.3	SOLUÇÃO ANALÍTICA NA FORMA FECHADA PARA RECEPTÂNCIA	63
4.3.1	Comentários Iniciais	63
4.3.2	Separação de Variáveis	64
4.3.3	Função de Green	65
4.3.3.1	Expressões da Receptância para as Condições Clássicas de Contorno	69
4.3.3.2	Expressão da Receptância para Condição não Clássica de Contorno	71
4.4	SOLUÇÃO VIA EXPANSÃO MODAL	74
4.5	SOLUÇÃO VIA ELEMENTOS FINITOS	79
4.6	CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS	83
5	MATERIAIS E MÉTODOS	86
5.1	PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL	86

5.1.1	Ensaios de Varredura Harmônica	89
5.1.2	Ensaios de Impacto	92
5.2	ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL	93
5.3	MODELO NUMÉRICO	94
5.4	IDENTIFICAÇÃO PARAMÉTRICA	95
6	APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS E DISCUSSÕES	98
6.1	RESULTADOS EXPERIMENTAIS	98
6.1.1	Ensaios de Varredura Harmônica (EVH)	98
6.1.2	Ensaios de Impacto (EMI)	103
6.1.3	Comparação entre os Ensaios Experimentais	107
6.2	RESULTADOS VIA ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL	110
6.2.1	Ensaios Varredura Harmônica (EVH)	111
6.2.2	Ensaios de Impacto (EMI)	116
6.3	IDENTIFICAÇÃO PARAMÉTRICA	122
6.3.1	Ensaios de Varredura Harmônica (EVH)	123
6.3.1.1	Comparação entre Inertâncias Numéricas e Experimentais	123
6.3.1.2	Parâmetros Identificados	133
6.3.2	Ensaios de Impacto (EMI)	135
6.3.2.1	Comparação entre Inertâncias Numéricas e Experimentais	135
6.3.2.2	Parâmetros Identificados	145
7	CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS	150
7.1	CONCLUSÕES	150
7.2	SUGESTÃO DE TRABALHOS FUTUROS	152
	REFERÊNCIAS	154
	APÊNDICE A – PROPRIEDADE DE ORTOGONALIDADE DE AU- TOFUNÇÕES	167
A.1	CONDIÇÃO DE ORTOGONALIDADE DAS AUTOFUNÇÕES	167
	APÊNDICE B – SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	170
B.1	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	170
B.1.1	Avaliação das Frequências Naturais e dos Modos de Vibrar	170
B.1.1.1	Condição Engastada - Engastada	170
B.1.1.2	Condição Engastada — Apoiada	172
B.1.2	Avaliação das Funções Resposta em Frequência	173
B.1.2.1	Condição Simplesmente Apoiada	173
B.1.2.2	Condição Engastada — Engastada	174
B.1.2.3	Condição Engastada - Apoiada	176
	APÊNDICE C – ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL E OTIMIZAÇÃO	178
C.1	ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL	178
C.2	MÉTODOS DE AME CONSIDERADOS	181
C.3	ATUALIZAÇÃO DE MODELOS VIA OTIMIZAÇÃO	183
C.3.1	Variáveis de Projeto	183
C.3.2	Função Objetivo	184

C.3.3	Funções de Restrição	185
C.3.4	Problema Padrão de Otimização	185
C.4	TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO EMPREGADAS	186
C.4.1	Algoritmos Genéticos	186
C.4.2	Programação Quadrática Sequencial (SQP)	187
	APÊNDICE D – INDICADOR DE CORRELAÇÃO - LAC	189
D.1	CORRELAÇÃO ENTRE FUNÇÕES RESPOSTA EM FREQUÊNCIA .	189
D.2	LAC - ENSAIOS DE VARREDURA HARMÔNICA	190
D.3	LAC - ENSAIOS DE IMPACTO	195
	APÊNDICE E – TABELAS COMPARATIVAS ENTRE OS RESULTA-	
	DOS NUMÉRICOS E EXPERIMENTAIS	200
E.1	ENSAIOS DE VARREDURA HARMÔNICA (EVH)	200
E.1.1	Acelerômetro - R1	200
E.1.2	Dados acelerômetro - R2	205
E.2	ENSAIO DE IMPACTO (EMI)	218
E.2.1	Acelerômetro - R1	218
E.2.2	Acelerômetro - R2	223
	APÊNDICE F – AJUSTE LINEAR DOS PARÂMETROS IDENTIFI-	
	CADOS	236
F.1	ENSAIOS DE VARREDURA HARMÔNICA	236
F.1.1	Acelerômetro R1	236
F.1.2	Acelerômetro R2	237
F.2	ENSAIOS DE IMPACTO	237
F.2.1	Acelerômetro R1	237
F.2.2	Acelerômetro R2	238
	APÊNDICE G – PROJETO EM CAD DO ACOPLAMENTO FLEXÍVEL	239

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

As vibrações induzidas pelo vento têm sido, a nível global, um grave problema a ser superado no setor de transmissão de energia elétrica. Os deslocamentos alternados dos vórtices de *Von Kármán*, decorrentes do escoamento do ar ao redor de cabos condutores aéreos de linhas de transmissão (ou, por simplicidade, cabos aéreos), induzem oscilações que, se não compreendidas e controladas, podem levar à falha desses cabos por fadiga, reduzindo drasticamente a vida útil da linha e ocasionando grandes prejuízos aos consumidores e às concessionárias.

Além da complexidade das interações fluido-estrutura que ocasionam as vibrações eólicas, como são conhecidas, nota-se também a dificuldade em modelar e prever com acurácia o comportamento dinâmico dos cabos em si. Isso se deve ao fato de que se tratam de estruturas esbeltas de construção complexa, que também podem apresentar não linearidades que variam, em particular, em função da amplitude da oscilação.

Sabe-se que esses cabos, a baixas amplitudes de oscilação, comportam-se praticamente como vigas maciças. Com o aumento da amplitude, no entanto, observa-se a ocorrência de deslizamentos entre os tentos constituintes, o que ocasiona a redução na rigidez e leva um cabo a se comportar como um conjunto de vigas que deslizam entre si. Esse fato é relativamente bem conhecido e representado (EPRI, 2006; PAPAILIOU, 1997; FOTI; MARTINELLI, 2016). Além disso, o efeito desse deslizamento acarreta uma maior dissipação de energia, influenciando diretamente no amortecimento, que, devido à alta densidade modal do sistema, desempenha um papel fundamental na predição do comportamento dinâmico.

Outro fator que altera significativamente o amortecimento nos cabos é o efeito do tensionamento. Em geral, quando a tensão em um cabo aumenta, os tentos constituintes tendem a ficar mais aderidos um ao outro, com diminuição do movimento relativo entre eles. Isso acarreta, por sua vez, a redução da magnitude do amortecimento (EPRI, 2006; LANGLOIS et al., 2013).

Encontram-se na literatura diferentes abordagens para modelar o amortecimento em cabos aéreos. Existe uma abordagem “local”, em que o amortecimento é modelado com o objetivo de prever a interação entre os tentos constituintes, considerando o atrito interno e a torção entre os fios helicoidais. Esta abordagem é alvo de investigação de diversos pesquisadores, tais como: Labrosse et al. (2000), Elata et al. (2004), Usabiaga e Pagalday (2008), Foti e Martinelli (2016), Foti et al. (2017) e Foti e

Martinelli (2018).

Existe também uma abordagem “global”, onde o efeito do amortecimento é descrito através de modelos viscosos, histeréticos e viscoelásticos. Tais modelos têm como objetivo incorporar, de alguma forma, o efeito da dissipação de energia. Esforços relacionados a esta abordagem podem ser encontrados em: Barbieri et al. (2004b), Otrin e Boltežar (2007), Otrin e Boltežar (2009), Castello e Matt (2011), Spak et al. (2013), Spak et al. (2015), Hernández et al. (2018) e Machado et al. (2020).

No tocante à abordagem global, apesar de existir uma série de modelos disponíveis na literatura especializada, nota-se que há uma lacuna de pesquisa que ainda necessita ser explorada. Ela se relaciona, principalmente, ao desenvolvimento de uma metodologia numérica/experimental que permita quantificar, de maneira apurada e consistente, as grandezas elásticas e de dissipação de energia. Entende-se que essa metodologia poderia ser baseada na resolução de um problema inverso de identificação paramétrica, utilizando técnicas de otimização não linear (TONL) aplicadas ao modelo matemático representativo do sistema, e aos dados experimentais.

Embora alguns poucos trabalhos correlatos ao tema já existam, tais como os de Castello e Matt (2011), Hernández et al. (2018) e Machado et al. (2020), percebe-se que, nesses trabalhos, a descrição e a quantificação dos parâmetros elásticos e de dissipação de energia baseiam-se em observações numéricas/experimentais restritas a apenas dois níveis de força tração. A falta de mais informações experimentais relacionadas aos efeitos da força de tração restringe uma melhor compreensão do comportamento dinâmico dos cabos aéreos, que é associado aos parâmetros anteriormente mencionados. Portanto, nota-se que ainda é necessário conduzir, na região linear, uma série de investigações numéricas e experimentais que abranjam uma faixa mais ampla de forças de tração e frequências, bem como diferentes tipos de excitação, visando obter uma descrição mais acurada e confiável dos parâmetros de interesse.

Apesar da evolução significativa no projeto e na tecnologia dos cabos aéreos ao longo dos anos, ainda são utilizadas metodologias clássicas para avaliar seu desempenho dinâmico. Em geral, essas metodologias de ensaio, conforme apresentadas na norma IEEE 563-1978 - "Guide on Conductor Self-damping Measurements", permitem a avaliação do desempenho dos cabos aéreos apenas em relação à potência dissipada por eles nas frequências de ressonância do sistema (com base no princípio do balanço de energia), desprezando outros efeitos dinâmicos. Além disso, os métodos preconizados pela norma requerem a identificação da posição dos nós e antinós, o que é experimentalmente difícil e resulta em uma alta incerteza de medição, como se vê em EPRI (2006) e Diana et al. (2000).

Face ao exposto, o presente trabalho visa os objetivos relacionados a seguir.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral desta tese consiste em propor um novo método para descrever e quantificar a rigidez à flexão e amortecimento de cabos condutores aéreos, a partir de modelos numéricos representativos do comportamento dinâmico de interesse.

1.2.2 Objetivos Específicos

Tendo em vista o objetivo geral, os seguintes objetivos específicos são listados:

- Desenvolver modelos representativos do comportamento dinâmico de cabos aéreos no domínio da frequência, utilizando abordagens analíticas e numéricas;
- Montar um banco de dados de funções resposta em frequência levantadas em uma campanha de ensaios experimentais em laboratório abrangendo diferentes níveis de tração e tipos de excitação;
- Identificar os parâmetros equivalentes de rigidez e amortecimento por meio do uso de técnicas de otimização não linear;
- Validar os modelos desenvolvidos através da comparação dos resultados numéricos e experimentais obtidos.

1.3 JUSTIFICATIVA

A previsão do comportamento dinâmico das linhas de transmissão de energia é uma preocupação crescente diante do contínuo crescimento da demanda por energia e do aumento da complexidade das redes elétricas no Brasil. Essas linhas, responsáveis por interconectar os sistemas de geração e transmissão, estão sujeitas a forças externas, como ventos, temperaturas extremas e sobrecargas operacionais.

Essa problemática se alinha diretamente com os Objetivos do Desenvolvimento Sustentável (ODS) da Agenda 2030, em especial ao objetivo número sete, que visa assegurar o acesso a fontes de energia confiáveis, sustentáveis e modernas para todos. A busca por tecnologias mais robustas e eficientes para o projeto de linhas de transmissão de energia elétrica está intrinsecamente ligada à promoção da sustentabilidade energética e à redução do impacto ambiental.

O estudo e a previsão do comportamento dinâmico vibratório das linhas aéreas de transmissão contribuem diretamente para o avanço do conhecimento e da tecnologia nesse setor crucial da infraestrutura energética. Entende-se, em particular, que uma

melhor descrição do comportamento dinâmico dos cabos aéreos terá significativo impacto no controle das vibrações eólicas. Com uma representação mais apurada da rigidez à flexão e do amortecimento, será possível prever, com maior embasamento, o real impacto das medidas de controle, reduzindo assim a ocorrência de falhas e interrupções no fornecimento de energia.

Além disso, vale destacar que as medições normalizadas de amortecimento próprio (intrínseco) dos cabos aéreos ainda são objetos de frequentes ressalvas. Acredita-se que o presente trabalho também poderá contribuir de forma significativa para que uma metodologia mais consistente seja desenvolvida.

Assim, ao perseguir o objetivo geral, o presente trabalho contribuirá para que as concessionárias, institutos de pesquisa e universidades direcionem seus esforços, de maneira mais assertiva, visando o desenvolvimento de sistemas de transmissão de energia mais sustentáveis e confiáveis, e contribuindo para o alcance das metas dos ODS da Agenda 2030 e para um futuro melhor.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente texto está organizado na forma descrita a seguir.

No capítulo 2, é realizada uma breve exposição dos principais conceitos teóricos relacionados aos cabos aéreos, às vibrações eólicas e aos aspectos dinâmicos associados aos cabos.

No capítulo 3, são apresentadas as principais contribuições já realizadas na modelagem do comportamento dinâmico dos cabos aéreos, buscando contemplar, em especial, aquelas relacionadas com o amortecimento nesse tipo de sistema. Faz-se nesse capítulo, portanto, um levantamento específico do estado da arte.

No capítulo 4, são apresentadas as formulações e os desenvolvimentos matemáticos que deram origem aos modelos representativos do sistema em análise.

No capítulo 5, são descritos, de maneira detalhada os materiais e os métodos associados ao trabalho.

No capítulo 6, são apresentados sequencialmente todos os resultados alcançados em todas as etapas executadas.

Por fim, no capítulo 7, são expostas as conclusões e as sugestões para estudos futuros.

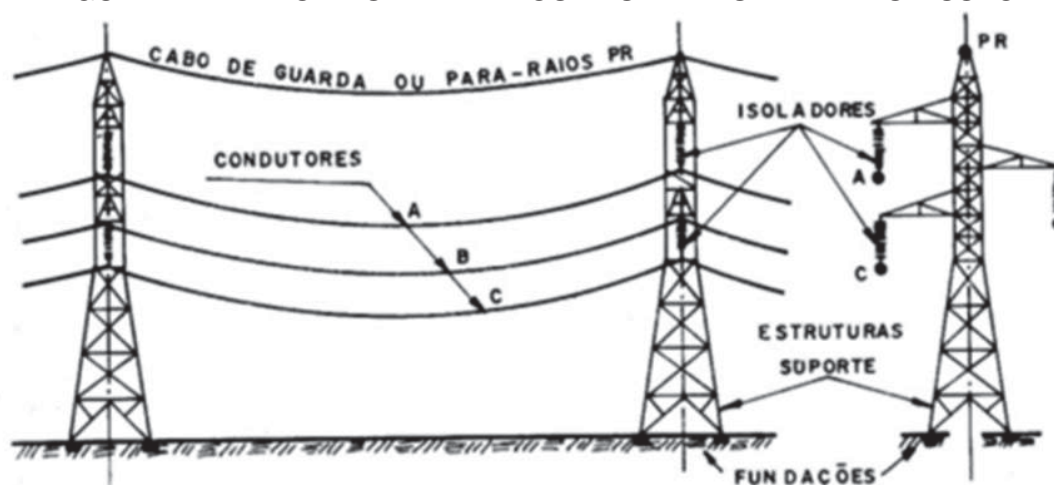
2 CABOS AÉREOS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO

Para que haja um bom entendimento deste documento, é necessário, inicialmente, realizar uma breve exposição dos principais conceitos relacionados aos cabos aéreos de linhas de transmissão, às vibrações eólicas, e aos aspectos dinâmicos. Cabe também expor, de forma sintética, algumas informações adicionais sobre a dissipação de energia nesses sistemas.

2.1 VISÃO GERAL

Nas linhas de transmissão, há basicamente dois tipos de cabos aéreos, os cabos condutores e os cabos para-raios. Os cabos condutores, como o próprio nome indica, têm como função primordial a condução de energia elétrica. Já os cabos para-raios se destinam à proteção das linhas de transmissão, sendo também usados para transmissão de dados e monitoramento da condição. Tais tipos de cabos são ilustrados na FIGURA 1.

FIGURA 1 – PRINCIPAIS ELEMENTOS DAS LINHAS DE TRANSMISSÃO



FONTE: Adaptado de Labegalini et al. (1992)

Os cabos condutores são considerados os componentes mecânicos mais importante das linhas de transmissão, sendo significativa a sua contribuição para o custo total da construção e manutenção das linhas. O custo dos cabos condutores aéreos, incluindo o material e a mão de obra de instalação, pode representar 40% do capital de investimento associado à construção de uma nova linha (EPRI, 2006). O foco do presente trabalho reside, portanto, nesses cabos.

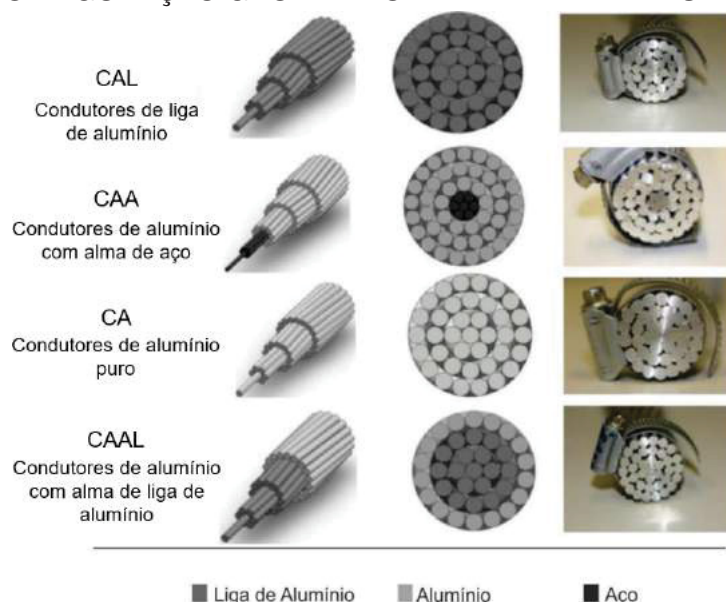
Face a sua função, os cabos condutores aéreos de linhas de transmissão (doravante tratados, por simplicidade, como cabos aéreos) devem ser projetados para suportar grandes faixas de solicitações elétricas, mecânicas e ambientais ao longo da

vida de projeto, que deve ser em torno de 50 anos de serviço (EPRI, 2006). Devido a esses requisitos, uma atenção especial foi dada, ao longo dos anos, a aspectos relacionados à seleção dos materiais constituintes e ao projeto dos cabos (RAWLINS, 2005).

Apesar da enorme evolução ao longo de décadas, a concepção básica de cabos aéreos foi mantida. Essa concepção corresponde a um conjunto de camada de arames (fios) agrupados de forma helicoidal ao redor de um núcleo (que pode ser do mesmo ou de outros materiais), formando um encordoado de camadas adjacentes (RAWLINS, 2005).

Os cabos aéreos são, na sua grande maioria, confeccionados com alumínio, podendo ter combinações de mais de um tipo de material para a sua formação. As constituições típicas utilizadas são: condutores de alumínio puro “CA” (em inglês – *all aluminium conductor*); condutores de alumínio com alma de aço “CAA” (em inglês – *aluminium conductor steel reinforced*); condutores de ligas de alumínio “CAL” (em inglês – *all aluminium alloy conductor*; condutores de alumínio com alma de liga de alumínio “CAAL” (em inglês – *aluminium conductor alloy reinforced*); condutores de liga de alumínio com alma de aço “CALA” (em inglês – *aluminium alloy conductor steel reinforced*) (LABEGALINI et al., 1992; KALOMBO et al., 2018). Ilustra-se, na FIGURA 2, a configuração geométrica dos diferentes tipos de cabos.

FIGURA 2 – CONFIGURAÇÃO GEOMÉTRICA PARA DIFERENTES TIPOS DE CABOS



FONTE: Adaptado de Kalombo et al. (2018)

Novas tecnologias vêm sendo desenvolvidas. Já se encontram, por exemplo, condutores com alto teor de aço para vãos longos (aplicados, por exemplo, em casos que exigem a travessia de rios), condutores com fios conformados de alumínio, e cabos com autoamortecedores (MCCULLOCH et al., 1980; EPRI, 2006).

A maioria dos requisitos de projeto dos cabos aéreos é proveniente de características elétricas e mecânicas. Os requisitos elétricos dizem respeito à densidade corrente, à resistência elétrica, à perda de potência e à tensão elétrica, sendo esses parâmetros, via de regra, corrigidos e/ou alterados através do aumento da área, pelo ajuste do diâmetro externo de um cabo ou pela utilização de um conjunto de multi-condutores na linha de transmissão. Já os requisitos mecânicos estão relacionados, por sua vez, com a extensão do vão entre uma extremidade e outra, e com aspectos ambientais provenientes da ação do vento (EPRI, 2006; GAZZOLA, 2018).

Um dos principais problemas que afeta os cabos aéreos é aquele causado pelas vibrações induzidas pelo vento. Tais vibrações representam a principal causa das falhas por fadiga em cabos, ou em dispositivos periféricos associados a eles.

2.2 VIBRAÇÕES INDUZIDAS PELO VENTO

Os movimentos derivados da ação dos ventos em cabos aéreos são chamados de vibrações induzidas pelo vento. Três categorias diferentes de movimentos vibratórios podem ser observadas: as vibrações eólicas (em inglês – *aeolian vibration*); as vibrações por galope (em inglês – *galloping vibration*); e as vibrações por esteiras (em inglês – *wake induced vibration*) (LABEGALINI et al., 1992; EPRI, 2006).

As vibrações eólicas ocorrem devido ao desprendimento dos vórtices de Von-Kármán durante o escoamento do ar ao redor de um cabo. Elas são a principal causa das falhas por fadiga que este tipo de estrutura experimenta. As vibrações eólicas ocorrem na faixa 3 – 200 Hz (EPRI, 2006; BARRY et al., 2014).

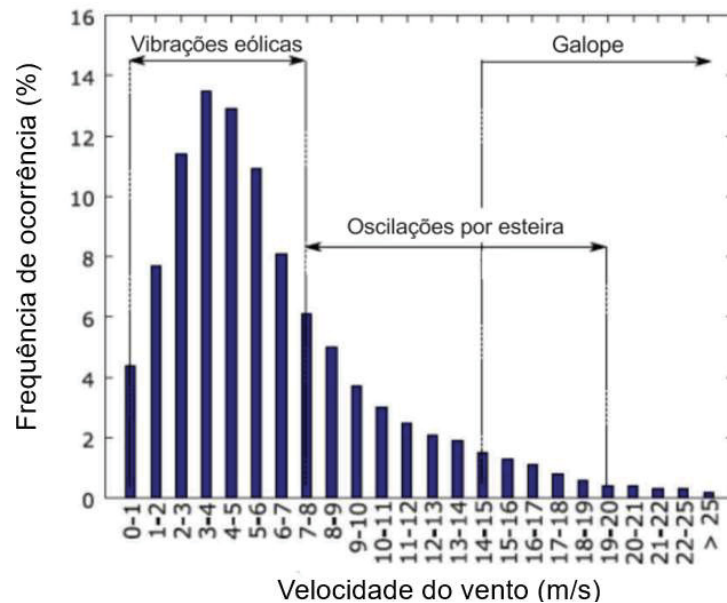
Já o galope é caracterizado por baixas frequências e altas amplitudes de vibração (muitas vezes superiores à flecha de um cabo), ocorrendo, principalmente, na direção de vento cruzado. O galope é causado, na maioria das vezes, por ventos laterais fortes e constantes, com velocidades acima de 15 m/s, e sua instabilidade está associada com camadas de gelo que se formam em um cabo aéreo (EPRI, 2006; FOTI; MARTINELLI, 2018).

Por fim, as oscilações por esteiras ocorrem em cabos condutores aéreos agrupados (feixes de cabo), sendo oriundas da ação do fluxo irregular de ar que decorre dos cabos de barlavento (de onde sopra o vento) sobre os cabos de sotavento (para onde sopra o vento). Diz-se também que essas oscilações surgem pelo “efeito de proteção” dos cabos de barlavento sobre os cabos de sotavento. Esse fenômeno ocorre, geralmente, em frequências baixas e intermediárias, com amplitudes de vibração na mesma ordem do espaçamento entre os cabos, e associação com ventos de velocidades na faixa de 7 m/s a 18 m/s (EPRI, 2006).

A FIGURA 3 ilustra um histograma das velocidades do vento. A partir dele, é

possível visualizar que as vibrações eólicas constituem um fenômeno que ocorre com maior frequência, enquanto o galope e a oscilação por esteira são fenômenos menos frequentes.

FIGURA 3 – DISTRIBUIÇÃO ESTATÍSTICA DAS VELOCIDADES DO VENTO

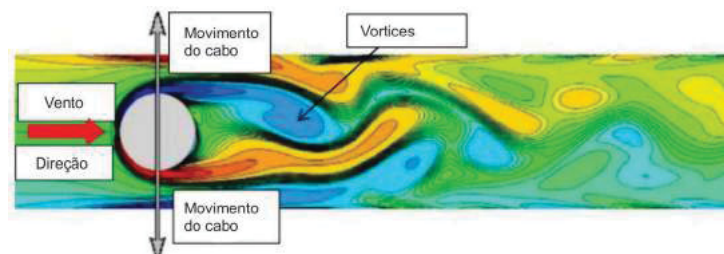


FONTE: Adaptado de Kalombo et al. (2018)

Como já apontado anteriormente, as vibrações eólicas são um dos principais problemas que os cabos aéreos experimentam, visto que elas representam a maior causa das falhas por fadiga. As vibrações eólicas ocorrem com ventos leves, com velocidade de 1 a 7 m/s e com amplitudes máximas na mesma ordem de grandeza do valor do diâmetro de um cabo (EPRI, 2006; BARRY et al., 2014).

O desprendimento de vórtices de Von Kármán, acima mencionado, gera forças externas que atuam em um cabo aéreo, provocando as vibrações eólicas. Este fenômeno é ilustrado na FIGURA 4.

FIGURA 4 – DESPRENDIMENTO DE VÓRTICES EM CABOS AÉREOS



FONTE: Adaptado de Giosan (2013)

Sabe-se, pela literatura especializada, que o desprendimento dos vórtices através de corpos rombudos tem uma frequência bem definida, comumente referenciada como frequência de desprendimento f_s (Hz) (EPRI, 2006; HAGEDORN, 1987). Observações experimentais com cilindros lisos e estacionários indicam que a frequência de

desprendimento f_s é diretamente proporcional à velocidade normal do cilindro V (m/s), e inversamente proporcional ao diâmetro do cilindro D (m), estando ainda associada com uma constante de proporcionalidade chamada de número de *Strouhal* S . Portanto, a frequência de desprendimento é dada por (EPRI, 2006; HAGEDORN, 1987):

$$f_s = S \frac{V}{D}. \quad (2.1)$$

Sabe-se também, pela literatura, que o número de *Strouhal* é uma função da geometria do corpo e do número de *Reynolds*. Medidas experimentais revelam que o número de *Strouhal*, para cabos condutores aéreos de linhas de transmissão, variam no intervalo de 0.185 a 0.22 (EPRI, 2006; HAGEDORN, 1987).

No contexto das vibrações eólicas em linhas de transmissão, outros fatores importantes merecem destaque. São eles: (i) a interação dinâmica entre o fluxo de vento e a vibração estrutural de um cabo aéreo; (ii) o comportamento aleatório do fluxo de vento; e (iii) a rigidez de um cabo aéreo (EPRI, 2006).

Desse modo, há questões relacionadas a vibrações eólicas em linhas aéreas de transmissão que ainda permanecem sem respostas completamente satisfatórias. Isso decorre, principalmente, do progresso lento no modelamento da excitação do vento, do comportamento dinâmico dos cabos aéreos, e da energia dissipada por esses cabos. Os dois últimos pontos estão associados, em parte, à pequena quantidade de informações de propriedades mecânicas dos cabos aéreos, como a rigidez à flexão e o amortecimento (EPRI, 2006; GAZZOLA, 2018).

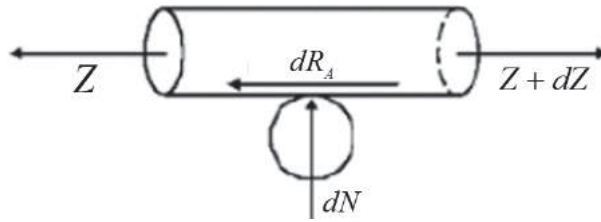
2.3 ASPECTOS DINÂMICOS DOS CABOS AÉREOS

A vibração eólica nos cabos aéreos induz à sua movimentação lateral e, consequentemente, à sua flexão. Entretanto, antes de sofrer tal flexão, um cabo necessita sustentar uma carga externa de tração. Esse estado de carregamento, que de antemão parece ser simples, é na realidade um problema complexo (RAWLINS, 1999).

De maneira qualitativa, pode-se dizer que, quando um cabo aéreo está sob flexão, o movimento dos tentos constituintes do cabo é impedido pela ação das forças de atrito, que atuam entre as superfícies internas de contato ao longo das camadas adjacentes (EPRI, 2006; PAPAILIOU, 1997). Mecanicamente, esse fenômeno é descrito, em uma primeira aproximação, através do equilíbrio das forças axiais de um elemento diferencial representativo dos tentos, conforme ilustrado na FIGURA 5.

Dessa maneira, o cabo se comporta como um corpo sólido (como uma viga maciça), com os tentos constituintes aderidos um ao outro, submetidos a deformações por flexão. No entanto, verifica-se que, acima de uma determinada curvatura de flexão, as forças de atrito (R_A), associadas às forças de compressão (N) (que são decorrentes,

FIGURA 5 – EQUILÍBRIO DAS FORÇAS AXIAIS EM UM ELEMENTO DIFERENCIAL DE UM TENTO CONSTITUINTE



FONTE: Adaptado de EPRI (2006)

por sua vez, da força axial (Z)), não são suficientes para evitar o movimento relativo ou o deslizamento entre os tentos. Os tentos, então, passam a se comportar, a partir daí, como um conjunto de vigas que deslizam entre si (EPRI, 2006; PAPAILIOU, 1997).

2.3.1 Rigidez à Flexão Máxima e Mínima

Quando ocorre o deslizamento dos tentos pela flexão, a tensão associada é desenvolvida em torno do seu próprio eixo neutro. Esse processo acarreta, por sua vez, uma variação da rigidez à flexão. Em baixas amplitudes de oscilação, os tentos se comportam como vigas maciças, ou seja, os tentos estão “ligados” uns aos outros e a sua rigidez global tem um valor máximo ($EI_{\text{máx}}$) (EPRI, 2006; PAPAILIOU, 1997).

No entanto, em grandes amplitudes de oscilação, os tentos passam a ter um comportamento individual, como se fossem um conjunto de vigas que estão deslizando entre si. Isso acarreta, em decorrência, uma diminuição do valor da rigidez até se alcançar um valor mínimo ($EI_{\text{mín}}$) (EPRI, 2006; PAPAILIOU, 1997). Esse comportamento é ilustrado na FIGURA 6.

Há estudos específicos que dizem respeito à modelagem matemática da variação da rigidez à flexão em cabos aéreos, contemplando, por vezes, observações experimentais. Eles podem ser encontrados em Dastous (2005), Hong et al. (2005), Langlois et al. (2013), Foti e Martinelli (2016) e Foti et al. (2017).

A primeira aproximação a ser feita, para o cálculo da rigidez à flexão, é considerar que os fios constituintes de um cabo se encontram como que soldados juntos. Essa rigidez é chamada de rigidez à flexão máxima $EI_{\text{máx}}$ (Nm^2) a qual pode ser calculada, por sua vez, através das seguintes expressões (EPRI, 2006):

$$I_{\text{máx}} = \frac{N_{\text{fios}} \pi d^2}{8} \left(\frac{d^2}{8} + R^2 \right), \quad (2.2)$$

$$EI_{\text{máx}} = E_A \sum I_A + E_s \sum I_s, \quad (2.3)$$

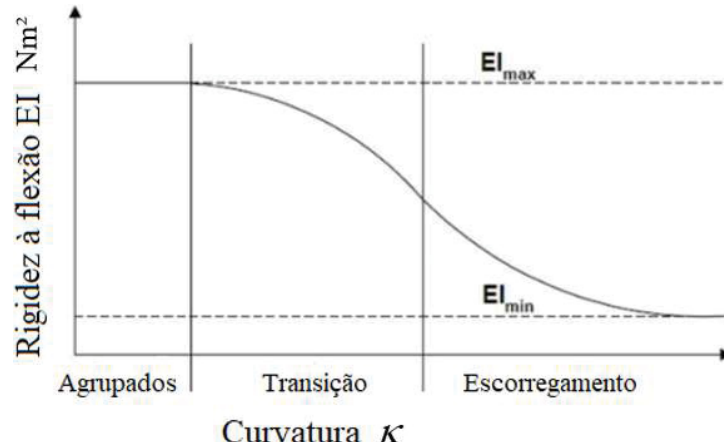
onde $I_{\text{máx}}$ (m^4) é o momento de inércia máximo, N_{fios} é o número de fios por camada, d (m) é o diâmetro dos fios, R (m) é o raio da última camada, E_A (N/m^2) e E_s (N/m^2) são os módulos de elasticidade do aço e do alumínio, respectivamente.

Considerando que os fios constituintes de um cabo agem de maneira independente, o valor da rigidez à flexão mínima $EI_{\min}$ (Nm^2) pode ser calculado como

$$EI_{\min} = \frac{\pi}{64} (E_A d_A^4 N_A - E_s d_s^4 N_s), \quad (2.4)$$

onde, respectivamente, d_A (m) e d_s (m) são os diâmetros dos fios de aço e alumínio, enquanto que N_A e N_s são os números de fio de alumínio e aço.

FIGURA 6 – RIGIDEZ À FLEXÃO EM FUNÇÃO DA CURVATURA DE FLEXÃO



FONTE: Adaptado de EPRI (2006)

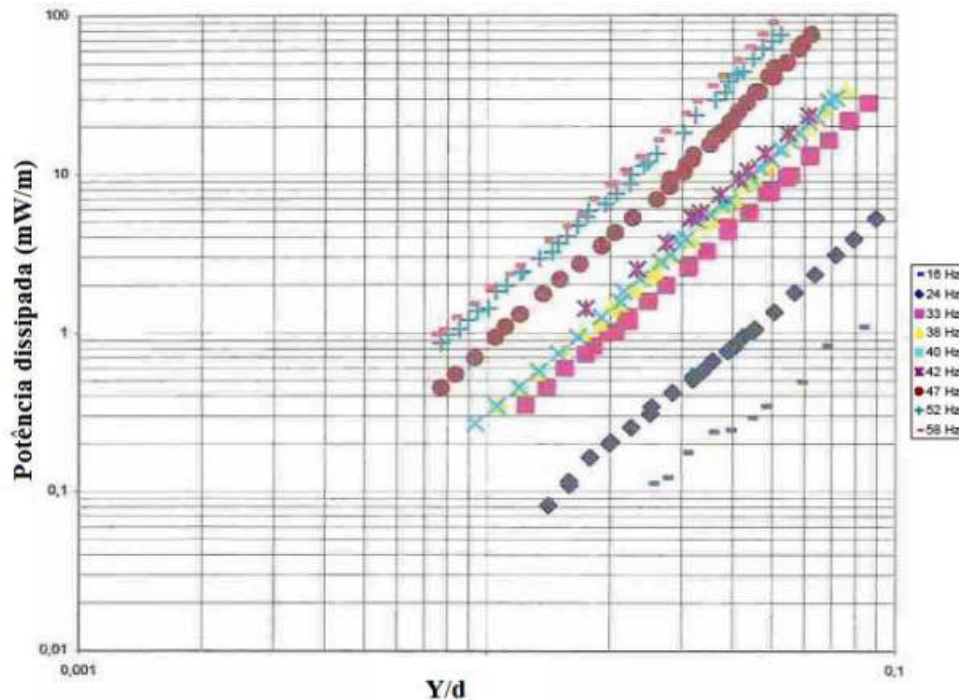
2.3.2 Autoamortecimento

Como mencionado no início da seção, quando um cabo está sujeito à flexão, os seus tentos constituintes tendem a se movimentar, uns em relação aos outros, acarretando o surgimento de forças de atrito. Esse fenômeno de deslizamento e movimentação dos tentos constituintes, associado com o atrito, é um dos principais mecanismos de dissipação de energia e do, assim chamado, autoamortecimento (amortecimento interno) existente nos cabos aéreos (EPRI, 2006).

Empiricamente, observa-se que o autoamortecimento exibe uma relação não linear com a amplitude de vibração (EPRI, 2006). Na FIGURA 7, é ilustrado um gráfico típico da medida da potência dissipada por unidade de comprimento em relação à amplitude e frequência de vibração de cabos condutores aéreos. Vale salientar que, nesse gráfico, as medidas de autoamortecimento foram representadas em escala log-log, sendo cada curva obtida a partir de diferentes frequências.

Um outro parâmetro que influencia o automortecimento em cabos aéreos é a pré-carga ou o tensionamento atuante em um cabo. Em geral, quando a tensão no cabo é elevada, os tentos constituintes tendem a ficar mais aderidos, uns aos outros, sendo o movimento relativo entre eles impedido. Consequentemente, a magnitude do autoamortecimento é diminuída (EPRI, 2006; GAZZOLA, 2018).

FIGURA 7 – AUTOAMORTECIMENTO DO CONDUTOR DRAKE COM CARGA DE ESTICA-
MENTO DE 28,5 KN



FONTE: Adaptado de EPRI (2006)

2.4 ENSAIOS DE AUTOAMORTECIMENTO

Existem, atualmente, três ensaios recomendados para determinação do autoamortecimento. Dois deles ocorrem com vibração forçada (método da potência e método da onda estacionária) e um com vibração livre (método do decaimento logarítmico) (EPRI, 2006).

2.4.1 Método da Potência

No método da potência (*Power Method*), um cabo é forçado a vibrar em uma frequência de ressonância por um excitador eletrodinâmico (*shaker*) e a potência dissipada é diretamente determinada (EPRI, 2006). As dificuldades desse método de ensaio são: determinação da fase, entre a força aplicada e a velocidade medida, devido a distorções que podem ocorrer na forma da onda; determinação visual dos nós e dos antinós; e perdas de energia que ocorrem nas terminações do cabo.

A potência mecânica de entrada P_e (W) pode ser calculada por:

$$P_e = F_e V_e \cos(\alpha_e), \quad (2.5)$$

onde F_e (N) é a amplitude da força de entrada, V_e (m/s) é a velocidade de vibração, e α_e ($^\circ$) é o ângulo de fase entre F_e e V_e .

Para encontrar o amortecimento próprio, iguala-se a potência mecânica e a potência dissipada pelo cabo ensaiado, ou seja, faz-se

$$P_e = P_c, \quad (2.6)$$

onde P_c (W) é a potência dissipada pelo cabo.

A potência dissipada pelo cabo também pode ser calculada pela seguinte equação empírica (EPRI, 2006):

$$P_c = \frac{\pi}{2} f L H \frac{U^b}{\lambda^c}, \quad (2.7)$$

onde L (m) é o comprimento do cabo, H (Nm) é o coeficiente de amortecimento próprio, U (m) é amplitude do movimento, f (Hz) é a frequência de excitação, λ (m) é o comprimento da onda, e b e c são constantes de ajustes ¹.

2.4.2 Método da Onda Estacionária

Um outro método de ensaio com vibração forçada é o método da onda estacionária (*Standing Wave Method*), que considera duas ondas se propagando em direções opostas com a mesma frequência (FIGURA 8), porém, com amplitudes diferentes A e B (EPRI, 2006). O método consiste, por sua vez, em medir as amplitudes nos nós e nos antinós.

A maior dificuldade em utilizar esse método está em medir as amplitudes nos nós, onde elas são reduzidas, e na identificação de sua localização. Para tanto, é necessário a utilização de sensores móveis para medir as amplitudes de vibração para que o ensaio não seja extremamente demorado. O excitador, nesse caso, é colocado próximo de uma das terminações e as medições são realizadas próximas da outra terminação. Esse método tem a vantagem de não medir a potência dissipada nas terminações, somente a influência do acoplamento do excitador.

A potência dissipada pelo cabo P_c pode ser calculada como:

$$P_c = \sqrt{T \rho A} \left(\frac{V^2}{2} \right) \frac{a_i}{Y}, \quad (2.8)$$

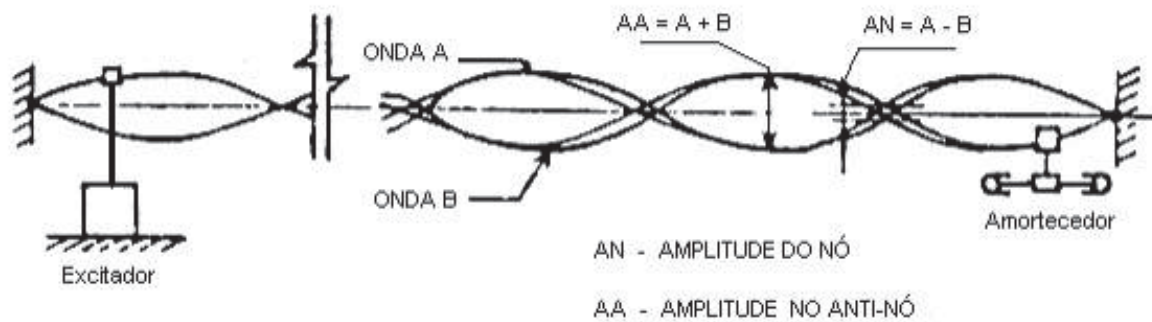
onde a_i (m) é amplitude do nó, Y (m) é a amplitude do antinó, V é a velocidade do antinó, T (N) é a força de tração aplicada no cabo e ρA (kg/m) é a massa por unidade de comprimento.

2.4.3 Método do Decremento Logarítmico

Nesse método, de vibração livre, aplica-se uma carga no cabo em uma frequência de ressonância e subitamente a remove. Assim, é possível obter a medida do decaimento da amplitude de vibração e determinar a energia dissipada pelo cabo.

¹ Normalmente o valor de $b = 2$ e $c = 3$

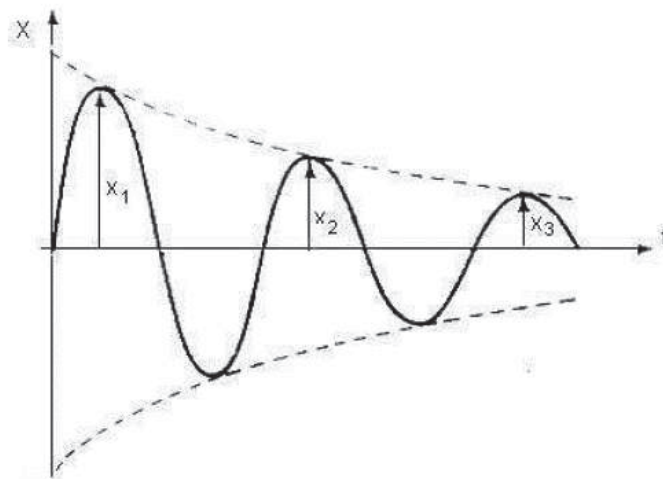
FIGURA 8 – AUTOAMORTECIMENTO DO CONDUTOR DRAKE COM CARGA DE ESTICA-
MENTO DE 28,5 KN



FONTE: Adaptado de EPRI (2006)

Uma das dificuldades desse método consiste na remoção da força de excitação que, por sua vez, pode gerar um efeito transiente e, dessa forma, mascarar os resultados. Nesse método, o amortecimento próprio do cabo é obtido utilizando-se o decremento logarítmico, que fornece uma relação entre as amplitudes de vibração, ou seja, uma relação de amortecimento.

FIGURA 9 – ASPECTO CARACTERÍSTICO DA AMPLITUDE DE DESLOCAMENTO DE UM CABO QUANDO REMOVIDA A FORÇA DE EXCITAÇÃO



FONTE: Adaptado de EPRI (2006)

Com base na FIGURA 9 é possível calcular o decremento logarítmico (δ_d) utilizando a seguinte expressão:

$$\delta_d = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{x_1}{x_n} \right), \quad (2.9)$$

onde x_1 é a amplitude no instante inicial e x_n é a amplitude após n ciclos.

A razão de amortecimento ζ pode ser calculada por:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}. \quad (2.10)$$

3 CONTRIBUIÇÕES PERTINENTES EM CABOS AÉREOS

Neste capítulo, são apresentadas as principais contribuições já realizadas na modelagem do comportamento dinâmico dos cabos aéreos, buscando contemplar, em especial, aquelas relacionadas com os mecanismos de dissipação de energia.

3.1 ABORDAGENS DESTACADAS

A modelagem do comportamento dinâmico de cabos tem recebido atenção, nas últimas décadas, devido à sua importância em vários campos de aplicação. São mencionados, por exemplo, as linhas aéreas de transmissão (foco do presente trabalho), as linhas de comunicação, as linhas para transporte e os cabos para pontes estaiadas, dentre outros (SPAK et al., 2013).

A ascensão da publicação de modelos para cabos começou a ganhar força em 1950, quando os engenheiros e pesquisadores concentraram-se em desenvolver formulações matemáticas para determinar as distribuições das tensões e deformações neste tipo de estrutura (SPAK et al., 2013). Alguns anos depois, o estudo das vibrações em cabos tornou-se objeto de estudo de diversos pesquisadores.

O desenvolvimento da teoria linear de vibrações em cabos iniciou-se com Irvine e Caughey (1974), quando foi possível compreender, pela primeira vez, o efeito da elasticidade no comportamento estático e/ou dinâmico de cabos. Mais tarde, Triantafyllou (1984) fez uma revisão dos principais trabalhos relacionados ao comportamento dinâmico linear de cabos. Desde então, vários modelos foram desenvolvidos e aperfeiçoados.

Os cabos eram modelados inicialmente como cordas tensionadas homogêneas, desprezando-se os efeitos da rigidez à flexão, da rigidez ao cisalhamento, e da rigidez torcional. Trabalhos relacionados a essa abordagem podem ser encontrados em: Irvine e Caughey (1974), Hover e Triantafyllou (1999), Diana et al. (2000), Krenk e Høgsberg (2005), Johansen et al. (2006) e Weber e Boston (2010).

Entretanto, os valores de rigidez à flexão, de rigidez ao cisalhamento e de rigidez torcional não são, na maioria das vezes, desprezáveis, especialmente quando se aumenta o diâmetro total do cabo (SPAK et al., 2013). Assim, modelos mais aprofundados, como os de Castello e Matt (2011), Goodding et al. (2011), Amaral (2016), Kauffman et al. (2014), Spak et al. (2015), Hernández et al. (2018) e Machado et al. (2020), consideram a resposta vibracional de cabos como sendo igual ao de uma viga sujeita a um carregamento axial constante.

Modelando o cabo como uma viga, além de incluir o efeito da rigidez à flexão e da tensão axial, é possível incluir também o efeito do amortecimento, sem a necessidade de desenvolver modelos individuais de atrito entre os tentos constituintes do cabo, o que é difícil e computacionalmente intenso (SPAK et al., 2013). Isso pode ser visto nos trabalhos de Otrin e Boltežar (2007), Otrin e Boltežar (2009), Castello e Matt (2011), Hernández et al. (2018) e Machado et al. (2020).

De acordo com a teoria da elasticidade, uma viga pode ser modelada utilizando a teoria de *Euler – Bernoulli*, em que as seções transversais da viga permanecem planas e inalteradas durante a deformação, ou utilizando a teoria de *Timoshenko*, onde os efeitos de deformação por cisalhamento e de inércia de rotação são considerados (SOUSA et al., 2011). Dentre os trabalhos que utilizam a teoria de Euler – Bernoulli em cabos podem ser citados os de Hagedorn (1982), Hagedorn et al. (2002), Barbieri et al. (2004a), Barbieri et al. (2004b), Otrin e Boltežar (2007), Otrin e Boltežar (2009), Castello e Matt (2011), Amaral (2016), Hernández et al. (2018), Wolf et al. (2018) e Machado et al. (2020). Por outro lado, citam-se como trabalhos que utilizam a teoria de *Timoshenko*, aqueles de Sousa et al. (2011), Goodding et al. (2011), Kauffman et al. (2014) e Spak et al. (2015).

Sousa et al. (2011) analisaram a influência da rigidez à flexão, rigidez ao cisalhamento e rigidez geométrica, bem como da inércia à rotação, no comportamento dinâmico de cabos. Para tanto, os autores utilizam as teorias de viga de *Euler – Bernoulli* e de *Timoshenko* para obtenção das equações governantes do comportamento dinâmico do sistema. Na abordagem utilizando a teoria de viga de *Euler – Bernoulli*, os autores incorporam, na formulação, os efeitos da rigidez à flexão e da rigidez geométrica. Já na abordagem utilizando a teoria de viga de *Timoshenko*, foram incorporados os efeitos da rigidez à flexão e ao cisalhamento, além do efeito de inércia à rotação. Sousa et al. (2011) concluíram que, ao desprezar os efeitos da rigidez à flexão, rigidez ao cisalhamento, rigidez geométrica e da inércia à rotação, são introduzidos erros da ordem de 34 % na determinação da frequência natural do sistema, para uma faixa de 0 a 600 Hz. No entanto, os autores salientaram que o erro de não considerar a inércia à rotação ou a rigidez ao cisalhamento é muito menor, quando comparado ao caso de quando se despreza o efeito da rigidez à flexão e da rigidez geométrica.

Costello e Phillips (1973) desenvolveram um modelo inovador, a partir das equações de equilíbrio estático de uma haste delgada, com intuito de prever a resposta mecânica de cabos. Esse modelo é comumente denominado na literatura como modelo de haste delgada (em inglês “*thin – rod model*”). Nessa formulação, cada fio do cabo é modelado com uma haste delgada individual. Equações de equilíbrio estático são empregadas com o intuito de se obter seis equações de forças generalizadas, onde quatro delas são triviais. Assim, a resposta do cabo é obtida a partir da construção

de uma matriz de rigidez que incorpora, por sua vez, o efeito da curvatura e da torção (encordoamento) dos fios.

Velinsky (1985) lineariza as equações desenvolvidas por Costello e Phillips (1973) em cabos do tipo “*Seale*” com alma interna, viabilizando, portanto, o uso da teoria desenvolvida em aplicações com geometrias mais complexas. Mais tarde, Costello (1990) reuniu soluções analíticas desenvolvidas de diversos trabalhos. Desde então, autores como Fontanari et al. (2015), Stanova et al. (2011), Argatov (2011), Usabiaga e Pagalday (2008) e Elata et al. (2004), aprimoraram e desenvolveram o tipo de modelo em questão.

Ao contrário dos modelos de haste delgada, Raoof e Kraincanic (1994) e Jolicoeur e Cardou (1996) desenvolveram modelos homogêneos semicontínuos, em que cada camada do cabo é modelada como sendo um cilindro oco homogêneo. Diferentemente dos modelos de haste delgadas, que utilizam sempre a mesma metodologia de modelagem, os modelos semicontínuos possibilitam, por sua vez, utilizar uma variedade de outros métodos. Isso, via de regra, permite incorporar com mais facilidade o atrito e desenvolver outras relações constitutivas para modelar a resposta mecânica. Trabalhos e avanços recentes utilizando os modelos de cabos semicontínuos podem ser encontrados em Raoof e Kraincanic (1994), Jolicoeur e Cardou (1996), Jolicoeur (1997) e Crossley et al. (2003).

Como os cabos, em aplicações de engenharia, são usualmente longos e flexíveis, suas vibrações envolvem grandes deslocamentos e, portanto, estão sujeitas a uma série de não linearidade geométricas. Desta maneira, diversos pesquisadores, tais como Rega et al. (1997), Yu e Xu (1999), Xu e Yu (1999), Rega e Alaggio (2001), Koh e Rong (2004), Lacarbonara et al. (2007), Barbieri et al. (2008), Kang et al. (2015) e Zhang et al. (2018), têm estudado e formulado modelos matemáticos para descrever o comportamento dinâmico não linear de cabos.

É importante destacar que, embora o comportamento de cabos possa ser obtido utilizando formulações analíticas, há também uma variedade de estudos que usam métodos numéricos, tais como o método das diferenças finitas (SRINIL et al., 2003; RICCIARDI; SAITTA, 2008), o método dos elementos finitos (OTRIN; BOLTEŽAR, 2007; BARBIERI et al., 2008), o método da rigidez dinâmica (LIU et al., 2019; GONG et al., 2020), o método dos elementos espectrais (MACHADO et al., 2020), e o método da função de transferência distribuída (SPAK et al., 2015), além de outros métodos aproximados como de *Galerkin – Ritz* (LACARBONARA et al., 2007; WAGG; NEILD, 2010).

3.2 CONTRIBUIÇÕES EM AMORTECIMENTO

Como se sabe, o amortecimento tem a ver com a dissipação de energia no movimento vibratório. Sua representação fidedigna é de fundamental importância, principalmente quando se tem em vista o controle de vibrações (INMAN; SINGH, 1994).

Desde que a modelagem do comportamento dinâmico de cabos começou a se tornar suficientemente sofisticada, diversos pesquisadores apontam para necessidade de se descrever matematicamente o fenômeno da dissipação de energia e dos mecanismos de amortecimento existentes em cabos. Essa matéria é objeto de pesquisa de diversos autores, tais como Papailiou (1997), Vecchiarelli (1998), Hong et al. (2005), Dastous (2005), Otrin e Boltežar (2007), Castello e Matt (2011), Langlois et al. (2013), Spak et al. (2015), Hernández et al. (2018) e Foti e Martinelli (2018).

De acordo com Spak et al. (2013), em um extenso trabalho de revisão de literatura sobre o assunto, os mecanismos de amortecimento em cabos envolvem: o amortecimento devido aos efeitos aerodinâmicos; o amortecimento devido à existência de atrito entre os tentos constituintes; e, por último, o amortecimento material interno, decorrente de efeitos histeréticos e viscoelásticos

De maneira geral, observa-se na literatura duas grandes abordagens para modelar os mecanismos de dissipação de energia. São as abordagens “local” e “global”, expostas.

Na abordagem “local”, o modelo de amortecimento é desenvolvido com o objetivo de prever a interação entre os tentos constituintes do cabo, considerando o atrito existente entre eles. Nessa formulação, o cabo geralmente é modelado utilizando o modelo de hastes delgadas (vide seção 3.1).

Esse modelo de amortecimento pode ser compatibilizado com abordagens numéricas, como, por exemplo, o método dos elementos finitos. No entanto, o esforço computacional está diretamente relacionado ao processo de determinação da variação da rigidez à flexão em cada segmento do cabo. Como trabalhos relacionados com essa abordagem, podem ser citados Labrosse et al. (2000), Elata et al. (2004), Usabiaga e Pagalday (2008), Foti e Martinelli (2016), Foti et al. (2017) e Foti e Martinelli (2018).

Já na abordagem “global”, o efeito do amortecimento é inserido a partir de modelos viscosos e materiais (histeréticos e viscoelásticos). Os modelos têm o objetivo de incorporar, de alguma maneira, o efeito da dissipação de energia do sistema em análise.

Nessa abordagem, geralmente, é necessário realizar hipóteses físicas locais. Os parâmetros que alimentam os modelos de amortecimento são, na maioria das vezes, obtidos a partir de observações experimentais, pelo uso de técnicas de otimização não

linear, de procedimentos estatísticos e de análise modal. Podem ser mencionados aqui os trabalhos de Vecchiarelli (1998), Otrin e Boltežar (2007), Otrin e Boltežar (2009), Castello e Matt (2011), Spak et al. (2015) e Hernández et al. (2018).

3.2.1 Variação da Rigidez à Flexão e do Atrito

Papailiou (1997) foi o pioneiro em desenvolver modelos que levam em conta a variação da rigidez à flexão em associação com o amortecimento. Em seu trabalho, o autor modelou o amortecimento do cabo através da caracterização da variação da rigidez à flexão, face ao contato por atrito entre os fios, sob carregamentos de flexão e torção. O modelo desenvolvido calcula a tensão de flexão em fios individuais ao redor do seu próprio eixo neutro, mas também incorpora termos adicionais de tensão relacionados à força de atrito que, por sua vez, impede o deslizamento entre os fios.

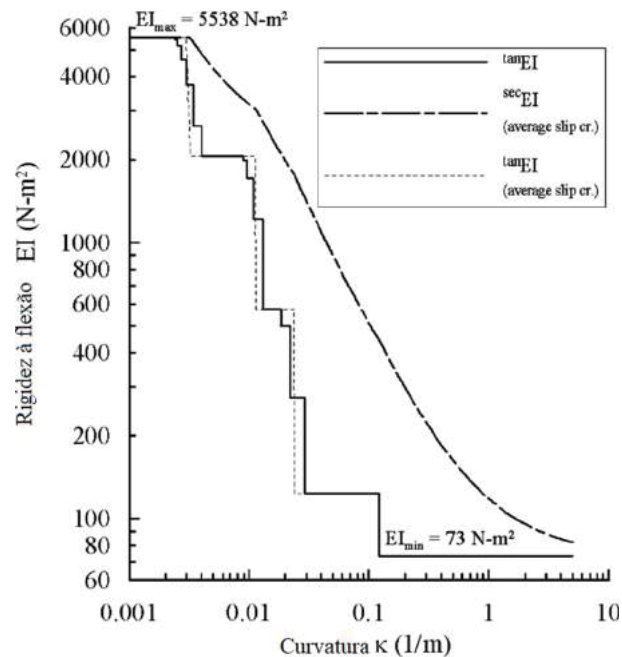
O autor observa que, para pequenas curvaturas, o cabo se comporta como uma viga sólida, o que resulta em um alto valor de rigidez à flexão. Já para grandes curvaturas, o cabo se comporta como conjunto de vigas individuais, que deslizam entre si, apresentando um menor valor de rigidez à flexão que, por sua vez, é igual a soma da rigidez individual de cada fio.

Hong et al. (2005) estenderam o trabalho de Papailiou (1997) para cabos multicamadas com diferentes ângulos de configuração, incluindo o efeito não linear do amortecimento devido ao atrito entre os fios. Esse trabalho refuta, por sua vez, a hipótese de Papailiou (1997) de que o valor da rigidez mínima independeria do coeficiente de atrito e das forças axiais nos fios. Ou seja, a rigidez à flexão se aproximaria de um valor constante, dependendo de um valor de coeficiente de atrito entre os fios. Assim, a rigidez à flexão é inicialmente máxima, quando as forças de atrito não foram ainda superadas, e os fios continuam aderidos um ao outro, e diminui progressivamente a partir do início do movimento relativo proveniente do deslizamento entre eles.

Dastous (2005) também estendeu o método da secante de Papailiou (1997) utilizando o método da rigidez tangente. O método utilizado proporcionou mudanças discretas na rigidez à flexão conforme a curvatura do cabo muda (em oposição ao método da secante, que resultou em uma curva suave quando a magnitude da rigidez à flexão versus a curvatura é graficada). Esse fenômeno pode ser visualizado na FIGURA 10

Os valores de rigidez à flexão discretos obtidos por Dastous (2005) apontaram para a adequação e a compatibilidade do método da rigidez tangente com os programas de elementos finitos. O autor utilizou o método para desenvolver um modelo que inclui a variação da rigidez à flexão para uso em elementos de vigas em programas de elementos finitos comerciais, considerando várias formulações de carregamentos e problemas dinâmicos. Ele ainda salientou que a tensão, a curvatura e o histórico de

FIGURA 10 – RIGIDEZ À FLEXÃO VERSUS CURVATURA ATRAVÉS DO MÉTODO DA RIGIDEZ TANGENTE



FONTE: Adaptado de Dastous (2005)

deformação são fatores que podem afetar diretamente a magnitude da rigidez à flexão.

Langlois et al. (2013) modelaram o comportamento dinâmico não linear de cabos aéreos sujeitos a vibrações eólicas, utilizando modelos que levam em conta a variação da rigidez à flexão. O modelo por elementos finitos foi desenvolvido utilizando elementos de vigas de Euler – Bernoulli, com não linearidade material, que foram combinados com elementos de cabos. Isso permite, por sua vez, incorporar ao modelo matemático o efeito da rigidez geométrica (decorrente da tensão axial) e de grandes deslocamentos. Em relação à modelagem da variação da rigidez à flexão, os autores implementaram os modelos sugeridos por Papailiou (1997) e Dastous (2005).

Ao final do trabalho, os autores concluem que os resultados obtidos com os modelos que levam em conta a variação da rigidez à flexão não são significativamente mais exatos do que os modelos onde a rigidez à flexão é considerada constante. No entanto, é importante destacar que os ensaios experimentais foram realizados para um pequeno comprimento de cabo (em torno de seis metros), levantando dúvidas, portanto, quanto a certos comportamentos não lineares, como as não linearidades geométricas, e também quanto a possíveis influências das condições de contorno nos valores de rigidez à flexão mensurados.

Foti e Martinelli (2018) desenvolveram uma nova formulação para modelagem do amortecimento em cabos baseada na flexão histerética (fundamentado no laço elíptico devido ao deslizamento entre tentos). Essa nova formulação se baseou em modelos desenvolvidos em trabalhos anteriores, em especial, em Foti e Martinelli

(2016) e Foti et al. (2017), cujos os modelos descreviam a cinemática e o estado de deformação entre as camadas de um cabo.

A formulação desenvolvida pelos autores incorpora possíveis ocorrências de fenômenos de microdeslizamentos nas superfícies de contato entre os fios, que podem ocorrer antes ou depois da ativação do fenômeno de macrodeslizamento. A energia dissipada, por unidade de comprimento, revelou dependência do cubo da curvatura de flexão no regime de não deslizamento, e do quadrado da curvatura quando o macrodeslizamento ocorre.

O modelo de dissipação resultante pôde ser aplicado para calcular a potência dissipada, em vibrações em estado estacionário, a partir do princípio do balanço de energia. O modelo permitiu também recuperar, em casos limites, os expoentes que controlam a potência dissipada avaliada em diferentes modelos teóricos sob ambas as premissas de microdeslizamento e macrodeslizamento. Além disso, resultou em previsões satisfatórias da amplitude de vibração medida experimentalmente em uma linha de campo.

3.2.2 Efeitos Viscosos/Histeréticos/Viscoelásticos

Noiseux (1992) utilizou lei de similaridade que é obtida, por sua vez, das equações diferenciais governantes do comportamento dinâmico do sistema, para investigar o amortecimento interno em cabos. O autor assumiu que o fator de perda histerético associado com a rigidez à flexão é o mesmo para todos os cabos de mesma configuração e construção. Sob a hipótese de comportamento histerético, o autor representou o módulo de rigidez à flexão na forma complexa como:

$$\tilde{EI} = EI(1 + i\eta), \quad (3.1)$$

onde EI é o módulo de rigidez à flexão, η é o fator de perda material, independente da frequência e $i = \sqrt{-1}$.

Como o fator de perda é expresso na parte complexa da rigidez à flexão, conforme exposto na EQUAÇÃO 3.1, esse fato permitiu que o autor desenvolvesse três relações de similaridade para cabos com formas e geometrias construtivas similares. No entanto, as leis demonstraram ter incertezas de medição na faixa de 10% em relação aos resultados experimentais.

Há outros trabalhos que também utilizam a rigidez à flexão na forma complexa. Citam-se, como exemplos, os trabalhos de Vecchiarelli (1998) e Machado et al. (2020).

Diana et al. (2000) realizaram um estudo buscando comparar o método da potência e o método da onda estacionária, visando tornar os ensaios para obtenção do amortecimento mais padronizados, posto que ensaios disponíveis e normalizados

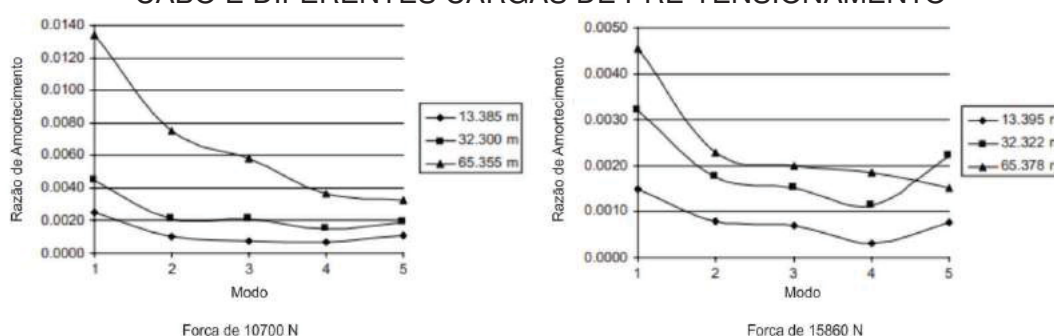
não possuem uma boa repetibilidade. O modelo e as observações experimentais do amortecimento, propostos pelos autores, incluíram as perdas devido ao movimento de flexão, ao atrito, e às perdas associadas com o efeito aerodinâmico. No estudo, o modelo matemático representativo do comportamento dinâmico do sistema não incluiu a rigidez à flexão, e os ensaios experimentais foram aplicadas apenas em cabos do tipo ACSR.

Yamaguchi e Adhikari (1995) realizaram um estudo sob amortecimento modal em cabos individuais e estruturais. Com o intuito de investigar o amortecimento modal, os autores utilizaram uma abordagem baseada na representação da energia do amortecimento modal, que é obtida, por sua vez, através do produto da energia de deformação com o fator de perda. Resultados numéricos foram obtidos através do uso do método dos elementos finitos considerando um modelo com deformação axial e flexão.

Barbieri et al. (2004b) tentaram estabelecer um procedimento para identificar o amortecimento em cabos em linhas áreas de transmissão. O estudo foi realizado numericamente, mediante um modelo baseado na teoria de viga de Euler – Bernoulli, e também experimentalmente. Os autores utilizaram o conceito proposto por Adhikari (2001) para obter uma matriz de amortecimento proporcional para os cinco primeiros modos de vibrar.

Os autores concluíram que a razão de amortecimento modal aumenta quando aumenta o comprimento do vão do cabo e diminui quando aumenta o pré-tensionamento no cabo. Esses resultados podem ser visualizados na FIGURA 11 ¹

FIGURA 11 – VALORES EXPERIMENTAIS DA RAZÃO DE AMORTECIMENTO PARA OS CINCO PRIMEIROS MODOS, PARA DIFERENTES COMPRIMENTOS DE CABO E DIFERENTES CARGAS DE PRÉ-TENSIONAMENTO



FONTE: Adaptado de Barbieri et al. (2004b)

Otrin e Boltežar (2007) apresentaram um estudo das vibrações laterais em

¹ Em EPRI (2006) destaca-se que um dos principais parâmetros que influencia o autoamortecimento (amortecimento interno) de cabos condutores é o seu pré-tensionamento. Este ponto pode ser justificado pelo fato de que, quando o pré-tensionamento é elevado, os tentos constituintes tendem a ficar travados. Em consequência, reduz-se o deslizamento e, em decorrência, o amortecimento interno.

cabos retos e curvos sem a existência de pré-carga axial. Para a análise de vibrações nos cabos, os autores utilizaram o método dos elementos finitos baseados na teoria de *Euler-Bernoulli*. No entanto, eles levaram em conta os termos de dissipação de energia através de modelos de amortecimento viscoso e hysterético. Salientaram-se que os mecanismos relacionados à dissipação de energia em cabos podem envolver: a resistência do ar, o amortecimento interno material e o atrito entre os elos internos do cabo.

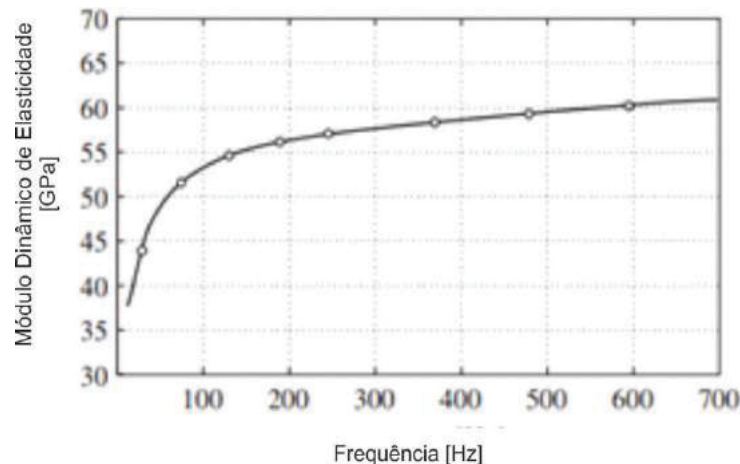
Os autores utilizaram, em seus estudos, modelos lineares de amortecimento, com as hipóteses de amortecimento viscoso proporcional em termos dos coeficientes de *Rayleigh*, e de amortecimento hysterético em termos do módulo dinâmico de elasticidade complexo, na seguinte forma:

$$\bar{E}(\omega) = E_d(\omega) + iE_l(\omega) = E_d(\omega) (1 + i\eta(\omega)) \quad (3.2)$$

onde $E_d(\omega)$ é o módulo dinâmico, $E_l(\omega)$ o módulo de perda e $\eta(\omega)$ o fator de perda material, todos dependentes da frequência.

O módulo de rigidez complexo foi obtido por um método iterativo utilizando-se técnicas de otimização não linear. Na FIGURA 12, é mostrada a curva de dependência em frequência do módulo dinâmico de elasticidade obtido por Otrin e Boltežar (2007).

FIGURA 12 – CURVA DE DEPENDÊNCIA EM FREQUÊNCIA DO MÓDULO DINÂMICO DE ELASTICIDADE.



FONTE: Adaptado de Otrin e Boltežar (2007)

O modelo proposto pelos autores mostrou-se confiável para a estimação das frequências naturais de cabos. Todas as equações foram resolvidas utilizando o método de elementos finitos. Os autores continuaram os seus estudos em Otrin e Boltežar (2009), utilizando uma formulação similar, tendo como objetivo, entretanto, investigar as vibrações de cabos levando em conta o contato entre os elos internos e externos.

Castello e Matt (2011) analisaram, em seus estudos, o comportamento dinâmico de cabos utilizando a teoria de viga de *Euler – Bernoulli*. No entanto, esses

autores levaram em conta, no modelo representativo do sistema, o amortecimento aerodinâmico, o amortecimento interno e a ação das forças axiais de tensão no cabo, com hipótese de que a rigidez à flexão é constante. Alguns pontos importantes sobre o modelo proposto por Castello e Matt (2011) são destacados a seguir.

O primeiro ponto diz respeito à consideração do amortecimento aerodinâmico, que representa a energia dissipada face ao atrito entre o cabo e o ar ao seu redor. Esse amortecimento foi representado por uma relação linear viscosa, sendo que, na grande maioria dos trabalhos, trata-se de um termo que é desprezado.

O segundo ponto é o amortecimento interno que foi representado por um modelo linear oriundo da relação constitutiva de *Kelvin – Voigt*, dado por:

$$\sigma(x, t) = E\varepsilon(x, t) + \xi \frac{d\varepsilon(x, t)}{dt} \quad (3.3)$$

Assim, a força de amortecimento interno torna-se diretamente proporcional à taxa temporal da variação da curvatura do cabo.

Os autores resolveram um problema inverso, utilizando o estimador máximo a posteriori. Assim, foi possível estimar o valor da rigidez à flexão, bem como os parâmetros de amortecimento (interno e externo).

Os resultados experimentais e numéricos apresentaram uma boa concordância na faixa de 5 a 30 Hz. Vale salientar que os resultados experimentais foram realizados para dois valores de pré-tensionamento do cabo, de 16481 N e 21778 N. Os autores observam que houve uma diminuição do valor do amortecimento material e um aumento da rigidez à flexão com o aumento da tensão no cabo.

Kauffman et al. (2014) modelaram o comportamento dinâmico de cabos utilizando teoria de *Euler – Bernoulli*, com um termo adicional de cisalhamento transversal. Visando investigar o amortecimento em cabos no domínio do tempo, eles utilizaram um modelo viscoso de amortecimento baseado em rotação e um modelo viscoso de amortecimento baseado na deformação e no movimento. O modelo ainda inclui a distribuição lateral de forças relacionadas à velocidade oposta do cabo.

Spak et al. (2015) modelaram o comportamento dinâmico de cabos, para aplicações aeroespaciais, utilizando a teoria de *Timoshenko*. Com o intuito de analisar o amortecimento, os autores representaram o amortecimento utilizando um modelo histerético no tempo, dado por

$$\sigma(x, t) = E\varepsilon(x, t) + \int_0^t g(t - \tau)\varepsilon(x, \tau)d\tau, \quad (3.4)$$

onde $g(t)$ é o núcleo histerético. O termo histerético foi modelado utilizando o modelo

de Golla – Hughes – McTavish (GHM) ², que pode ser representado, no domínio de *Laplace*, como

$$G(s) = \frac{\alpha_D s^2 + \gamma_D s}{s^2 + \beta_D s + \delta_D}. \quad (3.5)$$

Os autores formularam as equações governantes do sistema no domínio de *Laplace* com o intuito de facilitar sua resolução. Para resolução das equações, eles utilizaram o método da função de transferência distribuída DTFM . Por fim, mostraram que os resultados obtidos numericamente estavam em consonância com os resultados obtidos experimentalmente.

Hernández et al. (2018) realizaram um estudo que consiste na modelagem, calibração e na validação de modelos que descrevem o comportamento dinâmico de cabos utilizando ferramentas estatísticas. Seu trabalho é abordado a seguir.

Os autores utilizaram dois modelos para prever a vibração por flexão de cabos. O primeiro modelo é a relação constitutiva de *Kelvin – Voigt*, tal como em Castello e Matt (2011). O segundo é a relação constitutiva de *Kelvin – Voigt* por derivada de ordem fracionária, dada por

$$\sigma(x, t) = E\varepsilon(x, t) + \xi \frac{d^\beta \varepsilon(x, t)}{dt^\beta}, \quad (3.6)$$

onde β é a ordem da derivada fracionária, correspondente à seguinte definição (CAPUTO, 1967):

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu} [f(t)] \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(t-\tau)}{\tau^\nu} d\tau. \quad (3.7)$$

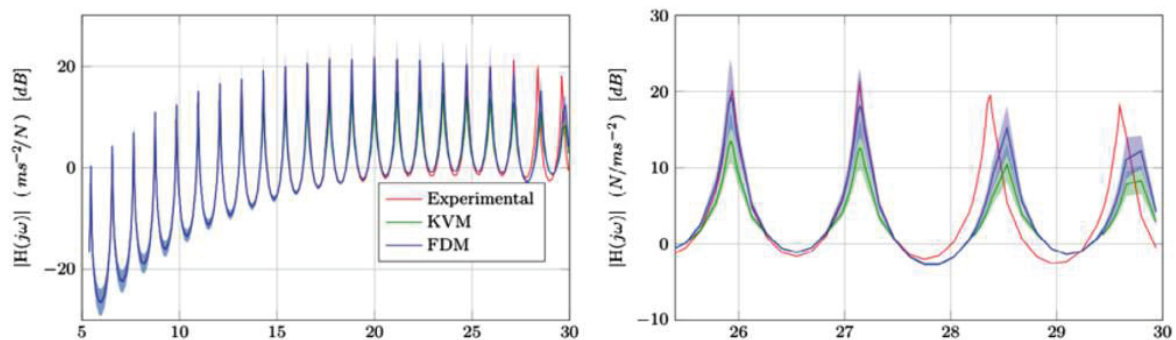
Ao contrário da relação constitutiva dada pela EQUAÇÃO 3.3, a relação dada pela equação EQUAÇÃO 3.7 considera todo o histórico do comportamento da dissipação da energia no domínio do tempo. Já no que diz respeito à identificação de parâmetros, esta etapa foi realizada utilizando a abordagem bayesiana, onde foi empregado o algoritmo de amostragem DRAM (Delayed Rejection Adaptive Metropolis Algorithm) para explorar os parâmetros modais desconhecidos do sistema em análise.

Os autores realizaram testes experimentais com pré – tensões nos cabos de 16481 N e 21778 N. Na FIGURA 13³, são ilustradas as receptâncias obtidas experimentalmente e numericamente por Hernández et al. (2018).

² O modelo é bastante utilizado para caracterizar materiais viscoelásticos, particularmente para uso em formulações envolvendo elementos finitos no domínio do tempo.

³ O termo KVM é relativo ao modelo de Kelvin – Voigt e o termo FDM é relativo FDM ao modelo por derivada fracionária.

FIGURA 13 – COMPARAÇÃO ENTRE RECEPTÂNCIAS OBTIDAS NUMERICAMENTE E EXPERIMENTALMENTE PARA UM CABO CONDUTOR



FONTE: Adaptado de Hernández et al. (2018)

Alguns pontos merecem destaque sobre os resultados obtidos por Hernández et al. (2018). São eles:

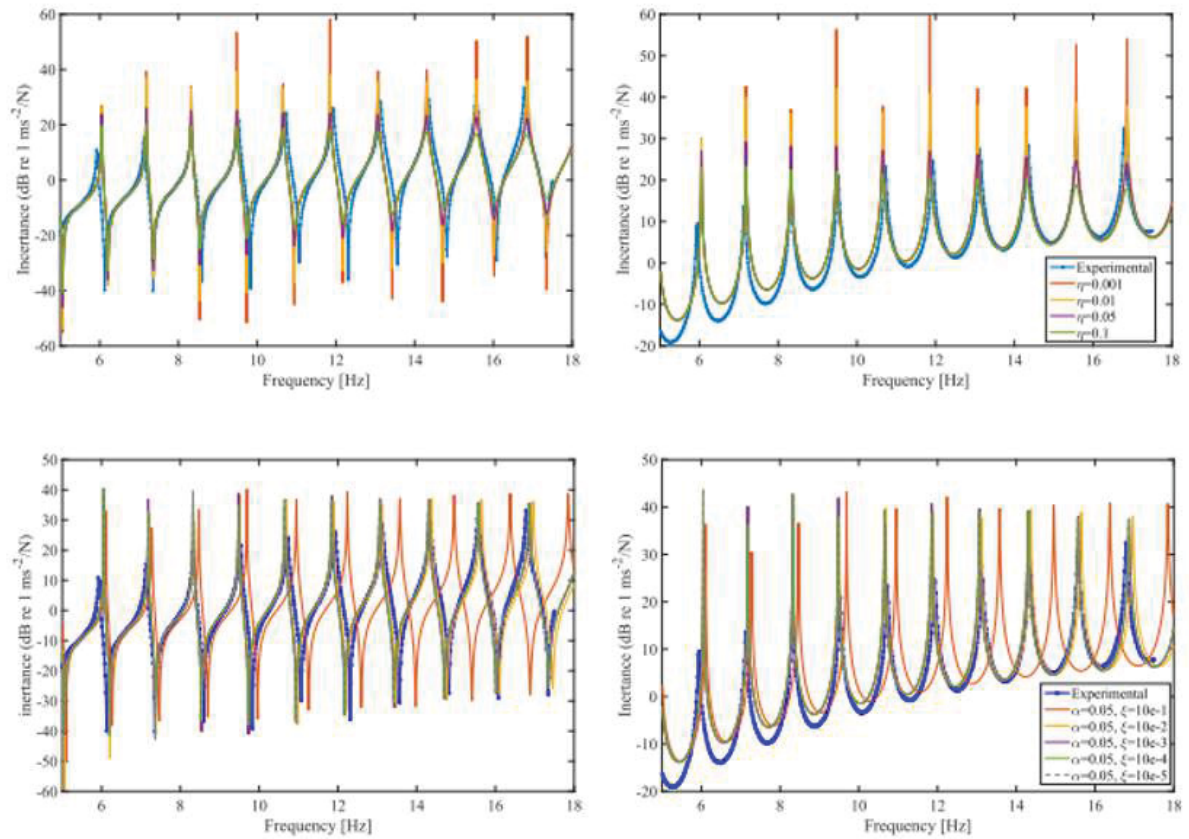
- Ambos os modelos fornecem resultados exatos, quando comparados com os resultados experimentais, para uma faixa de frequência de 5 a 25 Hz; no entanto, para frequências fora desta faixa, os modelos não demonstram ter boa exatidão;
- Para ambos os modelos há uma diminuição do valor do amortecimento material e um aumento da rigidez à flexão com o aumento da tensão no cabo;
- Para o modelo de *Kelvin – Voigt* fracionário, há uma diminuição do valor da ordem da derivada fracionária com o aumento da tensão;
- O modelo de derivada fracionária revela-se mais exato, uma vez que o modelo clássico superestimou os valores do amortecimento estrutural.

Por fim, registra-se que Machado et al. (2020) investigaram dois modelos matemáticos para analisar o comportamento dinâmico de cabos, utilizando a teoria de viga de *Euler - Bernoulli*. O primeiro modelo consiste na utilização do amortecimento histerético, em termos da rigidez complexa. O segundo modelo analisado é o mesmo modelo proposto por Castello e Matt (2011), ou seja, utilizando a relação constitutiva de *Kelvin - Voigt*.

Para as análises numéricas, os autores utilizaram o método dos elementos espectrais, foco do estudo dos autores. Os resultados numéricos foram comparados com os resultados experimentais. Os ensaios experimentais foram realizados com valores de pré – tensão do cabo de 16481 N.

O modelo de *Kelvin – Voigt* revelou boa representação entre 5 a 18 Hz. Já o modelo histerético apresentou boa descrição entre 7 a 14 Hz. Esses resultados podem ser visualizados, em termos de inertância, na FIGURA 14.

FIGURA 14 – COMPARAÇÃO ENTRE RECEPTÂNCIAS OBTIDAS NUMERICAMENTE E EXPERIMENTALMENTE PARA UM CABO CONDUTOR



FONTE: Adaptado de Machado et al. (2020)

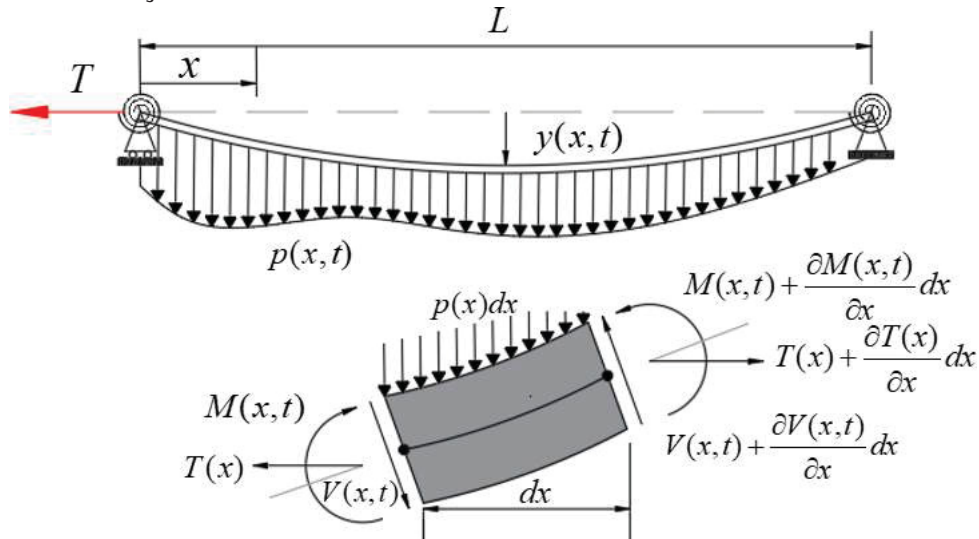
4 MODELAGEM DE CABOS AÉREOS

Neste capítulo, são apresentadas as formulações e os desenvolvimentos que deram origem aos modelos representativos do sistema em análise. Informações complementares de interesse são remetidas para apêndices, indicados de forma correspondente no texto.

4.1 DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DO SISTEMA EM FORMA CONTÍNUA

No presente trabalho, o comportamento dinâmico de um cabo aéreo é modelado como se ele fosse uma viga de Euler — Bernoulli, sujeito a uma carga axial de tração constante, conforme ilustrado na FIGURA 15. Tanto a inércia rotacional quanto a sua catenária, devido à ação do peso próprio, são desconsideradas, tal como nos trabalhos de Barbieri et al. (2004b), Castello e Matt (2011), Amaral (2016), Hernández et al. (2018) e Machado et al. (2020). De acordo com Irvine e Caughey (1974), o efeito da extensibilidade da catenária pode ser desprezado para razões de curvatura-comprimento de vão inferiores a 1/8, o que foi verificado nos ensaios experimentais realizados em laboratório (esses ensaios são detalhados posteriormente no capítulo 5).

FIGURA 15 – MODELO ESTRUTURAL DE UMA VIGA SUJEITA A UMA CARGA AXIAL DE TRAÇÃO CONSTANTE



FONTE: O autor

Portanto, a equação de movimento que rege as vibrações por flexão do cabo aéreo pode ser expressa da seguinte maneira (CLOUGH; PENZIEN, 1975):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} \right) - T \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = p(x, t). \quad (4.1)$$

onde $M(x, t)$, $y(x, t)$ e $p(x, t)$ são, respectivamente, o momento fletor, a deflexão no cabo e a força transversal externa por unidade de comprimento na posição x para o instante de tempo t . Já T é a força de tração, enquanto que ρA é a massa por unidade de comprimento.

Para obter a forma final da equação do movimento, é necessário expressar o momento fletor $M(x, t)$ como uma função do campo de deslocamento $y(x, t)$, o que pode ser feito a partir da escolha de uma relação constitutiva adequada para o meio contínuo em análise. Faz-se uso inicialmente, portanto, de uma relação constitutiva que não considera, em sua formulação, o efeito do amortecimento, qual seja,

$$\sigma(x, t) = E\varepsilon(x, t) \quad (4.2)$$

onde $\sigma(x, t)$ e $\varepsilon(x, t)$ são, respectivamente, o campo de tensão e o campo de deformação para um instante de tempo t , enquanto que E é o módulo de elasticidade.

Ao assumir um modelo de viga de Euler — Bernoulli, o momento fletor, numa determinada seção transversal localizada em x , pode ser expresso como uma função do campo de tensão $\sigma(x, t)$ da seguinte forma:

$$M(x, t) = \int_A -v\sigma(x, t) dA \quad (4.3)$$

onde v é a distância à linha neutra da seção transversal. O campo de deformações $\varepsilon(x, t)$, para pequenos deslocamentos, pode ser expresso por

$$\varepsilon(x, t) = \frac{T}{EA} - v \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}. \quad (4.4)$$

Substituindo as EQUAÇÕES 4.2, 4.3 e 4.4 na EQUAÇÃO 4.1, utilizando as relações

$$\int_A v dA = 0 \quad (4.5)$$

e

$$I \equiv \int_A v^2 dA, \quad (4.6)$$

e considerando ainda que EI seja constante ao longo de x , a forma final da equação de movimento não amortecida de uma viga tracionada de Euler — Bernoulli, é dada por (CLOUGH; PENZIEN, 1975)

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = p(x, t). \quad (4.7)$$

Essa equação é utilizada para modelar, no presente trabalho, o comportamento dinâmico não amortecido de cabos aéreos.

4.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA PARÂMETROS MODAIS

Com o intuito de descrever o comportamento dinâmico de cabos aéreos, é fundamental, como um primeiro passo, analisar as frequências naturais e as formas modais resultantes do problema livre não amortecido.

A EQUAÇÃO 4.7 pode ser solucionada utilizando o método da separação de variáveis. Por essa abordagem a deflexão lateral $y(x, t)$, da estrutura em análise, pode ser descrita em termos de duas funções, quais sejam, uma função espacial $Y(x)$ e outra função temporal $G(t)$, de modo que,

$$y(x, t) = Y(x) G(t), \quad (4.8)$$

o que permite reescrever a EQUAÇÃO 4.7 da seguinte forma:

$$-\frac{EI}{\rho A} \frac{1}{Y(x)} \frac{\partial^4 Y(x)}{\partial x^4} + \frac{T}{\rho A} \frac{1}{Y(x)} \frac{\partial^2 Y(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{G(t)} \frac{\partial^2 G(t)}{\partial t^2} = -\omega^2 = \lambda_c \quad (4.9)$$

onde λ_c é a constante de separação (KREYSZIG et al., 2014).

A EQUAÇÃO 4.9 permite dividir o problema em duas partes: um problema temporal e outro problema espacial, representados, respectivamente, pela EQUAÇÃO 4.10 e EQUAÇÃO 4.11, a saber,

$$\frac{d^2 G(t)}{dt^2} + \omega^2 G(t) = 0, \quad (4.10)$$

e

$$EI \frac{d^4 Y(x)}{dx^4} - T \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} - \rho A \omega^2 Y(x) = 0. \quad (4.11)$$

O problema temporal conduz a uma função harmônica do tipo,

$$G(t) = G_{os} \operatorname{sen}(\omega t) + G_{oc} \cos(\omega t), \quad (4.12)$$

onde G_{os} e G_{oc} são constantes arbitrárias a serem determinadas pelas condições iniciais. Já o problema espacial constitui um problema de autovalores, de onde são obtidas as frequências naturais ω_{n_j} e as formas modais (autofunções) $Y_{n_j}(x)$, como se mostra a seguir.

Introduzindo na EQUAÇÃO 4.11 a coordenada adimensional $\hat{x} = x/L$, onde L é o comprimento do cabo, de modo tal que $0 \leq \hat{x} \leq 1$, decorre que

$$\frac{d^4 Y(\hat{x})}{d\hat{x}^4} - \frac{TL^2}{EI} \frac{d^2 Y(\hat{x})}{d\hat{x}^2} - \frac{\rho A \omega^2 L^4}{EI} Y(\hat{x}) = 0. \quad (4.13)$$

Caso se assuma ainda que a solução da EQUAÇÃO 4.13 seja da forma $Y(\hat{x}) = Ce^{s\hat{x}}$, obtêm-se

$$\left(s^4 - \frac{TL^2}{EI} s^2 - \frac{\rho A \omega^2 L^4}{EI} \right) = 0. \quad (4.14)$$

A EQUAÇÃO 4.14 é quadrática em s^2 , sendo assim facilmente solucionada. Como resultado, têm-se quatro raízes, sendo duas raízes puramente reais e duas raízes puramente imaginárias, da seguinte forma:

$$s_1 = \pm M \quad e \quad s_2 = \pm iN, \quad (4.15)$$

onde M e N são dados por

$$M = L \left\{ (T/2EI) + [(T/2EI)^2 + (\rho A/EI) \omega^2]^{1/2} \right\}^{1/2}, \quad (4.16)$$

$$N = L \left\{ -(T/2EI) + [(T/2EI)^2 + (\rho A/EI) \omega^2]^{1/2} \right\}^{1/2}. \quad (4.17)$$

Simplificando as equações acima, têm-se

$$M = \left(\hat{U} + \sqrt{\hat{U}^2 + \hat{\Omega}^4} \right)^{1/2}, \quad (4.18)$$

$$N = \left(-\hat{U} + \sqrt{\hat{U}^2 + \hat{\Omega}^4} \right)^{1/2}, \quad (4.19)$$

onde as constantes adimensionais de rigidez à flexão $\hat{\beta}$, de força axial $\hat{U}$, e de frequência $\hat{\Omega}^4$ são definidas, respectivamente, como:

$$\hat{\beta} = \frac{EI}{TL^2}, \quad \hat{U} = \frac{1}{2\beta}, \quad \hat{\Omega}^4 = \frac{\rho A \omega^2 L^4}{EI}. \quad (4.20)$$

A solução do problema espacial, dada pela EQUAÇÃO 4.13, é fornecida na literatura (CLOUGH; PENZIEN, 1975; RAO, 2001; INMAN; SINGH, 1994) da seguinte forma:

$$Y(\hat{x} = x/L) = C_1 \sinh M\hat{x} + C_2 \cosh M\hat{x} + C_3 \sin N\hat{x} + C_4 \cos N\hat{x}, \quad (4.21)$$

onde os termos trigonométricos representam as ondas propagantes, e os termos hiperbólicos as ondas evanescentes. Já C_1 , C_2 , C_3 e C_4 são constantes de integração que precisam ser, por sua vez, determinadas pela imposição de condições de contorno.

Bokaian (1990) e Karnovsky e Lebed (2001) fornecem as equações da frequência e das constantes de integração para várias condições clássicas de contorno, com base na EQUAÇÃO 4.21. No entanto, vale ressaltar que a utilização de funções trigonométricas e hiperbólicas para expressar tal solução pode, por vezes, levar a instabilidades numéricas. Essas instabilidades surgem devido ao rápido crescimento dos termos seno e cosseno hiperbólico para valores muito elevados, enquanto que, a diferença numérica entre eles permanece pequena. Por essa razão, autores como Franklin (1989), Main e Jones (2007), e Geuzaine et al. (2021) enfatizam ser preferível expressar a solução por meio de uma combinação linear de termos trigonométricos e exponenciais, tal que

$$Y(\hat{x} = x/L) = R_1 \exp(-M\hat{x}) + R_2 \exp[-M(1-\hat{x})] + R_3 \sin N\hat{x} + R_4 \cos N\hat{x}, \quad (4.22)$$

onde R_1 , R_2 , R_3 e R_4 são novas constantes de integração. Elas ainda devem ser determinadas pela imposição de condições de contorno, tal como será abordado nas próximas seções, para algumas condições de interesse.

4.2.1 Condição Simplesmente Apoiada

A condição simplesmente — apoiada, cujas condições de contorno são expressas por $Y(0) = 0$, $d^2Y(0)/dx^2 = 0$, $Y(L) = 0$, e $d^2Y(L)/dx^2 = 0$, é a única que possui, para os parâmetros modais, solução analítica na forma fechada. Portanto, as frequências naturais e as formas modais podem ser, respectivamente, calculadas utilizando as seguintes expressões (BOKAIAN, 1990; KARNOVSKY; LEBED, 2001):

$$\omega_{n_j} = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \left(j^4 + \frac{j^4 T L^2}{\pi^2 EI} \right)^{1/2}, \quad (4.23)$$

$$Y_{n_j}(x) = \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right), \quad (4.24)$$

onde $j = 1, 2, 3, \dots$

4.2.2 Condição Engastada — Engastada

Considera-se, na sequência, o caso de uma viga engastada — engastada, cujas condições de contorno são $Y(0) = 0$, $dY(0)/dx = 0$, $Y(L) = 0$ e $dY(L)/dx = 0$. A expressão da forma modal para o j -ésimo modo de vibrar é dada por (BOKAIAN, 1990; KARNOVSKY; LEBED, 2001)

$$\begin{aligned} Y_{n_j}(x) = & \sinh\left(\frac{Mx}{L}\right) + \left[\frac{M \sin N - N \sinh M}{N (\cosh M - \cos N)} \right] \cosh\left(\frac{Mx}{L}\right) + \dots \\ & \dots - \left(\frac{M}{N}\right) \sin\left(\frac{Nx}{L}\right) - \left[\frac{M \sin N - N \sinh M}{N (\cosh M - \cos N)} \right] \cos\left(\frac{Nx}{L}\right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Na equação acima M e N são obtidos a partir da resolução da seguinte equação característica:

$$\bar{\Delta}_{EE} = \hat{\Omega} - \hat{U} \sinh(M) \sin(N) - \hat{\Omega} \cosh(N) \cos(N) = 0, \quad (4.26)$$

em conjunto com o uso das relações fornecidas pelas EQUAÇÕES 4.18 a 4.20.

Uma outra expressão da forma modal para a condição engastada — engastada, mais conveniente, pode ser obtida com base em termos exponenciais e trigonométricos. Isso se dá pela aplicação das condições de contorno na solução fornecida pela EQUAÇÃO 4.22, expressão resultante dada por

$$\begin{aligned} Y_{n_j R}(x) = & \left(\frac{N}{M}\right) \exp\left(\frac{-Mx}{L}\right) + \left(\frac{N}{M} \cos N - \sin N\right) \exp\left[\frac{M(L-x)}{L}\right] + \dots \\ & \dots + \operatorname{sen}\left(\frac{Nx}{L}\right) - \left(\frac{N}{M}\right) \cos\left(\frac{Nx}{L}\right), \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde M e N são obtidos, agora, resolvendo a equação característica

$$\bar{\Delta}_{EER} = (N^2 - M^2) \sin(N) + 2MN \cos(N) = 0. \quad (4.28)$$

Vale salientar que as EQUAÇÕES 4.26 e 4.28, bem como as equações características para as demais condições de contorno, assumem a forma de uma equação transcendente, que possui um número infinito de raízes. Portanto, tais raízes devem ser determinadas numericamente. Para este propósito, no presente trabalho, foi utilizado o método da bissecção, através do emprego da função `fzero` já disponível no ambiente MATLAB.

4.2.3 Condição Engastada — Apoiada

Considera-se agora uma viga engastada — apoiada, cujas condições de contorno são $Y(0) = 0$, $dY(0)/dx = 0$, $Y(L) = 0$ e $d^2Y(0)/dx^2 = 0$. A expressão da forma modal para o j -ésimo modo de vibrar é dada por (BOKAIAN, 1990; KARNOVSKY; LEBED, 2001)

$$Y_{n_j}(x) = \sinh\left(\frac{Mx}{L}\right) - \tanh M \cosh\left(\frac{Mx}{L}\right) - \frac{M}{N} \sin\left(\frac{Nx}{L}\right) + \dots \quad (4.29)$$

$$\dots + \frac{M}{N} \tan N \cos\left(\frac{Nx}{L}\right),$$

onde M e N são obtidos resolvendo a equação característica

$$\bar{\Delta}_{EA} = M \cosh(M) \sin(N) - N \sinh(M) \cos(N) = 0. \quad (4.30)$$

Já a expressão da forma modal para a condição engastada — apoiada em termos exponenciais e trigonométricos, decorrente da aplicação das condições de contorno na solução fornecida pela EQUAÇÃO 4.22, é dada por

$$Y_{n_jR}(x) = \left(\frac{N}{M}\right) \exp\left(\frac{-Mx}{L}\right) + \left(\frac{N}{M} \cos N - \sin N\right) \exp\left[\frac{M(L-x)}{L}\right] + \dots \quad (4.31)$$

$$\dots + \sin\left(\frac{Nx}{L}\right) - \left(\frac{N}{M}\right) \cos\left(\frac{Nx}{L}\right),$$

onde M e N são obtidos, agora, resolvendo a seguinte equação característica,

$$\bar{\Delta}_{EAR} = (M^2 + N^2) [N \cos(N) - M \sin(N)] = 0. \quad (4.32)$$

4.2.4 Condição de Apoio com Molas Torcionais nas Extremidades

Apesar da importância de se buscar soluções analíticas para as condições clássicas de contorno, é reconhecido que, em situações práticas, as restrições finais raramente são infinitamente rígidas em rotação. Nesse contexto, cabe analisar condições de contorno que considerem o efeito de molas torcionais nas extremidades, conforme ilustrado na FIGURA 16.

FIGURA 16 – VIGA APOIADA COM MOLAS TORCIONAIS NAS EXTREMIDADES



FONTE: O autor

As condições de contorno para o sistema estrutural em consideração são as seguintes: em $x = 0$,

$$Y(x = 0) = 0, \quad (4.33)$$

$$K_{T1} \frac{\partial Y(x = 0)}{\partial x} = EI \frac{\partial^2 Y(x = 0)}{\partial x^2}, \quad (4.34)$$

e em $x = L$,

$$Y(x = L) = 0, \quad (4.35)$$

$$K_{T2} \frac{\partial Y(x = L)}{\partial x} = -EI \frac{\partial^2 Y(x = L)}{\partial x^2}, \quad (4.36)$$

onde K_{Ti} é a constante das molas torcionais. Aplicando tais condições de contorno na EQUAÇÃO 4.22, obtém-se o seguinte sistema algébrico de equações:

$$R_1 + e^{-M} + R_2 + R_4 = 0 \quad (4.37)$$

$$R_1 e^{-M} + R_2 + R_3 \sin N + R_4 \cos N = 0 \quad (4.38)$$

$$- (R_{t1} M^2 + M) R_4 + e^{-M} (M - R_{t1} M^2) R_2 + N R_3 + R_{T1} N^2 R_4 = 0 \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} & e^{-M} (R_{T2} M^2 - M) R_4 + (R_{T2} M^2 + M) R_2 + \dots \\ & \dots + (N \cos N - R_{T2} N^2 \sin N) R_3 - (N \sin N + R_{T2} N^2 \cos N) R_4 = 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

onde $R_{T1} = EI/K_{T1}L$ e $R_{T2} = EI/K_{T2}L$ são as constantes adimensionais das molas torcionais.

Para o caso específico de aplicações em cabos aéreos, em que o sistema estrutural é longo, delgado e está sob o efeito de uma elevada força axial, é válido considerar que $\hat{\beta} \ll 1$. Isso leva à constatação de que $e^{-M} \rightarrow 0$, podendo seu efeito, por isso, ser desprezado (GEUZAIN et al., 2021). Portanto, o sistema de equações acima passa a ser:

$$R_1 + R_2 + R_4 = 0 \quad (4.41)$$

$$R_2 + R_3 \sin N + R_4 \cos N = 0 \quad (4.42)$$

$$- (R_{T1}M^2 + M) R_4 + N R_3 + R_{T1}N^2 R_4 = 0 \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} (R_{T2}M^2 + M)R_2 + (N \cos N - R_{T2}N^2 \sin N)R_3 - \dots \\ \dots (N \sin N + R_{T2}N^2 \cos N)R_4 = 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Para a solução ser não trivial, o determinante da matriz dos coeficientes do sistema de equação em questão deve ser igual a zero, resultando na equação característica,

$$A_C \sin N + B_C \cos N = 0. \quad (4.45)$$

onde os coeficientes A_C e B_C são dados por

$$\begin{aligned} A_C = N^2(1 - R_{T1}R_{T2}N^2) - M^2(MR_{T1} + MR_{T2} + M^2R_{T1}R_{T2} + 1) - \dots \\ \dots - MN^2(R_{T1} + R_{T2}) - 2R_{T1}R_{T2}M^2 \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$B_C = N^3(R_{T1} + R_{T2}) + M^2N(R_{T1} + R_{T2}) + 2MN. \quad (4.47)$$

Resolvendo o sistema algébrico homogêneo de equações, para as incógnitas R_1, R_2, R_3 e R_4 , chega-se, por fim, na seguinte expressão da forma modal:

$$\begin{aligned} Y_{n_j}(x) = \sin\left(\frac{Nx}{L}\right) - \sin(N) \exp\left[-M\left(\frac{L-x}{x}\right)\right] + \dots \\ \dots + \beta_n \left\{ \exp(-Mx) + \cos(N) \exp\left[-M\left(\frac{L-x}{x}\right)\right] - \cos\left(\frac{Nx}{L}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Nessa equação, tem-se que:

$$\beta_n = \frac{N}{R_{T1}N^2 + R_{T1}M^2 + M}. \quad (4.49)$$

Para que a formulação ora apresentada se reduza a um sistema com condições de contorno clássicas, as constantes das molas torcionais, ou suas constantes adimensionais, devem ser ajustadas conforme os valores indicados na TABELA 1.

TABELA 1 – PARÂMETROS DA RIGIDEZ TORCIONAL PARA OS CASOS LIMITES

Condições de Contorno	K_{T1}	K_{T2}
Simplesmente apoiada	$K_{T1} \rightarrow 0$	$K_{T2} \rightarrow 0$
Engastada - engastada	$K_{T1} \rightarrow \infty$	$K_{T2} \rightarrow \infty$
Engastada - apoiada	$K_{T1} \rightarrow \infty$	$K_{T2} \rightarrow 0$

FONTE: O autor

4.3 SOLUÇÃO ANALÍTICA NA FORMA FECHADA PARA RECEPTÂNCIA

4.3.1 Comentários Iniciais

A solução analítica na forma fechada para o cálculo da receptância de vigas de Euler-Bernoulli foi desenvolvida inicialmente por Bishop (1955) e Bishop e Johnson (1960). Posteriormente, Gladwell e Bishop (1960) estenderam seus resultados para vigas excitadas nas extremidades, com expressões de receptância tabuladas em diferentes condições de contorno. Já Milne (1989) tabulou expressões, na forma fechada, que permite o cálculo da receptância de vigas de Euler-Bernoulli para uma excitação em um ponto arbitrário qualquer, para diferentes condições clássicas de contorno.

Em Stone (1992), foram desenvolvidas expressões de receptância para vigas livre-livre de Timoshenko, considerando a excitação na extremidade. Por outro lado, Mazilu (2022) utilizou funções de Green para obter uma formulação exata da receptância de vigas livre-livre de Timoshenko, para a excitação em um ponto arbitrário. Além disso, estudos correlatos ao tema podem ser encontrados em: Gardonio e Brennan (2004), Mazilu (2007), Lin e Ng (2017), Mazilu (2017) e Brennan e Tang (2022).

Embora a solução na forma fechada da receptância para vigas de Euler-Bernoulli seja bem conhecida e desenvolvida, observa-se que, até o momento, não há nenhum trabalho que apresente a solução da receptância, na forma fechada, para o caso de vigas tracionadas. Tal solução é de especial interesse para se analisar o comportamento dinâmico de cabos aéreos, como será visto mais adiante na tese.

Nesse contexto, apresenta-se na presente seção, em detalhes, a obtenção da solução da receptância na forma fechada de uma viga tracionada de Euler-Bernoulli com amortecimento histerético, para condições clássicas e não clássicas de contorno. Essas condições podem ser encontradas em situações operacionais típicas de cabos de linhas aéreas. A formulação desenvolvida é baseada, por sua vez, nos métodos da separação das variáveis e da função de Green.

4.3.2 Separação de Variáveis

Considere-se que a EQUAÇÃO 4.7 permita uma solução na forma separável, dada por

$$y(x, t) = Y(x) Q(t), \quad (4.50)$$

e

$$p(x, t) = P(x) Q(t). \quad (4.51)$$

onde $Y(x)$ é amplitude do deslocamento na posição x , $P(x)$ é a amplitude da força de excitação na posição x , e $Q(t)$ é uma função temporal qualquer.

Substituindo as EQUAÇÕES 4.50 e 4.51 na EQUAÇÃO 4.7, chega-se a

$$\left[EI \frac{d^4 Y(x)}{dx^4} - T \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] Q(t) + \rho A Y(x) \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} = P(x) Q(t) \quad (4.52)$$

Aplicando a transformada de Fourier na EQUAÇÃO 4.52, com intuito de levar a função $Q(t)$ do domínio do tempo para o domínio da frequência, obtendo $Q(\omega)$ (KREYSZIG et al., 2014), ou seja, fazendo

$$\mathcal{F} \left\{ \left[EI \frac{d^4 Y(x)}{dx^4} - T \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] Q(t) + \rho A Y(x) \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} \right\} = \mathcal{F} \{ P(x) Q(t) \} \quad (4.53)$$

decorre, após algumas manipulações matemáticas e inserção do termo de amortecimento histerético $i\eta EI \frac{d^4 Y(x)}{dx^4}$ (LAZAN, 1968; FANG; LYONS, 1996), que

$$EI (1 + i\eta) \frac{d^4 Y(x)}{dx^4} - T \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} - \omega^2 \rho A Y(x) = P(x). \quad (4.54)$$

onde η é o fator de perda material.

Nessa abordagem, assume-se que o fator de perda material considera todos os efeitos dissipativos materiais, podendo ser entendido, dessa forma como um fator de perda material equivalente. Deve-se destacar que, embora o modelo de amortecimento adotado acima seja simples, Noiseux (1992), Raoof e Huang (1993), Fang e Lyons (1996), Castello e Matt (2011), Hernández et al. (2018) e Machado et al. (2020), utilizaram modelos similares para caracterizar o comportamento dinâmico de cabos aéreos. Nesses trabalhos, foram expostos resultados simulados que se revelaram próximos dos experimentais.

A EQUAÇÃO 4.54 pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\frac{d^4 Y(x)}{dx^4} - 2\tilde{U} \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} - \tilde{\Omega}^4 Y(x) = \frac{P(x)}{\tilde{E}I}, \quad (4.55)$$

onde $\tilde{\beta} = \tilde{E}I/T$, $\tilde{U} = 1/2\tilde{\beta}$ e $\tilde{\Omega}^4 = \rho A \omega^2 / \tilde{E}I$ são, respectivamente, as constantes complexas de rigidez, tensão e frequência, posto que

$$\tilde{E}I = EI(1 + i\eta) = EI_{re} + iEI_{im}, \quad (4.56)$$

é a rigidez à flexão complexa ($\tilde{E}I$), onde a parcela real EI_{re} está relacionada com o armazenamento da energia elástica, e a parcela imaginária EI_{im} com a energia dissipada.

É conveniente escrever a equação EQUAÇÃO 4.55 como

$$L_T Y(x) = \frac{P(x)}{\tilde{E}I}, \quad (4.57)$$

onde L_T é um operador diferencial, dado por:

$$L_T \equiv \frac{d^4}{dx^4} - 2\tilde{U} \frac{d^2}{dx^2} - \tilde{\Omega}^4. \quad (4.58)$$

A solução da EQUAÇÃO 4.57, associada ao operador diferencial L_T , pode ser expressa em termos da função de Green, como se vê na próxima seção.

4.3.3 Função de Green

A solução da EQUAÇÃO 4.57 pode ser escrita através de uma integral de convolução de modo que

$$Y(x) = \int_0^L G(x, \xi) P(\xi) d\xi, \quad (4.59)$$

onde $G(x, \xi)$ é a função de Green (STAKGOLD, 2000). Para tanto, parte-se de que a função de Green de uma viga é a sua resposta devido à ação de uma força concentrada unitária, agindo em uma posição ξ arbitrária qualquer (STAKGOLD, 2000; INMAN, 2017). Assim, a EQUAÇÃO 4.57 pode ser reescrita como

$$L_T G(x, \xi) = \frac{\delta(x - \xi)}{\tilde{E}I}, \quad (4.60)$$

onde δ é a função delta de Dirac.

Sabe-se que a receptância de uma viga é definida por Gladwell e Bishop (1960) como

$$\alpha(x, \xi) = \frac{Y(x)}{\tilde{F}_o} \quad (4.61)$$

onde F_o é amplitude complexa da força de excitação, agindo em um ponto ξ arbitrário qualquer. Fica claro, portanto, que (GLADWELL, 1959; MAZILU, 2022):

$$\alpha(x, \xi) = G(x, \xi) \quad (4.62)$$

A função de Green pode ser descrita mediante uma combinação linear das autofunções do operador L_T (GLADWELL, 1959; MAZILU, 2022). Para encontrar essas autofunções, o ponto de partida é a solução da equação homogênea, derivada da EQUAÇÃO 4.60, expressa por

$$L_T G(x, \xi) = 0. \quad (4.63)$$

A solução anterior pode ser expressa como

$$G(x, \xi) = A(\xi) e^{\tilde{k}x}, \quad (4.64)$$

onde $A(\xi)$ é uma função dependente das condições de contorno do problema, e $\tilde{k}$ é um parâmetro complexo.

Inserindo a EQUAÇÃO 4.64 na EQUAÇÃO 4.63 resulta na seguinte equação característica:

$$\tilde{k}^4 - 2\tilde{U}\tilde{k}^2 - \tilde{\Omega}^4 = 0. \quad (4.65)$$

Da mesma maneira que a EQUAÇÃO 4.14, a EQUAÇÃO 4.65 é quadrática em $\tilde{k}^2$, podendo ser assim solucionada. Como resultado, têm-se quatro raízes, sendo duas raízes puramente reais e duas raízes puramente imaginárias, de modo que

$$\tilde{k}_1 = \pm \tilde{M} \quad e \quad \tilde{k}_2 = \pm i \tilde{N}. \quad (4.66)$$

Agora, $\tilde{M}$ e $\tilde{N}$ são grandezas complexas, dadas por

$$\tilde{M} = \left\{ (T/2(EI(1+i\eta))) + [(T/2EI(1+i\eta))^2 + (\rho A/EI(1+i\eta))\omega^2]^{1/2} \right\}^{1/2}, \quad (4.67)$$

$$\tilde{N} = \left\{ -(T/2(EI(1+i\eta))) + [(T/2EI(1+i\eta))^2 + (\rho A/EI(1+i\eta))\omega^2]^{1/2} \right\}^{1/2}. \quad (4.68)$$

Simplificando, tem-se

$$\tilde{M} = \left(\tilde{U} + \sqrt{\tilde{U}^2 + \tilde{\Omega}^4} \right)^{1/2}, \quad (4.69)$$

$$\tilde{N} = \left(-\tilde{U} + \sqrt{\tilde{U}^2 + \tilde{\Omega}^4} \right)^{1/2}. \quad (4.70)$$

Assim, a função de Green pode ser expressa por meio de uma combinação linear de termos exponenciais e trigonométricos, na seguinte forma:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} G^-(x, \xi) = A_1(\xi) e^{-\tilde{M}x} + A_2(\xi) e^{-\tilde{M}(L-x)} + \dots & 0 < x < \xi, \\ \dots + A_3(\xi) \sin \tilde{N}x + A_4(\xi) \cos \tilde{N}x & \\ G^+(x, \xi) = B_1(\xi) e^{\tilde{M}x} + B_2(\xi) e^{-\tilde{M}(L-x)} + \dots & \xi < x < L. \\ \dots + B_3(\xi) \sin \tilde{N}x + B_4(\xi) \cos \tilde{N}x & \end{cases} \quad (4.71)$$

Sabendo, ainda, que a função de Green e as suas duas primeiras derivadas ¹ são funções contínuas para $x = \xi$, e a terceira derivada ² sofre uma descontinuidade de magnitude $1/\tilde{E}I$, decorre que

$$G^-(\xi, \xi) = G^+(\xi, \xi), \quad (4.72)$$

$$\frac{dG^-(\xi, \xi)}{dx} = \frac{dG^+(\xi, \xi)}{dx}, \quad (4.73)$$

¹ A primeira e a segunda derivada são, por sua vez, relativas à rotação e ao momento fletor.

² A terceira derivada está relacionada com a força cortante através da relação $V(x) = -\left[\tilde{E}I \frac{d^3 Y(x)}{dx^3} - T \frac{dY(x)}{dx}\right]$.

$$\frac{d^2 G^-(\xi, \xi)}{dx^2} = \frac{d^2 G^+(\xi, \xi)}{dx^2}, \quad (4.74)$$

$$\frac{d^3 G^+(\xi + 0, \xi)}{dx^3} - \frac{d^3 G^-(\xi - 0, \xi)}{dx^3} = \frac{1}{\tilde{E}I}. \quad (4.75)$$

As condições mencionadas acima levam à equação matricial:

$$\begin{bmatrix} e^{-\tilde{M}\xi} & e^{-\tilde{M}(L-\xi)} & \sin(\tilde{N}\xi) & \cos(\tilde{N}\xi) \\ -\tilde{M}e^{-\tilde{M}\xi} & \tilde{M}e^{-\tilde{M}(L-\xi)} & \tilde{N}\cos(\tilde{N}\xi) & -\tilde{N}\sin(\tilde{N}\xi) \\ \tilde{M}^2 e^{-\tilde{M}\xi} & \tilde{M}^2 e^{-\tilde{M}(L-\xi)} & -\tilde{N}^2 \sin(\tilde{N}\xi) & -\tilde{N}^2 \cos(\tilde{N}\xi) \\ -\tilde{M}^3 e^{-\tilde{M}\xi} & \tilde{M}^3 e^{-\tilde{M}(L-\xi)} & -\tilde{N}^3 \sin(\tilde{N}\xi) & \tilde{N}^3 \cos(\tilde{N}\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\tilde{E}I} \end{bmatrix}, \quad (4.76)$$

onde

$$Y_i = B_i - A_i \quad i = 1 \text{ a } 4. \quad (4.77)$$

A solução do sistema de equações, dado pela EQUAÇÃO 4.76, é

$$\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} -\frac{e^{-\tilde{M}\xi}}{2\tilde{M}} & \frac{e^{\tilde{M}(L-\xi)}}{2\tilde{M}} & -\frac{\cos(\tilde{N}\xi)}{\tilde{N}} & \frac{\sin(\tilde{N}\xi)}{\tilde{N}} \end{bmatrix}^T, \quad (4.78)$$

onde

$$R = \frac{1}{\tilde{E}I (\tilde{M}^2 + \tilde{N}^2)}. \quad (4.79)$$

Usando as relações fornecidas pelas EQUAÇÕES 4.71 e 4.78, decorre que

$$G(x, \xi) = A_1(\xi)e^{-\tilde{M}x} + A_2(\xi)e^{-\tilde{M}(L-x)} + A_3(\xi)\sin \tilde{N}x + A_4(\xi)\cos \tilde{N}x + \dots \quad (4.80)$$

$$\dots + Ru(x - \xi) \left[\frac{e^{\tilde{M}(x-\xi)} - e^{-\tilde{M}(x-\xi)}}{2\tilde{M}} - \frac{\sin \tilde{N}(x - \xi)}{\tilde{N}} \right]$$

onde $u(x - \xi)$ é a função degrau unitário, cujo valor é igual a 0 para $x < \xi$, e 1 para $x \geq \xi$. As constantes $A_i(\xi)$, associadas com a excitação aplicada de forma pontual na posição arbitrária ξ , podem ser determinadas a partir da imposição de condições de contorno, como será mostrado a seguir.

4.3.3.1 Expressões da Receptância para as Condições Clássicas de Contorno

As expressões das funções de Green para as condições simplesmente apoiada, engastada — engastada e engastada — apoiada, obtidas via computação simbólica³, são expressas, respectivamente, pelas EQUAÇÕES 4.81, 4.82 e 4.83, quais sejam:

- **função de Green — condição simplesmente apoiada — $G(x, \xi)_{AA}$:**

$$G(x, \xi)_{AA} = \frac{1}{(\tilde{M}^2 + \tilde{N}^2)} \left[- (R_0 \tilde{N}^2 + R_2) e^{-\tilde{M}(L-x)} + \frac{(R_2 - R_0 \tilde{M}^2)}{\Delta_{AA}} \sin(\tilde{N}x) \right] + \dots$$

$$\dots + R \left[\frac{e^{\tilde{M}(x-\xi)} - e^{-\tilde{M}(x-\xi)}}{2\tilde{M}} - \frac{\sin \tilde{N}(x-\xi)}{\tilde{N}} \right] u(x-\xi); \quad (4.81)$$

- **função de Green — condição engastada — engastada — $G(x, \xi)_{EE}$:**

$$G(x, \xi)_{EE} = \left(\frac{1}{\Delta_{EE}} \right) \left\{ \tilde{N} (R_1 - R_0 \tilde{M}) e^{-\tilde{M}x} - \left[\cos(L\tilde{N}) (R_1 \tilde{N} + R_0 \tilde{M} \tilde{N}) + \dots \right. \right.$$

$$\left. \dots + \sin(L\tilde{N}) (R_0 \tilde{N}^2 - R_1 \tilde{M}) \right] e^{-\tilde{M}(L-x)} + \tilde{M} (R_1 - R_0 \tilde{M}) \sin \tilde{N}x + \dots$$

$$\left. \dots + \tilde{N} (R_1 - R_0 \tilde{M}) \cos \tilde{N}x \right\} + R \left[\frac{e^{\tilde{M}(x-\xi)} - e^{-\tilde{M}(x-\xi)}}{2\tilde{M}} - \frac{\sin \tilde{N}(x-\xi)}{\tilde{N}} \right] u(x-\xi); \quad (4.82)$$

- **função de Green — condição engastada — apoiada — $G(x, \xi)_{EA}$:**

$$G(x, \xi)_{EA} = \left(\frac{1}{\Delta_{EE}} \right) \left[\tilde{N} (R_2 - R_0 \tilde{M}) e^{-\tilde{M}x} - (R_0 \tilde{N}^2 + R_1) e^{-\tilde{M}(L-x)} \right] + \dots$$

$$\dots + \tilde{M} (R_2 - R_0 \tilde{M}^2) \sin \tilde{N}x + \tilde{N} (R_2 - R_0 \tilde{M}^2) \cos \tilde{N}x \left] + \dots \quad (4.83)$$

$$\dots + R \left[\frac{e^{\tilde{M}(x-\xi)} - e^{-\tilde{M}(x-\xi)}}{2\tilde{M}} - \frac{\sin \tilde{N}(x-\xi)}{\tilde{N}} \right] u(x-\xi).$$

Nas equações acima as constantes R_0 , R_1 , R_2 , Δ_{AA} , Δ_{EE} e Δ_{EA} são expressas por

$$R_0 = \frac{1}{\tilde{E}I (\tilde{M}^2 + \tilde{N}^2)} \left[\frac{e^{\tilde{M}(L-\xi)} - e^{-\tilde{M}(L-\xi)}}{2\tilde{M}} - \frac{\sin \tilde{N}(L-\xi)}{\tilde{N}} \right]; \quad (4.84)$$

$$R_1 = \frac{1}{\tilde{E}I (\tilde{M}^2 + \tilde{N}^2)} \left[\frac{e^{\tilde{M}(L-\xi)} + e^{-\tilde{M}(L-\xi)}}{2} - \cos \tilde{N}(L-\xi) \right]; \quad (4.85)$$

³ A computação simbólica foi realizada pela *toolbox* correspondente do ambiente MATLAB

$$R_2 = \frac{1}{\tilde{E}I (\tilde{M}^2 + \tilde{N}^2)} \left[\frac{\tilde{M} (e^{\tilde{M}(L-\xi)} - e^{-\tilde{M}(L-\xi)})}{2} + \tilde{N} \sin \tilde{N} (L - \xi) \right]; \quad (4.86)$$

$$\Delta_{AA} = \sin(\tilde{N}L); \quad (4.87)$$

$$\Delta_{EE} = (\tilde{N}^2 - \tilde{M}^2) \sin(L\tilde{N}) + 2\tilde{M}\tilde{N} \cos(L\tilde{N}); \quad (4.88)$$

$$\Delta_{EA} = (\tilde{M}^2 + \tilde{N}^2) (\tilde{N} \cos(L\tilde{N}) - \tilde{M} \sin(L\tilde{N})). \quad (4.89)$$

Vale ressaltar que as equações:

$$\Delta_{AA} = \sin(\tilde{N}L) = 0, \quad (4.90)$$

$$\Delta_{EE} = (\tilde{N}^2 - \tilde{M}^2) \sin(L\tilde{N}) + 2\tilde{M}\tilde{N} \cos(L\tilde{N}) = 0, \quad (4.91)$$

$$\Delta_{EA} = (\tilde{M}^2 + \tilde{N}^2) (\tilde{N} \cos(L\tilde{N}) - \tilde{M} \sin(L\tilde{N})) = 0, \quad (4.92)$$

são, respectivamente, as equações características para as condições simplesmente apoiada, engastada — engastada e engastada — apoiada, na sua forma não adimensional. É importante ressaltar que, assim como as equações características desenvolvidas na seção 4.2, essas equações também fornecem as frequências naturais associadas a cada modo de vibrar.

No entanto, como as funções de Green são simétricas, conforme o teorema de Maxwell-Betti, é válida a seguinte relação (MAZILU, 2022):

$$G(x, \xi) = G(\xi, x). \quad (4.93)$$

Recorrendo às relações dadas pelas EQUAÇÕES 4.61, 4.62 e 4.93, chega-se, portanto, nas expressões finais das receptâncias, na sua forma fechada, que podem ser calculadas mediante o uso das seguintes relações:

- **receptância — condição simplesmente apoiada —** $\alpha(x, \xi, \omega)_{AA}$:

$$\alpha(x, \xi, \omega)_{AA} = \frac{1}{(\tilde{M}^2 + \tilde{N}^2)} \left[- (R_0 \tilde{N}^2 + R_2) e^{-\tilde{M}(L-x)} + \frac{(R_2 - R_0 \tilde{M}^2)}{\Delta_{EE}} \sin(\tilde{N}x) \right]; \quad (4.94)$$

- **receptância — condição engastada — engastada —** $\alpha(x, \xi, \omega)_{EE}$:

$$\begin{aligned} \alpha(x, \xi, \omega)_{EE} = & \left(\frac{1}{\Delta_{EE}} \right) \left\{ \tilde{N} \left(R_1 - R_o \tilde{M} \right) e^{-\tilde{M}x} - \left[\cos \left(L \tilde{N} \right) \left(R_1 \tilde{N} + R_o \tilde{M} \tilde{N} \right) + \dots \right. \right. \\ & \left. \dots + \sin \left(L \tilde{N} \right) \left(R_o \tilde{N}^2 - R_1 \tilde{M} \right) \right] e^{-\tilde{M}(L-x)} + \tilde{M} \left(R_1 - R_o \tilde{M} \right) \sin \tilde{N}x + \dots \\ & \left. \dots + \tilde{N} \left(R_1 - R_o \tilde{M} \right) \cos \tilde{N}x \right\}; \end{aligned} \quad (4.95)$$

- **receptância — condição engastada — apoiada —** $\alpha(x, \xi, \omega)_{EA}$:

$$\begin{aligned} \alpha(x, \xi, \omega)_{EA} = & \left(\frac{1}{\Delta_{EE}} \right) \left[\tilde{N} \left(R_2 - R_o \tilde{M} \right) e^{-\tilde{M}x} - \left(R_o \tilde{N}^2 + R_1 \right) e^{-\tilde{M}(L-x)} \right] + \dots \\ & \dots + \tilde{M} \left(R_2 - R_o \tilde{M}^2 \right) \sin \tilde{N}x + \tilde{N} \left(R_2 - R_o \tilde{M}^2 \right) \cos \tilde{N}x, \end{aligned} \quad (4.96)$$

onde $0 < x < \xi < L$.

4.3.3.2 Expressão da Receptância para Condição não Clássica de Contorno

Considera-se novamente o caso de uma viga apoiada com molas torcionais nas extremidades. As condições de contorno associadas são agora expressas em termos da função de Green, da seguinte forma: em $x = 0$,

$$G(x = 0, \xi) = 0, \quad (4.97)$$

$$K_{T1} \frac{\partial G(x = 0, \xi)}{\partial x} = EI \frac{\partial^2 G(x = 0, \xi)}{\partial x^2}, \quad (4.98)$$

e em $x = L$,

$$G(x = L, \xi) = 0, \quad (4.99)$$

$$K_{T1} \frac{\partial G(x = L, \xi)}{\partial x} = -EI \frac{\partial^2 G(x = L, \xi)}{\partial x^2}. \quad (4.100)$$

Aplicando essas condições de contorno na EQUAÇÃO 4.80, e considerando novamente que $Re(e^{-\tilde{M}L}) \rightarrow 0$, conforme explicado na seção subseção 4.2.4, chega-se ao seguinte problema algébrico de equações:

$$A_1(\xi) + A_4(\xi) = 0, \quad (4.101)$$

$$-\left(\tilde{R}_{T1}\tilde{M}^2 + \tilde{M}\right) A_1(\xi) + \tilde{N} A_3(\xi) + \tilde{R}_{T1}\tilde{N}^2 A_4(\xi) = 0, \quad (4.102)$$

$$A_2(\xi) + \sin(\tilde{N}L) A_3(\xi) + \cos(\tilde{N}L) A_4(\xi) = R_0, \quad (4.103)$$

$$\begin{aligned} &\left(\tilde{R}_{T2}\tilde{M}^2 + \tilde{M}^2\right) A_2(\xi) + \left[\tilde{N} \cos(\tilde{N}L) - \tilde{N}^2 \tilde{R}_{T2} \sin(\tilde{N}L)\right] A_3(\xi) + \dots \\ &\dots + A_4(\xi) \left[\tilde{N} \sin(\tilde{N}L) + \tilde{R}_{T2}\tilde{N}^2 \cos(\tilde{N}L)\right] = R_N. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Acima, $\tilde{R}_{T1} = EI/K_{T1}$ e $\tilde{R}_{T2} = EI/K_{T2}$ são constantes não adimensionais relativas às molas torcionais, ao passo que a constante R_N é dada por ⁴

$$R_N = -\left(\tilde{R}_{T2}R_1 + R_2\right). \quad (4.105)$$

Resolvendo o sistema de equações acima, obtêm-se as constantes de integração

$$A_1(\xi) = \frac{\tilde{N} \left(R_0 \tilde{R}_{T2} \tilde{M}^2 + R_0 \tilde{M} + R_N\right)}{\Delta_{MT}}, \quad (4.106)$$

$$A_2(\xi) = \frac{\delta_1(\xi) \sin(\tilde{N}L) + \delta_2(\xi) \cos(\tilde{N}L)}{\Delta_{MT}}, \quad (4.107)$$

$$A_3(\xi) = \frac{\left(R_0 \tilde{R}_{T2} \tilde{M}^2 + R_0 \tilde{M} + R_N\right) \left(\tilde{R}_{T1} \tilde{M}^2 + \tilde{M} + \tilde{R}_{T1} \tilde{N}^2\right)}{\Delta_{MT}}, \quad (4.108)$$

$$A_4(\xi) = \frac{-\tilde{N} \left(R_0 \tilde{R}_{T2} \tilde{M}^2 + R_0 \tilde{M} + R_N\right)}{\Delta_{MT}}, \quad (4.109)$$

onde as constantes Δ_{MT} , δ_1 e δ_2 são dadas por:

$$\Delta_{MT} = \tilde{A}_C \sin \tilde{N}L + \tilde{B}_C \cos \tilde{N}L, \quad (4.110)$$

$$\begin{aligned} \delta_1(\xi) = &\left\{ R_0 \left[\tilde{M} \tilde{N}^2 \tilde{R}_{T2} - \tilde{N}^2 + \tilde{N}^2 \tilde{R}_{T1} \tilde{R}_{T2} \left(\tilde{N}^2 + \tilde{M}^2 \right) \right] + \dots \right. \\ &\left. \dots - R_N \left[\tilde{M} + \tilde{M}^2 \tilde{R}_{T1} + \tilde{N}^2 \tilde{R}_{T1} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.111)$$

⁴ As constantes R_0 , R_1 e R_2 foram anteriormente definidas pelas EQUAÇÕES 4.84, 4.85 e 4.86.

$$\delta_2(\xi) = \tilde{R}_N \tilde{N} - \tilde{R}_0 \left[N^3 \left(\tilde{R}_{T1} + \tilde{R}_{T2} \right) + \tilde{M} \tilde{N} \left(1 + \tilde{M} \tilde{R}_{T1} \right) \right], \quad (4.112)$$

sendo que as constantes $\tilde{A}_C$ e $\tilde{B}_C$ relativas à equação característica Δ_{MT} , são dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{A}_C = & \tilde{N}^2(1 - \tilde{R}_{T1} \tilde{R}_{T2} \tilde{N}^2) - \tilde{M}^2(\tilde{M} \tilde{R}_{T1} + \tilde{M} \tilde{R}_{T2} + \tilde{M}^2 \tilde{R}_{T1} \tilde{R}_{T2} + 1) - \dots \\ & \dots \tilde{M} \tilde{N}^2 \left(\tilde{R}_{T1} + \tilde{R}_{T2} \right) - 2 \tilde{R}_{T1} \tilde{R}_{T2} \tilde{M}^2 \tilde{N}^2, \end{aligned} \quad (4.113)$$

$$\tilde{B}_C = \tilde{N}^3(\tilde{R}_{T1} + \tilde{R}_{T2}) + \tilde{M}^2 \tilde{N} \left(\tilde{R}_{T1} + \tilde{R}_{T2} \right) + 2 \tilde{M} \tilde{N}. \quad (4.114)$$

Portanto, a função de Green é dada por:

$$\begin{aligned} G(x, \xi)_{MT} = & \left(\frac{1}{\Delta_{MT}} \right) \left\{ \tilde{N} \left(R_0 \tilde{R}_{T2} \tilde{M}^2 + R_0 \tilde{M} + R_N \right) e^{-\tilde{M}x} + \dots \right. \\ & \left[\delta_1(\xi) \sin(\tilde{N}L) + \delta_2(\xi) \cos(\tilde{N}L) \right] e^{-\tilde{M}(L-x)} + \dots \\ & \left[\left(R_0 \tilde{R}_{T2} \tilde{M}^2 + R_0 \tilde{M} + R_N \right) \left(\tilde{R}_{T1} \tilde{M}^2 + \tilde{M} + \tilde{R}_{T1} \tilde{N}^2 \right) \right] \sin \tilde{N}x + \dots \\ & \left. - N \left(R_0 \tilde{R}_{T2} \tilde{M}^2 + R_0 \tilde{M} + R_N \right) \cos \tilde{N}x \right\} + \dots \\ & \dots + Ru(x - \xi) \left[\frac{e^{\tilde{M}(x-\xi)} - e^{-\tilde{M}(x-\xi)}}{2\tilde{M}} - \frac{\sin \tilde{N}(x - \xi)}{\tilde{N}} \right]. \end{aligned} \quad (4.115)$$

Por fim, utilizando as relações dadas pelas EQUAÇÕES 4.61, 4.62 e 4.93, a equação da receptância para uma viga apoiada com molas torcionais nas extremidades, na forma fechada, pode ser expressa por

$$\begin{aligned} \alpha(x, \xi, \omega)_{MT} = & \left(\frac{1}{\Delta_{MT}} \right) \left\{ \tilde{N} \left(R_0 \tilde{R}_{T2} \tilde{M}^2 + R_0 \tilde{M} + R_N \right) e^{-\tilde{M}x} + \dots \right. \\ & \dots + \left[\delta_1(\xi) \sin(\tilde{N}L) + \delta_2(\xi) \cos(\tilde{N}L) \right] e^{-\tilde{M}(L-x)} + \dots \\ & \dots + \left[\left(R_0 \tilde{R}_{T2} \tilde{M}^2 + R_0 \tilde{M} + R_N \right) \left(\tilde{R}_{T1} \tilde{M}^2 + \tilde{M} + \tilde{R}_{T1} \tilde{N}^2 \right) \right] \sin \tilde{N}x + \dots \\ & \left. - N \left(R_0 \tilde{R}_{T2} \tilde{M}^2 + R_0 \tilde{M} + R_N \right) \cos \tilde{N}x \right\}, \end{aligned} \quad (4.116)$$

onde $0 < x < \xi < L$.

A formulação desenvolvida acima pode ser comparada, por conveniência de uso futuro, com outros métodos de solução que também permitem o cálculo da receptância. Decorrem, então, a solução via expansão modal e a solução por elementos finitos, apresentadas na sequência.

4.4 SOLUÇÃO VIA EXPANSÃO MODAL

A solução da EQUAÇÃO 4.7 pode ser escrita, utilizando análise modal (CLOUGH; PENZIEN, 1975; FANG; LYONS, 1996), através da expansão das suas formas modais (autofunções), de forma tal que

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_{n_i}(x) q_i(t), \quad (4.117)$$

onde $q_i(t)$ é a i -ésima coordenada modal.

Substituindo a EQUAÇÃO 4.117 na EQUAÇÃO 4.7, resulta que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \left[EI \frac{d^4 Y_{n_i}(x)}{dx^4} - T \frac{d^2 Y_{n_i}(x)}{dx^2} \right] q_i(t) + \rho A Y_{n_i}(x) \frac{d^2 q_i(t)}{dt^2} \right\} = p(x, t). \quad (4.118)$$

Multiplicando ambos os lados da EQUAÇÃO 4.118 por Y_{n_j} , integrando em relação a x entre $[0, L]$, integrando em seguida por partes e considerando as condições de contorno de interesse, chega-se a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \left[EI \int_0^L \frac{d^2 Y_{n_j}(x)}{dx^2} \frac{d^2 Y_{n_i}(x)}{dx^2} - T \frac{dY_{n_j}(x)}{dx} \frac{dY_{n_i}(x)}{dx} dx \right] q_i(t) + \dots \right. \\ \left. \dots + \rho A \int_0^L Y_{n_j}(x) Y_{n_i}(x) dx \ddot{q}_i(t) \right\} = \int_0^L Y_{n_j}(x) p(x, t) dx. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Sabe-se que as autofunções desenvolvidas na seção 4.2 possuem propriedades de ortogonalidade, tal como mostrado no Apêndice A, de modo que

$$\int_0^L \rho A Y_{n_i}(x) Y_{n_j}(x) dx = \delta_{ij} M_i, \quad (4.120)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, definido por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (4.121)$$

Ja a massa modal M_i é dada por

$$M_i = \int_0^L \rho A Y_{n_i}^2(x). \quad (4.122)$$

Tem-se ainda que

$$\int_0^L EI \frac{d^2 Y_{n_j}(x)}{dx^2} \frac{d^2 Y_{n_i}(x)}{dx^2} dx + \int_0^L T \frac{d Y_{n_j}(x)}{dx} \frac{d Y_{n_i}(x)}{dx} dx = \delta_{ij} \omega_{n_i}^2 M_i = \delta_{ij} K_i, \quad (4.123)$$

onde a rigidez modal K_i é dada por

$$K_i = \int_0^L EI \left(\frac{d^2 Y_{n_i}(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \int_0^L T \left(\frac{d Y_{n_i}(x)}{dx} \right)^2 dx. \quad (4.124)$$

Substituindo as condições de ortogonalidade das EQUAÇÕES 4.120 e 4.123 na EQUAÇÃO 4.119, chega-se a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \{ \delta_{ij} M_i \ddot{q}_i(t) + \delta_{ij} K_i q_i(t) \} = \int_0^L Y_{n_j}(x) p(x, t) dx. \quad (4.125)$$

A EQUAÇÃO 4.125 pode ser, portanto, expressa da seguinte maneira:

$$M_j \ddot{q}_j(t) + K_j q_j(t) = P_j(t), \quad (4.126)$$

em que $P_j(t)$ é a força generalizada, dada por

$$P_j(t) = \int_0^L Y_{n_j}(x) p(x, t) dx. \quad (4.127)$$

A EQUAÇÃO 4.126 corresponde à equação de um sistema não amortecido com um grau de liberdade no espaço modal.

Aplicando a transformada de Fourier em ambos os lados da EQUAÇÃO 4.126, decorre que

$$-\omega^2 Q_j(\omega) M_j + K_j Q_j(\omega) = \tilde{P}_j(\omega), \quad (4.128)$$

onde

$$\tilde{P}_j(\omega) = \int_0^L Y_{n_j}(x) P(x, \omega) dx. \quad (4.129)$$

Realizando agora inserção do termo de amortecimento histerético (vide subseção 4.3.2) e assumindo, ainda, que o efeito dos termos acoplados é insignificante, ou seja, que a integral $\int_0^L \frac{d^2 Y_{n_i}(x)}{dx^2} \frac{d^2 Y_{n_j}(x)}{dx^2} dx$ é nula, enquanto a integral $\int_0^L \left(\frac{d^2 Y_{n_j}(x)}{dx^2} \right)^2 dx$ é diferente de zero, tal como considerado por Fang e Lyons (1996), tem-se, após algumas manipulações matemáticas, que

$$-\omega^2 M_j Q_j(\omega) + \left[i\eta EI \int_0^L \left(\frac{d^2 Y_{n_j}(x)}{dx^2} \right)^2 dx \right] Q_j(\omega) + K_j Q_j(\omega) = \tilde{P}_j(\omega) \quad (4.130)$$

Na literatura (LAZAN, 1968; BERT, 1973; FANG; LYONS, 1996), quando a contribuição do amortecimento é inserida no domínio do tempo (portanto, ainda na EQUAÇÃO 4.7), expressa-se a solução em regime permanente no domínio do tempo, devido a uma excitação harmônica, por

$$q_j(t) = A_j e^{i(\omega t + \phi)}, \quad (4.131)$$

onde A_j é amplitude da resposta e ϕ é o ângulo de fase correspondente. Como mostrado em Fang e Lyons (1996), a energia dissipada por ciclo U_d , de um sistema com um grau de liberdade, pode ser calculada utilizando apenas a parcela real de $q_j(t)$, ou seja,

$$U_d = A_j^2 \pi \eta EI \int_0^L \left(\frac{d^2 Y_{n_j}(x)}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (4.132)$$

Já a energia potencial é dada sucessivamente por

$$V = \frac{1}{2} K_j A_j^2, \quad (4.133)$$

$$V = \frac{1}{2} \omega_{n_j}^2 M_j A_j^2, \quad (4.134)$$

$$V = \frac{1}{2} \left[\int_0^L EI \frac{d^2 Y_{n_j}(x)}{dx^2} dx + \int_0^L T \frac{d^2 Y_{n_j}(x)}{dx^2} dx \right] A_j^2. \quad (4.135)$$

Portanto, o fator de perda modal η_{n_j} para o j-ésimo modo de vibrar pode ser calculado sucessivamente por (FANG; LYONS, 1996)

$$\eta_{n_j} = \frac{U_d}{2\pi V}, \quad (4.136)$$

$$\eta_{n_j} = \frac{\eta EI \int_0^L \left(\frac{d^2 Y_{n_j}(x)}{dx^2} \right) dx}{\omega_{n_j}^2 M_j}, \quad (4.137)$$

$$\eta_{n_j} = \frac{\eta EI \int_0^L \left(\frac{d^2 Y_{n_j}(x)}{dx^2} \right) dx}{\left[\int_0^L EI \left(\frac{d^2 Y_{n_j}(x)}{dx^2} \right) dx + \int_0^L T \left(\frac{d^2 Y_{n_j}(x)}{dx^2} \right) dx \right]}. \quad (4.138)$$

As EQUAÇÕES 4.136, 4.137 e 4.138 expressam a dependência do fator de perda modal tanto em relação à energia potencial quanto ao fator de perda material. Isso significa, em outras palavras, que alterações nos valores do fator de perda modal (η_{n_j}) podem ser causadas devido a mudanças no valor do fator de perda material (η) e/ou por variações na energia potencial (V) do sistema, que é, por sua vez, dependente da força de tração aplicada. No entanto, a dependência do fator de perda material (η) em relação à força de tração ainda é elemento de constantes ressalvas na literatura, sendo essa investigação um dos focos principais do presente trabalho.

No presente trabalho, opta-se, por consistência, por inserir o amortecimento quando da formulação no domínio da frequência. Ainda assim, os desenvolvimentos acima podem ser considerados e a EQUAÇÃO 4.130 reescrita em termos dos parâmetros modais como

$$-\omega^2 Q_j(\omega) + i\eta_{n_j} \omega_{n_j}^2 Q_j(\omega) + \omega_{n_j}^2 Q_j(\omega) = \frac{1}{M_j} \tilde{P}_j(x, \omega), \quad (4.139)$$

Considerando que uma força pontual seja aplicada em um ponto ξ arbitrário qualquer, tem-se que

$$P(x, \omega) = F_o(\omega) \delta(x - \xi). \quad (4.140)$$

Assim a EQUAÇÃO 4.129 pode ser escrita como

$$\tilde{P}_j(\omega, \xi) = \int_0^L Y_{n_j}(x) F_o(\omega) \delta(x - \xi) dx = F_o(\omega) Y_{n_j}(\xi). \quad (4.141)$$

Substituindo a EQUAÇÃO 4.141 na EQUAÇÃO 4.139, e resolvendo para $Q_j(\omega)$, decorre que

$$Q_j(\omega, \xi) = \frac{1}{M_j} \left[\frac{F_o(\omega) Y_{n_j}(\xi)}{\left(\omega_{n_j}^2 - \omega\right)^2 + i\left(\eta_{n_j} \omega_{n_j}^2\right)} \right]. \quad (4.142)$$

Retornando à EQUAÇÃO 4.117, e nela aplicando a transformada de Fourier, com o intuito de levar a solução do problema para o domínio da frequência, obtém-se

$$Y(x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_{n_j}(x) Q_j(\omega). \quad (4.143)$$

Substituindo, por sua vez, a EQUAÇÃO 4.142 na EQUAÇÃO 4.143, chega-se na seguinte relação entre amplitude de deslocamento e força, ou seja, de módulo de receptância:

$$\alpha(x, \xi, \omega) = \frac{Y(x, \omega)}{F_o} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{M_j} \left[\frac{Y_{n_j}(x) Y_{n_j}(\xi)}{\left(\omega_{n_j}^2 - \omega\right)^2 + i\left(\eta_{n_j} \omega_{n_j}^2\right)} \right]. \quad (4.144)$$

No entanto, para fins computacionais, a soma infinita da EQUAÇÃO 4.144 deve ser truncada para um número finito de termos N_T . Assim, tem-se que

$$\alpha(x, \xi, \omega) = \frac{Y(x, \omega)}{F_o} \cong \sum_{j=1}^{N_T} \frac{1}{M_j} \left[\frac{Y_{n_j}(x) Y_{n_j}(\xi)}{(\omega_{n_j}^2 - \omega)^2 + i(\eta_{n_j} \omega_{n_j}^2)} \right]. \quad (4.145)$$

4.5 SOLUÇÃO VIA ELEMENTOS FINITOS

A formulação descrita nesta seção é baseada no Método dos Resíduos Ponderados e no Método de Galerkin (REDDY, 2019; MENDONÇA; FANCELLO, 2019). Toda a formulação desenvolvida é realizada para um elemento de Euler — Bernoulli, com dois graus de liberdade por nó (um de translação e outro de rotação), conforme ilustrado na figura abaixo.

FIGURA 17 – REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE EULER - BERNOULLI COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE POR NÓ



FONTE: O autor

Sendo assim, a EQUAÇÃO 4.7 pode ser discretizada através do Método dos Resíduos Ponderados pela aplicação de uma integral de comprimento L e pela multiplicação de uma função peso $\tilde{W}$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \int_0^L EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} \tilde{W}(x, t) dx - \int_0^L T \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \tilde{W}(x, t) dx \dots \\ & \dots + \int_0^L \rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \tilde{W}(x, t) dx = \int_0^L p(x, t) \tilde{W}(x, t) dx. \end{aligned} \quad (4.146)$$

Realizando a integração por partes duas vezes da EQUAÇÃO 4.146 e aplicando as condições de contorno, decorre que,

$$\begin{aligned} & \int_0^L EI \frac{\partial^2 \tilde{W}(x, t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} dx + \int_0^L T \frac{\partial \tilde{W}(x, t)}{\partial x} \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} dx + \dots \\ & \dots + \int_0^L \rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \tilde{W}(x) dx = \int_0^L p(x, t) \tilde{W}(x) dx. \end{aligned} \quad (4.147)$$

Os campos de deslocamento, velocidade, aceleração e deslocamento virtual são aproximados utilizando o Método de Galerkin, da seguinte forma:

$$y(x, t) \cong \mathbf{N}(x) \mathbf{U}(t), \quad (4.148)$$

$$\dot{y}(x, t) \cong \mathbf{N}(x) \dot{\mathbf{U}}(t), \quad (4.149)$$

$$\ddot{y}(x, t) \cong \mathbf{N}(x) \ddot{\mathbf{U}}(t), \quad (4.150)$$

$$\tilde{W}(x, t) \cong \mathbf{N}(x) \tilde{\mathbf{U}}(t), \quad (4.151)$$

onde $\mathbf{N}$ é a matriz de funções de forma, e $\mathbf{U}(t)$, $\dot{\mathbf{U}}(t)$, $\ddot{\mathbf{U}}(t)$ são os vetores de deslocamentos, velocidade e acelerações nodais.

Considerando as funções de interpolações dadas por Mendonça e Fancello (2019),

$$\phi_1(\bar{x}) = 1 - 3\left(\frac{\bar{x}}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{\bar{x}}{L}\right), \quad (4.152)$$

$$\phi_2(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{L} \left(L - 2\bar{x} + \frac{\bar{x}^2}{L} \right), \quad (4.153)$$

$$\phi_3(\bar{x}) = 3\left(\frac{\bar{x}}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{\bar{x}}{L}\right)^3, \quad (4.154)$$

$$\phi_4(\bar{x}) = -\frac{\bar{x}^2}{L} + \frac{\bar{x}^3}{L^2}, \quad (4.155)$$

tem-se que as aproximações para um elemento são representadas por

$$y(x, t) = \mathbf{N}(x) \mathbf{U}(t)^e \quad w(x, t) = \left\{ \begin{matrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) & \phi_3(t) & \phi_4(t) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} y_1(t) \\ \theta_1(t) \\ y_2(t) \\ \theta_2(t) \end{matrix} \right\}, \quad (4.156)$$

$$\dot{y}(x, t) = \mathbf{N}(x) \dot{\mathbf{U}}(t)^e \quad \dot{y}(x, t) = \left\{ \begin{matrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) & \phi_3(t) & \phi_4(t) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{matrix} \right\}, \quad (4.157)$$

$$\ddot{y}(x, t) = \mathbf{N}(x) \mathbf{U}(t)^e \quad y(x, t) = \left\{ \begin{matrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) & \phi_3(t) & \phi_4(t) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{\theta}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \\ \ddot{\theta}_2(t) \end{matrix} \right\}. \quad (4.158)$$

Portanto, a EQUAÇÃO 4.147 pode ser reescrita como,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^{eT} \left\{ \left[\int_0^{L_e} E I \mathbf{N}''^T \mathbf{N}'' dx + \int_0^{L_e} T \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' dx \right] \mathbf{U}^e + \dots \right. \\ \left. \dots + \left[\int_0^{L_e} \rho A \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' dx \right] \ddot{\mathbf{U}}^e \right\} = \tilde{\mathbf{U}}^{eT} \int_0^{L_e} p(x, t) \mathbf{N}^T dx, \end{aligned} \quad (4.159)$$

onde L_e é o comprimento do elemento.

Como $\tilde{\mathbf{U}}^e$ deve ser arbitrário, obtém-se a equação discreta de movimento não amortecida para um elemento como

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{U}}^e(t) + (\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_T)^e \mathbf{U}^e(t) = \mathbf{F}^e(t), \quad (4.160)$$

onde

$$\mathbf{M}^e = \int_0^{L_e} \rho A \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx, \quad (4.161)$$

$$\mathbf{K}_E^e = \int_0^{L_e} E I \mathbf{N}''^T \mathbf{N}'' dx, \quad (4.162)$$

$$\mathbf{K}_T^e = \int_0^{L_e} T \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' dx, \quad (4.163)$$

$$\mathbf{F}^e = \int_0^{L_e} p(x, t) \mathbf{N}^T dx. \quad (4.164)$$

Nas equações acima $\mathbf{M}^e$ é a matriz de massa, $\mathbf{K}_E^e$ é a matriz de rigidez elástica, $\mathbf{K}_T^e$ é a matriz de rigidez geométrica decorrente do efeito da força axial e $\mathbf{F}^e$ é o vetor força nodal equivalente.

Tomando a transformada de Fourier em ambos os lados da EQUAÇÃO 4.160, decorre que

$$-\omega^2 \mathbf{M}^e \mathbf{U}^e(\omega) + (\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_T)^e \mathbf{U}^e(\omega) = \mathbf{F}^e(\omega). \quad (4.165)$$

Realizando a inserção do amortecimento histerético (vide subseção 4.3.2), tem-se que

$$-\omega^2 \mathbf{M}^e \mathbf{U}^e(\omega) + i \mathbf{H}^e \mathbf{U}^e(\omega) + (\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_T)^e \mathbf{U}^e(\omega) = \mathbf{F}^e(\omega), \quad (4.166)$$

onde $\mathbf{H}^e$ é a matriz de amortecimento histerético não proporcional, dada por

$$\mathbf{H}_E^e = \int_0^{L_e} \eta E I \mathbf{N}''^T \mathbf{N}'' dx. \quad (4.167)$$

Utilizando as funções de interpolação fornecidas pelas EQUAÇÕES 4.152, 4.153, 4.154 e 4.155, e realizando a integração das EQUAÇÕES 4.161, 4.162, 4.163 e 4.167, obtêm-se as seguintes matrizes de massa, rigidez, rigidez geométrica e amortecimento histerético para um elemento:

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho A L_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L_e & 54 & -13L_e \\ 22L_e & 4L_e^2 & 13L_e & -3L_e^2 \\ 54 & 13L_e & 156 & -22L_e \\ -13L_e & -3L_e^2 & -22L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix}, \quad (4.168)$$

$$\mathbf{K}_E^e = \frac{EI}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e \\ 6L_e & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 \\ -12 & -6L_e & 12 & -6L_e \\ 6L_e & 2L_e^2 & -6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix}, \quad (4.169)$$

$$\mathbf{K}_T^e = \frac{T}{30L_e} \begin{bmatrix} 36 & 3L_e & -36 & 3L_e \\ 3L_e & 4L_e^2 & -3L_e & -L_e^2 \\ -36 & -3L_e & 36 & -3L_e \\ 3L_e & -L_e^2 & -3L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix}, \quad (4.170)$$

$$\mathbf{H}_E^e = \frac{\eta EI}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e \\ 6L_e & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 \\ -12 & -6L_e & 12 & -6L_e \\ 6L_e & 2L_e^2 & -6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix}. \quad (4.171)$$

Assim, a equação de movimento do sistema, agora em forma discreta, é dada por

$$-\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{U}(\omega) + i \mathbf{H} \mathbf{U}(\omega) + \mathbf{K} \mathbf{U}(\omega) = \mathbf{F}(\omega), \quad (4.172)$$

onde $\mathbf{M}$ é a matriz de massa global, $\mathbf{H}$ é a matriz global de amortecimento histerético e $\mathbf{K} = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_T$ é a matriz de rigidez global, que se dá pela soma da matriz global de rigidez elástica ($\mathbf{K}_E$) e geométrica $\mathbf{K}_T$.

Vale salientar que a montagem das matrizes globais é realizada com base na continuidade interelementar das variáveis primárias (deslocamento e inclinação) e no equilíbrio interelementar das variáveis secundárias (força cortante e momento fletor), cujo procedimento pode ser encontrado em Reddy (2019) e Mendonça e Fancello (2019). Obtidas as matrizes globais, aplica-se então as condições de contorno de interesse ao problema, cujo procedimento também pode ser encontrado em Reddy (2019) e Mendonça e Fancello (2019).

Com base no exposto acima, a receptância associada a uma força de excitação aplicada em um nó específico s , e a resposta medida em um nó r , ou seja a receptância $\alpha_{rs}(\omega)$, pode ser calculada utilizando a Equação 4.173 a saber,

$$\alpha_{rs}(\omega) = \sum_{i=1}^{N_T} \left\{ \frac{[\Psi_j \Psi_j^T]_{rs}}{(\omega_{n_j}^2 - \omega^2) + i(\eta_j \omega_{n_j}^2)} \right\}, \quad (4.173)$$

onde Ψ_j é o j -ésimo autovalor normalizado pela matriz massa. A obtenção de uma expressão de receptância a partir de parâmetros modais (frequência naturais, fatores de perda e modos de vibrar) pode ser encontrado em Fu e He (2001) e Ewins (2009).

4.6 CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS

Uma série de simulações numéricas foram realizadas, visando comparar todas as formulações desenvolvidas nas seções anteriores. Para tanto, foram empregados dados disponíveis de ensaios prévios realizados no Laboratório de Ensaios Mecânicos

dos Institutos Lactec, para um certo cabo condutor. Em benefício do fluxo da exposição, os resultados dessas simulações foram remetidas para o Apêndice B.

Porém, alguns pontos, tanto do presente capítulo quanto do Apêndice B, merecem destaque, o que é contemplado nesta seção. Isso é feito em virtude de sua repercussão na continuidade do documento.

O primeiro ponto está relacionado com o desenvolvimento dos modelos matemáticos que permitem predizer a resposta dinâmica do sistema. Para isso, três soluções foram desenvolvidas, quais sejam: solução analítica na forma fechada, solução via expansão modal e solução via MEF.

Em relação à solução analítica na forma fechada, vale salientar que, até o momento, não há nenhum outro trabalho que apresente a solução analítica da receptância na forma fechada, de modo a possibilitar a determinação dessa função, de tal modo, para cabos aéreos sob diferentes condições de contorno. Assim, a formulação desenvolvida representa uma contribuição nessa lacuna de pesquisa existente. Apesar do extenso desenvolvimento matemático da solução analítica na forma fechada, via funções de Green, sua implementação computacional é simples e imediata.

O segundo ponto que merece atenção está relacionado com a solução analítica para as frequências naturais e os modos de vibrar. É possível perceber que as equações revisadas das formas modais, descritas em termos exponenciais e trigonométricos, oferecem uma descrição mais realista dos modos de vibrar, quando comparada aos resultados obtidos via MEF, principalmente nas regiões próximas dos contornos.

Como terceiro ponto, salienta-se que foi possível notar que todos os modelos desenvolvidos demonstraram ter uma boa correspondência em todas as condições de contorno analisadas. Além disso, notou-se que a formulação que utiliza molas torcionais nas extremidades permite que qualquer uma das condições clássicas de contorno de interesse seja contemplada, o que é uma alternativa útil quando se deseja inferir qual condição de contorno se aproxima mais da realidade física sob escrutínio.

Destaca-se ainda que as soluções obtidas, via expansão modal e MEF permitem o cálculo de função resposta em frequência em termos dos seus parâmetros modais, o que é computacionalmente eficiente e de fácil implementação. Dessa maneira, todas as soluções desenvolvidas demonstraram, do ponto de vista numérico, ser ferramentas úteis para descrever o comportamento dinâmico de cabos aéreos no domínio da frequência.

Por fim, vale ressaltar que, tal como foi apresentado no Capítulo 2, o valor da rigidez à flexão varia entre um valor máximo ($EI_{\text{máx}}$) e mínimo (EI_{min}), não sendo, portanto, conhecido a priori. Assim, é necessária a sua identificação por vias experimentais, o que também vale para o fator de perda material (η). Essa questão, em

especial, será abordada nos próximos capítulos.

5 MATERIAIS E MÉTODOS

Neste capítulo, é apresentada a descrição detalhada dos materiais e métodos empregados na presente tese, contemplando todas as etapas envolvidas. Vale ressaltar que todas as medições experimentais foram realizadas no Laboratório de Ensaios Mecânicos dos Institutos LACTEC.

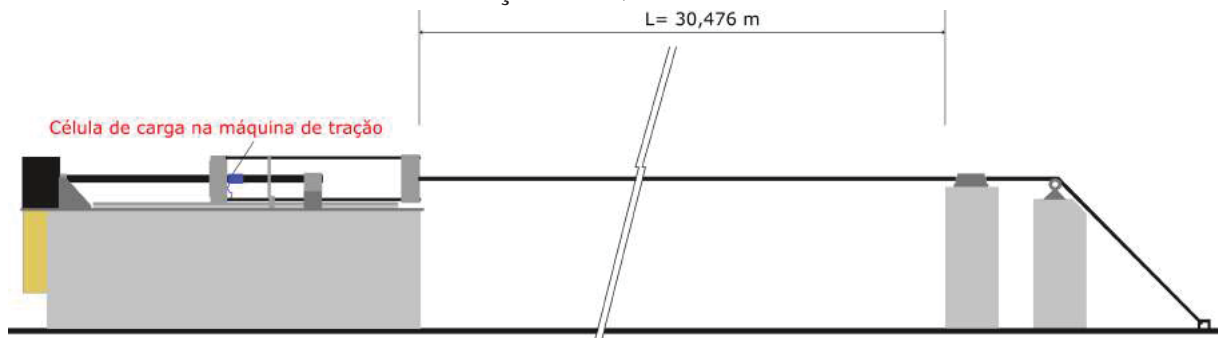
5.1 PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Dois requisitos básicos nortearam a elaboração do procedimento experimental: (i) possibilitar a ocorrência e a identificação de não linearidades em condições típicas para cabos aéreos, de modo a averiguar a necessidade de uso de um modelo não linear para o cabo; e (ii) prover dados adequados e confiáveis para a identificação dos parâmetros de interesse do sistema, quais sejam: a rigidez a flexão (EI) e o fator de perda material equivalente (η), em função da força de tração aplicada.

O primeiro requisito levou à escolha do primeiro dos métodos experimentais empregados: a varredura harmônica discreta, o que também possibilitou o atendimento da segunda exigência. Visando a verificação dos resultados obtidos, e em decorrência da constatação de linearidade do comportamento dinâmico do cabo aéreo ensaiado (como se verá adiante), foi também empregado o método de impacto.

Em ambos os métodos, a tração no cabo foi mantida constante por uma máquina de tração de acionamento eletromecânico, que faz parte de uma bancada de ensaios em cabos. Uma das extremidades do cabo foi presa, por meio de um cone de resina epóxi previamente preparado, à parte móvel da máquina, em que também havia uma célula de carga *HBM U10M* de $25kN$ em compressão, com sensibilidade nominal de 2,082 a 4 mV/V , responsável pela leitura do sinal da força de tração aplicada. A outra extremidade do cabo foi fixada, por meio de um grampo passante, a um dispositivo de fixação sobre uma fundação civil. Antes do grampo passante, o cabo foi preso a um bloco de concreto maciço por meio de um grampo de compressão. A distância entre a parte móvel da máquina e o bloco de concreto maciço, em trecho denominado de vão ativo, é pouco superior a 30 metros, como indicado no esquema apresentado na FIGURA 18. Já a FIGURA 19 mostra uma imagem mais detalhada dos itens descritos.

FIGURA 18 – REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO CABO EM BANCADA



FONTE: O autor

FIGURA 19 – MÁQUINA DE TRAÇÃO E EXTREMIDADES DE FIXAÇÃO



FONTE: O autor

A fim de medir a resposta do cabo, acelerômetros uniaxiais de uso geral PCB Piezotronics 352C33, com sensibilidade nominal de $10 \text{ mV(m/s}^2)^{-1}$, foram distribuídos ao longo do vão ativo em pontos de interesse, sempre coincidindo com nós da malha de 150 elementos do modelo de elementos finitos correspondente. As distâncias foram medidas com trenas a laser Bosch GLM 50 e GLM 30. A fixação desses acelerômetros se deu sempre por meio de cola quente (como ilustrado na FIGURA 20), e sua massa foi considerada desprezável em relação à massa do cabo. Além disso, a fim de se assegurar a estabilidade térmica da sala de ensaio, um datalogger de temperatura Simpla DT160 foi usado no monitoramento, com cinco aparelhos de condicionamento de ar tipo Split sendo responsáveis pelo controle da temperatura ambiente no entorno de 20° C .

A banda de frequências de interesse foi escolhida para abranger as frequências correspondentes às velocidades de vento consideradas capazes de resultar em

vibrações eólicas para o cabo em estudo. A faixa de frequência considerada foi de 7 a 74 Hz.

FIGURA 20 – FIXAÇÃO ACELERÔMETROS



FONTE: O autor

Todos os ensaios foram realizados com um cabo condutor de liga alumínio (CAL) 1120, cujas propriedades e características são relacionadas na TABELA 2, de acordo com as especificações do fabricante e em conformidade com a norma NBR 16886 (2018).

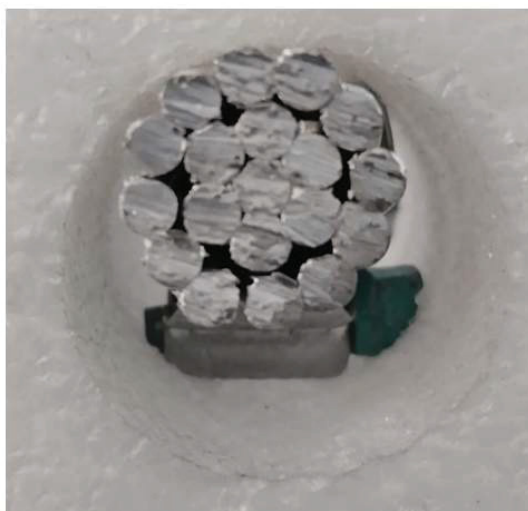
TABELA 2 – PROPRIEDADES E CARACTERÍSTICAS DO CABO ENSAIADO

Item / propriedade	Característica / unidade
Fios de alumínio	Liga 1120
Diâmetro do fio d_s (mm)	4,09
Formação	19 x 4,09 mm
Área da seção do cabo A_s (mm ²)	249,6
Massa por unidade de comprimento ρA (kg/m)	0,6873
Módulo de Elasticidade E_s (GPa)	65
Resistência mecânica calculada (N)	54544,59
Rigidez à flexão mínima $EI_{\min}$ (Nm ²)	16,96
Rigidez à flexão máxima $EI_{\max}$ (Nm ²)	1029,6

FONTE: O autor

O comportamento dinâmico do cabo foi investigado em valores de força de tração correspondentes a 16% ($T = 8727 \text{ N}$), 18% ($T = 9818 \text{ N}$), 20% ($T = 10909 \text{ N}$), 22% ($T = 12000 \text{ N}$) e 24% ($T = 13090 \text{ N}$) de sua resistência mecânica calculada (RMC). Na FIGURA 21 é mostrada uma foto da seção transversal do cabo ensaiado.

FIGURA 21 – SEÇÃO TRANSVERSAL DO CABO ENSAIADO



FONTE: O autor

5.1.1 Ensaios de Varredura Harmônica

A varredura harmônica discreta com excitação constante foi adotada por simular mais fidedignamente as condições de vibração eólica reais, ao impor ao sistema vibração forçada e ao possibilitar a determinação de seu comportamento dinâmico em regime permanente, ou quase permanente, tal como é tradicionalmente idealizado o mecanismo de descolamento de vórtices de von Kármán (EPRI, 2006; FARQUHARSON; MCHUGH, 1956; GODARD et al., 2011; KRAUS; HAGEDORN, 1991; MEYNEN et al., 2005; RAWLINS, 1983; ZASSO et al., 2008). A manutenção da tensão de excitação, em volts, enviada ao amplificador do excitador em um valor constante segue o adotado em trabalhos para a investigação de não linearidades em sistemas mecânicos (REGA et al., 1997).

Nesse método, é adicionado um excitador eletrodinâmico *shaker* Gearing & Watson V350 no vão ativo, que fica apoiado sobre um bloco de concreto, na posição correspondente ao sexto nó da malha. O excitador é responsável pela imposição de uma excitação harmônica ao cabo, na direção vertical, com frequência especificada.

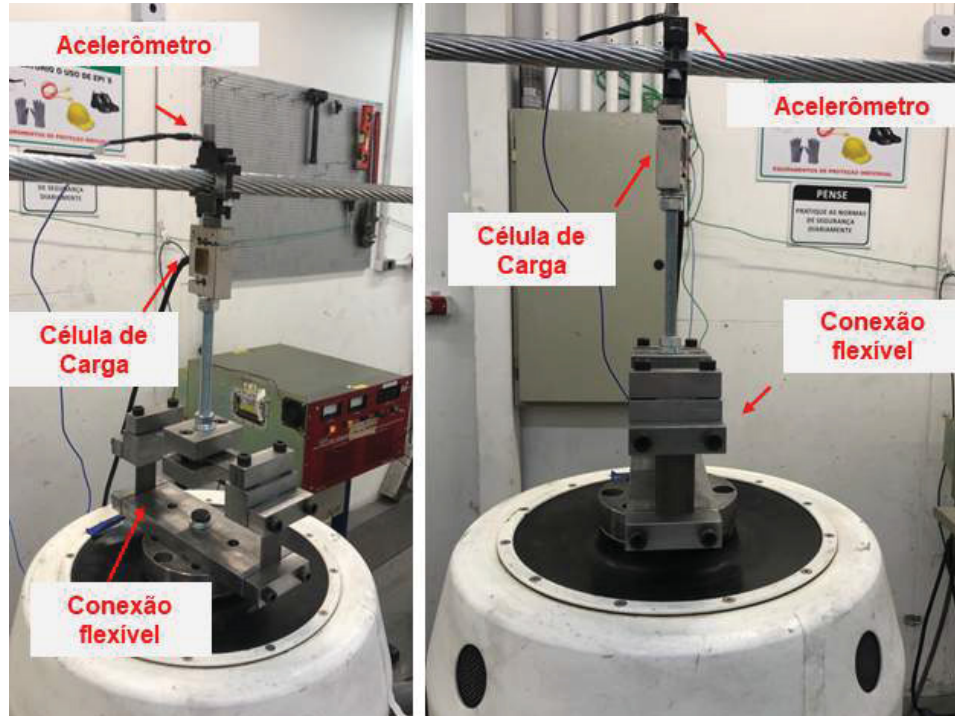
Com o objetivo de mitigar possíveis influências do excitador no comportamento dinâmico do cabo, foi projetada e fabricada uma conexão flexível destinada a acoplar o excitador ao cabo. Essa conexão flexível de atuar como um filtro mecânico, seguindo as diretrizes apresentadas por Cigré (2011), como ilustrado na FIGURA 22¹.

Logo abaixo do ponto de fixação do cabo ao excitador, foi instalada uma célula de carga tipo S Tokyo Sokki Kenkyujo TCLZ-200KA, com sensibilidade nominal de 2 mV/V, que mediu a força de excitação. Nesse mesmo ponto, foi instalado também um acelerômetro para medição da aceleração na posição de aplicação da excitação. Com

¹ O projeto em CAD da conexão flexível é apresentando no Apêndice G.

a amplitude e fase dos sinais medidos por esses dois sensores, pode ser estimada a inércia pontual na excitação.

FIGURA 22 – CONEXÃO FLEXÍVEL SHAKER - CABO



FONTE: O autor

Dois outros acelerômetros foram posicionados no cabo para medição da aceleração em outros pontos de interesse. Com o sinal desses dois outros acelerômetros, denominados resposta 1 (R1, localizado no ponto correspondente ao décimo nó) e resposta 2 (R2, localizado no octogésimo nó), em conjunto com os sinais de força e aceleração da excitação, foi possível levantar inércias e transmissibilidades. Uma representação da configuração experimental é dada na FIGURA 23

FIGURA 23 – ILUSTRAÇÃO DA CONFIGURAÇÃO EXPERIMENTAL DO ENSAIO POR VARREDURA HARMÔNICA



FONTE: O autor

Os sinais de excitação e resposta foram adquiridos por uma placa de aquisição e controle National Instruments (NI) PXI 4461, munida de duas entradas analógicas

e duas saídas analógicas, e uma placa de aquisição NI PXI 4462, munida de quatro entradas analógicas, instaladas num sistema de aquisição e controle NI PXIe-1078, que rodava o software de controle de ensaio “Varredura discreta.vi”, programado em linguagem de programação gráfica LabVIEW. Semelhantemente, o sinal de alimentação do excitador, com amplitude fixa em 1 V e frequência variável, foi gerado no referido software e enviado ao amplificador do excitador por um dos canais de saída analógica da placa NI PXI 4461. Foram lidas e geradas 4000 amostras, a uma taxa de amostragem de 2000 Hz.

O sinal da força de tração instantânea, por sua vez, passou por uma placa de conversão analógico-digital de fornecimento EngeMOVI, alimentada via conexão USB diretamente numa das entradas da placa controladora do sistema de aquisição e controle, a NI PXIe-8115. Ao longo dos ensaios de varredura harmônica, o valor da força de tração foi comparado ao valor-alvo e corrigido quatro vezes por segundo. Uma vez que a tração foi sempre controlada, entendeu-se que as variações na temperatura ambiente não influíram significativamente nos resultados dos ensaios. Informa-se que a amplitude de variação máxima observada durante os ensaios foi menor que 2° C.

Para averiguar a existência de indícios de não linearidades no sistema, foram executados dois ensaios em cada tração de interesse, um com frequências crescentes e outro com frequências decrescentes, a fim de possibilitar a comparação das funções resposta em frequência (FRF) obtidas nos dois sentidos. Foram levados a cabo, portanto, dez ensaios no total, cada qual com duração aproximada de 9 horas. Partindo da frequência inicial (mínima ou máxima da banda de interesse, a depender do sentido da varredura), aguarda-se, em cada frequência, um intervalo mínimo de 10 segundos, ao término do qual o software pode fazer a gravação da amplitude, fase e distorção harmônica total de cada sinal, bem como das inertâncias e transmissibilidades computadas, a depender do atingimento de uma condição de estabilidade. Essa condição foi arbitrada como a manutenção da amplitude do sinal do acelerômetro de resposta 1 dentro de uma tolerância de $\pm 4\%$ por um período de 10 segundos.

Em casos raros, em algumas frequências específicas, tal condição de estabilidade é dificilmente satisfeita, razão por que, ocasionalmente, é necessário forçar a gravação dos dados, a fim de prosseguir com a varredura. Esses casos, no entanto, correspondem a um ou dois num total de pontos que chegou à ordem de 15 centenas em cada ensaio. Além disso, observou-se que nesses casos a variação era da ordem de $\pm 6\%$, não muito maior que a condição de estabilidade.

Depois de feita a gravação dos dados, o software automaticamente passou à próxima frequência reiniciando o processo de medição numa nova frequência. A resolução da varredura é de 0,05 Hz e a faixa de frequência adotada foi de 7 a 74 Hz, como já mencionada anteriormente.

O software apresentou, em tempo real, as FRF sendo obtidas, paralelamente à transformada de Fourier de qualquer dos sinais escolhidos (força na excitação ou acelerações, na excitação ou nos pontos de resposta). A partir da análise do espectro dos sinais obtidos, foi possível ao operador solicitar ao software que, depois de atingida a condição de estabilidade, fosse feita a gravação dos dados referidos anteriormente. A mesma frequência foi mantida para a obtenção da média de 30 amostragens da transformada de Fourier de todos os sinais e da coerência das FRF, com resolução de 0,5 Hz. Esses dados adicionais puderam, então, ser usados na investigação de eventuais não linearidades aparentes durante os ensaios. Depois de concluída a média das 30 amostragens (o que dura 1 minuto) e feita a gravação dos espectros correspondentes, a varredura continuava automaticamente.

5.1.2 Ensaios de Impacto

Os ensaios com excitação por martelo de impacto foram executados nas mesmas condições ambientais e de tração dos de varredura harmônica. A configuração experimental difere do ensaio anterior pela substituição do excitador — com os respectivos dispositivos de acoplamento, célula de carga e acelerômetro — pelo martelo de impacto, no mesmo ponto, correspondente ao sexto nó da malha. Nesse caso, o acelerômetro, outrora posicionado na posição de excitação do cabo, foi deslocado para a posição do quinto nó da malha. Uma representação da configuração experimental é dada na FIGURA 24.

FIGURA 24 – ILUSTRAÇÃO DA CONFIGURAÇÃO EXPERIMENTAL DO ENSAIO POR MARTELO DE IMPACTO



FONTE: O autor

O martelo de impacto, com sensor de força de sensibilidade nominal de 0,15 mV/N foi usado com ponteira de polímero plástico, para prover excitação de amplitude adequada na faixa de frequência de interesse. Os sinais de excitação e resposta foram adquiridos e processados num analisador comercial, o sistema de aquisição e processamento de dados Dewesoft DEWE-43-A-EDU, configurado de forma que o período de aquisição fosse o máximo permitido, a saber, 50 s (o que resulta em uma resolução de frequência de 0,02 Hz), com taxa de amostragem de 2000 Hz.

Pelo fato de, ao término do período de aquisição, ainda ser observada vibração remanescente significativa, e a fim de reduzir os efeitos de vazamento, aos sinais de resposta é aplicada uma janela exponencial $w(t)$ na forma da EQUAÇÃO 5.1, qual seja,

$$w(t) = e^{-t/\tau}, \quad (5.1)$$

onde t é o tempo e τ é a constante de tempo da janela exponencial, definida de forma que, ao final do período de aquisição T_{aq} , o sinal tenha sido reduzido a 1% da amplitude inicial, de acordo com a EQUAÇÃO 5.2 (FLADUNG; ROST, 1997), em que

$$\tau = -\frac{T_{aq}}{\ln(0.01)} \approx 10,85s. \quad (5.2)$$

No entanto, vale ressaltar, que tal como abordado em Fladung e Rost (1997), a janela exponencial induz ao surgimento de um amortecimento artificial no sistema sob investigação. Assim, as grandezas associadas ao amortecimento, relativas ao sinal de impacto, podem estar, em menor ou maior medida, superestimadas.

No total, em cada força de tração, foram obtidas 5 amostras. Antes do início dos ensaios, a força de tração foi ajustada da mesma forma que no ensaio de varredura harmônica. No momento dos impactos, no entanto, o controle de tração foi desativado, a fim de evitar que eventuais ajustes da máquina durante o período de aquisição.

No ensaio de impacto, as inertâncias foram obtidas utilizando o estimador H1 e a coerência foi analisada para todos as medições. Tais grandezas foram automaticamente calculadas através do software de processamento e análise de sinais DewesoftX.

5.2 ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL

A fim de se avaliar as frequências naturais e as razões de amortecimento modal para cada condição de ensaio descrita, foi realizada a análise modal experimental, utilizando o algoritmo de ajuste de curva no domínio frequência LSRF, tal como exposto no Apêndice C, através do uso da função `modalfit`, presente na *toolbox* de análise e processamento de sinais do MATLAB.

A função `modalfit` possui a seguinte sintaxe de programação:

$$[fn, dr, ms, ofrf] = \text{modalfit}(frf, f, fs, fnum, \dots).$$

Os argumentos de entrada são

- `frf`: vetor com a função resposta em frequência experimental;
- `f`: vetor de frequência experimental;
- `fs`: frequência de amostragem;
- `fnum`: número de modos.
- `FitMethod` método de ajuste de curva.
- `PhysFreq` vetor com frequências naturais conhecidas.

Já os argumentos de saída são

- `fn`: vetor com as frequências naturais em Hz;
- `dr`: vetor com as razões de amortecimento;
- `ms`: vetor de formas modais (modos de vibrar)
- `ofrf`: vetor com a função resposta em frequência identificada.

Para fins da análise modal em questão, foram adotados 35 modos em `fnum`, além de LSFR como método de ajuste de curva, como já antecipado. Também foram adotadas, em `PhysFreq`, as frequências naturais que possuíam polos estáveis em frequência e estabilidade, decorrentes da análise do diagrama de estabilidade, construído com o uso da função `modalsd`, em uma etapa preliminar. Por fim, vale ressaltar que nesta etapa cada acelerômetro foi analisado separadamente.

5.3 MODELO NUMÉRICO

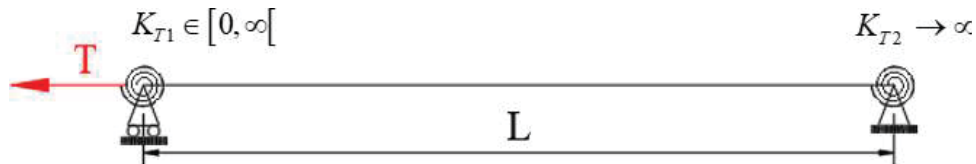
Os modelos numéricos contemplaram todas as abordagens de solução discutidas no Capítulo 4. Essas abordagens forneceram a solução analítica na forma fechada (SAFF) , a solução via expansão modal (SEM) e a solução via Método dos Elementos Finitos (MEF).

Para todas as soluções, considerou-se a presença de um cabo equipado com molas torcionais em ambas as extremidades. Na extremidade adjacente ao grampo de compressão, adotou-se uma mola torcional com $K_{T2} \rightarrow \infty$ ², representando assim a condição limite extrema de uma fixação engastada. Essa escolha de condição representa ser a mais apropriada devido à configuração física e geométrica da terminação em questão, uma vez que o cabo, neste ponto, encontra-se comprimido entre duas placas maciças que impedem a sua rotação (vide FIGURA 19). No entanto, devido

² Foi considerado $K_{T2} = 1 \times 10^{13}$ Nm/rad

a incertezas sobre qual condição de contorno melhor se adequaria à terminação na máquina de tração, especialmente considerando a sensibilidade desta região à influência do excitador eletromecânico (que se encontrava próximo), uma mola torcional K_{T1} de constante de rigidez desconhecida foi utilizada. O valor dessa constante foi determinado posteriormente através de técnicas de otimização não linear, como é explicado mais adiante. A configuração específica é apresentada na FIGURA 25.

FIGURA 25 – CONDIÇÕES DE CONTORNO USADAS PARA OS MODELOS DOS CABO



FONTE: O autor

5.4 IDENTIFICAÇÃO PARAMÉTRICA

A fim de identificar os parâmetros relevantes dos modelos de interesse com base nos resultados dos ensaios experimentais, adotou-se uma abordagem híbrida de otimização. Nessa abordagem, duas técnicas de otimização não linear foram aplicadas.

O objetivo proposto, como será detalhado abaixo, foi minimizar a diferença (erro) associada aos módulos de funções resposta em frequência experimentais e numéricas, em escala dB. Isso permitiu a determinação de valores para as seguintes variáveis:

- EI — rigidez à flexão;
- η — fator de perda material equivalente;
- K_{T1} — constante da mola torcional na terminação da máquina de tração.

O processo híbrido de otimização foi realizado de maneira sequencial, combinando a técnica de algoritmos genéticos com a técnica SQP (Sequential Quadratic Programming). Para tanto, foram usadas as implementações correspondentes disponíveis no ambiente computacional MATLAB, implementações essas contidas nas funções `ga` e `fmincon`. Tais métodos são detalhados no Apêndice C.

Dado que não eram conhecidos valores iniciais para as variáveis de interesse, a abordagem dos algoritmos genéticos foi empregada inicialmente para identificar uma aproximação do ponto de mínimo global. Posteriormente, a técnica SQP foi aplicada para aprimorar o resultado obtido pela etapa anterior. O ponto de mínimo global aproximado encontrado pelos algoritmos genéticos foi usado como ponto de partida para a técnica SQP, permitindo assim um refinamento do resultado.

É relevante ressaltar que a rotina de algoritmos genéticos utilizada, disponível no ambiente MATLAB, oferece várias opções que dizem respeito aos procedimentos envolvidos. Essas opções incluem a capacidade de definir o tamanho da população, o número de gerações, os limites para os parâmetros, os critérios de convergência e a possibilidade de realizar um ajuste combinado ou híbrido diretamente. Neste estudo, foram empregadas 300 gerações com uma população de 50 indivíduos.

Devido à significativa disparidade entre as magnitudes das variáveis de projeto, um esquema de normalização linear foi empregado ao longo do processo de otimização. Por meio desse esquema, os valores das variáveis de projeto foram ajustados para se manterem na faixa de 1 a 2 durante a busca pelos valores ótimos.

Definiu-se um vetor de erro (SILVA; MAIA, 2012; EWINS, 2009) por

$$\varepsilon_j(\omega_j) = W_j (20 \log |I_{X_{sr}}(\omega_j)| - 20 \log |I_{A_{sr}}(\omega_j)|), \quad (5.3)$$

onde $I_{X_{sr}}$ e $I_{A_{sr}}$ são, respectivamente, a inércia experimental e numérica medida no ponto r de resposta e s de excitação e W_j é um fator de peso utilizado apenas para as frequências de ressonância (quais sejam, aquelas associadas aos picos nas curvas de módulo de FRF)³.

Assim, a função objetivo pode ser definida como (SILVA; MAIA, 2012; EWINS, 2009)

$$\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \epsilon^T \epsilon, \quad (5.4)$$

onde $\mathbf{p}$ é o vetor de projeto dado por:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} EI & \eta & K_{T1} \end{bmatrix}^T. \quad (5.5)$$

Portanto, o processo de otimização se deu através do vetor de projeto $\mathbf{p}$ que minimiza o erro quadrático absoluto $\mathbf{f}(\mathbf{p})$. Vale ressaltar que várias funções objetivo foram analisadas, sendo esta selecionada como a de melhor desempenho para ajustes da FRF's a partir dos modelos numéricos representativos do sistema.

No processo de minimização, foram consideradas restrições para as grandezas do vetor de projeto $\mathbf{p}$, de modo que:

$$EI_{\min} \leq EI \leq EI_{\max} \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad 0 \leq K_{T1} \leq K_{T1\max}. \quad (5.6)$$

³ Foi considerado um fator de peso de 7,5 apenas para as frequências de ressonância.

É relevante enfatizar que as otimizações foram conduzidas na faixa de frequência de 7 Hz a 48,5 Hz, com a mesma resolução de frequência dos ensaios correspondentes. Como será visto posteriormente, os valores experimentais de amplitude de deslocamento apresentaram magnitudes muito baixas (quase próximas de zero) para frequências acima de 50 Hz. Sabe-se, da literatura, que em baixas amplitudes de oscilação, o cabo apresenta um comportamento semelhante ao de uma viga sólida. No entanto, à medida que a amplitude aumenta, observa-se o surgimento de deslizamento entre os componentes do cabo, resultando em uma diminuição na rigidez e fazendo com que o cabo se comporte como um conjunto de vigas deslizantes entre si, conforme discutido em EPRI (2006), Papailiou (1997), Langlois et al. (2013) e Foti e Martinelli (2018). Devido a essa característica, acredita-se que, ao trabalhar com uma faixa de frequência onde as amplitudes de deslocamento são mais significativas, é possível obter uma identificação mais precisa dos parâmetros de rigidez à flexão EI e do fator de perda material equivalente η .

Além do exposto, devido a possíveis imprecisões na leitura do acelerômetro na posição de aplicação da excitação, nas etapas de otimização foram levados em consideração somente os dados dos acelerômetros de resposta R1 (posição $x = 2,032$ m) e R2 (posição $x = 16,254$ m). Adicionalmente, para a identificação dos parâmetros referentes ao ensaio de varredura harmônica, somente os dados relacionados aos ensaios com frequências crescentes foram empregados, uma vez que não foram observadas diferenças significativas nos resultados entre os ensaios com frequências crescentes e decrescentes. Cabe ressaltar que todos os acelerômetros foram avaliados de maneira individual, considerando suas respectivas medições.

O problema padrão de otimização é, portanto, consolidado como:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \mathbf{f}(\mathbf{p}) : R^3 \rightarrow R \\ \text{onde} & \mathbf{p} = \begin{bmatrix} EI & \eta & K_{T1} \end{bmatrix} \\ \text{com as seguintes restrições:} & \\ \left\{ \begin{array}{l} EI_{\min} \leq EI \leq EI_{\max} \\ 0 \leq \eta \leq 1 \\ 0 \leq K_{T1} < \infty \end{array} \right. & \end{array} \right. . \quad (5.7)$$

6 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, são apresentados, sequencialmente, os resultados alcançados em todas as etapas do trabalho. São também apresentadas as discussões correspondentes aos resultados, em especial quanto à identificação paramétrica das grandezas de interesse.

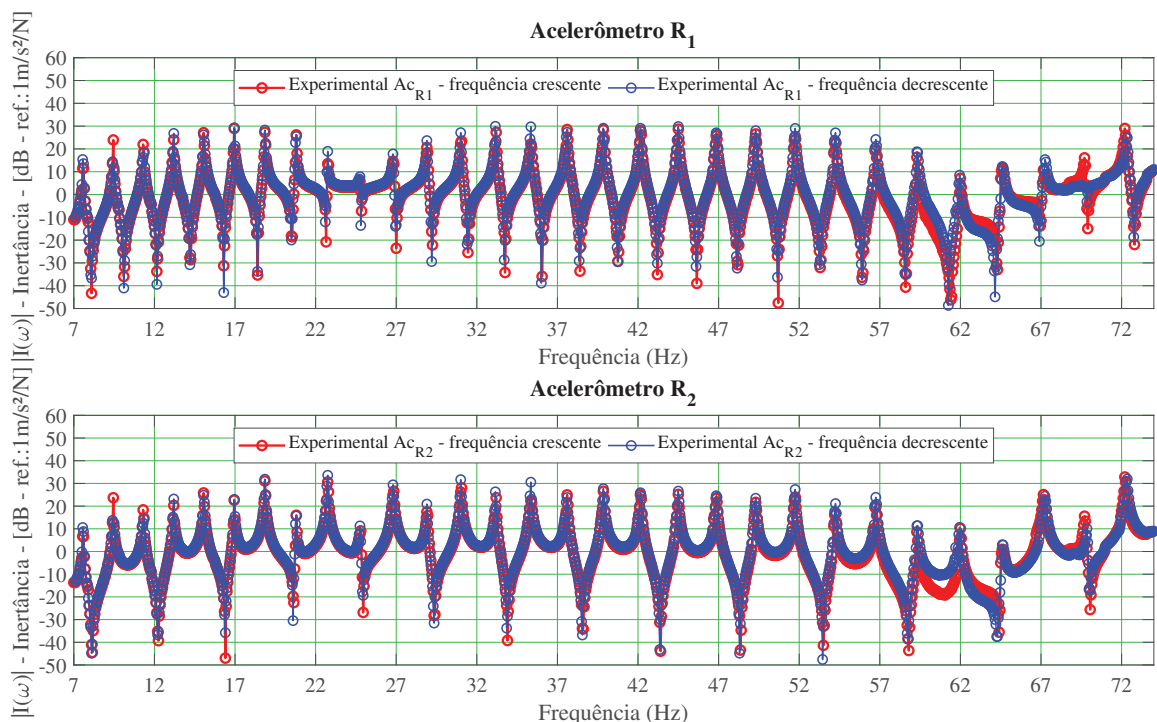
6.1 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Nesta seção, são apresentados os resultados experimentais provenientes dos ensaios de varredura harmônica (EVH) e impacto (EMI), cujos procedimentos experimentais foram apresentados no Capítulo 5.

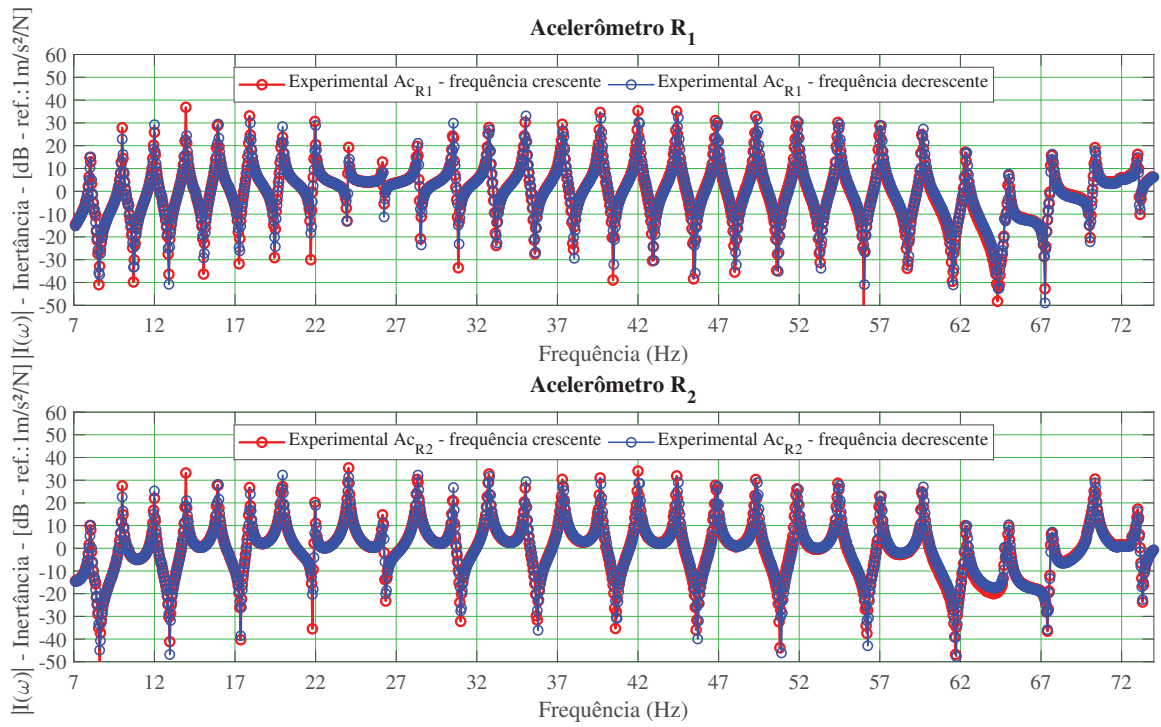
6.1.1 Ensaios de Varredura Harmônica (EVH)

Nas FIGURAS 26, 27, 28, 29 e 30 são apresentados, respectivamente, os resultados experimentais da inertância, em módulo, para as forças de tração de $T = 8727\text{ N}$, $T = 9818\text{ N}$, $T = 10909\text{ N}$, $T = 12000\text{ N}$ e $T = 13090\text{ N}$, para os acelerômetros R1 e R2, buscando comparar os resultados de varredura em frequências crescente e decrescente.

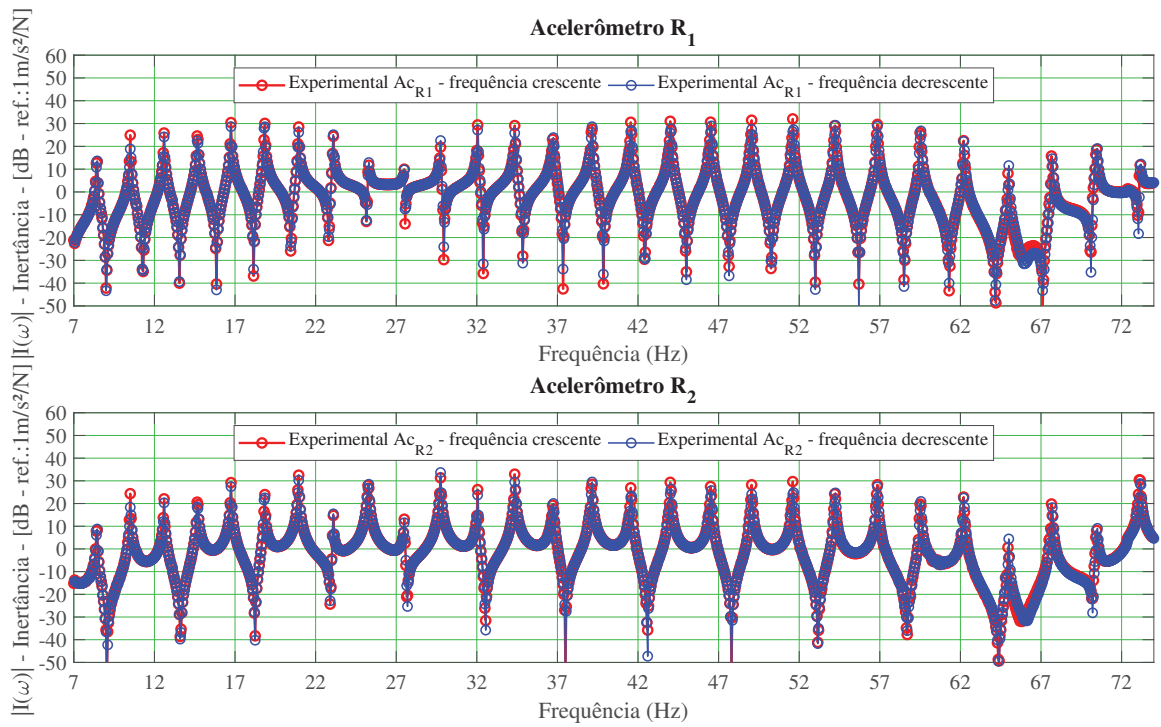
FIGURA 26 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL - EVH - 16% RMC - $T = 8727\text{ N}$



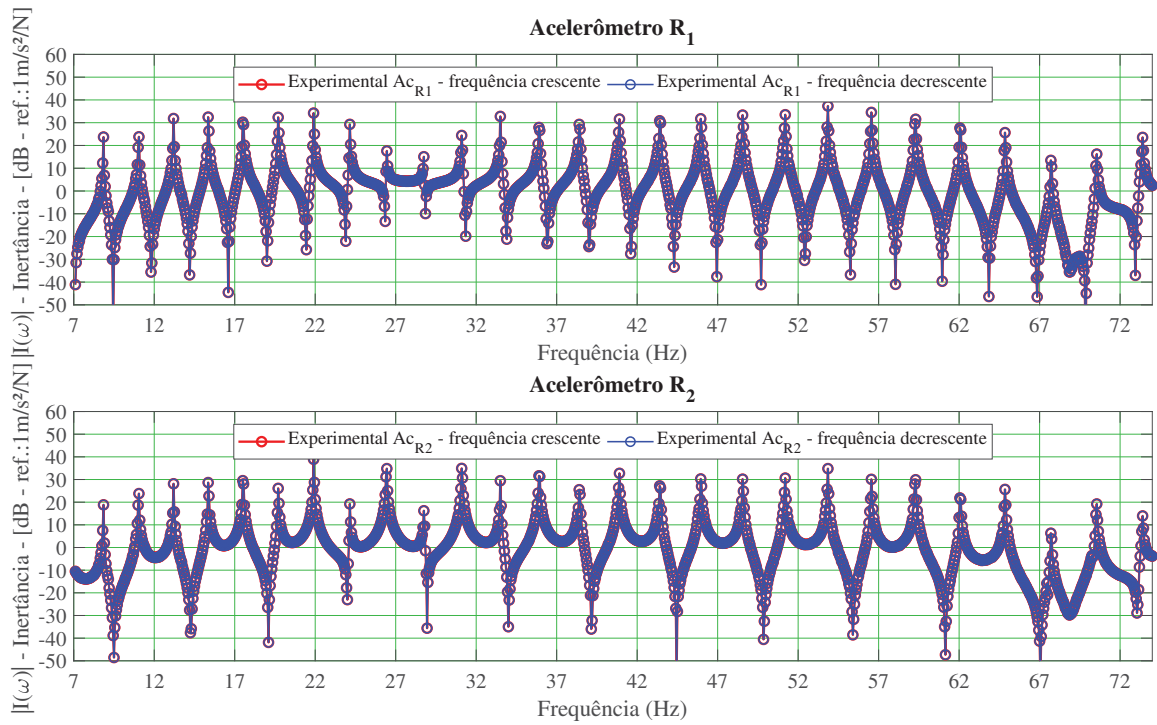
FONTE: O autor

FIGURA 27 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL - EVH - 18% RMC - $T = 9818N$ 

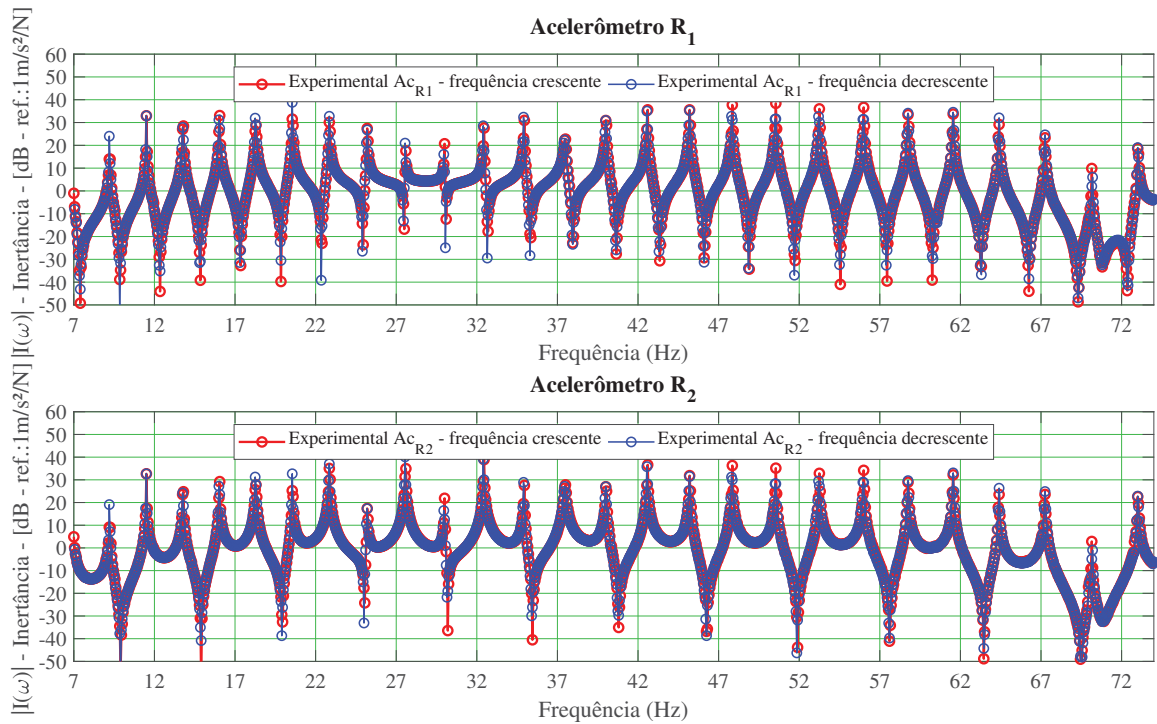
FONTE: O autor

FIGURA 28 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL - EVH - 20% RMC - $T = 10909N$ 

FONTE: O autor

FIGURA 29 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL - EVH - 22% RMC - $T = 12000N$ 

FONTE: O autor

FIGURA 30 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL - EVH - 24% RMC - $T = 13090N$ 

FONTE: O autor

A análise das FIGURAS 26, 27, 28, 29 e 30 revela que todas as funções resposta em frequência (FRFs) obtidas não manifestam quaisquer características de natureza não linear. Essa constatação é corroborada pela consistência observada

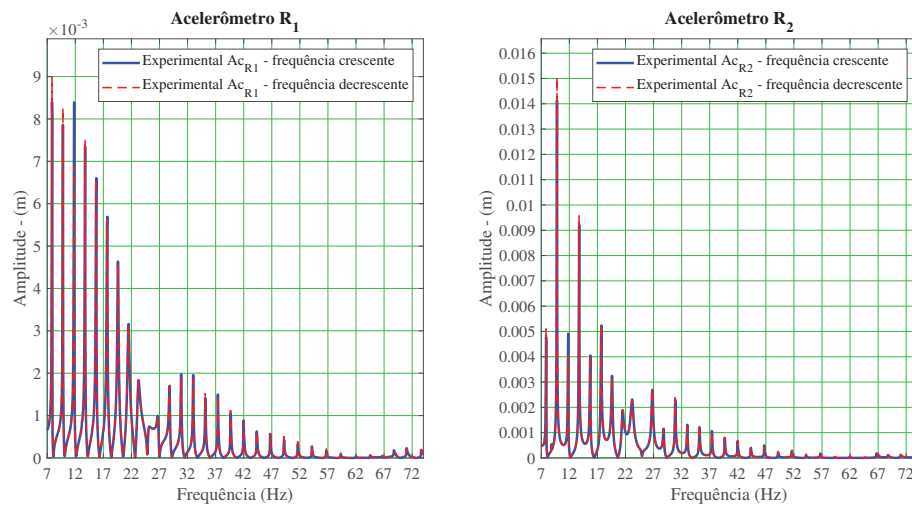
entre os resultados provenientes dos ensaios de varredura harmônica crescente e decrescente.

Nas FIGURAS 31, 32, 33, 34 e 35, são mostradas, respectivamente, as amplitudes experimentais de resposta (deslocamento) para as forças de tração de $T = 8727$ N, $T = 9818$ N, $T = 10909$ N, $T = 12000$ N e $T = 13090$ N, relativas aos acelerômetros R1 e R2. Para isso foi considerada, no domínio da frequência, a seguinte relação:

$$X_A(\omega) = -\omega^2 X(\omega) \quad (6.1)$$

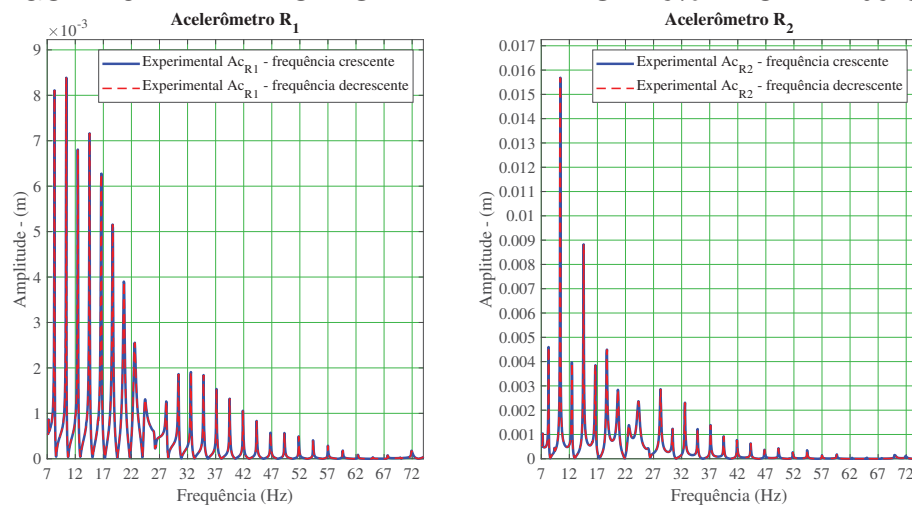
onde $X_A(\omega)$ é amplitude da aceleração e $X(\omega)$ a amplitude do deslocamento.

FIGURA 31 – AMPLITUDES EXPERIMENTAIS - 16% RMC - $T = 8727$ N

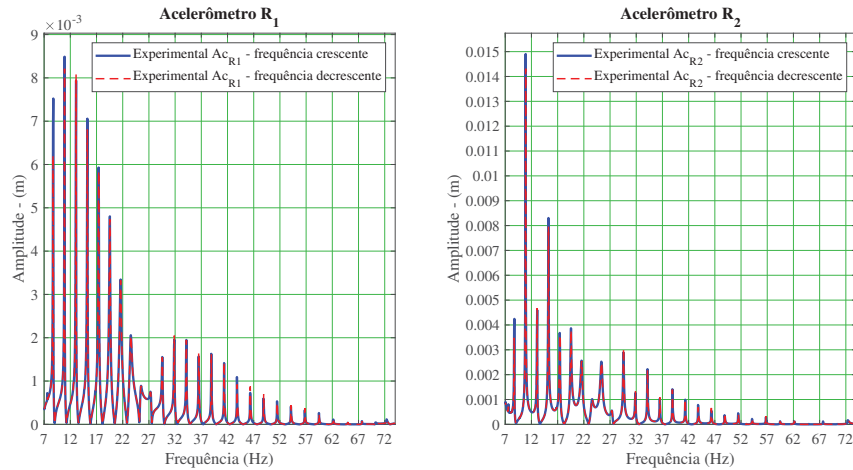


FONTE: O autor

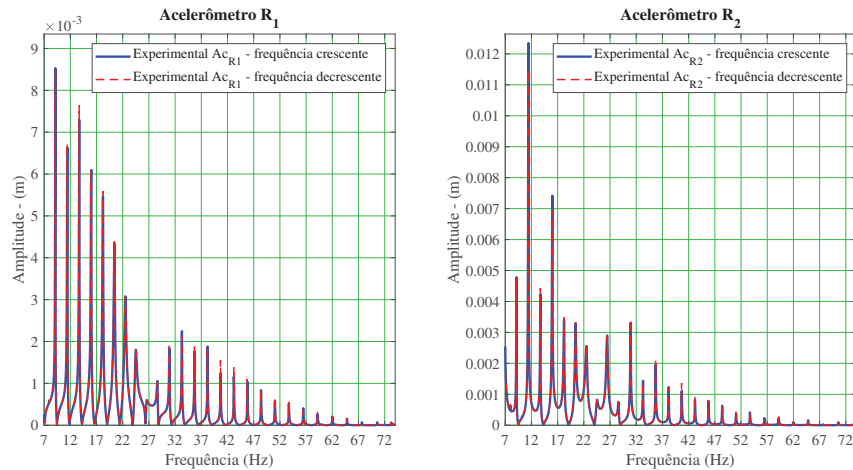
FIGURA 32 – AMPLITUDES EXPERIMENTAIS - 18% RMC - $T = 9818$ N



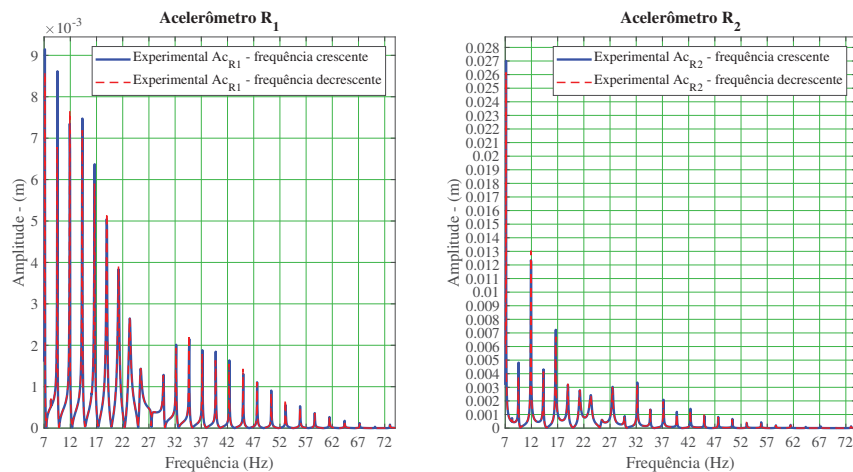
FONTE: O autor

FIGURA 33 – AMPLITUDES EXPERIMENTAIS - 20% RMC - $T = 10909N$ 

FONTE: O autor

FIGURA 34 – AMPLITUDES EXPERIMENTAIS - 22% RMC - $T = 12000N$ 

FONTE: O autor

FIGURA 35 – AMPLITUDES EXPERIMENTAIS - 24% RMC - $T = 13090N$ 

FONTE: O autor

A análise das FIGURAS 31, 32, 33, 34 e 35 evidencia que, de modo geral, as amplitudes de deslocamento apresentam valores muito baixos para frequências acima de 50 Hz, em todas as condições ensaiadas. Como já exposto, de acordo

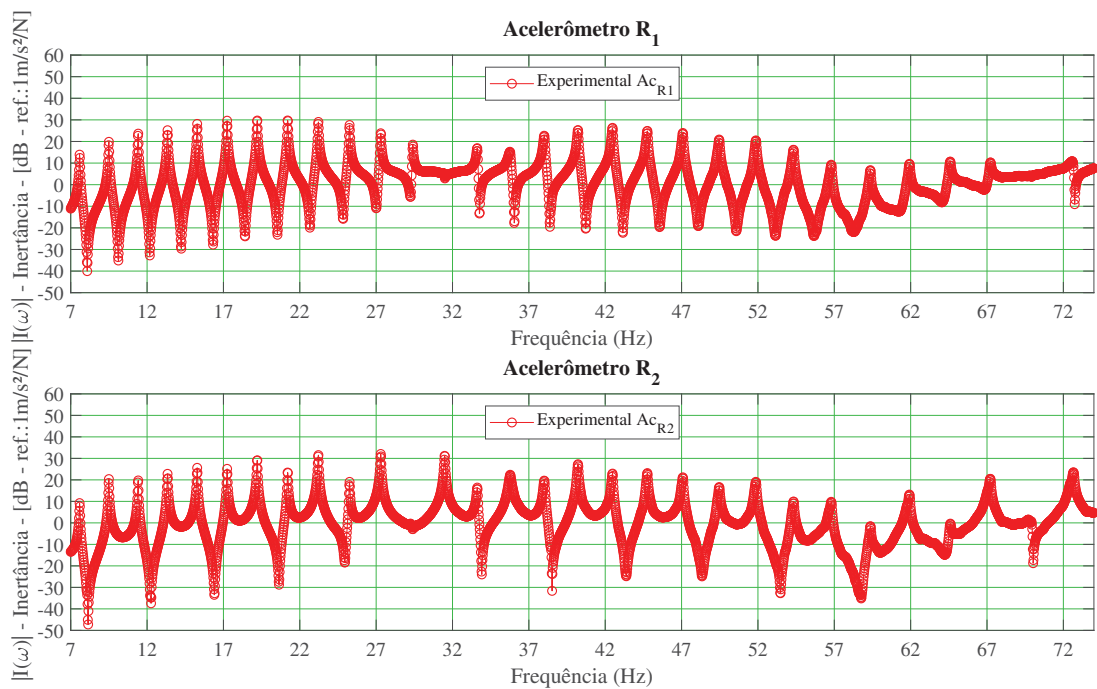
com a literatura, sabe-se que, em baixas amplitudes de oscilação, o cabo exibe um comportamento similar ao de uma viga sólida. No entanto, à medida que a amplitude aumenta, observa-se a ocorrência de deslizamento entre as partes constituintes do cabo, resultando em uma redução na rigidez global e fazendo com que o cabo se comporte como um conjunto de vigas que deslizam entre si. Esse fenômeno é discutido em fontes como EPRI (2006), Papailiou (1997), Langlois et al. (2013) e Foti e Martinelli (2018).

Devido a essa característica do comportamento do cabo, optou-se em realizar as etapas subsequentes de identificação paramétrica via TONL, na faixa de frequência de 7 a 48,5 Hz. Essa escolha visou obter uma identificação mais apurada dos parâmetros de rigidez à flexão EI e do fator de perda material equivalente η , já que nessa faixa as amplitudes de deslocamento são mais significativas.

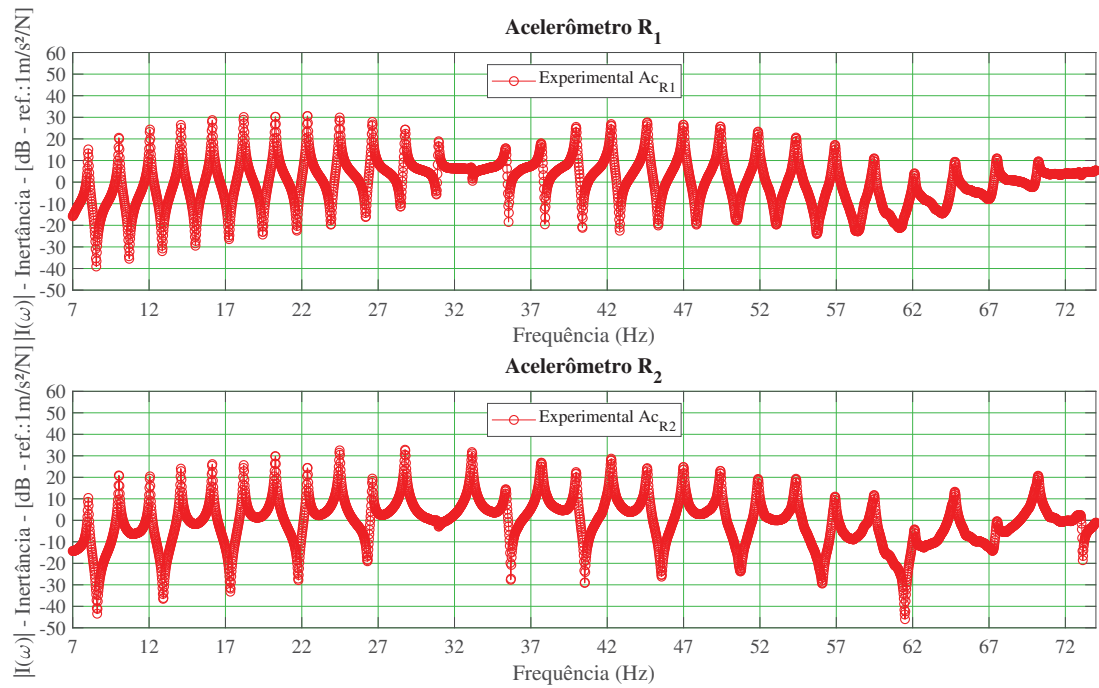
6.1.2 Ensaios de Impacto (EMI)

Nas FIGURAS 36, 37, 38, 39 e 40, são exibidos os resultados experimentais da inertância, em módulo, para as forças de tração de 8727 N, 9818 N, 10909 N, 12000 N e 13090 N, obtidos através dos ensaios de impacto, relativos aos acelerômetros R1 e R2.

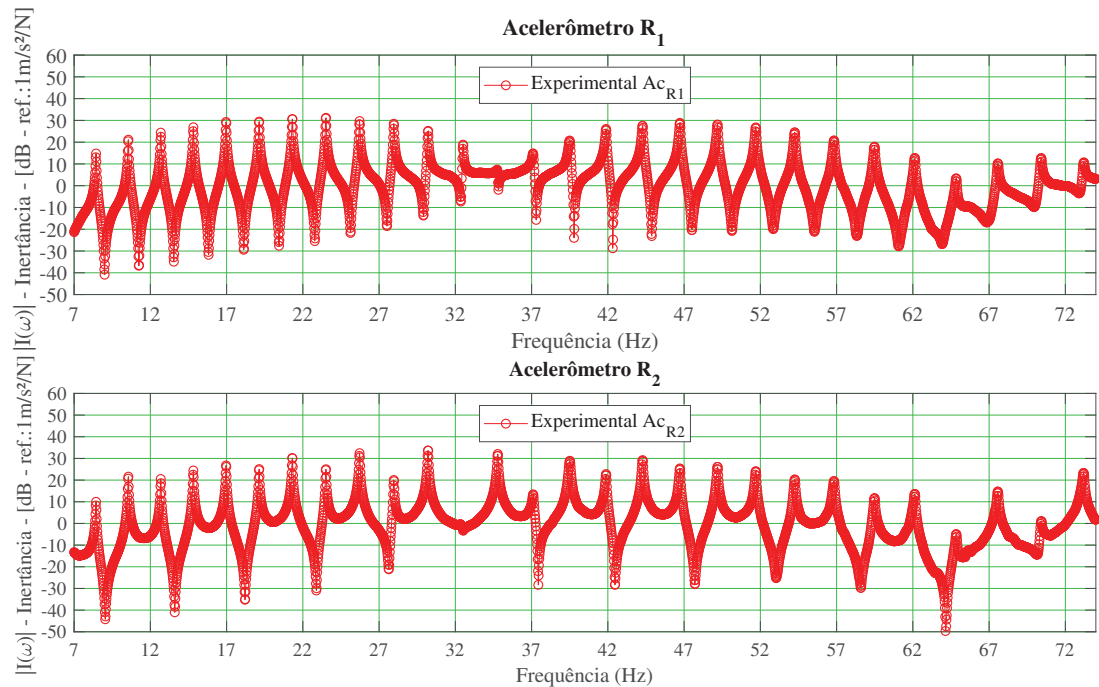
FIGURA 36 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL - EMI - 16% RMC - $T = 8727\text{N}$



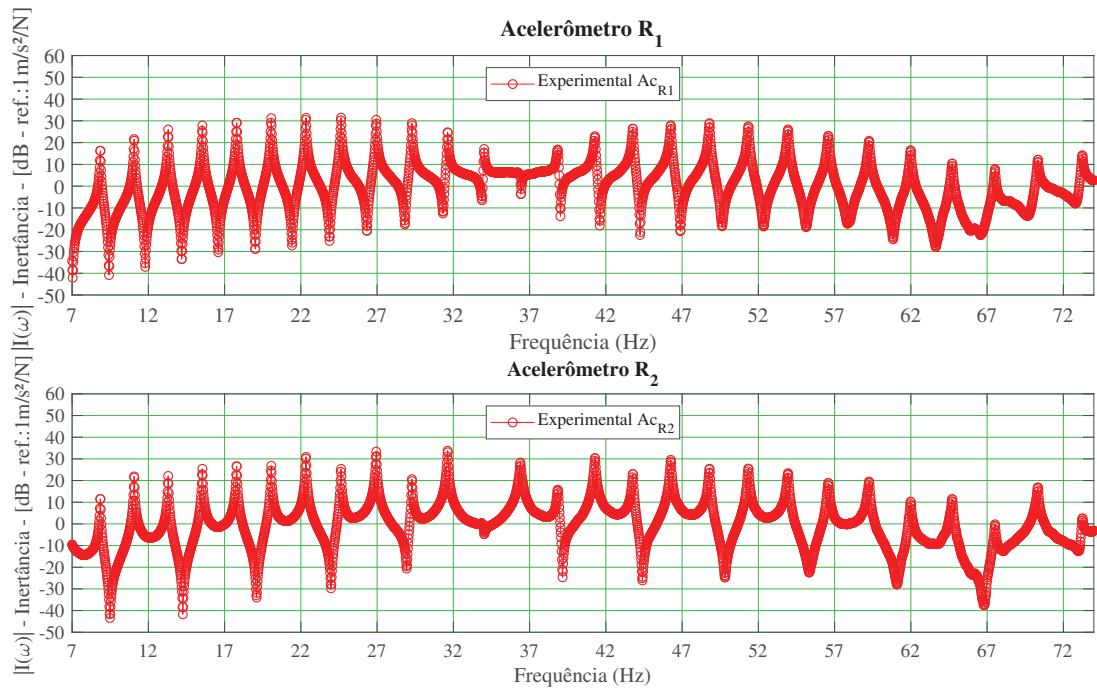
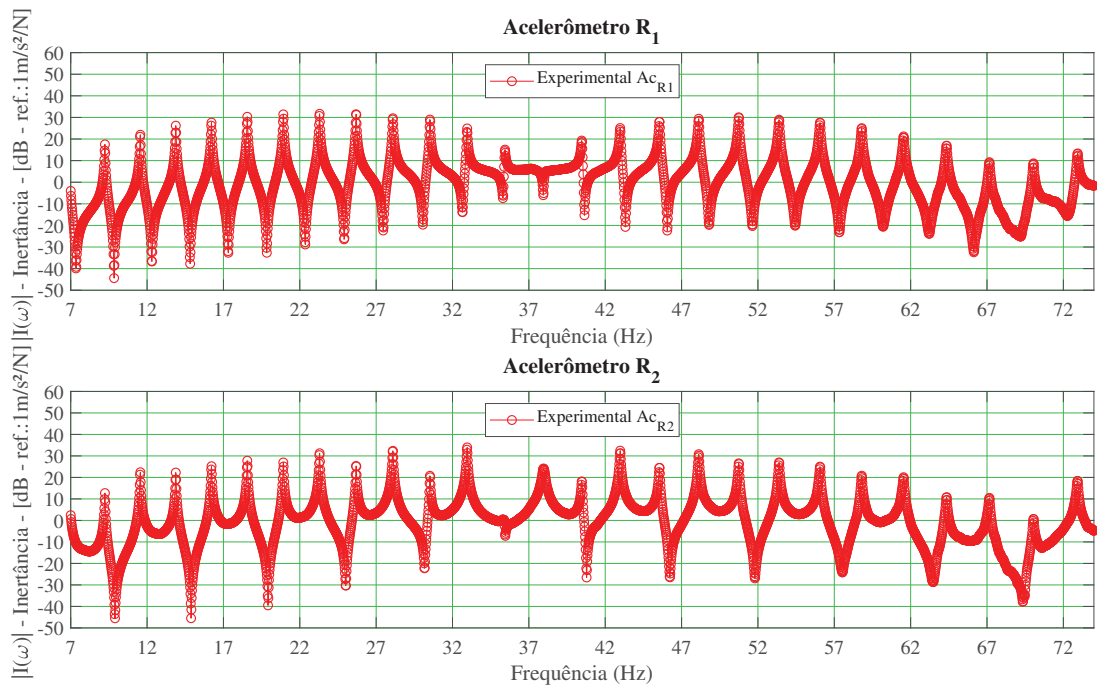
FONTE: O autor

FIGURA 37 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL - EMI - 18% RMC - $T = 9818N$ 

FONTE: O autor

FIGURA 38 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL - EMI - 20% RMC - $T = 10909N$ 

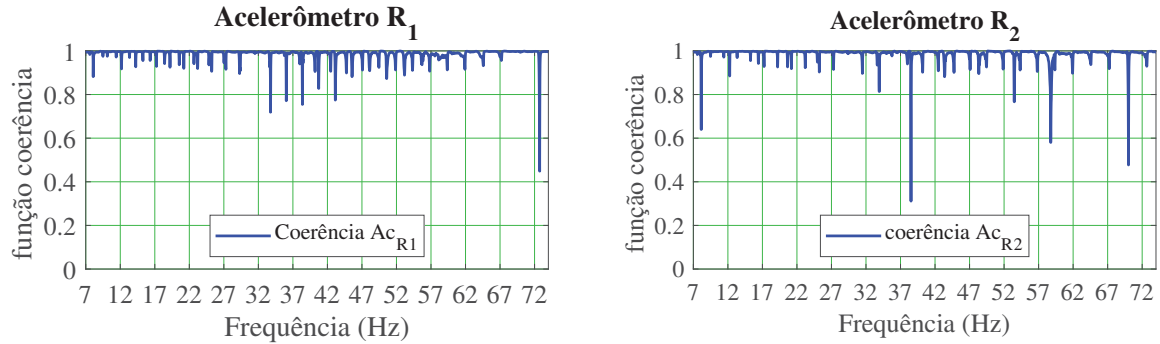
FONTE: O autor

FIGURA 39 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL - EMI - 22% RMC - $T = 12000N$ FIGURA 40 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL - EMI - 24% RMC - $T = 13090N$ 

As FIGURAS 41, 42, 43, 44 e 45 expõem a função coerência associada às medições com os acelerômetros R1 e R2, obtida para todas as forças de tração, nos ensaios de impacto. A função coerência está diretamente associada à qualidade das FRFs obtidas. Registra-se que as FRFs podem ser estimadas utilizando os estimadores H_1 , H_2 e H_w (SHIN; HAMMOND, 2008). Neste estudo, foi utilizado o estimador H_1 . A

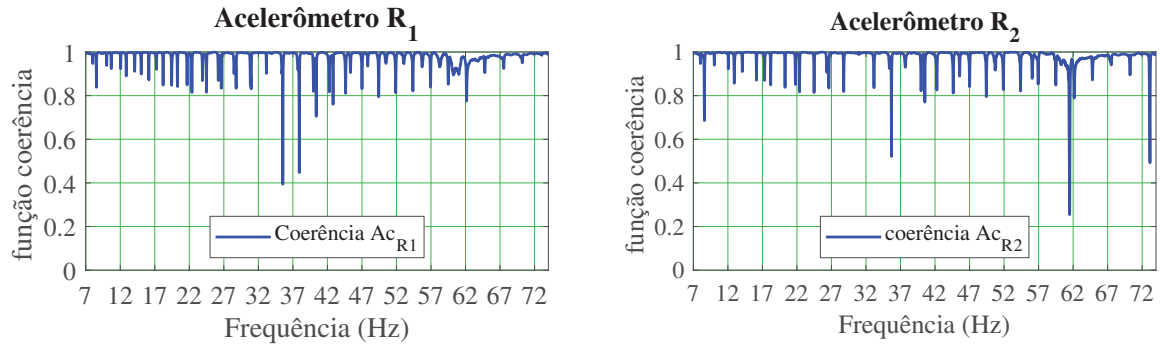
função coerência gera resultados variando de 0 a 1. Quando seus valores se aproximam de 1, é possível inferir que a resposta está linearmente relacionada com a excitação.

FIGURA 41 – FUNÇÃO COERÊNCIA - EMI - 16% RMC - $T = 8727N$



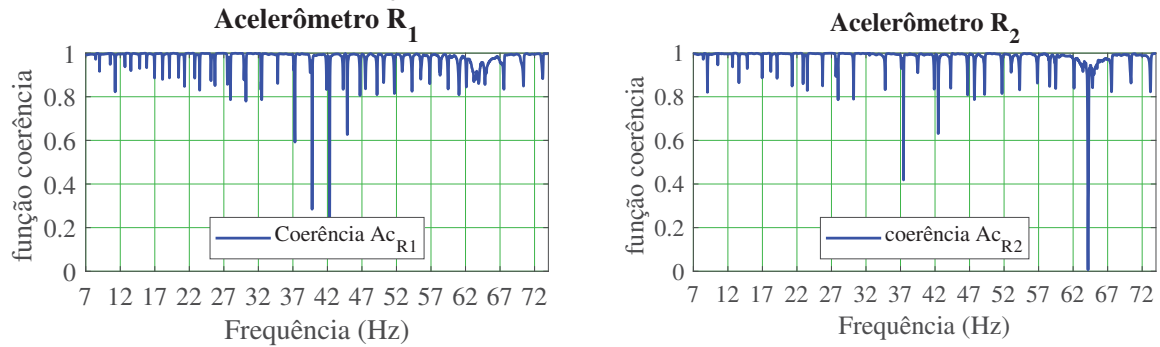
FONTE: O autor

FIGURA 42 – FUNÇÃO COERÊNCIA - EMI - 18% RMC - $T = 9818N$

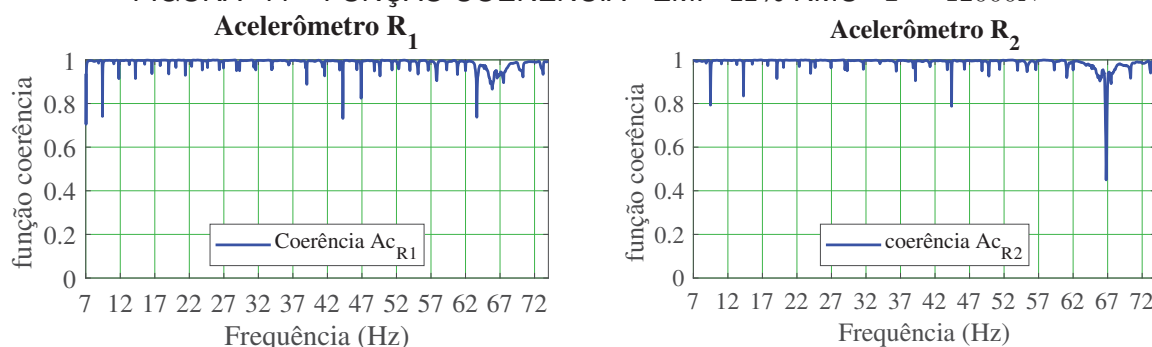


FONTE: O autor

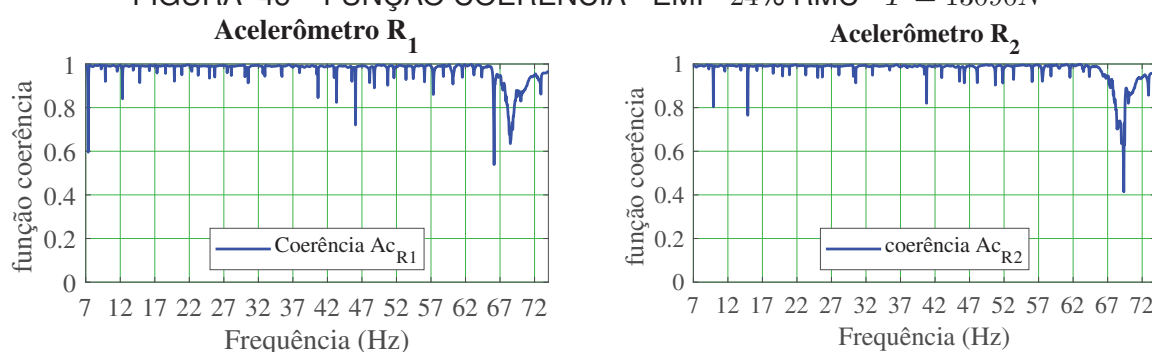
FIGURA 43 – FUNÇÃO COERÊNCIA - EMI - 20% RMC - $T = 10909N$



FONTE: O autor

FIGURA 44 – FUNÇÃO COERÊNCIA - EMI - 22% RMC - $T = 12000N$ 

FONTE: O autor

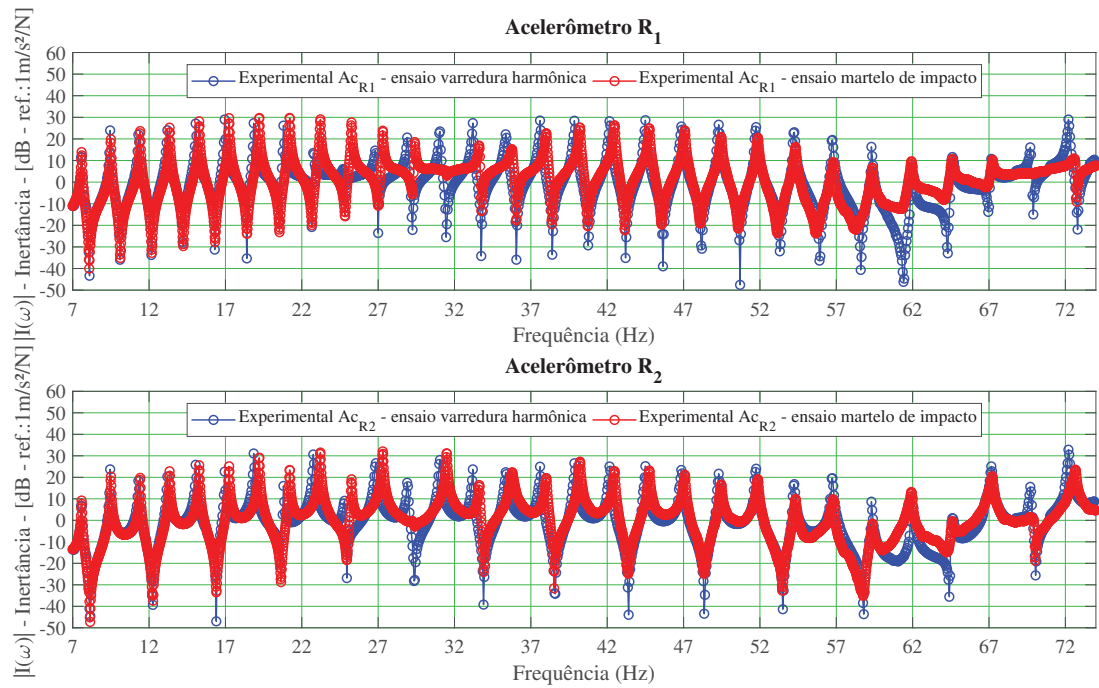
FIGURA 45 – FUNÇÃO COERÊNCIA - EMI - 24% RMC - $T = 13090N$ 

FONTE: O autor

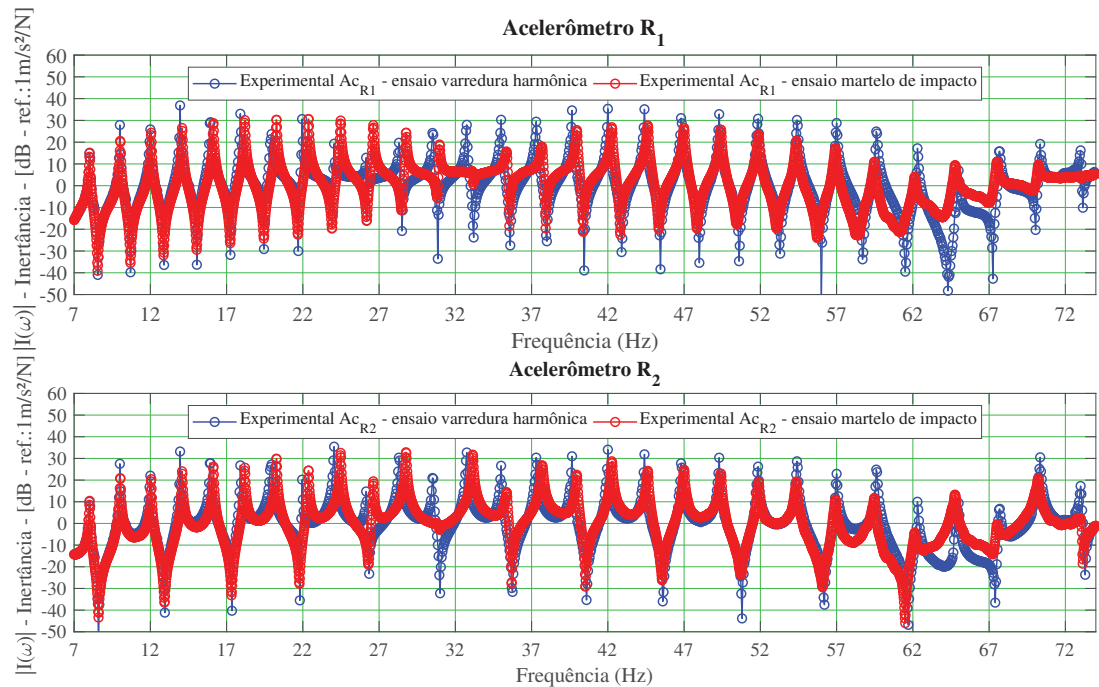
Observa-se, nas FIGURAS 41, 42, 43, 44 e 45, que existe uma coerência apreciável entre a excitação e a resposta em diversas partes da faixa de frequência considerada. A coerência exibe valores próximos ou iguais à unidade para todos os níveis de tração considerados. Em torno das regiões de ressonância e antirressonância, ocorre uma variação acentuada na coerência, o que é um comportamento esperado para sistemas lineares nesses pontos críticos. Essa variação acentuada se deve à sensibilidade dos sinais à presença de ruídos nessas regiões. Tem-se aqui, portanto, algo que também corrobora a hipótese de linearidade do sistema em análise.

6.1.3 Comparação entre os Ensaios Experimentais

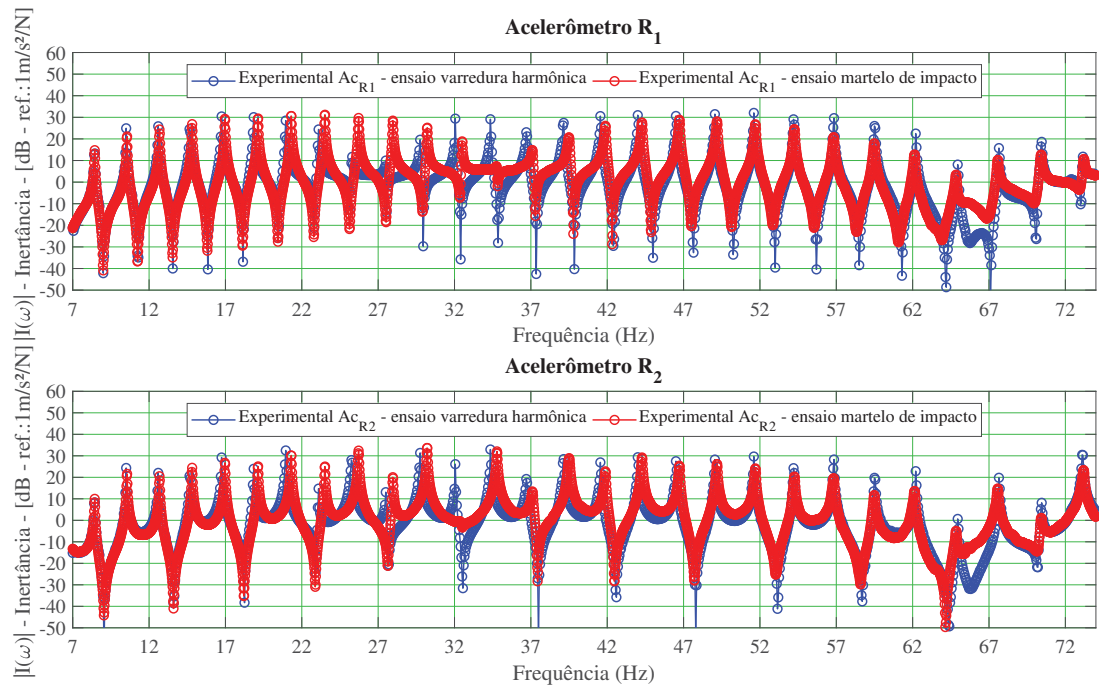
As FIGURAS 46, 47, 48, 49 e 50 exibem os gráficos comparativos entre as inertâncias provenientes dos ensaios de varredura harmônica e impacto para todas as forças de tração, relativas aos acelerômetros R1 e R2. Essas figuras permitem avaliar as diferenças e similaridades nas respostas dinâmicas obtidas por meio desses dois métodos experimentais.

FIGURA 46 – INERTÂNCIA - EVH X EMI - 16% RMC - $T = 8727N$ 

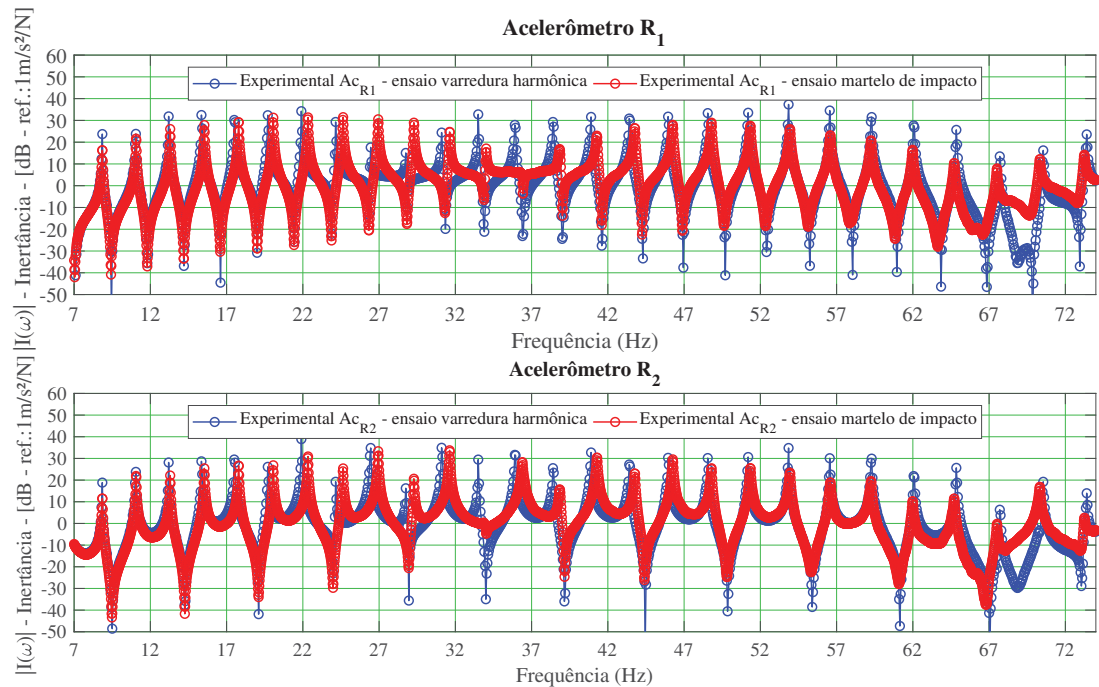
FONTE: O autor

FIGURA 47 – INERTÂNCIA - EVH X EMI - 18% RMC - $T = 9818N$ 

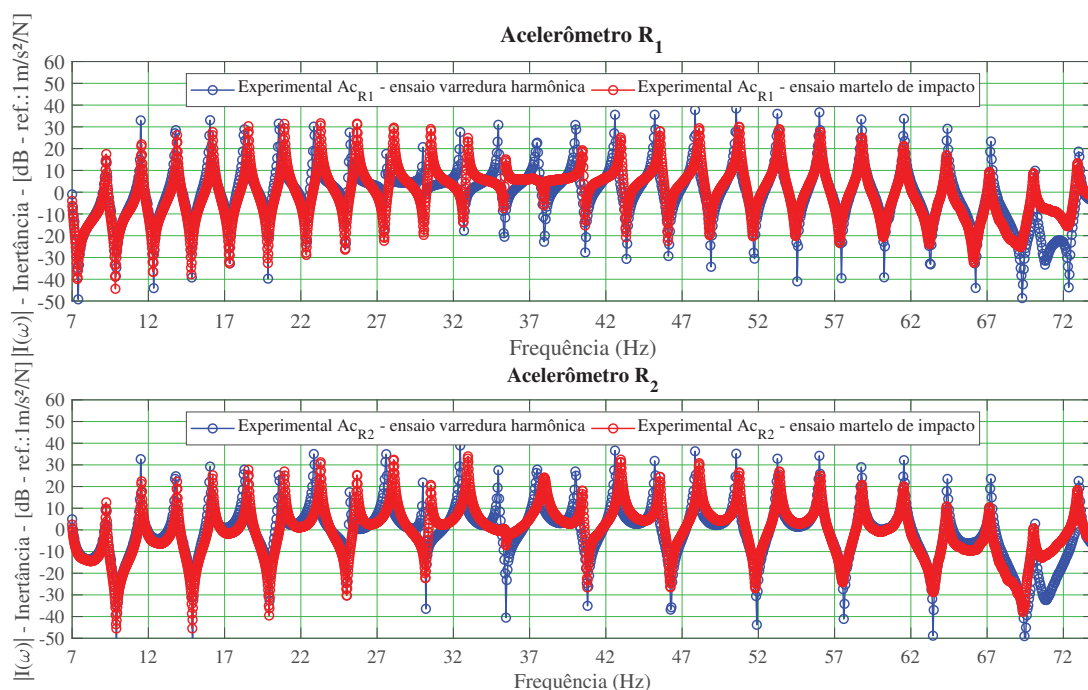
FONTE: O autor

FIGURA 48 – INERTÂNCIA - EVH X EMI - 20% RMC - $T = 10909N$ 

FONTE: O autor

FIGURA 49 – INERTÂNCIA - EVH X EMI - 22% RMC - $T = 12000N$ 

FONTE: O autor

FIGURA 50 – INERTÂNCIA - EVH X EMI - 24% RMC - $T = 13090N$ 

FONTE: O autor

A análise das FIGURAS 46, 47, 48, 49 e 50 revela que, para todos os níveis de força de tração, há algumas diferenças entre as funções resposta em frequência obtidas. Essas diferenças são mais pronunciadas, especialmente, para o acelerômetro R1, que está posicionado mais próximo do excitador eletromecânico (*shaker*). Por outro lado, também são observadas notáveis semelhanças nos aspectos característicos das curvas, como localizações de ressonâncias e antirressonâncias.

Uma das potenciais razões para as discrepâncias reside, principalmente, na interação entre o excitador eletromecânico (*shaker*) e o próprio cabo. Apesar da conexão flexível empregada minimizar essa interação, os gráficos examinados indicam, de maneira clara, a persistência de certa influência do excitador sobre a estrutura em análise.

Também é importante recordar que, nos ensaios realizados com o martelo de impacto, a aplicação de janela exponencial foi realizada. Sabe-se que a utilização dessa janela exponencial resulta na introdução de amortecimento artificial na resposta do sistema, o que, por sua vez, contribui para a discrepância nas amplitudes dos picos entre os dois tipos de excitação utilizados.

6.2 RESULTADOS VIA ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL

Visando avaliar as frequências naturais e as razões de amortecimento do sistema em análise, esta seção apresenta os resultados obtidos por meio da análise modal experimental. Como mencionado anteriormente, devido aos baixos valores de

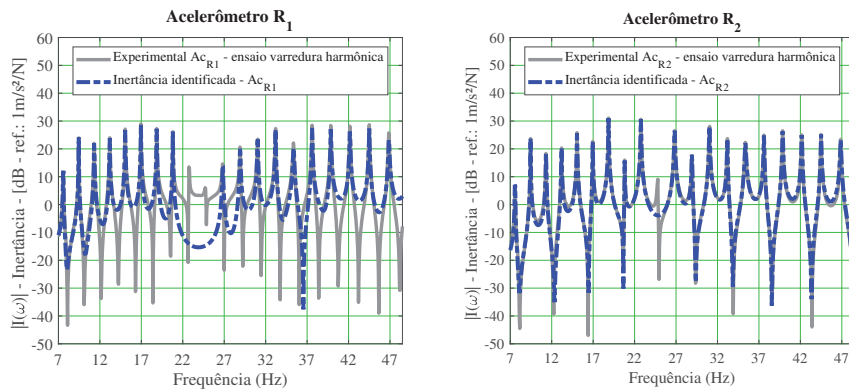
amplitude de deslocamento observados após a frequência de 50 Hz, todas as análises foram restritas à faixa de frequência de 7 a 48,5 Hz.

6.2.1 Ensaios Varredura Harmônica (EVH)

Nas FIGURAS 51, 52, 53, 54 e 55, são exibidas, em módulo, as curvas identificadas das FRFs utilizando o método LSRF para todas as forças de tração, junto com as curvas experimentais correspondentes. São contempladas as medições associadas aos acelerômetros R1 quanto para R2, conforme o procedimento descrito na Capítulo 5.

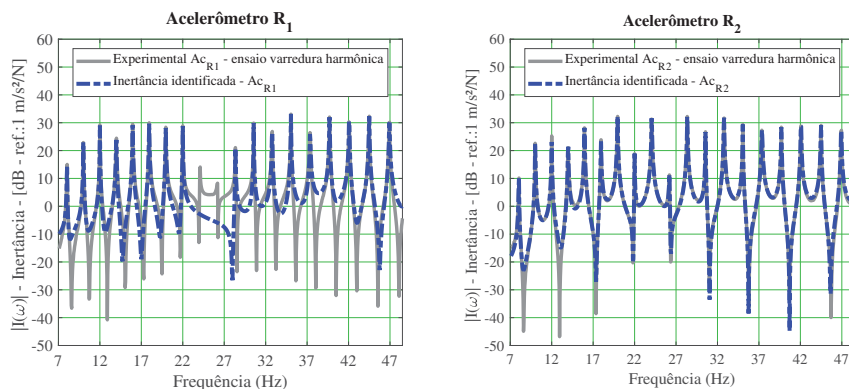
Já as TABELAS 3 e 4¹ fornecem, respectivamente, as frequências naturais e as razões de amortecimento do 4º ao 23º modo, obtidas em associação com as medições relativas aos acelerômetros R1 e R2. Adicionalmente, na FIGURA 56, é apresentada a relação entre as razões de amortecimento e a força de tração para cada modo analisado².

FIGURA 51 – INERTÂNCIA IDENTIFICADA - EVH - MÉTODO LSRF - 16% RMC - $T = 8727N$



FONTE: O autor

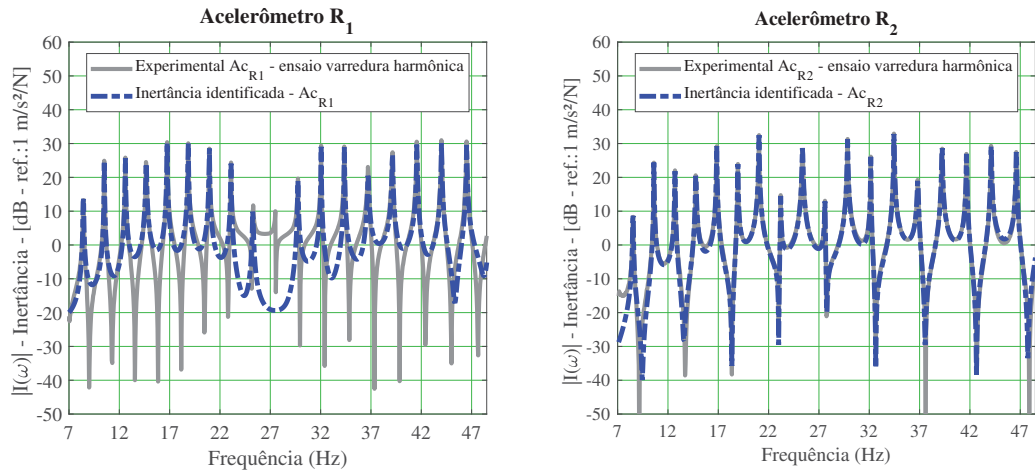
FIGURA 52 – INERTÂNCIA IDENTIFICADA - EVH - MÉTODO LSRF - 18% RMC - $T = 9818N$



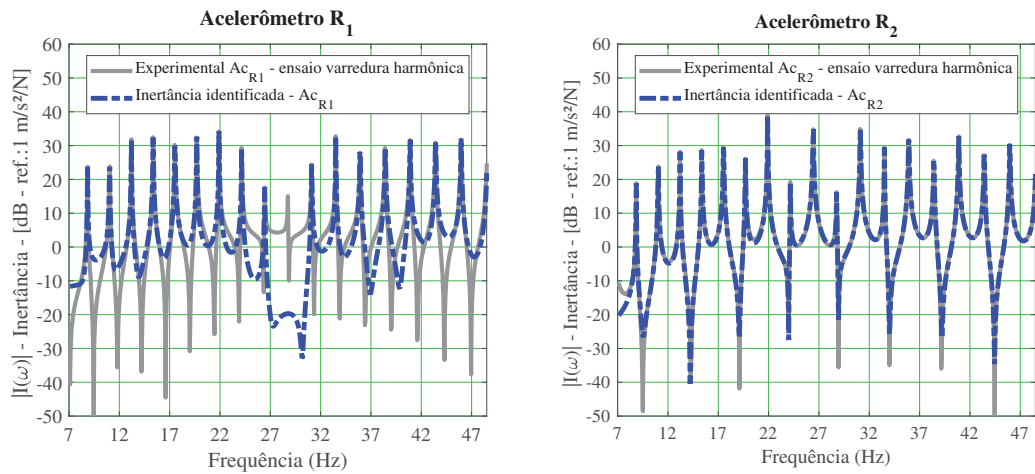
FONTE: O autor

¹ Nas tabelas 3 e 4, os valores representados por “-” indicam os termos que o algoritmo não identificou ou que estão fora da faixa de frequência estabelecida de 7 a 48,5 Hz.

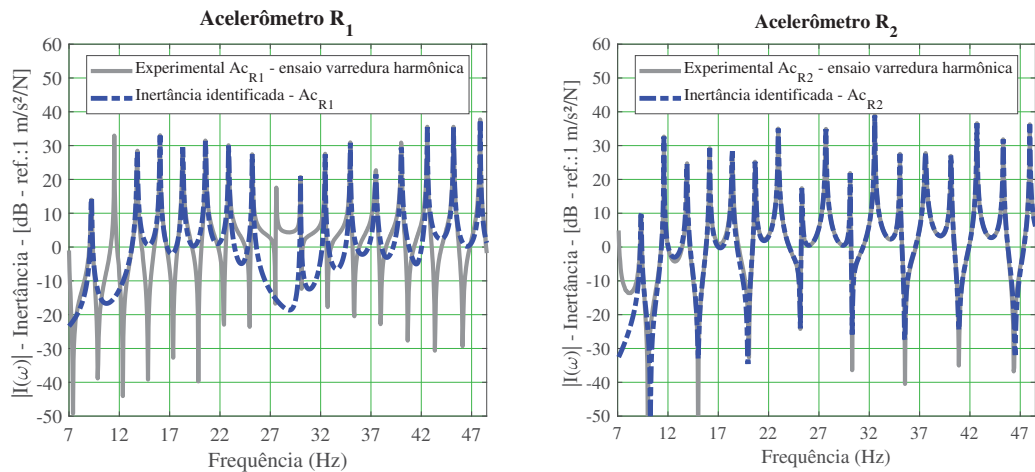
² Na FIGURA 56, omitiram-se alguns modos que o algoritmo não identificou para todas as forças de tração.

FIGURA 53 – INERTÂNCIA IDENTIFICADA - EVH - MÉTODO LSRF - 20% RMC - $T = 10909N$ 

FONTE: O autor

FIGURA 54 – INERTÂNCIA IDENTIFICADA - EVH - MÉTODO LSRF - 22% RMC - $T = 12000N$ 

FONTE: O autor

FIGURA 55 – INERTÂNCIA IDENTIFICADA - EVH - MÉTODO LSRF - 24% RMC - $T = 13090N$ 

FONTE: O autor

TABELA 3 – FREQUÊNCIAS NATURAIS (HZ) - EVH

Frequências naturais - (Hz)						
Tração	Acelerômetros	4º	5º	6º	7º	8º
T = 8727 N	Ac - R1	7,578	9,443	11,317	13,184	15,053
	Ac - R2	7,578	9,443	11,317	13,183	15,054
T = 9818 N	Ac - R1	8,033	10,015	12,008	13,979	15,957
	Ac - R2	8,033	10,015	11,995	13,979	15,958
T = 10909 N	Ac - R1	8,426	10,510	12,597	14,671	16,743
	Ac - R2	8,527	10,611	12,696	14,772	16,842
T = 12000 N	Ac - R1	8,841	11,032	13,196	15,364	17,523
	Ac - R2	8,841	11,032	13,196	15,365	17,523
T = 13090 N	Ac - R1	9,225	-	13,777	16,036	18,318
	Ac - R2	9,325	11,595	13,877	16,135	18,378
		9º	10º	11º	12º	13º
T = 8727 N	Ac - R1	16,947	18,857	20,800	-	-
	Ac - R2	16,948	18,859	20,802	22,763	-
T = 9818 N	Ac - R1	17,943	19,942	21,997	-	-
	Ac - R2	17,943	19,942	21,998	24,066	26,208
T = 10909 N	Ac - R1	18,840	20,942	23,092	25,267	-
	Ac - R2	18,934	21,041	23,193	25,368	27,600
T = 12000 N	Ac - R1	19,737	21,904	24,157	26,436	-
	Ac - R2	19,729	21,902	24,158	26,432	28,768
T = 13090 N	Ac - R1	20,570	22,861	25,213	-	30,007
	Ac - R2	20,670	22,966	25,313	27,681	30,108
		14º	15º	16º	17º	18º
T = 8727 N	Ac - R1	26,824	28,921	31,028	33,190	35,370
	Ac - R2	26,828	28,921	31,029	33,188	35,369
T = 9818 N	Ac - R1	28,359	30,558	32,779	35,051	37,363
	Ac - R2	28,359	30,558	32,780	35,050	37,365
T = 10909 N	Ac - R1	29,741	32,049	34,359	36,718	39,133
	Ac - R2	29,841	32,148	34,461	36,821	39,231
T = 12000 N	Ac - R1	31,115	33,510	35,923	38,419	40,887
	Ac - R2	31,118	33,510	35,924	38,421	40,890
T = 13090 N	Ac - R1	32,443	34,942	37,487	40,022	42,594
	Ac - R2	32,540	35,039	37,584	40,122	42,691
		19º	20º	21º	22º	23º
T = 8727 N	Ac - R1	37,610	39,861	42,168	44,499	49,866
	Ac - R2	37,612	39,864	42,170	44,498	46,498
T = 9818 N	Ac - R1	39,706	42,074	44,485	46,925	-
	Ac - R2	39,707	42,074	44,487	46,926	-
T = 10909 N	Ac - R1	41,564	44,010	46,511	-	-
	Ac - R2	41,664	44,115	46,617	-	-
T = 12000 N	Ac - R1	43,422	45,966	-	-	-
	Ac - R2	43,424	45,967	-	-	-
T = 13090 N	Ac - R1	45,210	47,856	-	-	-
	Ac - R2	45,315	47,856	-	-	-

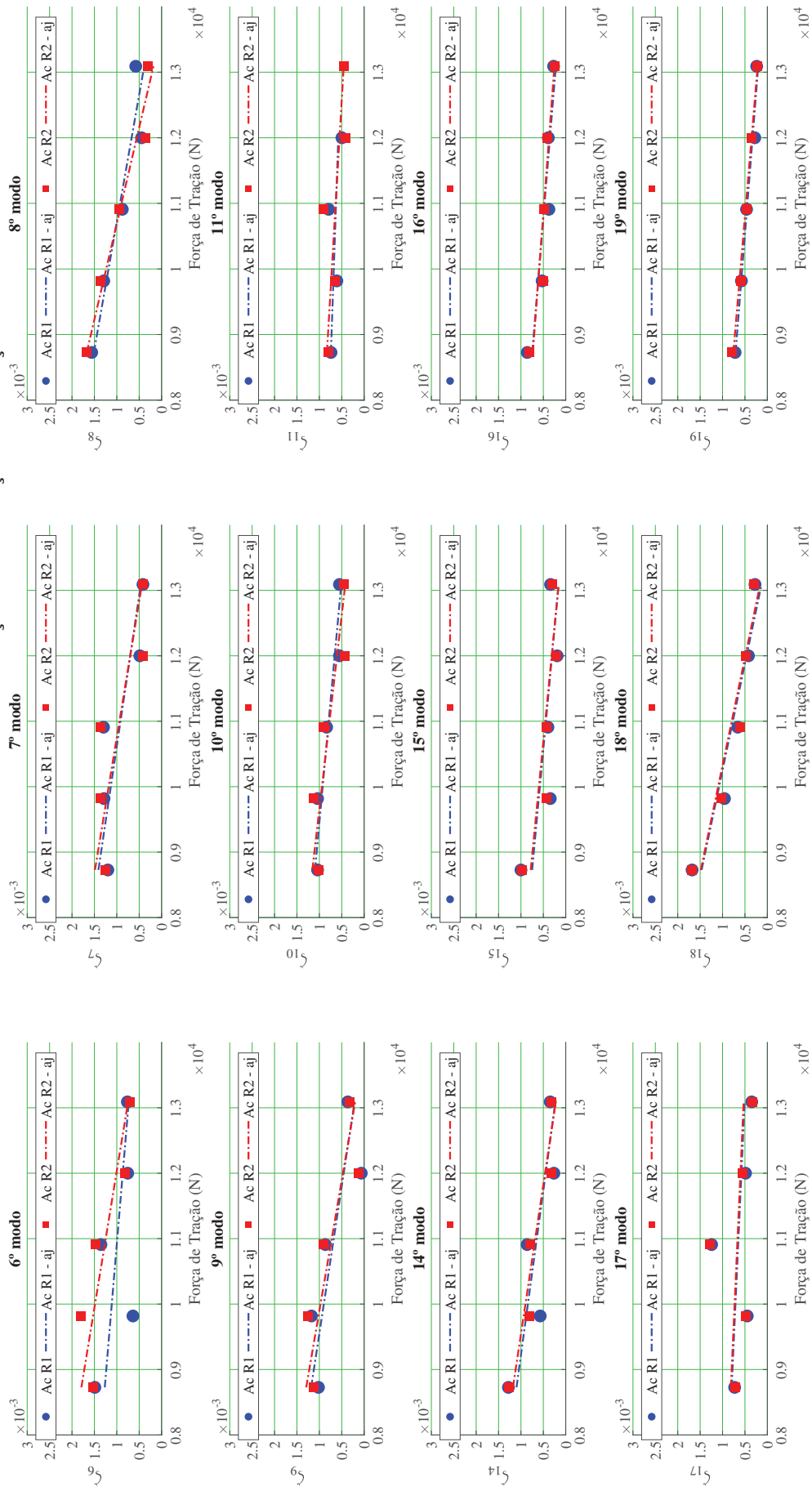
FONTE: O autor

TABELA 4 – RAZÃO DE AMORTECIMENTO - EVH

Razão de amortecimento						
Tração	Acelerômetros	4º	5º	6º	7º	8º
T = 8727 N	Ac - R1	0,00048	0,00105	0,00149	0,00120	0,00156
	Ac - R2	0,00062	0,00116	0,00152	0,00125	0,00167
T = 9818 N	Ac - R1	0,000833	0,000876	0,000640	0,00129	0,00129
	Ac - R2	0,00123	0,00100	0,00181	0,00137	0,00136
T = 10909 N	Ac - R1	0,000760	0,000546	0,00135	0,00174	0,000877
	Ac - R2	0,000620	0,000580	0,001480	0,001699	0,000937
T = 12000 N	Ac - R1	0,000647	0,000515	0,000757	0,000486	0,000447
	Ac - R2	0,000651	0,000679	0,000826	0,000413	0,000360
T = 13090 N	Ac - R1	0,000666	-	0,000763	0,000417	0,000577
	Ac - R2	0,000484	0,000494	0,000709	0,000471	0,000306
		9º	10º	11º	12º	13º
T = 8727 N	Ac - R1	0,00102	0,00104	0,00074	-	-
	Ac - R2	0,00112	0,00102	0,00080	0,00088	-
T = 9818 N	Ac - R1	0,00117	0,001040	0,000610	-	-
	Ac - R2	0,00126	0,00113	0,00065	0,00095	0,00123
T = 10909 N	Ac - R1	0,000867	0,000837	0,000793	0,001251	-
	Ac - R2	0,000911	0,000912	0,000904	0,001163	0,000904
T = 12000 N	Ac - R1	0,000065	0,000552	0,000496	0,000289	-
	Ac - R2	0,000126	0,000437	0,000419	0,000586	0,000421
T = 13090 N	Ac - R1	0,000365	0,000514	0,000453	-	0,000068
	Ac - R2	0,000319	0,000447	0,000365	0,000446	0,000322
		14º	15º	16º	17º	18º
T = 8727 N	Ac - R1	0,00128	0,0010	0,00086	0,00073	0,00168
	Ac - R2	0,00126	0,00098	0,00081	0,00072	0,00168
T = 9818 N	Ac - R1	0,000570	0,000346	0,000527	0,000499	0,000957
	Ac - R2	0,000819	0,000421	0,000505	0,000477	0,00103
T = 10909 N	Ac - R1	0,000862	0,000398	0,000376	0,00124	0,00660
	Ac - R2	0,000788	0,000428	0,000484	0,00128	0,000616
T = 12000 N	Ac - R1	0,000264	0,000192	0,000389	0,000487	0,000422
	Ac - R2	0,000325	0,000220	0,000416	0,000551	0,000488
T = 13090 N	Ac - R1	0,000347	0,000339	0,0002713	0,000349	0,000276
	Ac - R2	0,000314	0,000301	0,0002535	0,000328	0,000297
		19º	20º	21º	22º	23º
T = 8727 N	Ac - R1	0,000715	0,000715	0,000769	0,000690	0,001065
	Ac - R2	0,000788	0,000787	0,000708	0,000777	0,000957
T = 9818 N	Ac - R1	0,000579	0,000423	0,000437	0,000465	-
	Ac - R2	0,000593	0,000434	0,000475	0,000485	-
T = 10909 N	Ac - R1	0,000464	0,000490	0,000445	-	-
	Ac - R2	0,000467	0,000497	0,000441	-	-
T = 12000 N	Ac - R1	0,000281	0,000303	-	-	-
	Ac - R2	0,000353	0,000379	-	-	-
T = 13090 N	Ac - R1	0,000238	0,000147	-	-	-
	Ac - R2	0,000233	0,000193	-	-	-

FONTE: O autor

FIGURA 56 – RAZÕES DE AMORTECIMENTO EM FUNÇÃO DA FORÇA DE TRAÇÃO - EVH



FONTE: O autor

Fica evidente, das FIGURAS 51, 52, 53, 54 e 55, que os ajustes de curva relacionados ao acelerômetro R2 são mais consistentes. Entretanto, os ajustes associados ao acelerômetro R1 exibem uma adequada correspondência nas proximidades dos picos, particularmente nas regiões de ressonância.

Analisando a TABELA 3, é possível observar que as frequências naturais aumentam à medida que a força de tração no cabo também aumenta. Esse comportamento é esperado, uma vez que o aumento da força de tração resulta em um aumento na rigidez do cabo.

Ao examinar os resultados apresentados na TABELA 4, juntamente com as informações exibidas na FIGURA 56, torna-se claro que há uma tendência de que as razões de amortecimento modais diminuam à medida que a força de tração aplicada no cabo é aumentada.

Conforme a definição de razão de amortecimento modal baseada em energia, a razão de amortecimento ζ_j para o j-ésimo modo de vibrar pode ser calculada como sendo a relação entre a energia modal dissipada por ciclo U_d e a energia potencial total V , tal que (YAMAGUCHI; ADHIKARI, 1995)

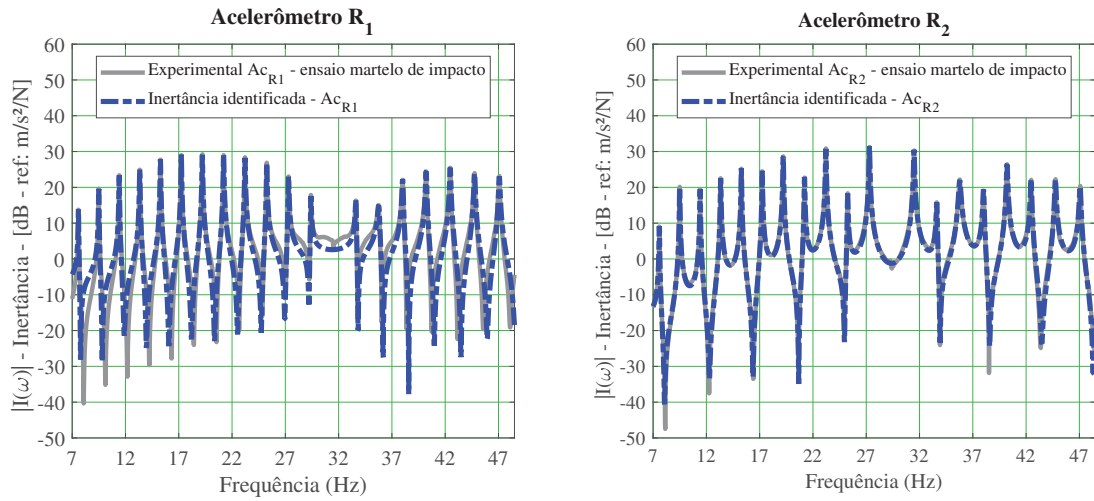
$$\zeta_j = \frac{U_{d_j}}{4\pi V_j}. \quad (6.2)$$

Na equação acima U_d é a energia dissipada e V é a energia potencial total.

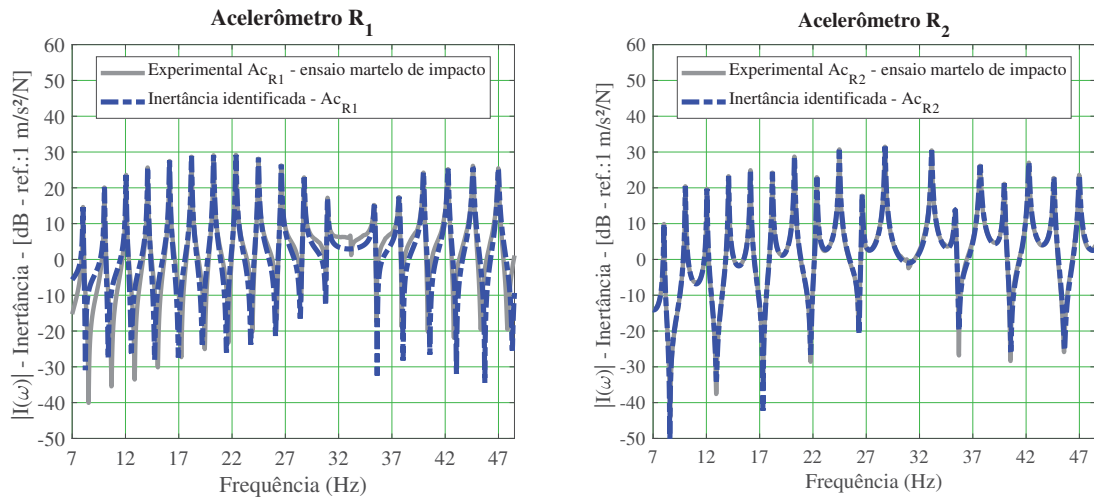
Como mencionado anteriormente, a energia dissipada U_d está intrinsecamente ligada ao movimento relativo entre as partes constituintes do cabo. É esperado que, com o aumento da tração, tais componentes fiquem mais coesos, minimizando assim o movimento relativo e, conseqüentemente, diminuindo a energia dissipada e, por consequência, o amortecimento (EPRI, 2006; DIANA et al., 2000; LANGLOIS et al., 2013). Por outro lado, a energia potencial total V é composta tanto pela parcela associada à energia de flexão quanto pela energia relativa à força de tração. Portanto, à medida que a força de tração no cabo aumenta, a energia potencial total também tende a aumentar, resultando na diminuição da razão de amortecimento modal, tal como foi observado experimentalmente.

6.2.2 Ensaios de Impacto (EMI)

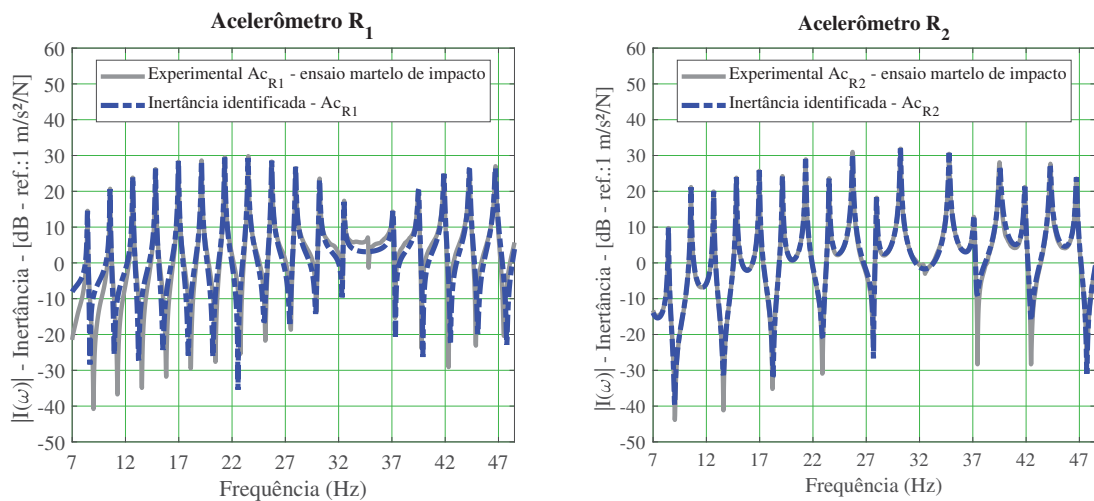
Nas FIGURAS 57, 58, 59, 60 e 61, são exibidas, em módulo, as curvas identificadas das FRFs utilizando o método LSRF para todas as forças de tração, junto com as curvas experimentais correspondentes. São contempladas as medições associadas aos acelerômetros R1 e R2, conforme o procedimento descrito no Capítulo 5, para os ensaios de impacto.

FIGURA 57 – INERTÂNCIA IDENTIFICADA - EMI - MÉTODO LSRF - 16% RMC - $T = 8727N$ 

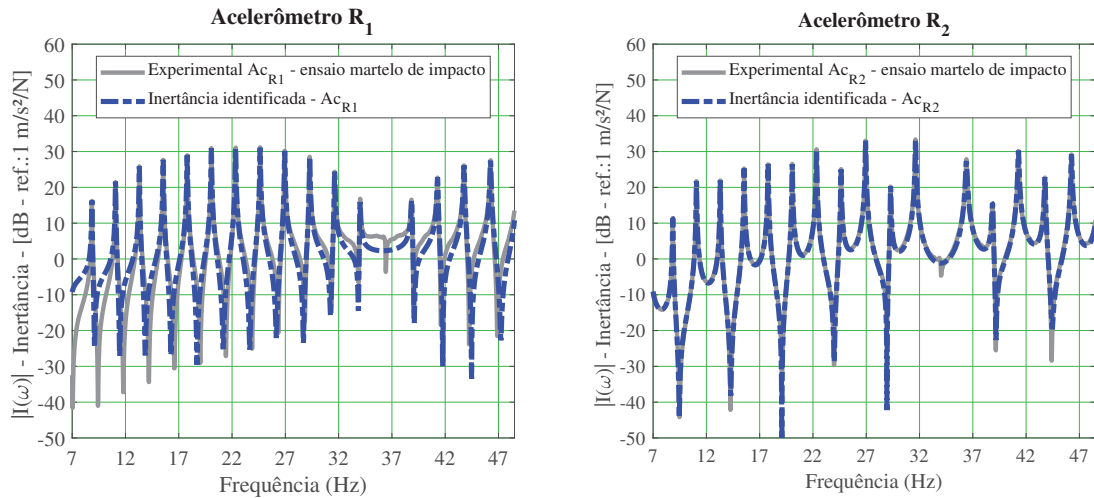
FONTE: O autor

FIGURA 58 – INERTÂNCIA IDENTIFICADA - EMI - MÉTODO LSRF - 18% RMC - $T = 9818N$ 

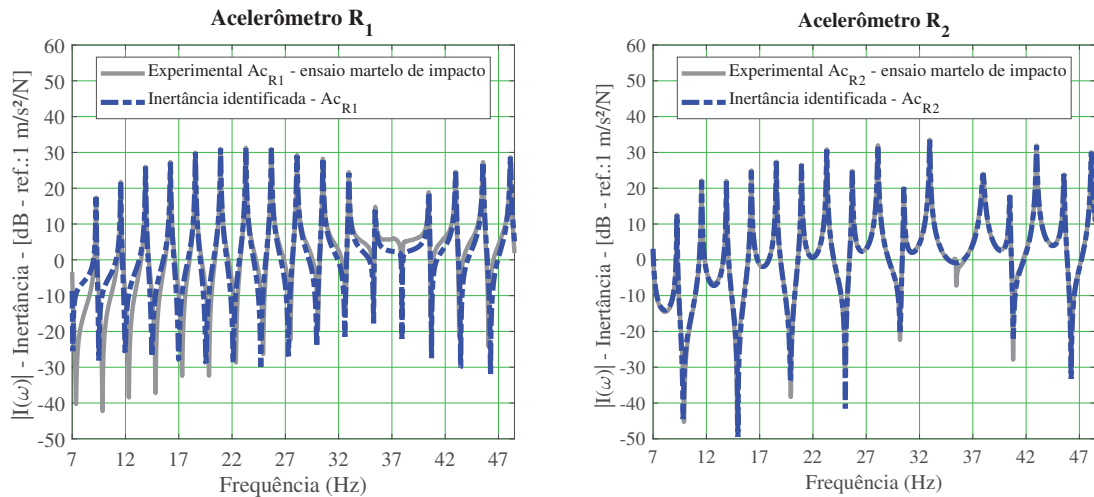
FONTE: O autor

FIGURA 59 – INERTÂNCIA IDENTIFICADA - EMI - MÉTODO LSRF - 20% RMC - $T = 10909N$ 

FONTE: O autor

FIGURA 60 – INERTÂNCIA IDENTIFICADA - EMI - MÉTODO LSRF - 22% RMC - $T = 12000N$ 

FONTE: O autor

FIGURA 61 – INERTÂNCIA IDENTIFICADA - EMI - MÉTODO LSRF - 24% RMC - $T = 13090N$ 

FONTE: O autor

A análise das FIGURAS 57, 58, 59, 60 e 61 evidencia que em todas as situações ensaiadas e pontos de medição, houve uma consistente concordância entre as curvas ajustadas e as curvas experimentais. Tem-se, aqui, uma constatação de interesse, quando comparados os ensaios de varredura harmônica e de impacto.

Já as TABELAS 5 e 6 expõem, respectivamente, as frequências naturais e as razões de amortecimento do 4º ao 23º modo, correspondentes às medições com os acelerômetros R1 e R2 nos ensaios de impacto. Além disso, na FIGURA 62, é ilustrada a variação das razões de amortecimento em relação à força de tração, para cada modo analisado ³.

³ Na FIGURA 62, omitiram-se alguns modos que o algoritmo não identificou para todas as forças de tração.

TABELA 5 – FREQUÊNCIAS NATURAIS (HZ) - EMI

Frequências naturais - (Hz)						
Tração	Acelerômetros	4º	5º	6º	7º	8º
T = 8727 N	Ac - R1	7,587	9,495	11,413	13,340	15,281
	Ac - R2	7,586	9,495	11,413	13,340	15,281
T = 9818 N	Ac - R1	8,016	10,029	12,053	14,085	16,132
	Ac - R2	8,016	10,028	12,053	14,085	16,132
T = 10909 N	Ac - R1	8,437	10,552	12,684	14,817	16,968
	Ac - R2	8,436	10,552	12,684	14,817	16,968
T = 12000 N	Ac - R1	8,851	11,069	13,300	15,538	17,790
	Ac - R2	8,851	11,068	13,300	15,538	17,790
T = 13090 N	Ac - R1	9,239	11,553	13,881	16,215	18,562
	Ac - R2	9,239	11,553	13,881	16,215	18,562
		9º	10º	11º	12º	13º
T = 8727 N	Ac - R1	17,240	19,211	21,207	23,213	25,255
	Ac - R2	17,240	19,210	21,207	23,212	25,255
T = 9818 N	Ac - R1	18,194	20,268	22,368	24,475	26,618
	Ac - R2	18,194	20,268	22,368	24,472	26,617
T = 10909 N	Ac - R1	19,131	21,309	23,505	25,718	27,963
	Ac - R2	19,131	21,309	23,511	25,714	27,963
T = 12000 N	Ac - R1	20,057	22,332	24,633	26,941	29,284
	Ac - R2	20,057	22,322	24,633	26,941	29,284
T = 13090 N	Ac - R1	20,923	23,293	25,688	28,092	30,525
	Ac - R2	20,923	23,293	25,688	28,091	30,525
		14º	15º	16º	17º	18º
T = 8727 N	Ac - R1	27,301	29,395	-	33,624	35,772
	Ac - R2	27,301	-	31,485	33,622	35,772
T = 9818 N	Ac - R1	28,765	30,955	-	35,367	37,687
	Ac - R2	28,765	-	33,139	35,361	37,685
T = 10909 N	Ac - R1	30,208	32,497	-	37,113	39,498
	Ac - R2	30,209	-	34,779	37,109	39,543
T = 12000 N	Ac - R1	31,625	34,009	-	38,859	41,285
	Ac - R2	31,628	-	36,394	38,857	41,284
T = 13090 N	Ac - R1	32,955	35,421	37,939	40,472	42,981
	Ac - R2	32,957	-	37,963	40,471	42,980
		19º	20º	21º	22º	23º
T = 8727 N	Ac - R1	38,010	40,213	42,473	44,750	47,076
	Ac - R2	38,008	40,210	42,469	44,745	47,070
T = 9818 N	Ac - R1	39,961	42,259	44,610	46,984	-
	Ac - R2	39,959	42,257	44,610	46,984	-
T = 10909 N	Ac - R1	41,879	44,273	46,712	-	-
	Ac - R2	41,879	44,266	46,721	-	-
T = 12000 N	Ac - R1	43,769	46,259	-	-	-
	Ac - R2	43,767	46,258	-	-	-
T = 13090 N	Ac - R1	45,551	48,122	-	-	-
	Ac - R2	45,550	48,121	-	-	-

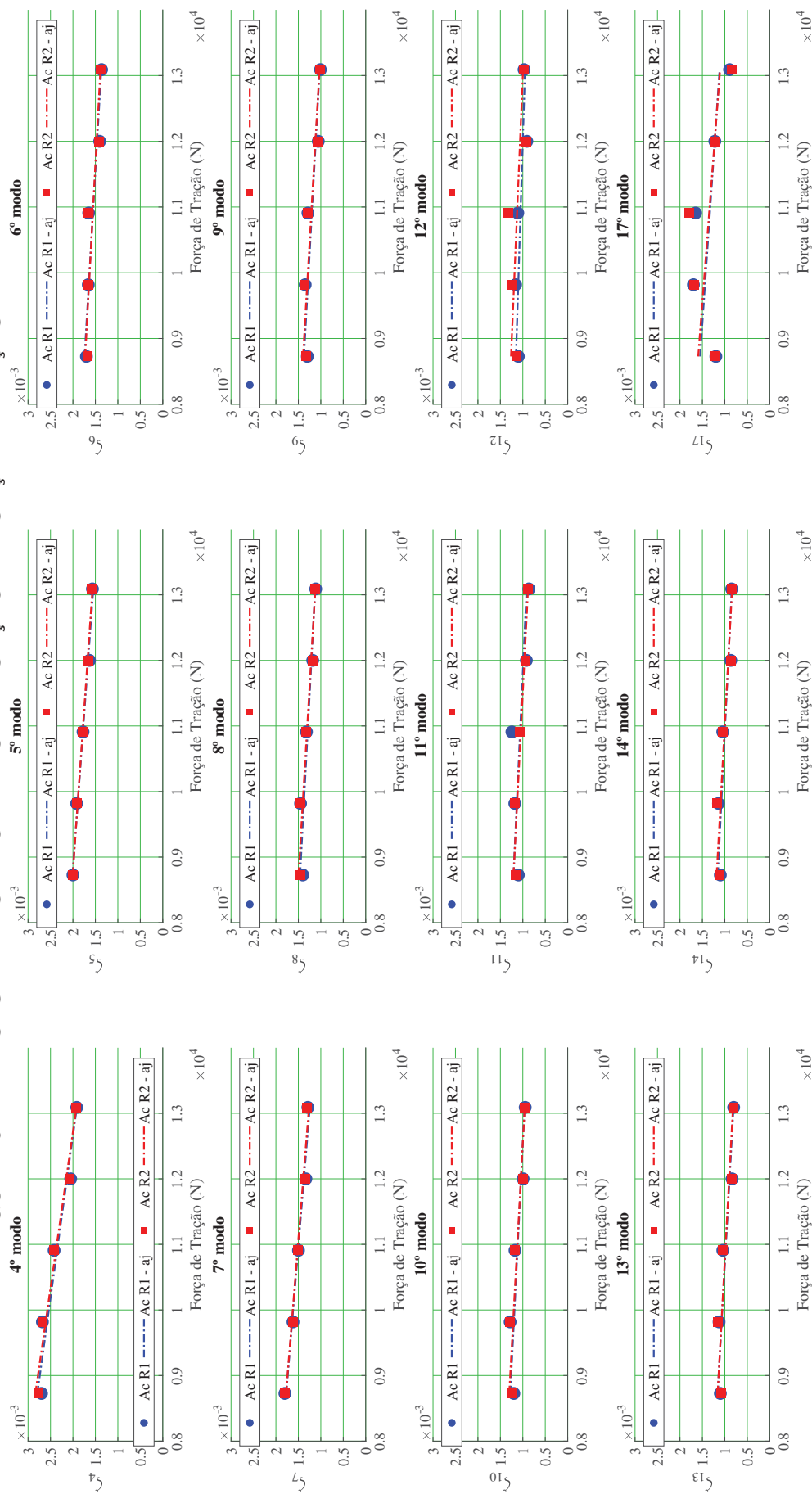
FONTE: O autor

TABELA 6 – RAZÃO DE AMORTECIMENTO - EMI

Razão de amortecimento						
Tração	Acelerômetros	4º	5º	6º	7º	8º
T = 8727 N	Ac - R1	0,00274	0,00197	0,00166	0,00177	0,00143
	Ac - R2	0,00278	0,00200	0,00168	0,00181	0,00145
T = 9818 N	Ac - R1	0,00268	0,00192	0,00166	0,00162	0,00145
	Ac - R2	0,00268	0,00192	0,00166	0,00162	0,00146
T = 10909 N	Ac - R1	0,00242	0,00178	0,00165	0,00150	0,00132
	Ac - R2	0,00243	0,00178	0,00165	0,00151	0,00132
T = 12000 N	Ac - R1	0,00205	0,00163	0,00140	0,00133	0,00188
	Ac - R2	0,00208	0,00165	0,00142	0,00135	0,00199
T = 13090 N	Ac - R1	0,00192	0,00157	0,00136	0,00129	0,00111
	Ac - R2	0,00193	0,00158	0,00138	0,00130	0,00122
		9º	10º	11º	12º	13º
T = 8727 N	Ac - R1	0,00130	0,00123	0,00113	0,00114	0,00105
	Ac - R2	0,00133	0,00124	0,00116	0,00115	0,00108
T = 9818 N	Ac - R1	0,00135	0,00128	0,00118	0,00116	0,00113
	Ac - R2	0,00136	0,00128	0,00119	0,00126	0,00115
T = 10909 N	Ac - R1	0,00129	0,00117	0,00124	0,00111	0,00104
	Ac - R2	0,00129	0,00117	0,00107	0,00133	0,00105
T = 12000 N	Ac - R1	0,00106	0,00099	0,00092	0,00091	0,00084
	Ac - R2	0,00107	0,00100	0,00094	0,00092	0,00085
T = 13090 N	Ac - R1	0,00101	0,00095	0,00086	0,00097	0,00080
	Ac - R2	0,00102	0,00095	0,00088	0,00098	0,00081
		14º	15º	16º	17º	18º
T = 8727 N	Ac - R1	0,00111	0,00106	-	0,00123	0,00254
	Ac - R2	0,00122	-	0,00115	0,00121	0,00267
T = 9818 N	Ac - R1	0,00114	0,00107	-	0,00170	0,00170
	Ac - R2	0,00117	-	0,00123	0,00168	0,00170
T = 10909 N	Ac - R1	0,00105	0,00101	-	0,00165	0,00136
	Ac - R2	0,00104	-	0,00113	0,00180	0,00194
T = 12000 N	Ac - R1	0,00087	0,00093	-	0,00122	0,00105
	Ac - R2	0,00086	-	0,00172	0,00120	0,00105
T = 13090 N	Ac - R1	0,00085	0,00104	0,00207	0,00089	0,00082
	Ac - R2	0,00085	-	0,00253	0,00084	0,00082
		19º	20º	21º	22º	23º
T = 8727 N	Ac - R1	0,00133	0,00117	0,00113	0,00123	0,00125
	Ac - R2	0,00130	0,00118	0,00112	0,00127	0,00128
T = 9818 N	Ac - R1	0,00114	0,00116	0,00127	0,00114	-
	Ac - R2	0,00112	0,00118	0,00112	0,00116	-
T = 10909 N	Ac - R1	0,00111	0,00104	0,00120	-	-
	Ac - R2	0,00111	0,00130	0,00100	-	-
T = 12000 N	Ac - R1	0,00091	0,00088	-	-	-
	Ac - R2	0,00091	0,00087	-	-	-
T = 13090 N	Ac - R1	0,00076	0,00076	-	-	-
	Ac - R2	0,00076	0,00077	-	-	-

FONTE: O autor

FIGURA 62 – RAZÕES DE AMORTECIMENTO EM FUNÇÃO DA FORÇA DE TRAÇÃO - EMI



FONTE: O autor

Analisando a TABELA 5, é evidente que as frequências naturais aumentam à medida que a força de tração no cabo aumenta. Essa relação é previsível, uma vez que o aumento da tração resulta em um incremento na rigidez do cabo, como também foi observado anteriormente no ensaio de varredura harmônica.

Ao considerar os resultados apresentados na TABELA 6, em conjunto com as informações fornecidas na FIGURA 62, fica nítido que há uma tendência para as razões de amortecimento modais diminuir conforme a força de tração aumenta, de forma consistente com o que foi observado e discutido anteriormente no ensaio de varredura harmônica.

Por fim, é importante destacar de novo que, devido ao uso da janela exponencial, os valores das razões de amortecimento devem estar superestimados.

6.3 IDENTIFICAÇÃO PARAMÉTRICA

De posse dos dados experimentais, a análise progride então para a fase de identificação paramétrica, via TONL, das variáveis de interesse, a saber: rigidez à flexão (EI), fator de perda material equivalente (η) e constante de rigidez torcional adjacente à máquina de tração (K_{T1}). Nesta seção, são apresentados e discutidos os resultados provenientes dessa etapa, conforme a metodologia explanada no Capítulo 5.

Conforme exposto no Capítulo 5, o modelo numérico incorpora um cabo equipado com molas torcionais em suas extremidades. Na extremidade próxima ao grampo de compressão, foi adotada uma mola torcional com $K_{T2} \rightarrow \infty$ para representar a condição engastada. Para atender a essa condição, foi considerada uma mola torcional com uma rigidez significativamente alta ($K_{T2} = 1 \times 10^{13} \text{ Nm/rad}$).

Já na outra extremidade, devido a incertezas associadas à terminação do cabo na máquina de tração, foi incluída, no modelo uma mola torcional K_{T1} com valor desconhecido, sendo necessária, portanto, sua identificação. Essa abordagem, em específico, possibilita analisar qual a condição de contorno que melhor se ajusta aos dados experimentais e ao comportamento dinâmico observado.

Os limites utilizados para cada parâmetro são expostos na TABELA 7.

TABELA 7 – LIMITES DOS PARÂMETROS DE INTERESSE

Parâmetro	Rigidez à flexão EI	Fator de perda material η	Constante de rigidez torcional K_{T1}
Valor mínimo	$EI_{\min} = 16,96 \text{ Nm}^2$	0	0
Valor máximo	$EI_{\max} = 1029,6 \text{ Nm}^2$	1	$1 \times 10^{13} \text{ Nm/rad}$

FONTE: O autor

É importante destacar que todas as otimizações foram realizadas dentro de uma faixa de frequência compreendida entre 7 e 48,5 Hz, conforme explicado anteriormente.

Como resultado, os valores identificados para a rigidez à flexão EI e para o fator de perda material equivalente η , correspondem a valores equivalentes dentro da faixa de frequência analisada. Além disso, o processo de atualização dos modelos foi executado para todas as três abordagens de solução desenvolvidas no Capítulo 4, quais sejam: solução analítica na forma fechada (SAFF), solução via expansão modal (SEM) e solução via Métodos dos Elementos Finitos (MEF).

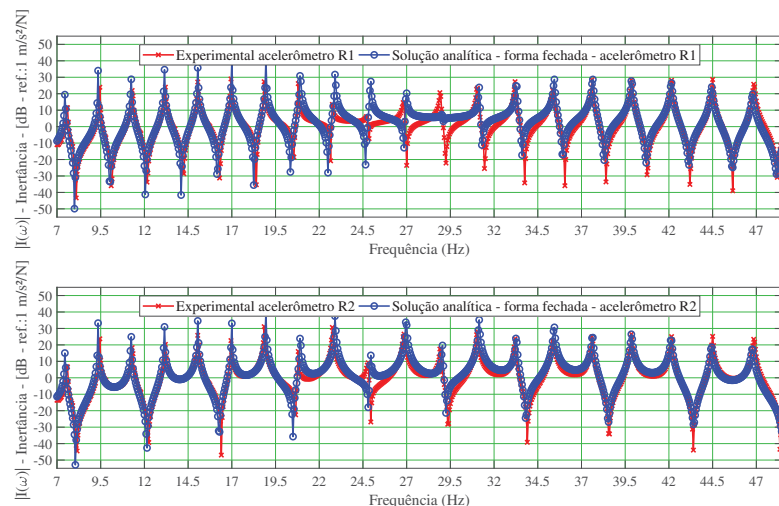
6.3.1 Ensaios de Varredura Harmônica (EVH)

6.3.1.1 Comparação entre Inertâncias Numéricas e Experimentais

Nas FIGURAS 63a, 63b e 63c, é apresentada a comparação, em módulo, entre as FRFs experimentais e numéricas, após a conclusão do processo de atualização dos modelos por meio da abordagem de otimização híbrida. Essa análise é realizada, respectivamente, para a solução analítica na forma fechada (SAFF), para a solução via expansão modal (SEM) e para a solução via Método dos Elementos Finitos (MEF), referente às respostas dos acelerômetros R1 e R2, considerando o ensaio com uma força de tração de $8727N$ (16% da RMC).

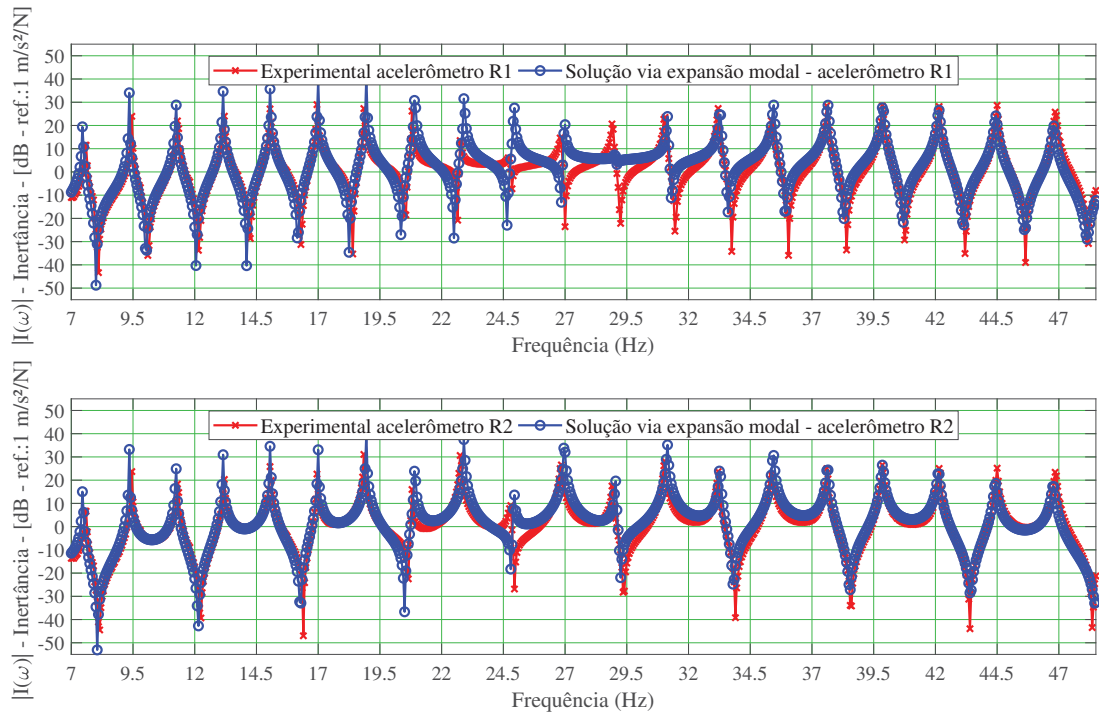
Nas FIGURAS 64a, 64b e 64c, são apresentados os mesmos resultados, porém referentes ao ensaio com uma força de tração de $9818N$ (18% da RMC). Subsequentemente, nas FIGURAS 65a, 65b e 65c, são exibidos os resultados obtidos para o ensaio com uma força de tração de $10909N$ (20% da RMC). Nas FIGURAS 66a, 66b e 66c, os resultados para a força de tração de $12000N$ (22% da RMC) são apresentados. Por fim, nas FIGURAS 67a, 67b e 67c, os resultados relativos à força de tração de $13090N$ (24% da RMC) são mostrados.

FIGURA 63 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL X NUMÉRICA - EVH - 16% RMC - $T = 8727N$
(a) EXPERIMENTAL X SAFF



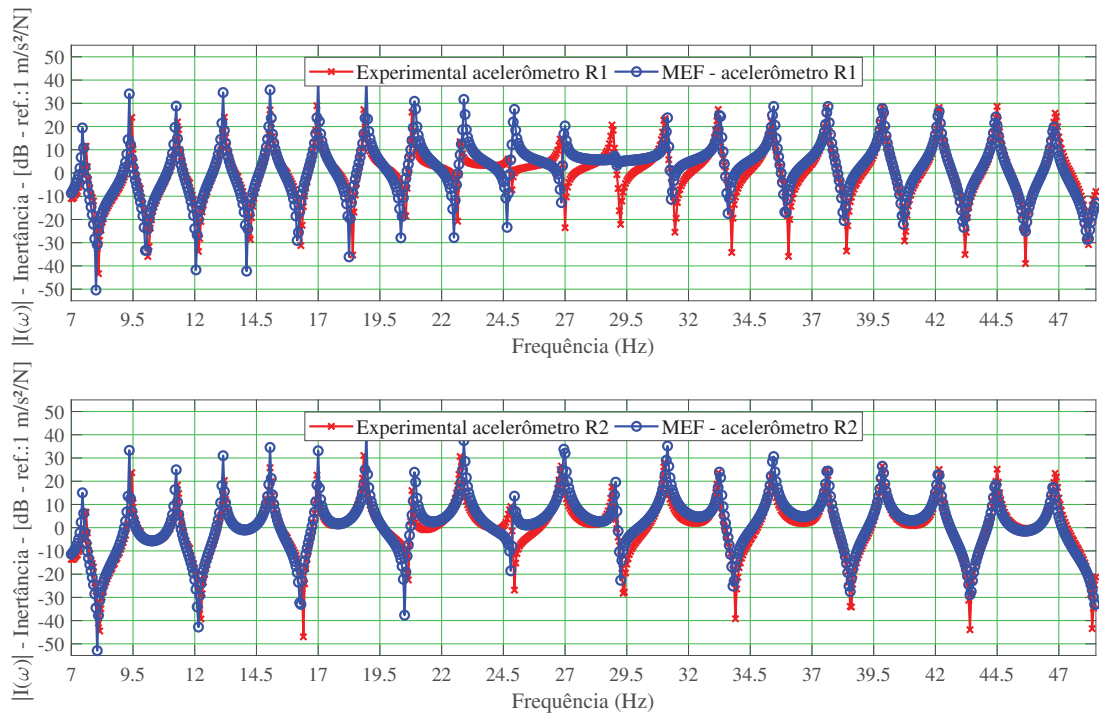
FONTE: O autor

(b) EXPERIMENTAL X SEM



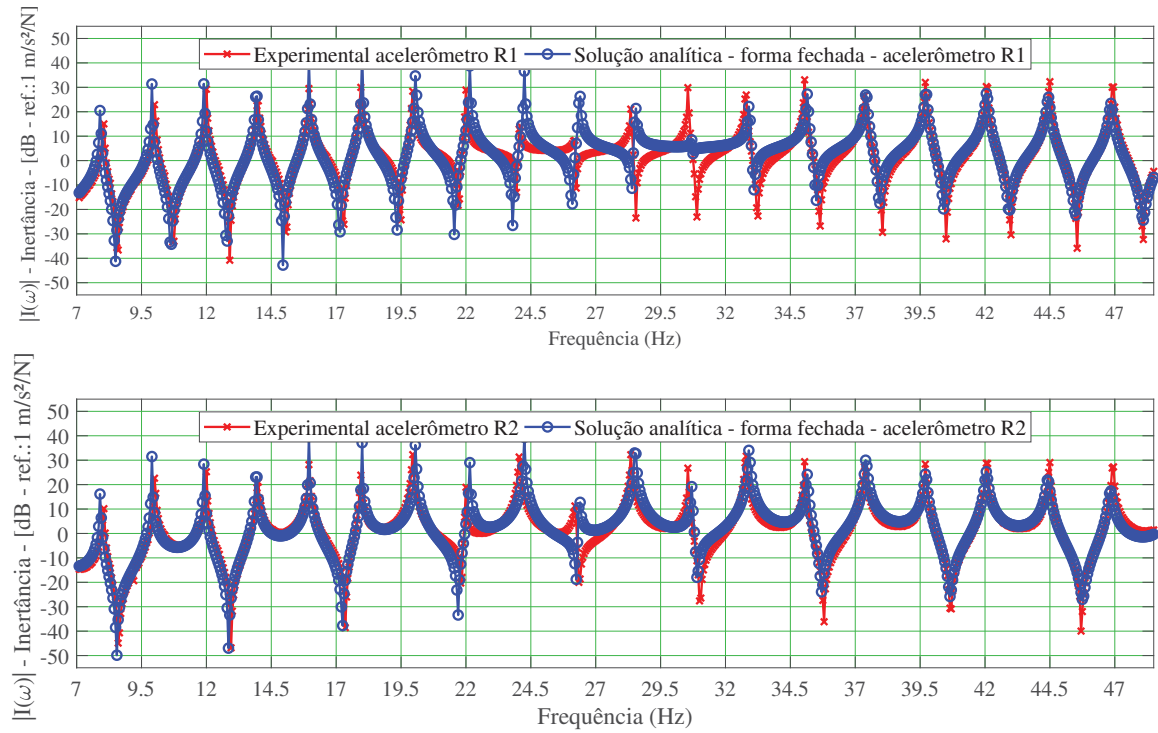
FONTE: O autor

(c) EXPERIMENTAL X MEF



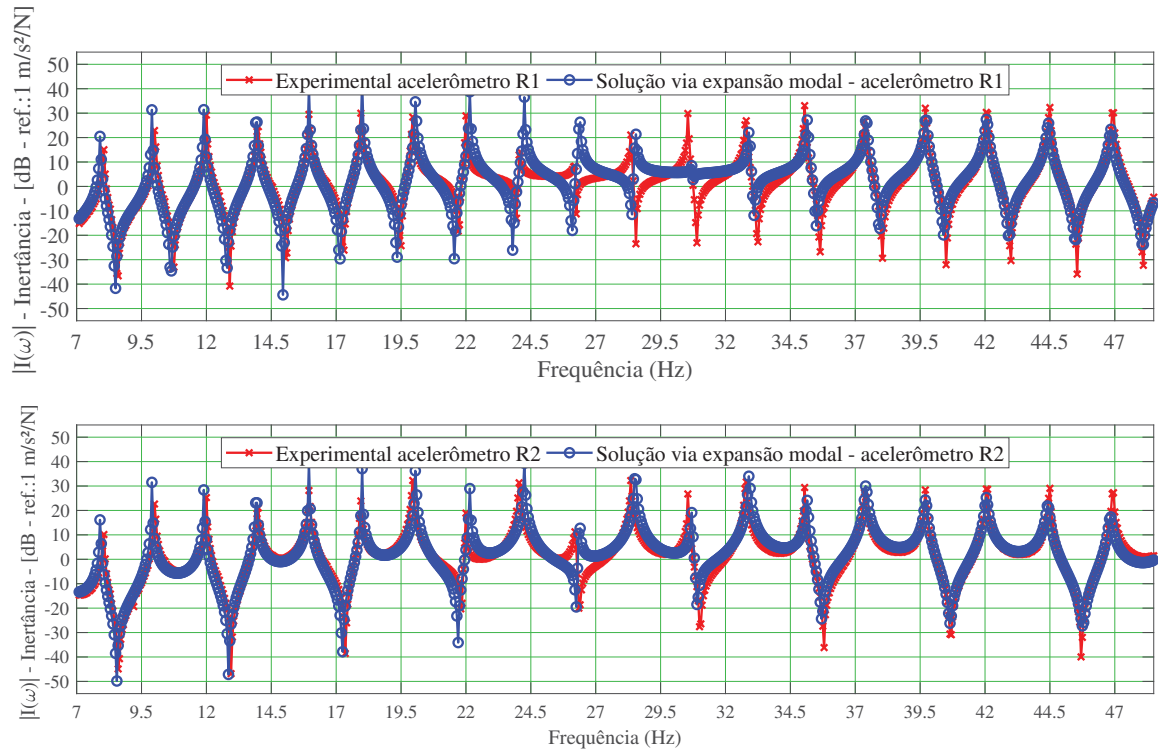
FONTE: O autor

FIGURA 64 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL X NUMÉRICA - EVH - 18% RMC - $T = 9818N$
(a) EXPERIMENTAL X SAFF



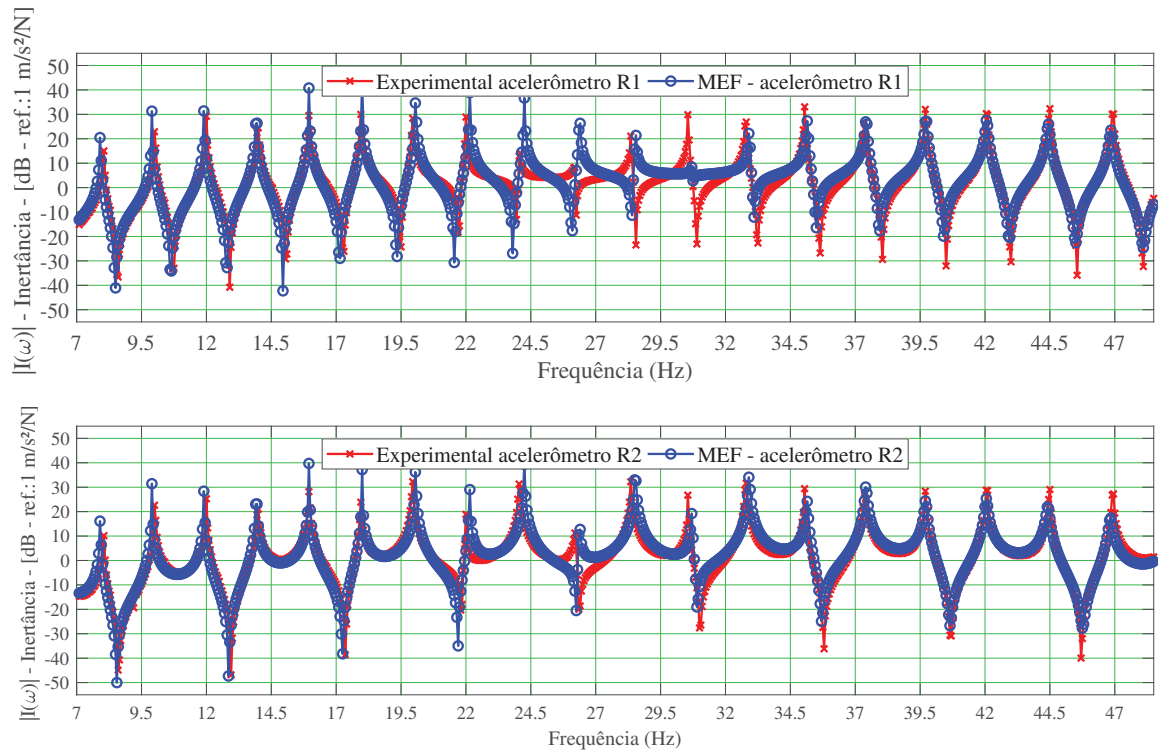
FONTE: O autor

(b) EXPERIMENTAL X SEM



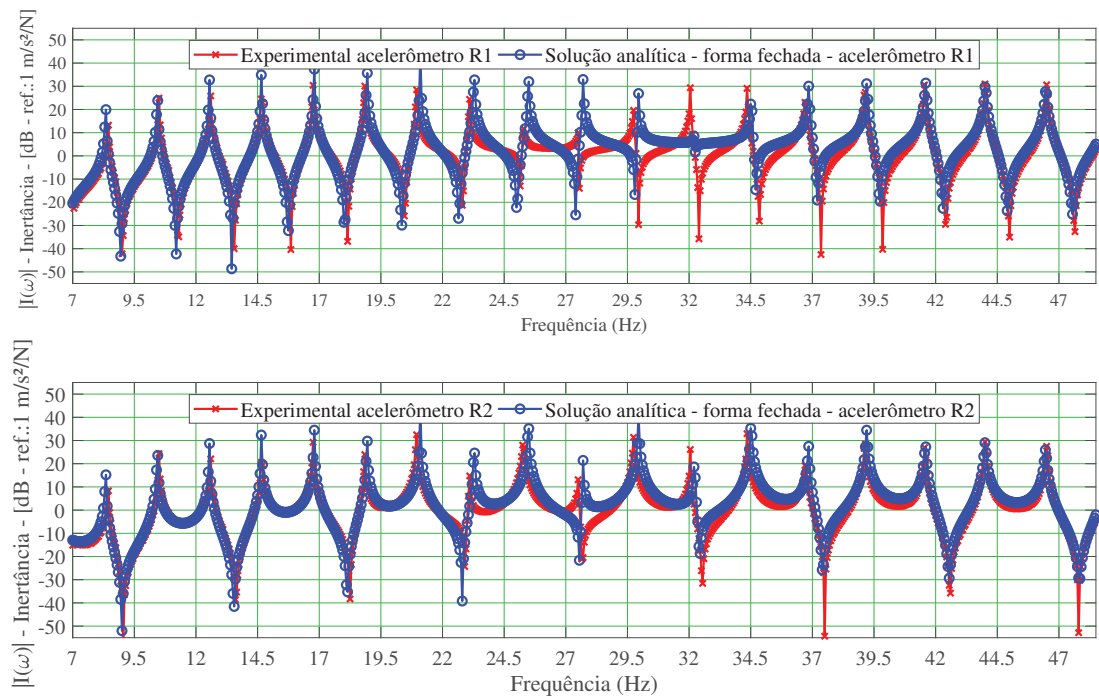
FONTE: O autor

(c) EXPERIMENTAL X MEF



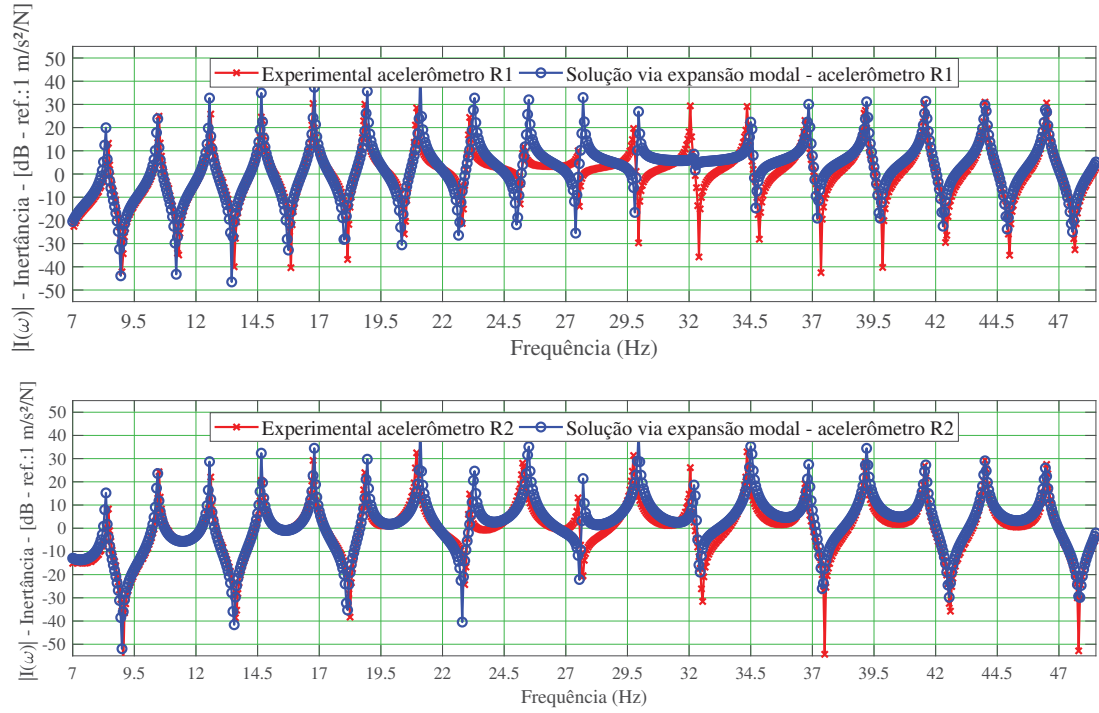
FONTE: O autor

FIGURA 65 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL X NUMÉRICA - EVH - 20% RMC - $T = 10909N$
(a) EXPERIMENTAL X SAFF



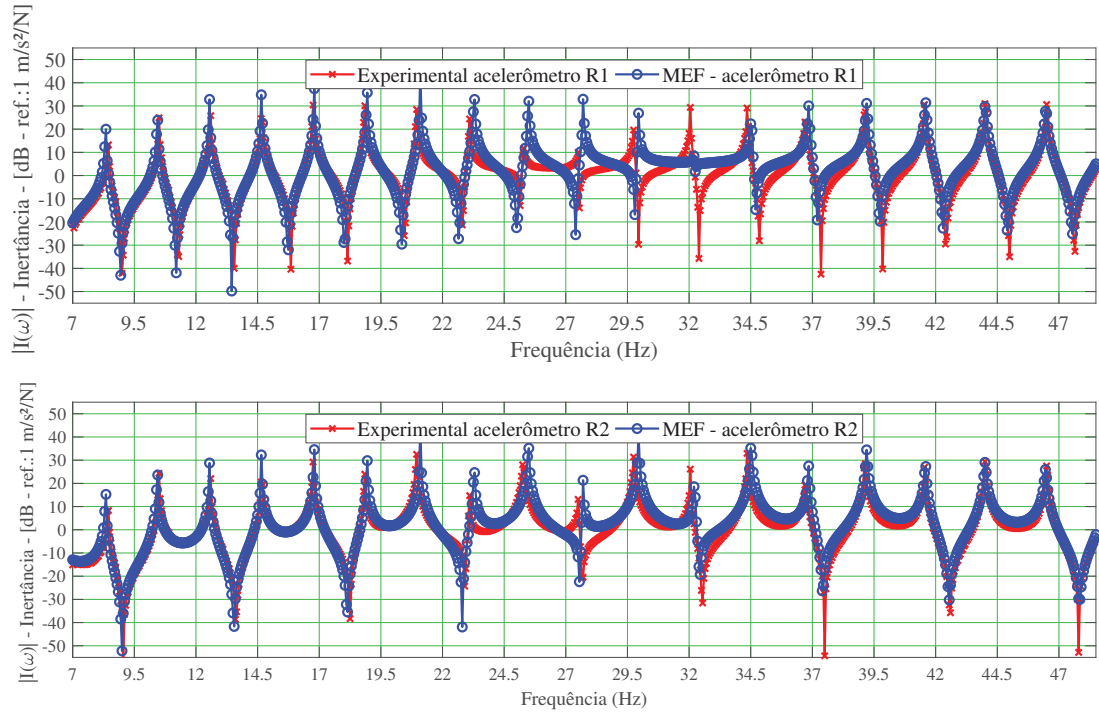
FONTE: O autor

(b) EXPERIMENTAL X SEM



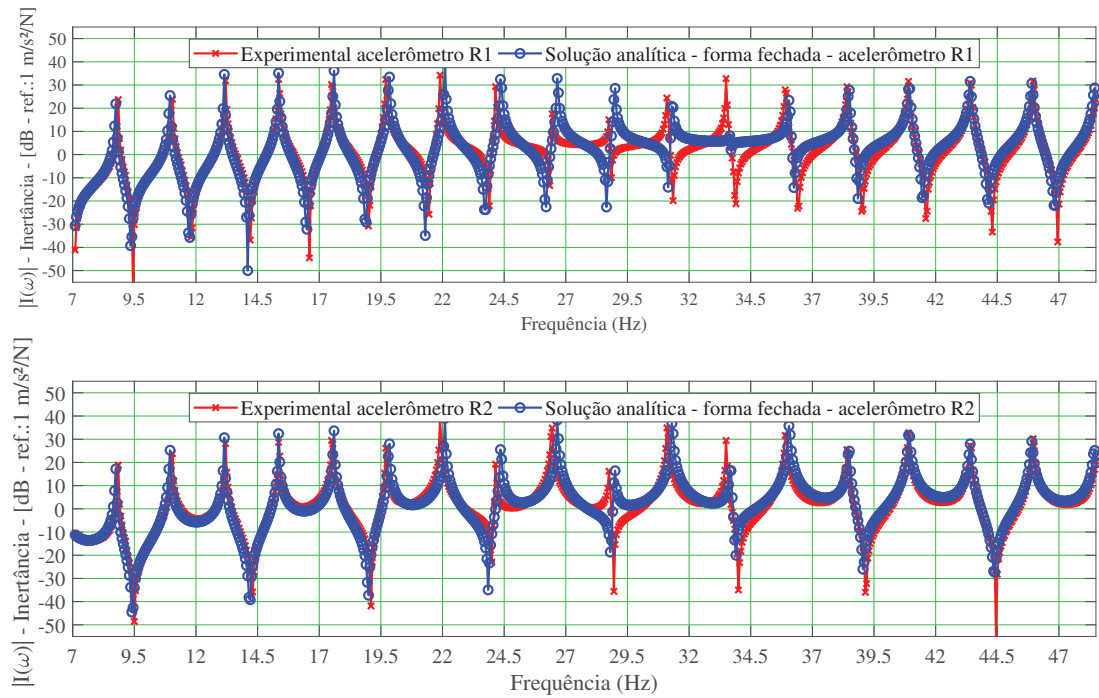
FONTE: O autor

(c) EXPERIMENTAL X MEF



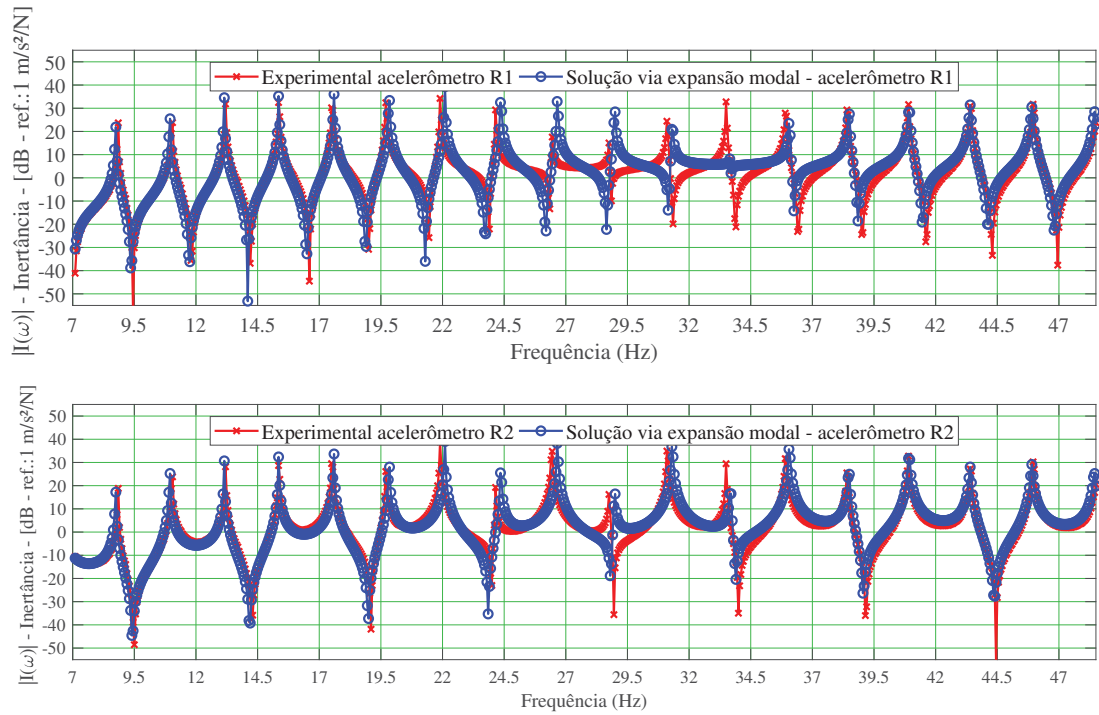
FONTE: O autor

FIGURA 66 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL X NUMÉRICA - EVH - 22% RMC - $T = 1200N$
(a) EXPERIMENTAL X SAFF



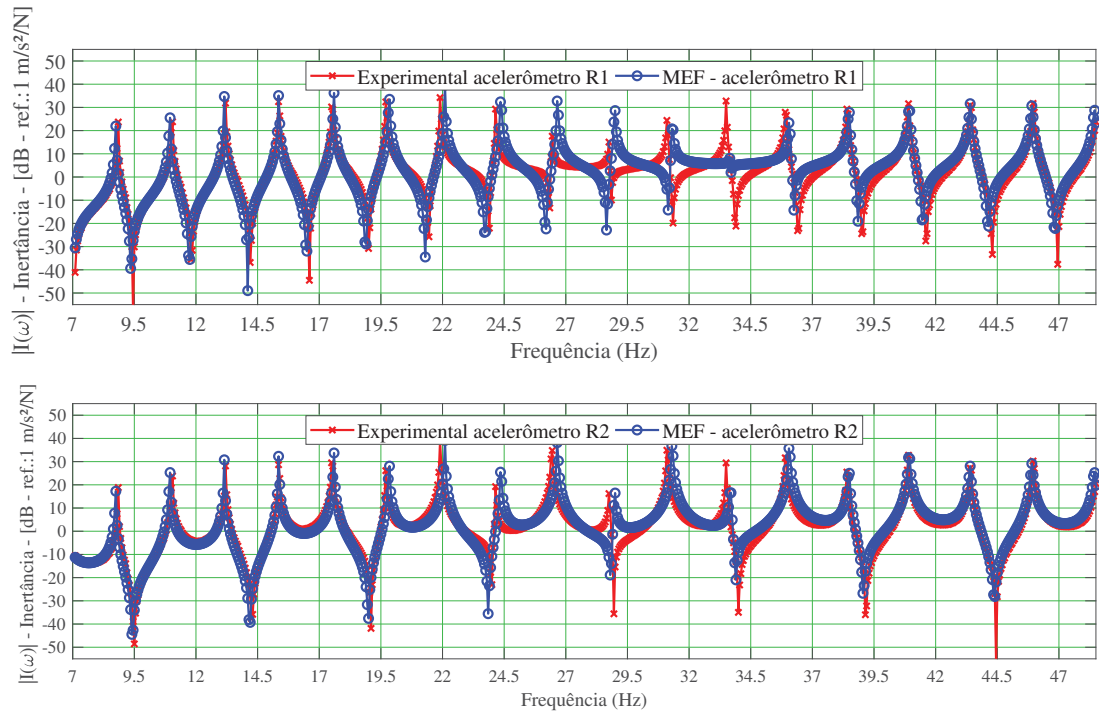
FONTE: O autor

(b) EXPERIMENTAL X SEM



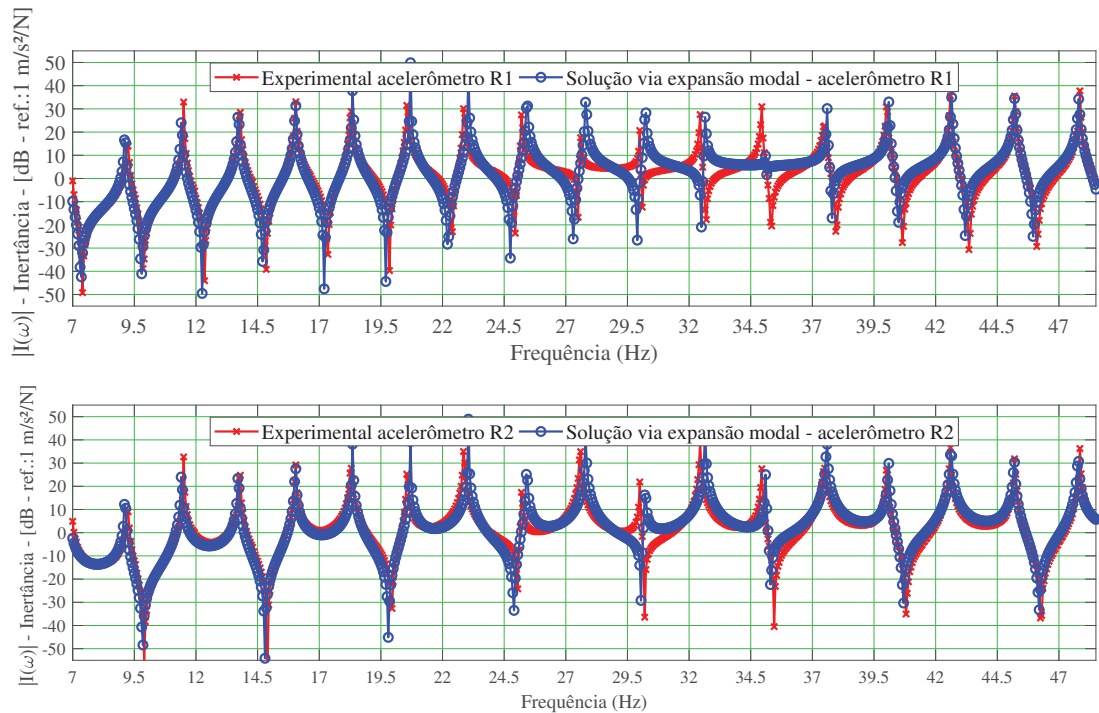
FONTE: O autor

(c) EXPERIMENTAL X MEF



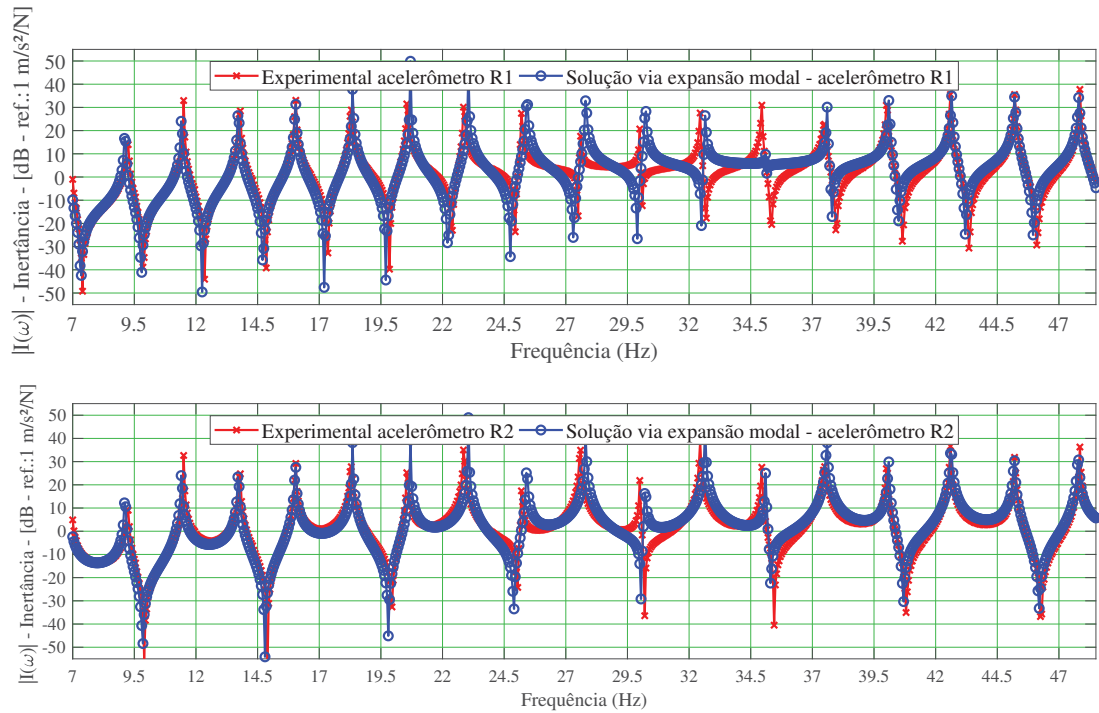
FONTE: O autor

FIGURA 67 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL X NUMÉRICA - EVH - 24% RMC - $T = 13090N$
(a) EXPERIMENTAL X SAFF



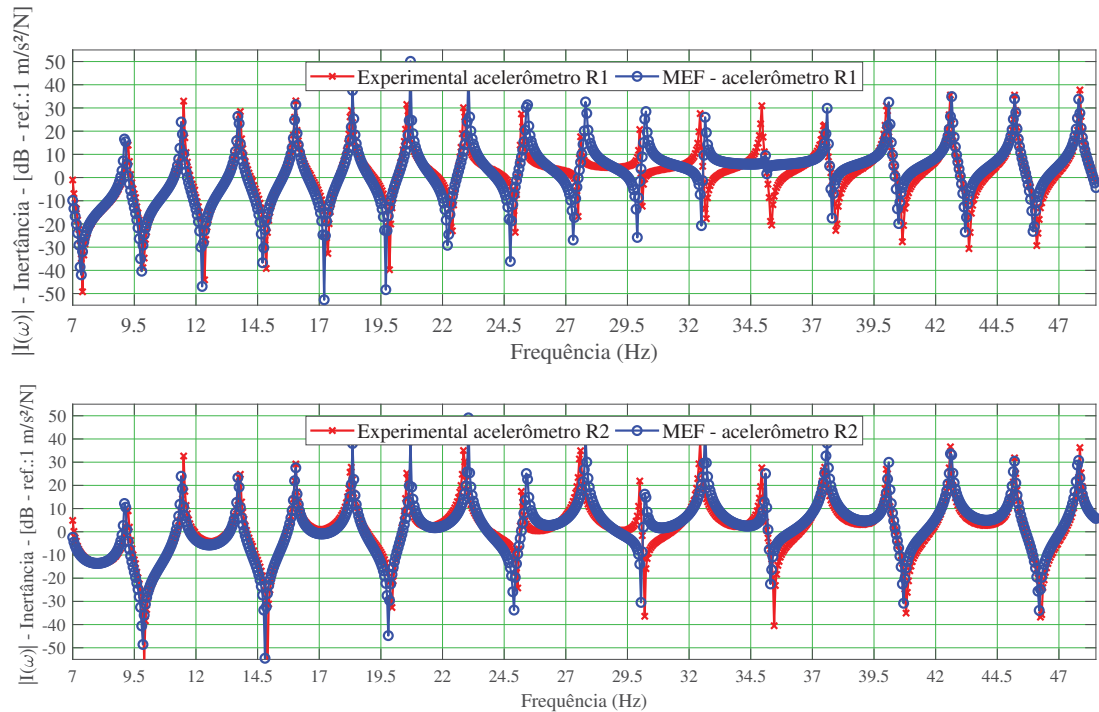
FONTE: O autor

(b) EXPERIMENTAL X SEM



FONTE: O autor

(c) EXPERIMENTAL X MEF



FONTE: O autor

De forma geral, ao analisar as FIGURAS 64a à 67c, nota-se que as inertâncias numéricas, obtidas a partir das três formas de solução, exibem uma boa correspondência com os resultados experimentais. No entanto, é relevante destacar que os

resultados obtidos para o acelerômetro R2 aparentam demonstrar visualmente um ajuste ligeiramente superior em comparação ao acelerômetro R1. Tal observação encontra suporte na TABELA 8, em que são apresentados os valores finais da função objetivo para cada nível de força de tração e forma de solução adotada.

Constata-se que, em todas as condições examinadas, o valor da função objetivo vinculado ao acelerômetro R1 supera aquele correspondente ao acelerômetro R2. Esse resultado indica que o erro quadrático absoluto entre as FRFs numéricas e experimentais (vide EQUAÇÃO 5.3 e EQUAÇÃO 5.4) é mais pronunciado no ponto de medição do acelerômetro R1. Tal observação sugere, assim, melhor conformidade entre os dados numéricos e experimentais associados ao acelerômetro R2.

TABELA 8 – VALORES FINAIS DA FUNÇÃO OBJETIVO - EVH

Solução	Tração (N)	Valor final função objetivo $\times 10^4$	
		Ac - R1	Ac - R2
Analítica - forma fechada	8727	4,4579	2,7668
Expansão modal		4,4628	2,7745
MEF		4,46691	2,7809
Analítica - forma fechada	9818	4,2337	2,7205
Expansão modal		4,2749	2,7287
MEF		4,2554	2,7205
Analítica - forma fechada	10909	5,001	3,2338
Expansão modal		5,0167	3,2425
MEF		5,0045	3,2501
Analítica - forma fechada	12000	5,0068	3,3380
Expansão modal		5,0458	3,3441
MEF		5,0021	3,3441
Analítica - forma fechada	13090	5,0049	3,5165
Expansão modal		5,0054	3,5340
MEF		5,0090	3,5343

FONTE: O autor

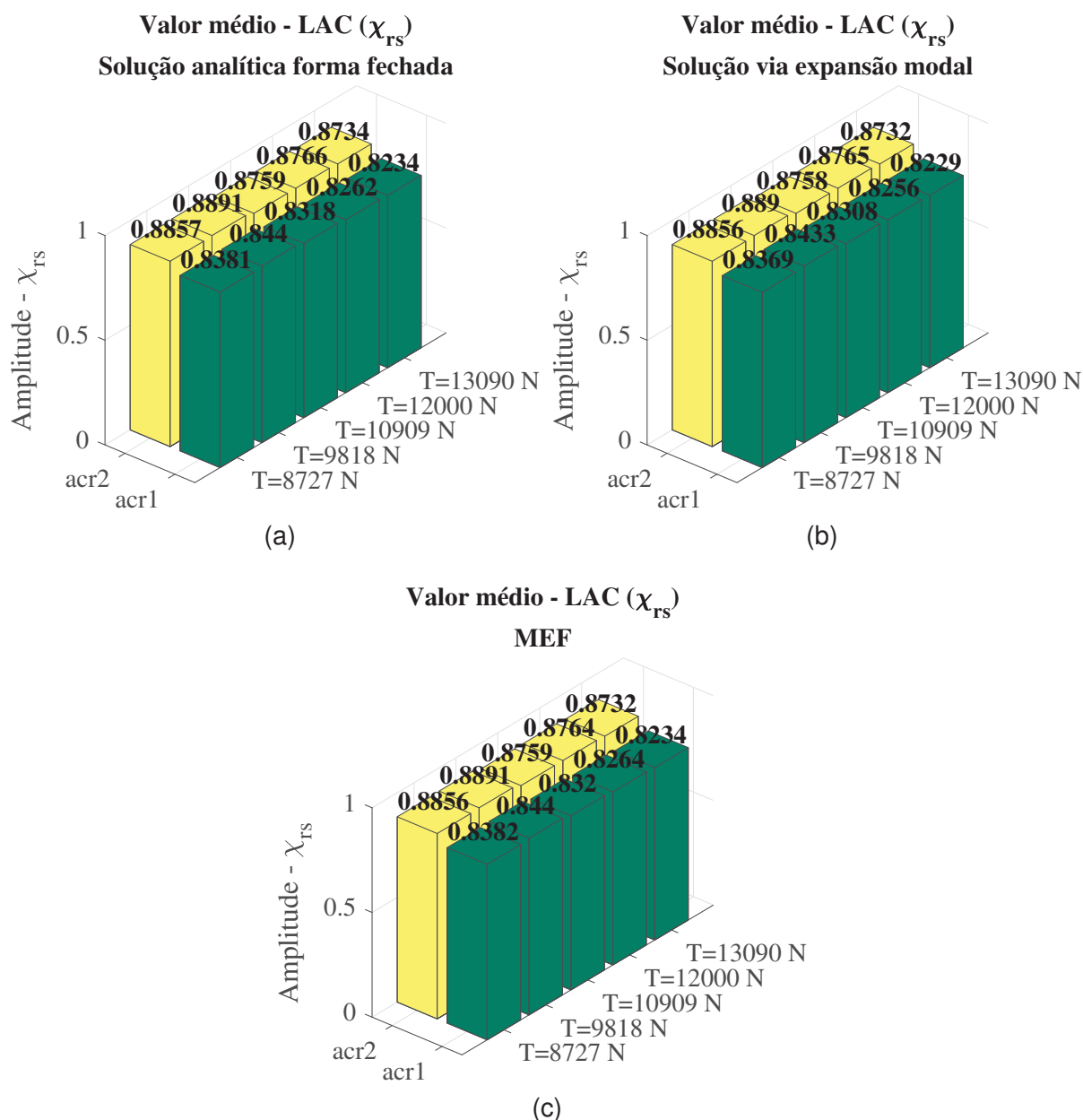
Além disso, é possível observar na TABELA 8 uma adequada similaridade nos valores finais da função objetivo entre as distintas abordagens da equação do movimento. Isso sugere, portanto, que todas as soluções convergiram para pontos de mínimos semelhantes no espaço de busca, evidenciando uma boa consistência entre elas.

Visando analisar o grau de correlação entre as inertâncias numéricas e experimentais, utilizou-se o valor médio do indicador LAC (*Local Amplitude Criterion*) proposto por Zang et al. (2001), conforme detalhado no Apêndice D. Como anteriormente explanado, a determinação do valor médio do LAC permite quantificar o grau de correlação das amplitudes entre as FRFs experimentais e numéricas, nos graus de liberdade de interesse, fornecendo, portanto, um indicador de correlação espacial que

se assemelha ao conceito do COMAC. Esse indicador apresenta como resultado um valor real compreendido entre 0 (nenhuma correlação) e 1 (correlação perfeita).

Os resultados da análise podem ser observados nas FIGURAS 68a, 68b e 68c. Os valores do indicador LAC, calculados ao longo da faixa de frequência analisada, estão apresentados no Apêndice D.

FIGURA 68 – VALOR MÉDIO LAC - EVH



FONTE: O autor

A análise das FIGURAS 68a, 68b e 68c revela que o valor médio do LAC encontra-se acima de 0,8 para todas as formas de soluções. Isso sugere, portanto, uma representação adequada da resposta dinâmica do sistema para todos os níveis de força de tração e pontos de resposta analisados.

No entanto, é importante destacar que os valores médios do LAC para o acelerômetro R1 são ligeiramente menores, quando comparado com o acelerômetro R2. Essa constatação pode ser atribuída à maior proximidade do acelerômetro R1 em relação ao excitador, o que o torna mais sensível à influência desse. Não obstante, todos os resultados reforçam a congruência dos modelos empregados em relação aos dados experimentais.

No Apêndice E, são relacionados, em tabelas e gráficos, os valores numéricos e experimentais para as amplitudes de ressonância das FRFs e as frequências naturais. Tratam-se de verificações complementares específicas para essas grandezas que, de modo geral, consolidaram o já exposto acima.

6.3.1.2 Parâmetros Identificados

Na TABELA 9, são apresentados os valores ótimos dos parâmetros identificados em cada nível de tração para os acelerômetros R1 e R2.

TABELA 9 – PARÂMETROS IDENTIFICADOS - ENSAIO POR VARREDURA HARMÔNICA

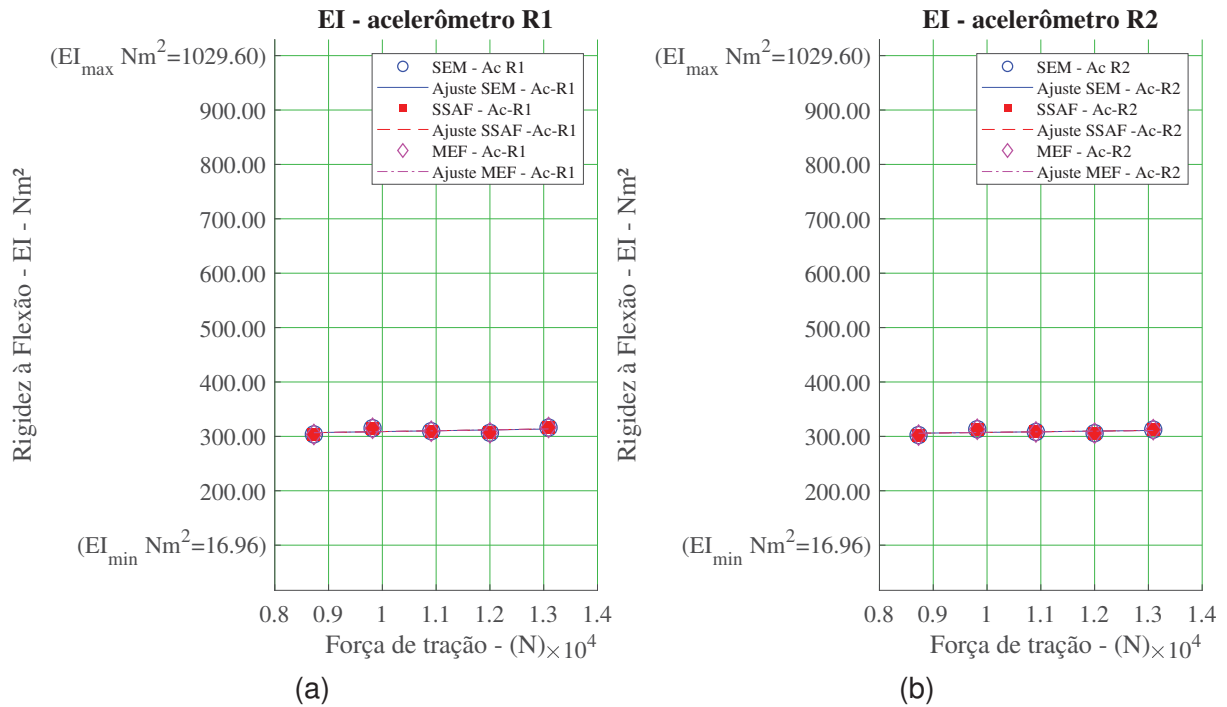
Solução	Tração (N)	EI (Nm ²)		η		K_{T1} Nm/rad ($\times 10^{-5}$)	
		Ac - R1	Ac-R2	Ac - R1	Ac - R2	Ac - R1	Ac -R2
Analítica - forma fechada	8727	303,580	302,389	0,0133	0,0144	1,88	1,12
Expansão modal		303,683	302,375	0,0133	0,0144	1,78	1,80
MEF		303,495	302,306	0,133	0,0144	1,86	9,91
Analítica - forma fechada	9818	315,009	313,223	0,0155	0,0183	9,04	1,03
Expansão modal		315,042	313,175	0,0156	0,0184	2,14	1,86
MEF		314,948	313,117	0,0154	0,0182	1,03	1,05
Analítica - forma fechada	10909	309,543	308,111	0,0125	0,0131	2,06	1,01
Expansão modal		309,508	308,1362	0,0125	0,0131	2,03	1,80
MEF		309,489	308,081	0,0125	0,0131	1,08	1,01
Analítica - forma fechada	12000	306,689	305,875	0,0137	0,0146	1,01	1,00
Expansão modal		306,557	305,918	0,0139	0,0145	1,01	1,82
MEF		306,651	305,885	0,0136	0,0145	1,20	1,39
Analítica - forma fechada	13090	316,480	312,450	0,0090	0,0097	1,04	1,03
Expansão modal		316,207	312,429	0,0090	0,0097	1,88	1,03
MEF		313,339	312,348	0,0093	0,0096	1,04	1,17

FONTE: O autor

Com o intuito de tornar a visualização dos resultados apresentados na TABELA 9 mais clara, apresenta-se, nas FIGURAS 69a e 69b, a variação da rigidez à flexão em relação à força de tração para os acelerômetros R1 e R2. Já nas FIGURAS 70a e 70b, ilustra-se a variação do fator de perda material equivalente em função da

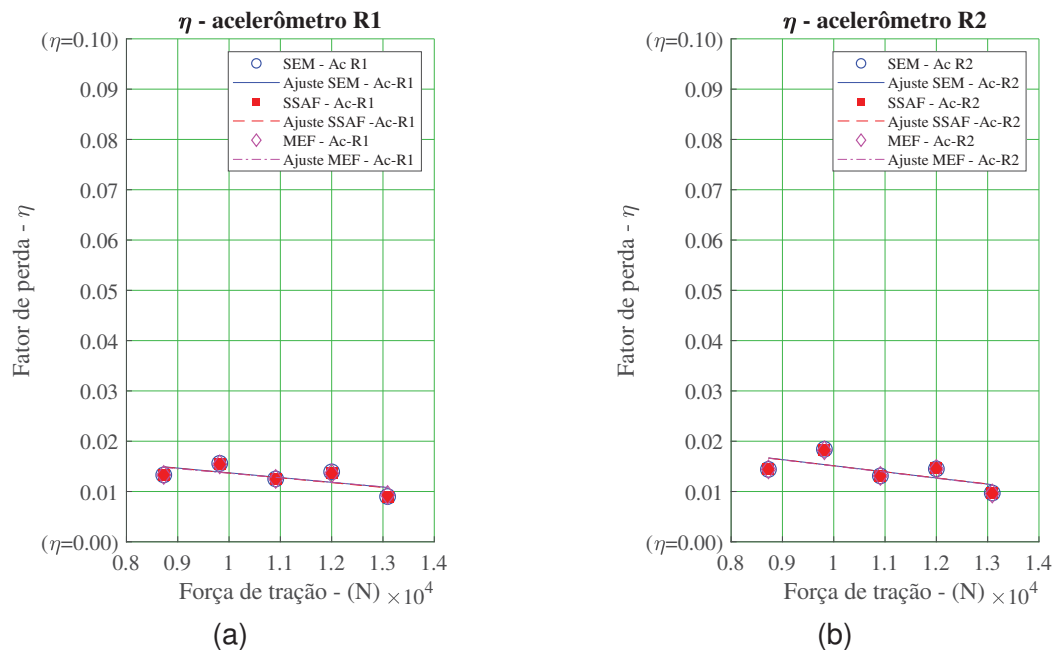
força de tração. Cabe destacar que ajustes lineares foram realizados para identificar a tendência da variação dos parâmetros de interesse⁴.

FIGURA 69 – VARIAÇÃO DA RIGIDEZ À FLEXÃO EM FUNÇÃO DA FORÇA DE TRAÇÃO - ENSAIOS DE VARREDURA HARMÔNICA



FONTE: O autor

FIGURA 70 – VARIAÇÃO DO FATOR DE PERDA MATERIAL EQUIVALENTE EM FUNÇÃO DA FORÇA DE TRAÇÃO - ENSAIOS DE VARREDURA HARMÔNICA



FONTE: O autor

⁴ As equações dos ajustes lineares das figuras 69a, 69b, 70a e 70b são apresentadas no Apêndice F.

Nesta etapa da análise, vale destacar alguns pontos de relevância. Primeiramente, a observação da TABELA 9, aliada às representações gráficas nas FIGURAS 69a, 69b, 70a e 70b, permite constatar que os parâmetros identificados por meio das três formas de solução empregadas (solução analítica na forma fechada, solução via expansão modal e solução via MEF) fornecem valores congruentes entre si durante a etapa de atualização do modelo, realizada por meio da abordagem de otimização híbrida. Essa congruência sugere que todas as abordagens numéricas convergiram para regiões de mínimo próximas no espaço de busca, evidenciando um grau de coesão na condução da identificação paramétrica. Este alinhamento na convergência endossa a robustez das metodologias empregadas e a validade dos resultados obtidos.

Um segundo aspecto crucial a ser ressaltado envolve a influência proeminente da força de tração sobre as magnitudes das grandezas identificadas experimentalmente: rigidez à flexão e fator de perda material equivalente. Apesar da leve variabilidade nos dados, emerge uma tendência geral. À medida que a força de tração se eleva, nota-se uma propensão ao aumento do valor equivalente da rigidez à flexão, enquanto o fator de perda material equivalente apresenta uma tendência inversa, indicando redução. Além disso, ambas as grandezas forneceram valores consistentes em relação aos resultados associados aos dois acelerômetros utilizados.

O terceiro e último aspecto a ser destacado está relacionado ao valor da constante de mola torcional adjacente à máquina de tração, representada por K_{T1} . É possível observar que, para todas as condições ensaiadas, o valor identificado é relativamente baixo, na ordem de 10^{-5} Nm/rad, indicando uma condição próxima à de um apoio simples nesse ponto. Esse resultado é, em grande parte, atribuído à influência da força exercida pelo excitador sobre o cabo, que demanda uma intervenção mais substancial da máquina de tração para manter o controle da força durante a realização do ensaio, alterando, portanto, a condição de contorno nesse ponto.

6.3.2 Ensaios de Impacto (EMI)

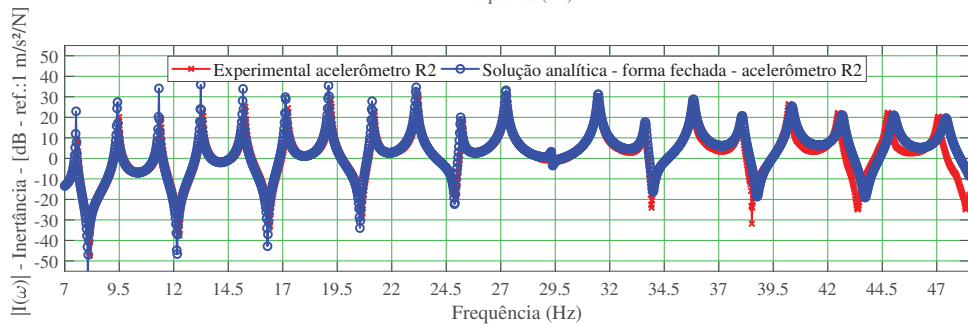
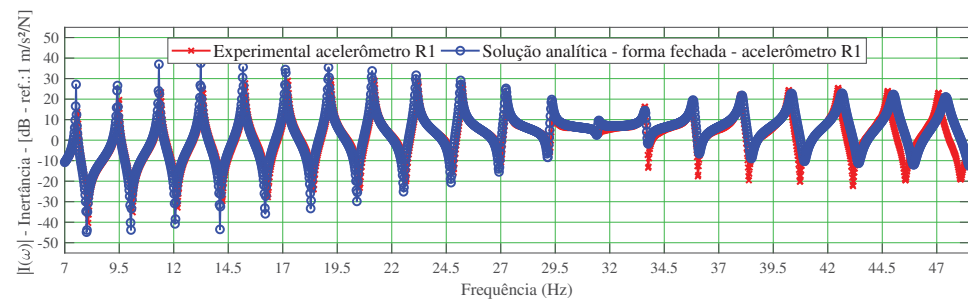
6.3.2.1 Comparação entre Inertâncias Numéricas e Experimentais

Seguindo a mesma estrutura da seção anterior, que abordou os ensaios de varredura harmônica, a presente seção tem por objetivo oferecer análises análogas, porém específicas aos ensaios conduzidos com o uso do martelo de impacto. Nesse contexto, nas figuras 71a, 71c e 71b, são fornecidos, em módulo, os gráficos comparativos entre as FRFs experimentais e numéricas referentes aos acelerômetros R1 e R2, após a conclusão do processo de atualização do modelo para a força de tração de 8727 N (16% da RMC).

Subsequentemente, nas FIGURAS 72a, 72b e 72c, os resultados pertinentes

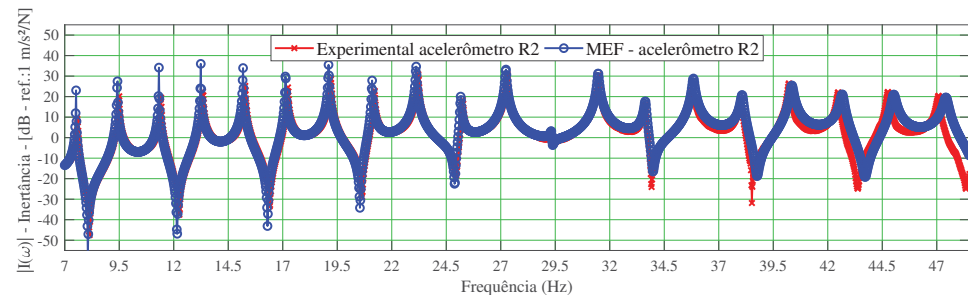
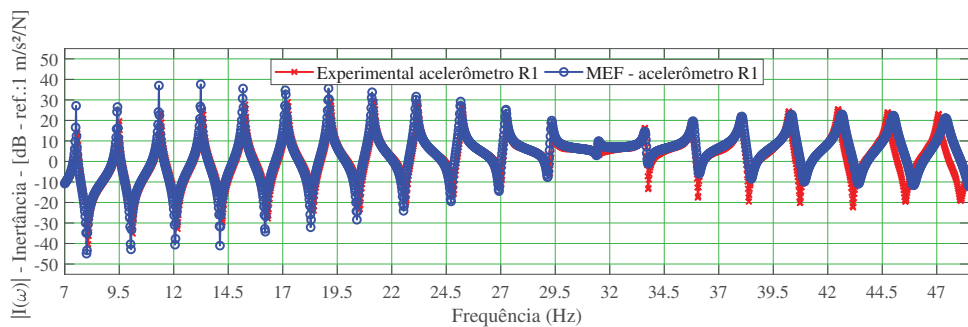
ao ensaio conduzido com a força de tração de $9818N$ (18% da RMC) são apresentados. Nas FIGURAS 73a, 73b e 73c, os resultados provenientes do ensaio com a força de tração de $10909N$ (20% da RMC) são expostos. Adicionalmente, nas FIGURAS 74a, 74b e 74c, os resultados referentes ao ensaio realizado com a força de tração de $12000N$ (22% da RMC) são apresentados. Por fim, nas FIGURAS 75a, 75b e 75c, os resultados relativos à força de tração de $13090N$ (24% da RMC) são exibidos.

FIGURA 71 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL X NUMÉRICA - EMI - 16% RMC - $T = 8727N$
(a) EXPERIMENTAL X SAFF



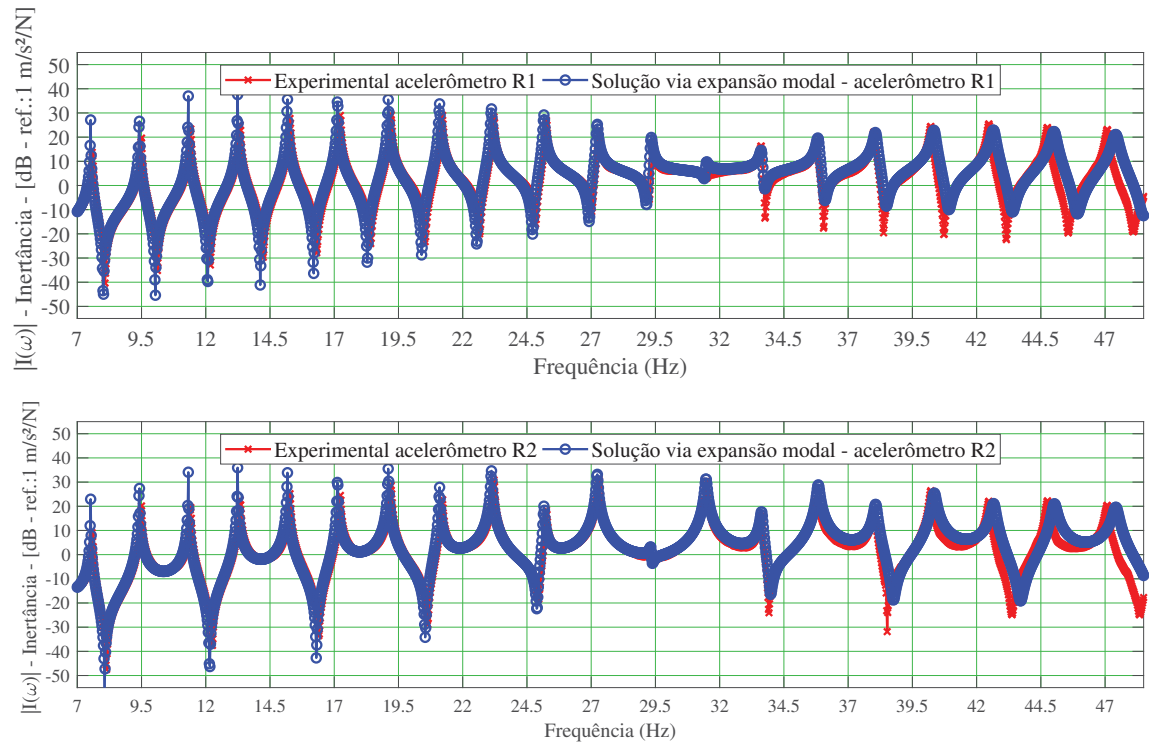
FONTE: O autor

(b) EXPERIMENTAL X MEF



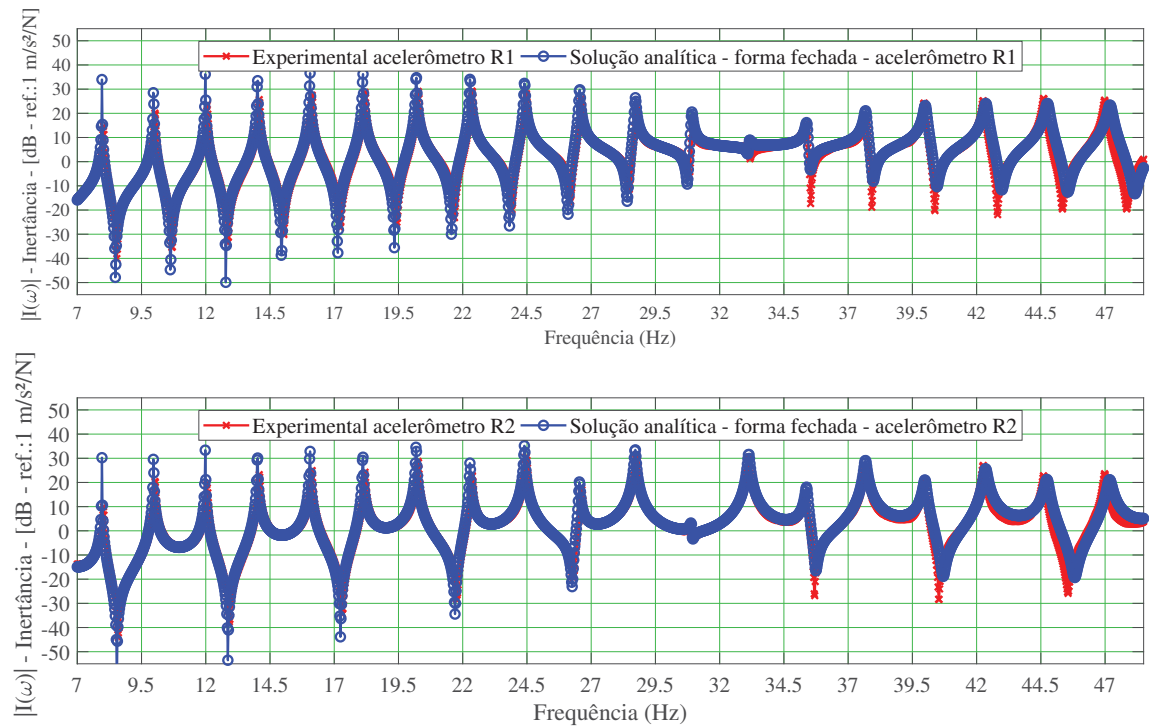
FONTE: O autor

(c) EXPERIMENTAL X SEM



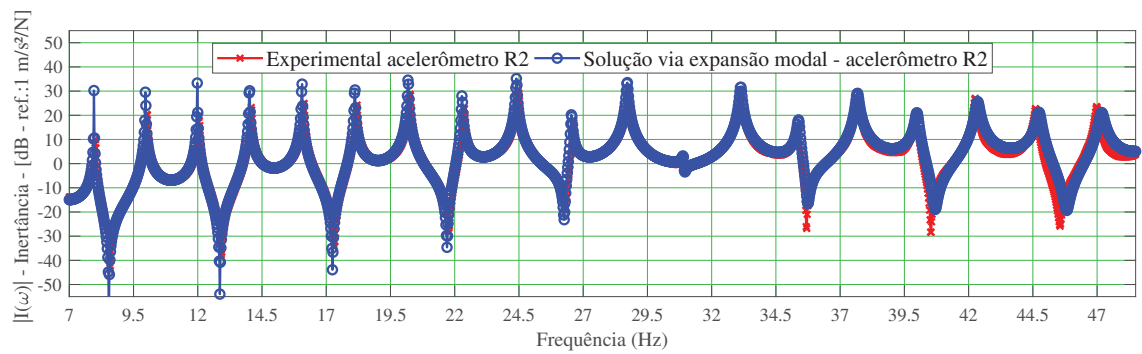
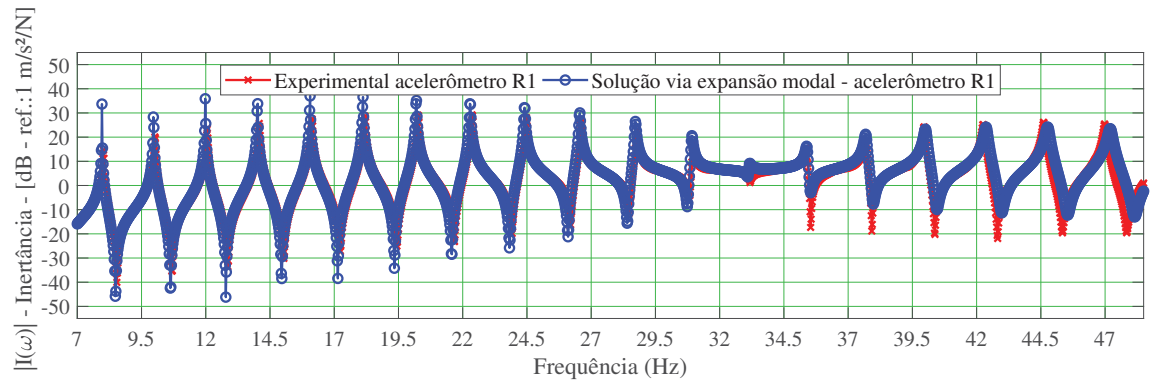
FONTE: O autor

FIGURA 72 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL X NUMÉRICA - EMI - 18% RMC - $T = 9818N$
(a) EXPERIMENTAL X SAFF



FONTE: O autor

(b) EXPERIMENTAL X SEM



FONTE: O autor

(c) EXPERIMENTAL X MEF

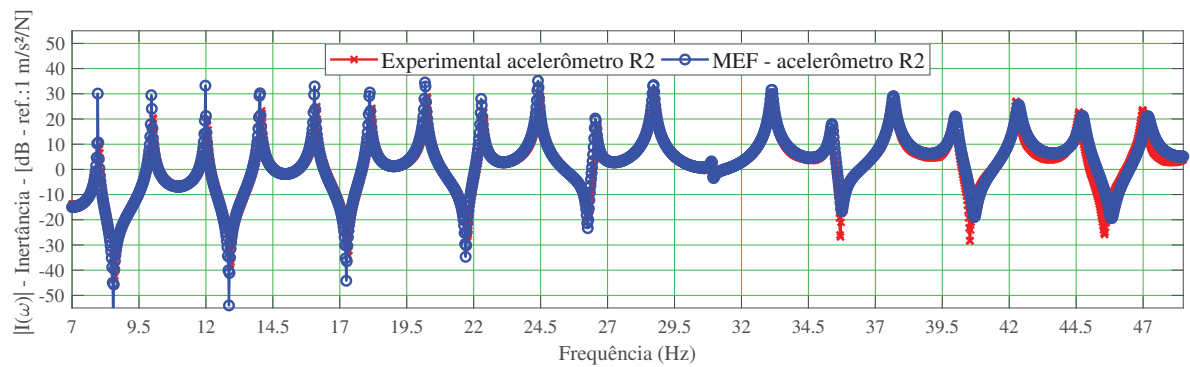
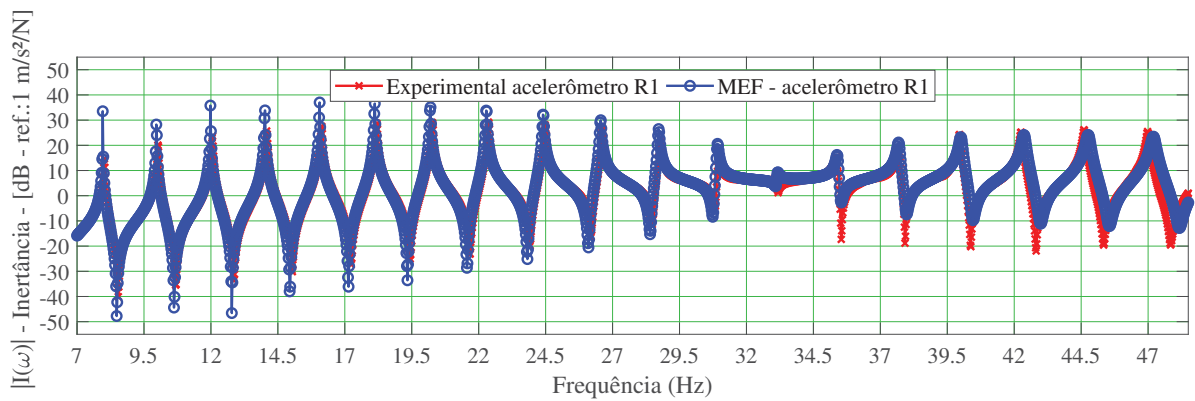
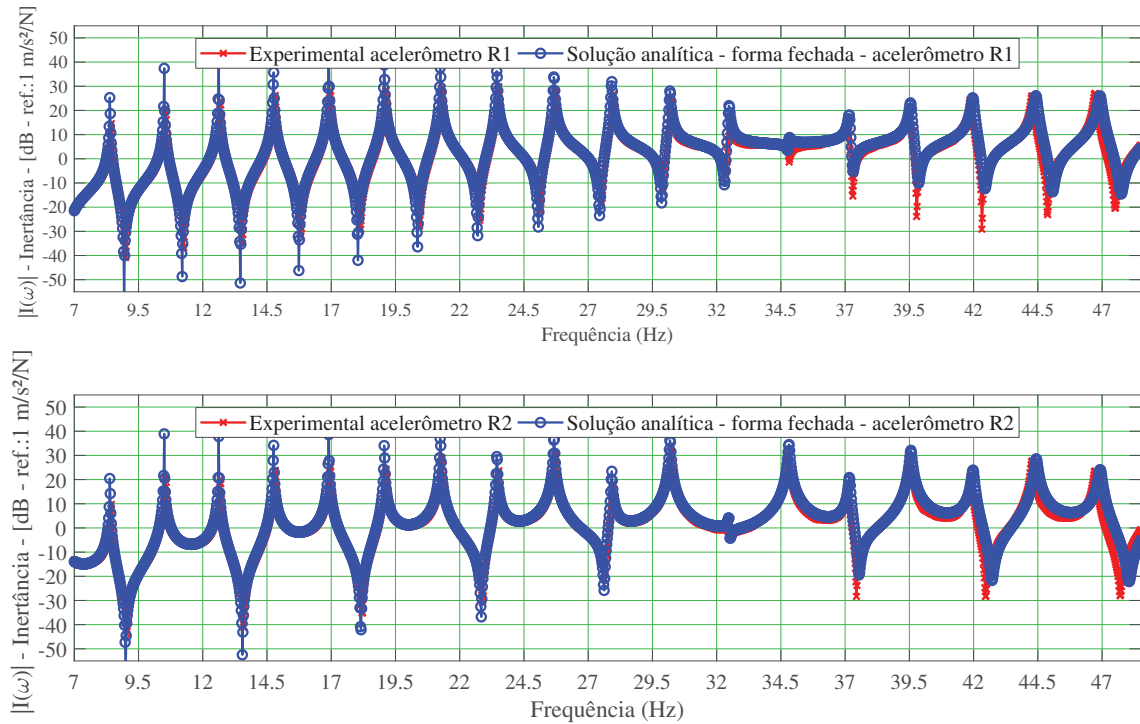
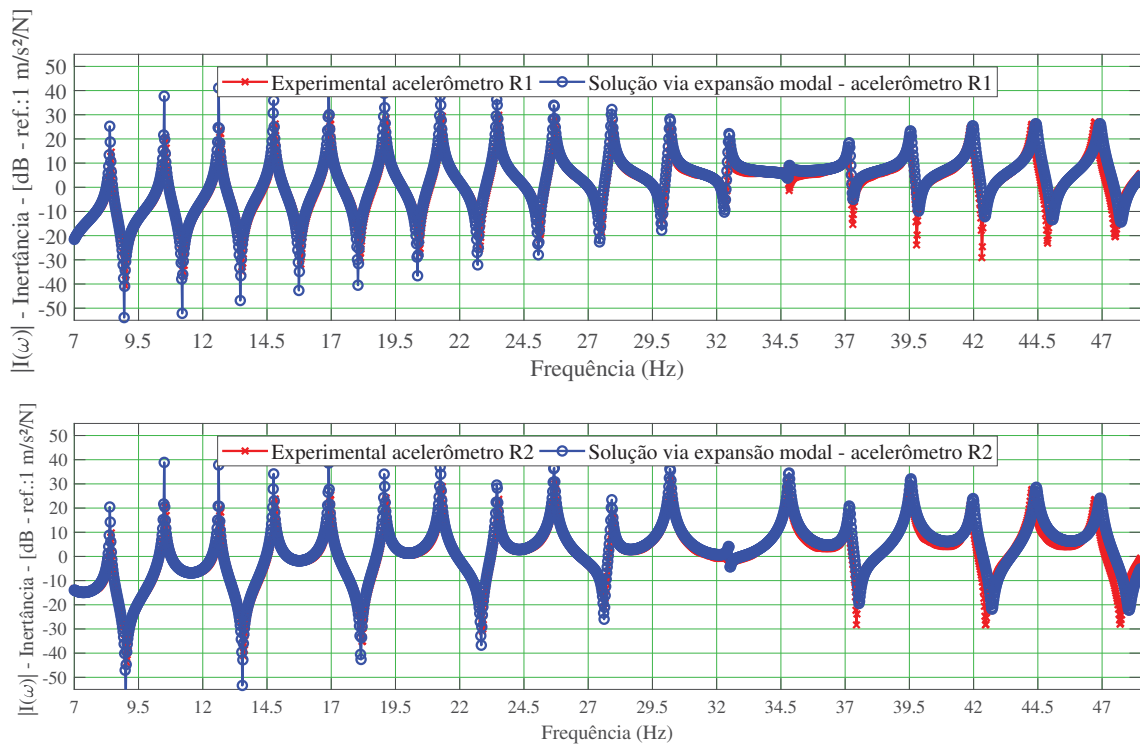


FIGURA 73 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL X NUMÉRICA - EMI - 20% RMC - $T = 10909N$
(a) EXPERIMENTAL X SAFF



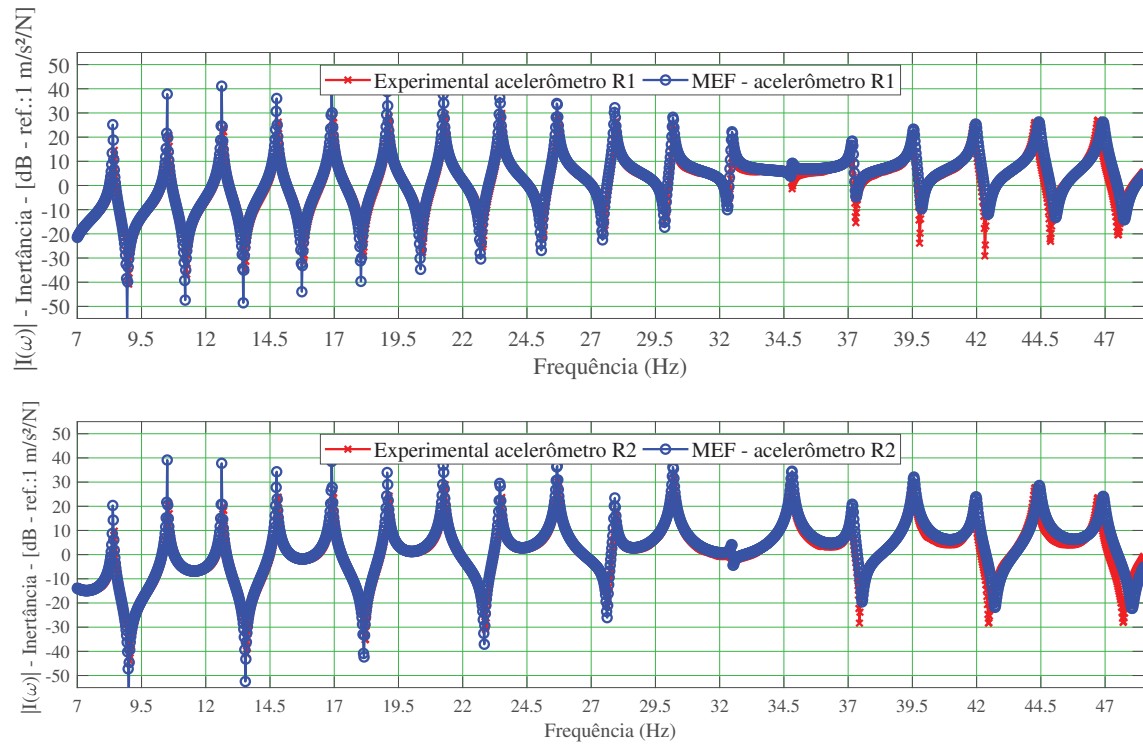
Fonte: O autor

(b) EXPERIMENTAL X SEM



Fonte: O autor

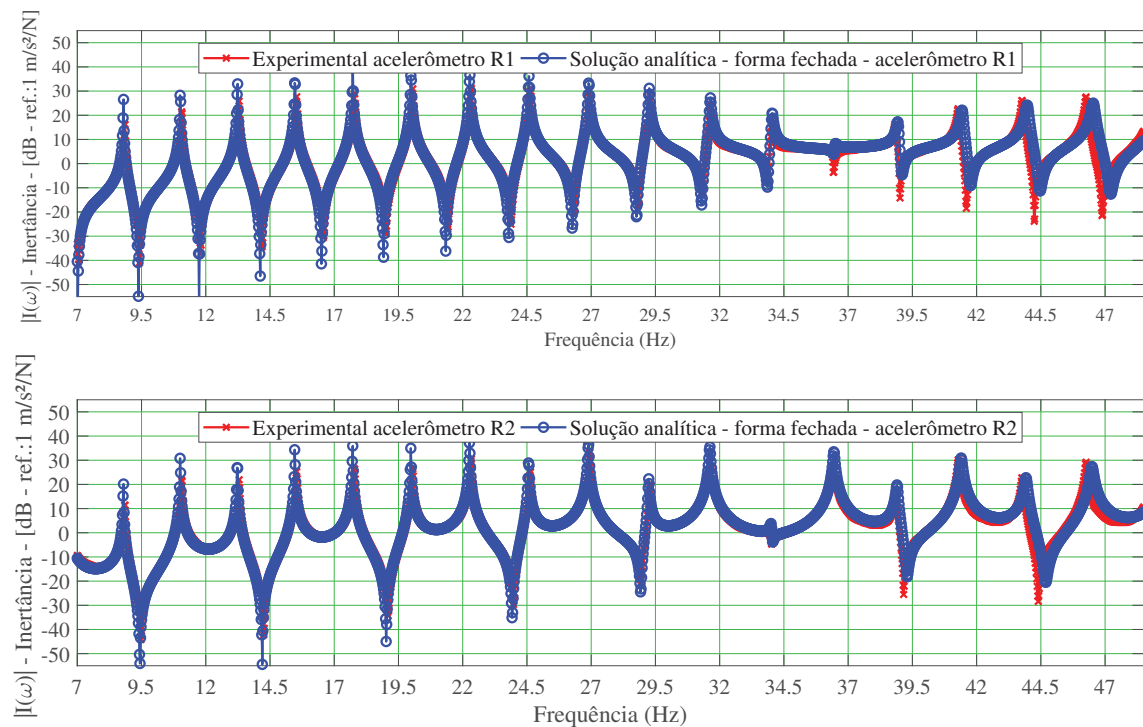
(c) EXPERIMENTAL X MEF



FONTE: O autor

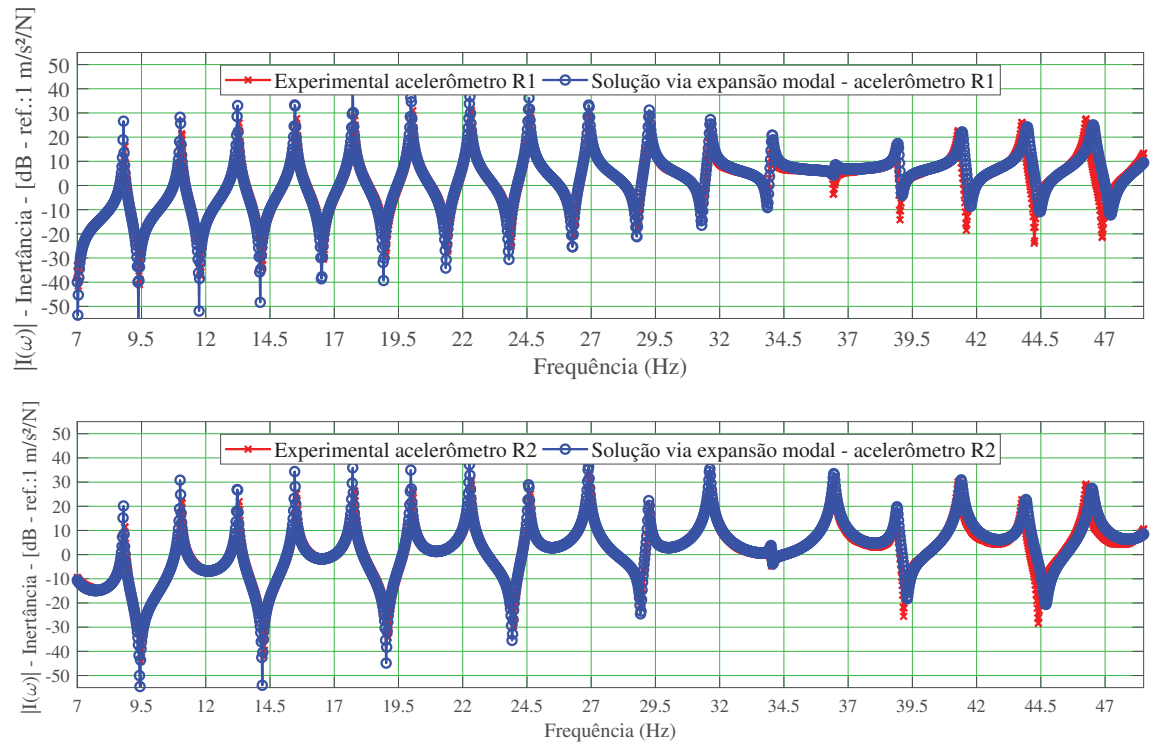
FIGURA 74 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL X NUMÉRICA - EMI - 22% RMC - $T = 12000N$

(a) EXPERIMENTAL X SAFF



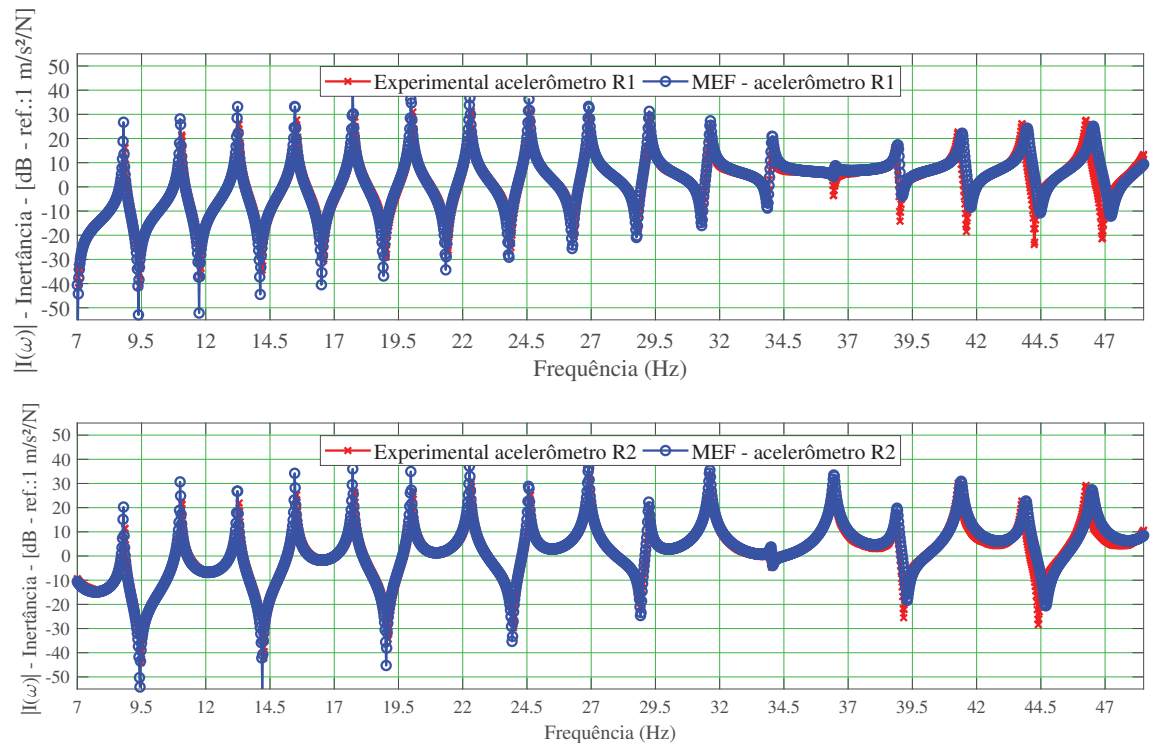
FONTE: O autor

(b) EXPERIMENTAL X SEM



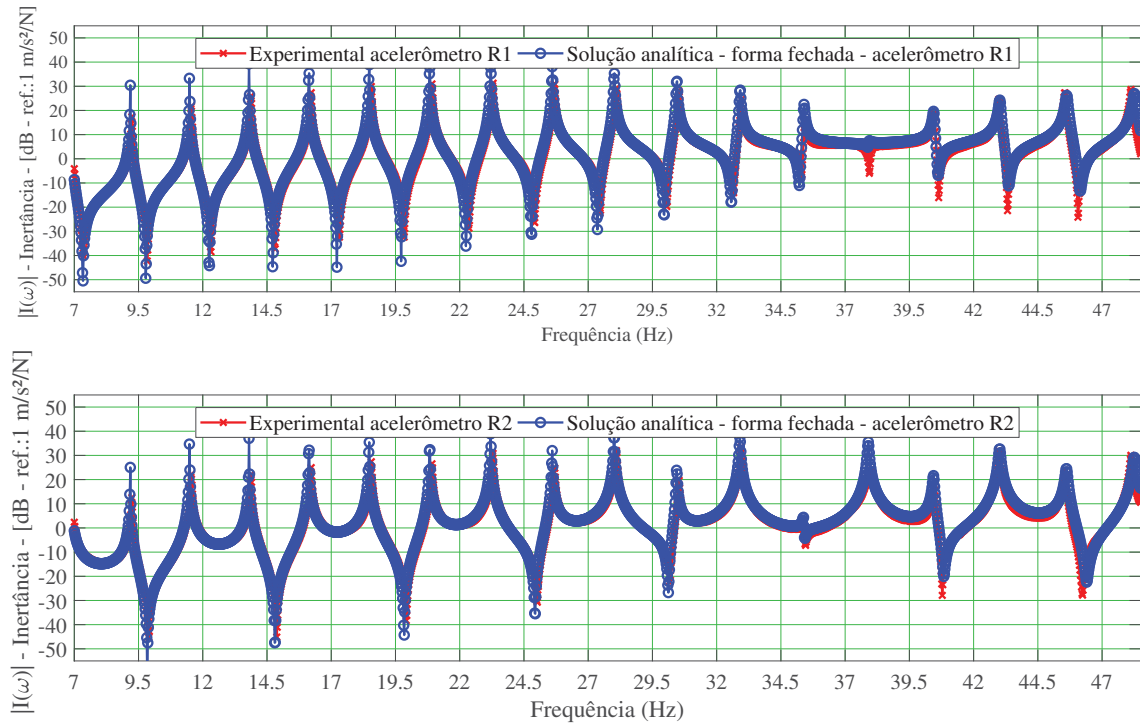
FONTE: O autor

(c) EXPERIMENTAL X MEF



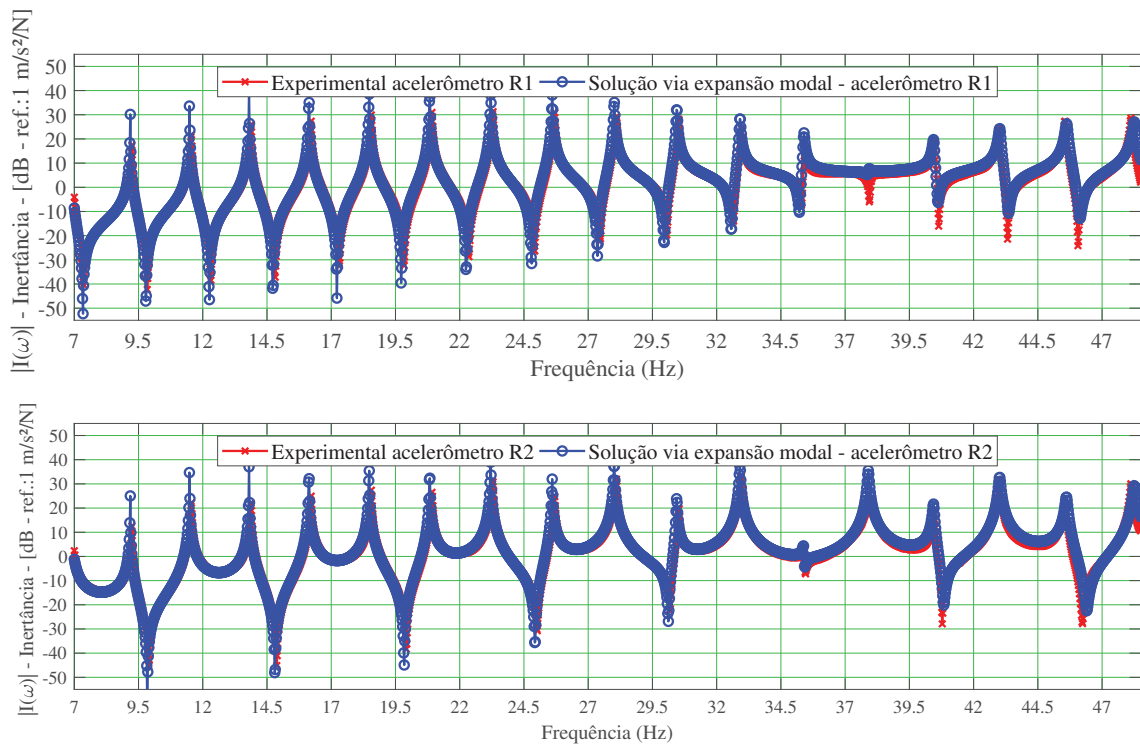
Fonte: O autor

FIGURA 75 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL X NUMÉRICA - EMI - 24% RMC - $T = 13090N$
(a) EXPERIMENTAL X SAFF



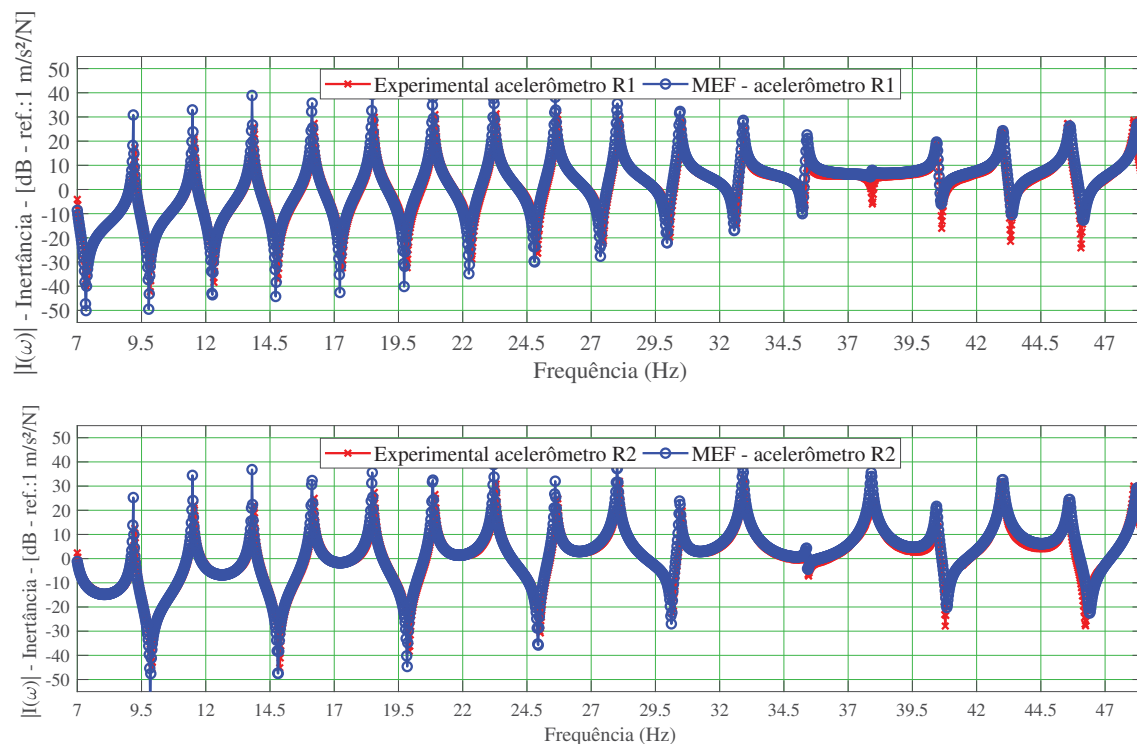
FONTE: O autor

(b) EXPERIMENTAL X SEM



FONTE: O autor

(c) EXPERIMENTAL X MEF



FONTE: O autor

É possível observar, ao analisar as figuras acima, uma notável coincidência entre as curvas experimentais e numéricas. Isso é válido para ambos os acelerômetros, diferentes formas de solução e níveis de força de tração.

Com o objetivo de aprofundar a análise, seguindo uma abordagem semelhante à empregada anteriormente para os ensaios de varredura harmônica, na TABELA 10 são expostos os valores finais da função objetivo do processo de otimização. Recordar-se que a função objetivo foi apresentada no Capítulo 5.

De maneira análoga ao que foi observado durante os ensaios de varredura harmônica, repetem-se constatações similares ao examinar os ensaios realizados com martelo de impacto. Os valores finais da função objetivo também exibem uma propensão a serem menores para as otimizações relacionadas ao acelerômetro R2, sugerindo um ajuste mais refinado neste ponto de medição em específico.

Ademais, nota-se uma perceptível semelhança nos valores finais da função objetivo em relação a cada abordagem de solução adotada e nível de força de tração analisado. Tal consistência, entre os valores indica que todas as soluções convergiram para pontos de mínimos próximos no espaço de busca, refletindo uma concordância sólida entre elas.

TABELA 10 – VALORES FINAIS DA FUNÇÃO OBJETIVO - EMI

Solução	Tração (N)	Valor final função objetivo $\times 10^4$	
		Ac - R1	Ac - R2
Analítica- forma fechada	8727	8,8023	6,8540
Expansão modal		8,6311	6,8587
MEF		8,7019	6,8596
Analítica- forma fechada	9818	5,3111	3,5652
Expansão modal		5,2223	5,3219
MEF		5,3219	3,5709
Analítica- forma fechada	10909	4,8087	4,1499
Expansão modal		4,6779	4,1552
MEF		4,7803	4,1499
Analítica - forma fechada	12000	5,3570	3,5284
Expansão modal		5,2501	3,5327
MEF		5,3067	3,5276
Analítica - forma fechada	13090	4,7044	3,4332
Expansão modal		4,6115	3,4346
MEF		4,6646	3,4293

FONTE: O autor

No que se refere à correlação entre as FRF's numéricas e experimentais, da mesma forma como realizado no contexto do ensaio de varredura harmônica, foi avaliado o valor médio do LAC. Os resultados correspondentes são apresentados nas FIGURAS 76a, 76b e 76b, para todos os níveis de tração, pontos de medição e abordagens de solução adotadas.⁵

Ao analisar as FIGURAS 76a, 76b e 76b, constata-se que, para as forças de tração $T = 8727N$ e $T = 9818N$, os valores médios do LAC situam-se acima de 0,85, em todas as três soluções empregadas. Já para as demais forças de tração, os valores médios do LAC estão acima de 0,90. Tais resultados indicam que a metodologia empregada é capaz de representar de maneira adequada as propriedades dinâmicas do sistema, inclusive no contexto dos ensaios realizados por meio do martelo de impacto.

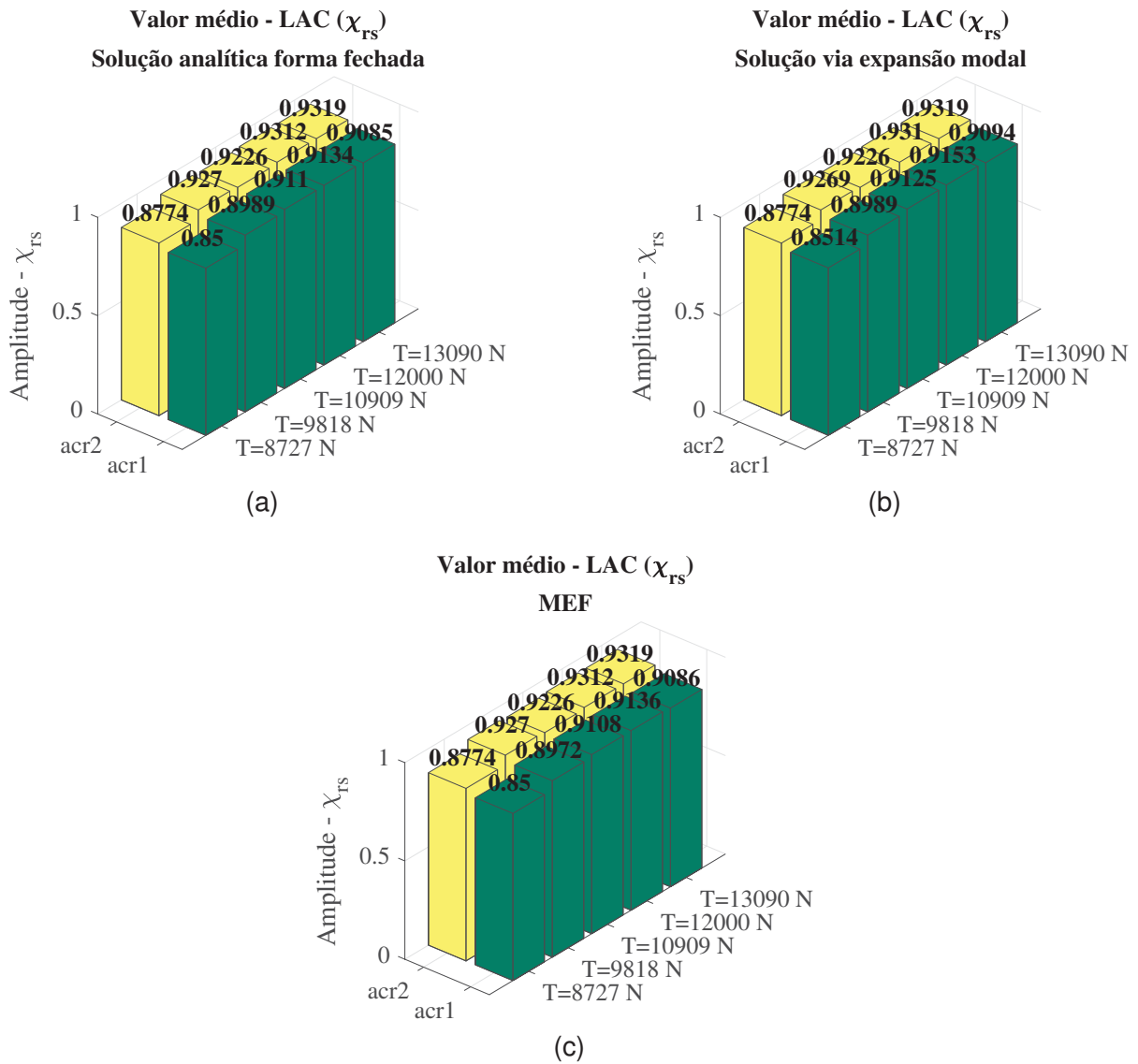
Adicionalmente, é notório que os resultados obtidos por meio do ensaio de impacto exibem uma melhor correlação entre dados numéricos e experimentais, em comparação ao observado no ensaio de varredura harmônica. Entende-se que isso pode ser atribuído à ausência de influência do excitador durante a realização do ensaio. Essa constatação destaca que o ensaio de impacto não só é muito mais rápido como também pode ser bem confiável (com os devidos cuidados) quando se trata da avaliação das propriedades dinâmicas de cabos aéreos.

No Apêndice E, são relacionados, em tabelas e gráficos, os valores numéricos

⁵ Os valores do indicador LAC, calculados ao longo da faixa de frequência analisada, encontram-se detalhados no Apêndice D.

e experimentais para as amplitudes de ressonância das FRFs e as frequências naturais.

FIGURA 76 – VALOR MÉDIO LAC - EMI



FONTE: O autor

6.3.2.2 Parâmetros Identificados

Na TABELA 11, são tabulados os valores ótimos dos parâmetros identificados em cada nível de força de tração para os acelerômetros R1 e R2. São consideradas, novamente, todas as soluções propostas.

Visando tornar mais clara a visualização dos resultados apresentados na TABELA 11, as FIGURAS 77a e 77b ilustram a variação da rigidez à flexão em relação à força de tração para os acelerômetros R1 e R2, respectivamente. Além disso, as FIGURAS 78a e 78b representam a variação do fator de perda material equivalente em função da força de tração. Tal como realizado anteriormente, para o ensaio de

varredura harmônica, ajustes lineares foram empregados para identificar a tendência da variação dos parâmetros de interesse. ⁶

TABELA 11 – PARÂMETROS IDENTIFICADOS - ENSAIO DE IMPACTO

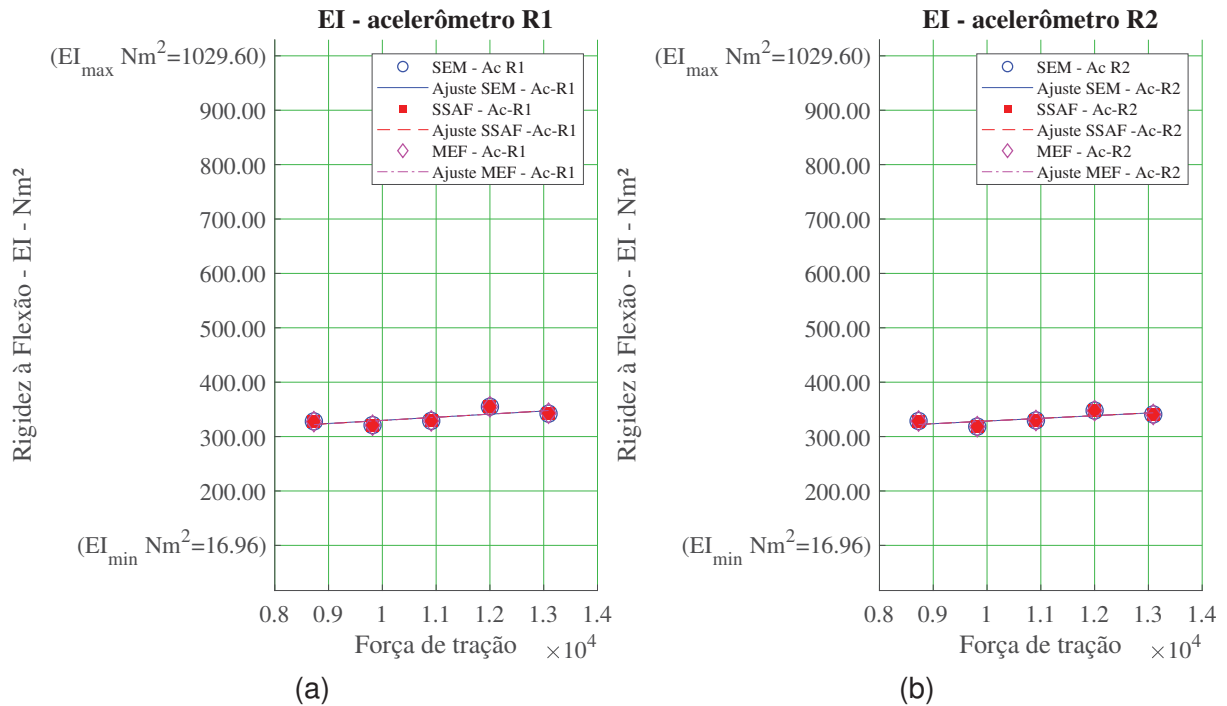
Solução	Tração (N)	EI Nm^2		η		K_{T1} Nm/rad ($\times 10^{10}$)	
		Ac - R1	Ac - R2	Ac - R1	Ac - R2	Ac - R1	Ac - R2
Analítica - forma fechada	8727	328,073	328,535	0,0257	0,0238	4,84	4,85
Expansão modal		327,946	328,614	0,0258	0,0238	4,84	4,85
MEF		327,532	328,5921	0,026	0,0238	4,84	4,86
Analítica - forma fechada	9818	320,429	318,312	0,0251	0,0260	4,73	4,70
Expansão modal		321,088	318,386	0,0248	0,0259	4,74	4,70
MEF		320,881	318,245	0,0250	0,0260	4,74	4,70
Analítica - forma fechada	10909	328,676	329,706	0,0213	0,0195	4,85	4,82
Expansão modal		328,899	329,703	0,0207	0,0195	4,86	4,87
MEF		328,714	329,595	0,0208	0,0195	4,85	4,87
Analítica - forma fechada	12000	354,771	347,906	0,0245	0,0231	5,24	5,14
Expansão modal		354,978	347,881	0,0245	0,0231	5,24	5,14
MEF		354,812	347,754	0,0243	0,0231	5,24	5,14
Analítica - forma fechada	13090	342,785	340,793	0,0216	0,0202	5,07	5,07
Expansão modal		342,145	340,782	0,0216	0,0202	5,06	5,03
MEF		342,997	340,647	0,0217	0,0202	5,07	5,03

FONTE: O autor

A análise da TABELA 11, em conjunto com as representações gráficas nas FIGURAS 77a, 77b, 78a e 78b, permite inferir que os parâmetros identificados por meio das três abordagens numéricas utilizadas apresentam de forma consistente durante a etapa de atualização do modelo, realizada por meio da abordagem de otimização híbrida. Esse padrão também foi anteriormente observado no ensaio de varredura harmônica.

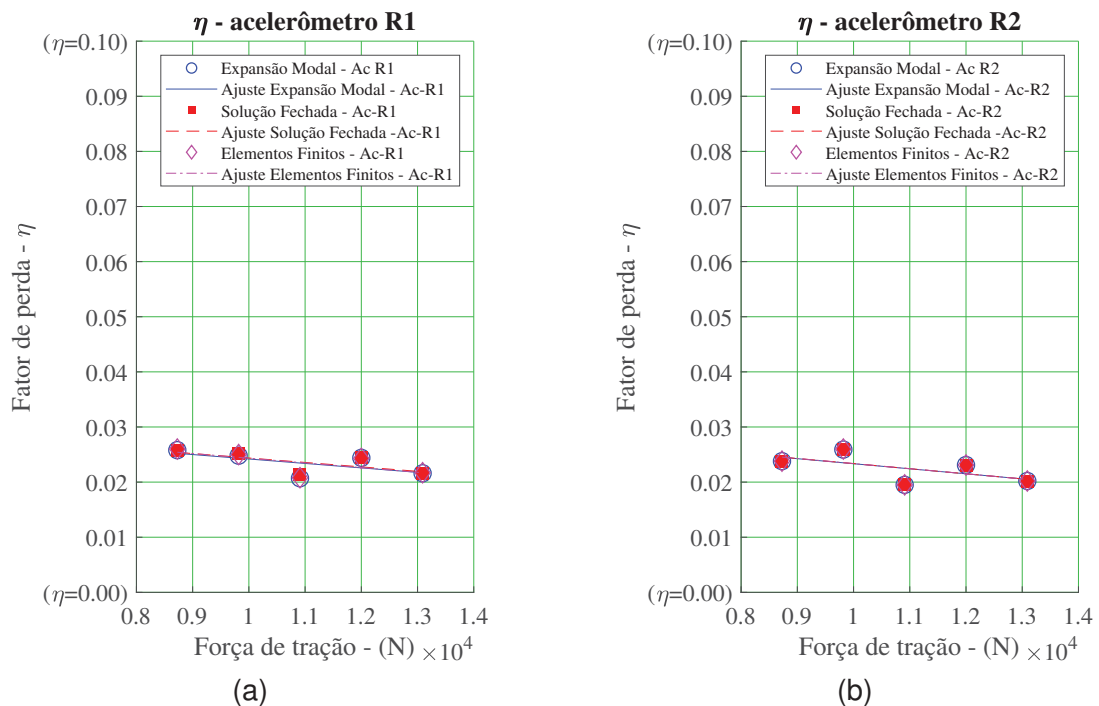
⁶ As equações dos ajustes lineares das figuras 77a, 77b, 78a e 78b são apresentadas no Apêndice F.

FIGURA 77 – VARIAÇÃO DA RIGIDEZ À FLEXÃO EM FUNÇÃO DA FORÇA DE TRAÇÃO - ENSAIO DE IMPACTO



FONTE: O autor

FIGURA 78 – VARIAÇÃO DO FATOR DE PERDA MATERIAL EQUIVALENTE EM FUNÇÃO DA FORÇA DE TRAÇÃO - ENSAIO DE IMPACTO



FONTE: O autor

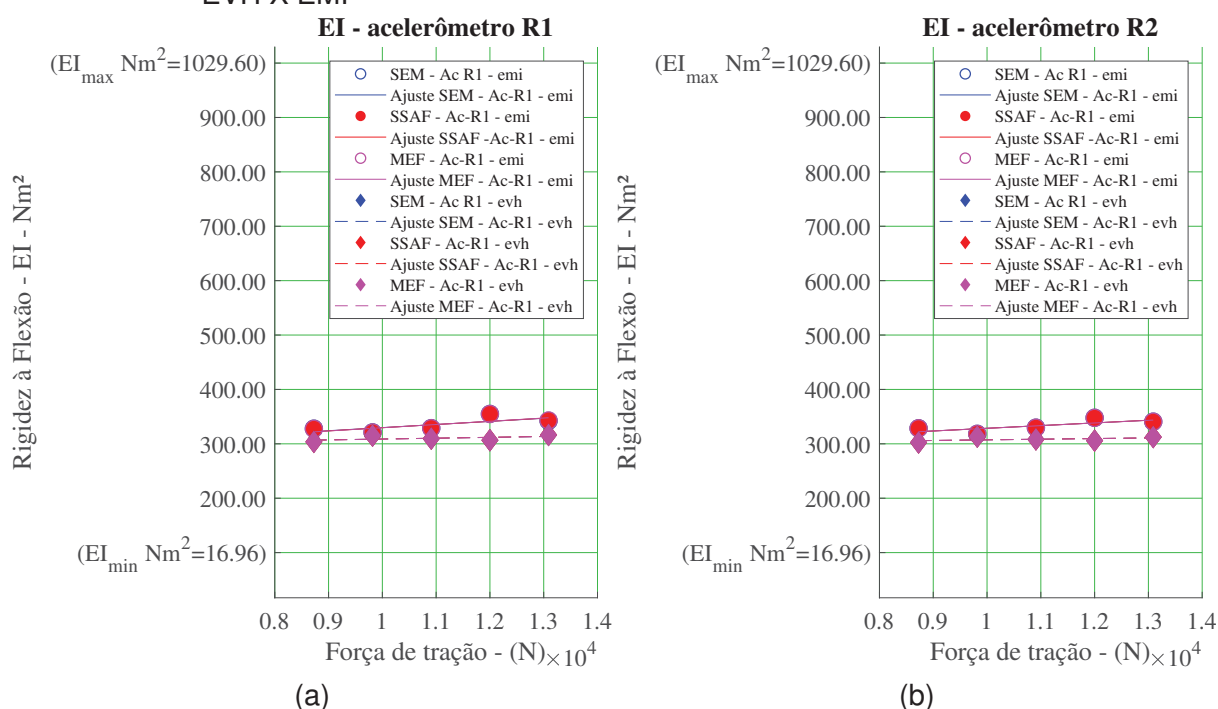
É evidente que os valores de rigidez à flexão (EI) e de fator de perda material equivalente (η) para o ensaio de impacto, identificados por meio da abordagem de otimização híbrida, seguem o mesmo padrão de comportamento identificado no ensaio de

varredura harmônica. Em outras palavras, o EI apresenta uma tendência de aumento com o incremento da força de tração, enquanto o η exibe uma tendência de redução. Esse alinhamento reforça, de maneira substancial, as suposições concernentes à dissipação de energia, as quais, por sua vez, estão correlacionadas com os movimentos relativos das partes constituintes do cabo e com a força de tração aplicada.

No tocante ao valor de K_{T1} , percebe-se que sua magnitude, no contexto dos ensaios de impacto, tende a ser elevado, na ordem de 10^{10} Nm/rad, sugerindo uma condição de engaste nesse ponto. Isso difere do observado nos ensaios de varredura harmônica, que indicam uma condição de apoio simples. Essa disparidade pode ser atribuída à maior quantidade de energia transferida ao cabo pelo excitador eletromecânico durante o ensaio de varredura harmônica.

Pode-se observar também que os valores de rigidez à flexão, identificados via ensaios de impacto, apresentam valores ligeiramente maiores em comparação com aqueles obtidos por meio dos ensaios de varredura harmônica. O mesmo padrão é observado no caso do fator de perda material equivalente. Essa comparação pode ser visualizada nas FIGURAS 79a, 79b, 80a e 80b.

FIGURA 79 – VARIAÇÃO DA RIGIDEZ À FLEXÃO EM FUNÇÃO DA FORÇA DE TRAÇÃO - EVH X EMI

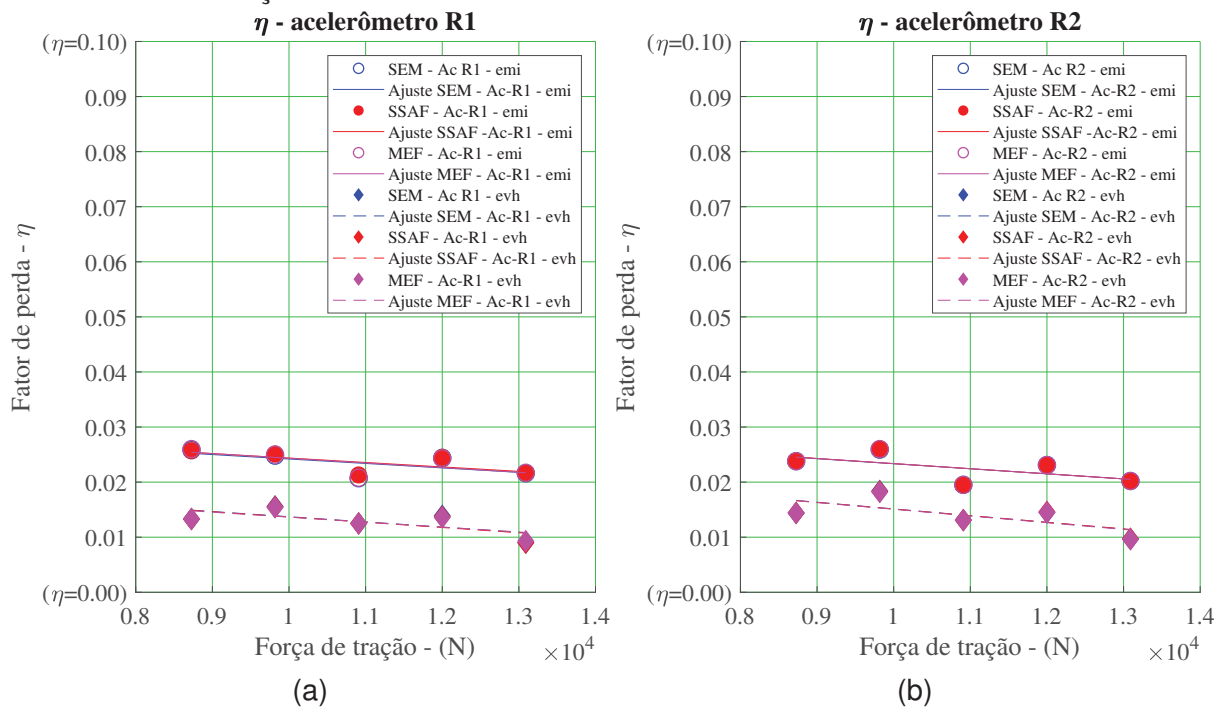


FONTE: O autor

A obtenção de valores mais baixos de rigidez à flexão nos ensaios de varredura harmônica pode ser justificada, inicialmente, pela influência da força aplicada pelo excitador. Essa força não apenas altera a condição de contorno na região próxima à máquina de tração, mas também pode ocasionar um maior deslizamento entre as

partes constituintes do cabo, resultando em uma leve redução da sua rigidez, quando se compara ao que ocorre nos ensaios de impacto.

FIGURA 80 – VARIAÇÃO DO FATOR DE PERDA MATERIAL EM FUNÇÃO DA FORÇA DE TRAÇÃO - EVH X EMI



FONTE: O autor

Já no caso do fator de perda material equivalentes, é possível que seus valores estejam ligeiramente superestimados no caso do ensaio de impacto. Isso seria devido à aplicação da janela exponencial que introduz amortecimento artificial na resposta do sistema, tal como foi explanado anteriormente.

Embora ensaios com martelo de impacto não sejam tão comuns em estruturas como cabos aéreos, seus resultados demonstram uma notável coerência com os valores numéricos. Esse ensaio apresenta tendências similares nas características dinâmicas identificadas, em comparação com o ensaio de varredura harmônica, reforçando sua validade como procedimento experimental. Portanto, o ensaio com martelo de impacto se destaca como uma abordagem promissora, devido à sua eficácia, rapidez e simplicidade experimental.

7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

7.1 CONCLUSÕES

Na presente tese, foi proposta uma metodologia de descrição e quantificação da rigidez à flexão e do fator de perda equivalente de cabos aéreos, por meio do uso de técnicas de otimização não linear (TONL) aplicadas a dados experimentais e aos modelos representativos do sistema em análise. Aplicou-se uma abordagem híbrida de otimização, que combina algoritmos genéticos com uma técnica local de programação quadrática sequencial (SQP). Nesse contexto, foi conduzida uma campanha experimental que abrangeu cinco níveis de tração e dois procedimentos diferentes de ensaio, quais sejam, varredura harmônica e impacto.

A análise dos dados experimentais revelou que o cabo manifestou um comportamento intrinsecamente linear em toda a amplitude da faixa de frequência considerada, nas condições previamente definidas para a realização dos ensaios. Também foi observada uma leve diferença entre os resultados experimentais obtidos nos ensaios de varredura harmônica e nos ensaios de impacto. Entende-se que uma das potenciais razões para essa discrepância reside, principalmente, na interação entre o excitador eletromecânico (*shaker*) e o próprio cabo. Apesar da conexão flexível empregada mitigar essa interação, os gráficos examinados indicam, de maneira clara, a persistência de certa influência.

No que se refere à análise modal experimental, conduzida por meio do método LSRF, foi constatado um incremento nas frequências naturais à medida que a tração aplicada ao cabo é aumentada. Essa relação era previsível, uma vez que o aumento da tração resulta em um incremento na rigidez do cabo.

Outra observação relevante diz respeito à tendência de redução do amortecimento modal à medida que a tração é aumentada, o que foi observado em ambos os ensaios. Essa diminuição está associada ao aumento da energia potencial total e à redução da dissipação de energia, decorrente da diminuição do movimento relativo entre as partes constituintes do cabo.

Na identificação de parâmetros do cabo, ficou evidente que as três formulações matemáticas desenvolvidas para solucionar o problema, fornecendo, respectivamente, a solução analítica na forma fechada, a solução via expansão modal e o método de elementos finitos, produziram resultados coesos e congruentes entre si. Essa congruência indica que todas as abordagens convergiram para regiões de mínimos bem próximas no espaço de busca, apontando para uma tranquilizadora correspondência no processo de identificação paramétrica.

Salienta-se que para todas as situações de identificação e atualização estrutural, foi possível alcançar uma correlação superior a 0,8 entre as funções resposta em frequência (FRFs) numéricas e experimentais. Esses resultados oferecem evidências sólidas de que as abordagens numéricas desenvolvidas são capazes de representar de forma adequada as propriedades dinâmicas do sistema em diversas condições de tração, nos pontos de medição selecionados, tanto para os ensaios de varredura harmônica quanto para os ensaios de impacto.

De maneira geral, foi observada uma influência significativa da força de tração nas magnitudes das grandezas identificadas experimentalmente: rigidez à flexão e fator de perda material equivalente. Apesar de uma ligeira variabilidade nos dados, uma tendência geral se destaca. Conforme a força de tração aumenta, é notável uma propensão ao aumento do valor da rigidez à flexão, enquanto que o fator de perda material equivalente apresenta uma tendência inversa, qual seja, de redução.

Esse comportamento é essencialmente atribuído ao movimento relativo entre os elementos constituintes do cabo ensaiado. À medida que a força de tração aumenta, o cabo tende a se tornar mais coeso, adotando características semelhantes às de uma viga maciça. Isso resulta em um aumento na magnitude da rigidez à flexão, uma vez que a estrutura se torna mais resistente à deformação elástica. Simultaneamente, esse processo dificulta o movimento relativo entre as partes constituintes do cabo, reduzindo a dissipação de energia e, conseqüentemente, influenciando diretamente no fator de perda material equivalente, que tende a diminuir, como já constado na literatura (EPRI, 2006; PAPAILIOU, 1997; LANGLOIS et al., 2013; CASTELLO; MATT, 2011).

No que se refere ao fator de perda material equivalente, entende-se que seu valor esteja ligeiramente superestimado no contexto do ensaio de impacto, devido à aplicação da janela exponencial. Essa janela introduz um amortecimento artificial na resposta do sistema, influenciando na estimativa de grandezas associadas ao amortecimento.

Apesar do ensaio de impacto não ser tão usual em estruturas como cabos aéreos, seus resultados foram muito satisfatórios. Esse ensaio exibiu tendências semelhantes, nas características identificadas, àquelas observadas no ensaio de varredura harmônica, reforçando sua validade como um procedimento eficaz. Acredita-se que essa técnica constitui uma alternativa promissora, devido à sua eficiência e simplicidade experimental. No entanto, é importante destacar que ajustes experimentais devem ser considerados, ou para retirar o efeito do amortecimento artificial decorrente do uso da janela exponencial, ou para adquirir dados em janelas de tempo mais extensas, contribuindo para uma avaliação mais fidedigna dos resultados.

Ao contrário de outros estudos encontrados na literatura (CASTELLO; MATT, 2011; HERNÁNDEZ et al., 2018; MACHADO et al., 2020), que conduziram seus ensaios

e processos de identificação paramétrica com apenas dois níveis de tração, a presente tese expandiu essa investigação ao considerar cinco níveis de força de tração e dois tipos distintos de ensaios experimentais. Essa abordagem permitiu o embasamento de uma metodologia mais abrangente e precisa para compreender o comportamento dinâmico de cabos aéreos. Assim, acredita-se que a pesquisa realizada contribui de maneira significativa para o avanço do estado da arte nesse campo, proporcionando valiosas percepções para um melhor entendimento da dinâmica das estruturas de interesse.

Acredita-se, em particular, que uma forma mais apurada de se quantificar o amortecimento próprio de cabos aéreos, em relação ao corrente procedimento normalizado, foi apresentada. Entende-se que isso permitirá uma melhor descrição do comportamento dinâmico dos cabos aéreos, com especial e significativo impacto na real predição de ações de controle das vibrações eólicas. Como já mencionado nas partes iniciais da tese, as medições normalizadas de amortecimento próprio (intrínseco) dos cabos aéreos ainda são objeto de frequentes ressalvas, vindo o presente trabalho a contribuir com uma metodologia mais consistente de ensaio.

7.2 SUGESTÃO DE TRABALHOS FUTUROS

Dado o potencial significativo do tema de pesquisa, são sugeridos os seguintes tópicos para trabalhos futuros:

- I. Realizar ensaios experimentais utilizando outros tipos de sinais de excitação, como o sinal *Chirp* e ruído branco;
- II. Conduzir ensaios de impacto sem a aplicação de janelamento exponencial;
- III. Realizar ensaios de varredura harmônica com controle da amplitude ou da velocidade da excitação, explorando possíveis variações nas propriedades elásticas e de dissipação de energia;
- IV. Realizar ensaios em diferentes tipos de cabos aéreos para fins de comparação das propriedades de rigidez à flexão e amortecimento;
- V. Incorporar, no modelo representativo do sistema, os efeitos dissipativos provenientes das terminações do cabo;
- VI. Empregar outros modelos de amortecimento material;
- VII. Ampliar o número de amostras dos ensaios para avaliar a variabilidade estatística das propriedades elásticas e de dissipação de energia identificadas.

- VIII.** Realizar ensaios com níveis de excitação mais elevados, visando identificar possíveis não linearidades intrínsecas ao sistema.

REFERÊNCIAS

ADHIKARI, S. **Damping models for structural vibration**. 2001. Tese (Doutorado) – University of Cambridge. Citado 1 vez na página 48.

AMARAL, G. R. do. **METODOLOGIA EXPERIMENTAL PARA DETERMINAÇÃO DA EFICÁCIA DE NEUTRALIZADORES DINÂMICOS DE VIBRAÇÃO PARA CABOS AÉREOS**. 2016. Dissertação de mestrado. Citado 3 vezes nas páginas 41, 42, 54.

ARGATOV, I. Response of a wire rope strand to axial and torsional loads: Asymptotic modeling of the effect of interwire contact deformations. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 48, n. 10, p. 1413–1423, 2011. Citado 1 vez na página 43.

ARORA, R. K. **Optimization: Algorithms and Applications**. [S.l.]: CRC press, 2015. Citado 9 vezes nas páginas 183–188.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 16686**: Cabos de alumínio - liga 1120 para linhas aéreas - Especificação. Rio de Janeiro, ago. 2018. P. 22. Citado 1 vez na página 88.

BALTHAZAR, J. M.; TUSSET, A. M.; RIBEIRO, M. A.; LENZ, W. B.; PICCIRILLO, V.; COLÓN, D.; BUENO, Á. M.; LENZI, G. G.; JANZEN, F. C. **Sistemas dinâmicos e mecatrônicos-Volume 1: Teoria e aplicação de controle**. [S.l.]: Editora Blucher, 2021. Citado 1 vez nas páginas 186, 187.

BARBIERI, N.; SOUZA JUNIOR, O. H. de; BARBIERI, R. Dynamical analysis of transmission line cables. Part 2—damping estimation. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 18, n. 3, p. 671–681, 2004. Citado 1 vez na página 42.

BARBIERI, N.; SOUZA JÚNIOR, O. H. de; BARBIERI, R. Dynamical analysis of transmission line cables. Part 1—linear theory. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 18, n. 3, p. 659–669, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 27, 42, 48, 54.

BARBIERI, R.; BARBIERI, N.; SOUZA JUNIOR, O. H. de. Dynamical analysis of transmission line cables. Part 3—Nonlinear theory. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 22, n. 4, p. 992–1007, 2008. Citado 2 vez na página 43.

BARRY, O.; ZU, J.; OGUAMANAM, D. Forced vibration of overhead transmission line: analytical and experimental investigation. **Journal of Vibration and Acoustics**, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 136, n. 4, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 32, 33.

BERT, C. **Material Damping: An Introductory Review of Mathematical Models, Measures and Experimental Techniques**. v. 29. [S.l.]: Elsevier, 1973. P. 129–153. Citado 1 vez na página 76.

BISHOP, R. The analysis of vibrating systems which embody beams in flexure. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 169, n. 1, p. 1031–1050, 1955. Citado 1 vez na página 63.

BISHOP, R. E. D.; JOHNSON, D. C. **The Mechanics of Vibration**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1960. Citado 1 vez na página 63.

BOKAIAN, A. Natural frequencies of beams under tensile axial loads. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 142, n. 3, p. 481–498, 1990. Citado 4 vezes nas páginas 58–60.

BRASIL, R. M.; SILVA, M. A. da. **Otimização de Projetos de Engenharia**. [S.l.]: Editora Blucher, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 184, 186, 187.

BRENNAN, M. J.; TANG, B. **Virtual Experiments in Mechanical Vibrations: Structural Dynamics and Signal Processing**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2022. Citado 1 vez na página 63.

CAPUTO, M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II. **Geophysical Journal International**, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, v. 13, n. 5, p. 529–539, 1967. Citado 1 vez na página 51.

CASTELLO, D. A.; MATT, C. F. T. A validation metrics based model calibration applied on stranded cables. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, SciELO Brasil, v. 33, p. 417–427, 2011. Citado 15 vezes nas páginas 27, 41, 42, 44, 45, 49–52, 54, 64, 151.

CIGRÉ. **State of the art for testing self-damping characteristics of conductors for overhead lines**. [S.l.]: Cigré, 2011. Citado 1 vez na página 89.

CLOUGH, R.; PENZIEN, J. **Dynamics of Structures**. [S.l.]: McGraw-Hill NY, USA, 1975. Citado 4 vezes nas páginas 54, 56, 58, 74.

COSTELLO, G.; PHILLIPS, J. Contact stresses in thin twisted rods. **Journal of Applied Mechanics**, v. 40, n. 2, p. 629–630, 1973. Citado 2 vezes nas páginas 42, 43.

COSTELLO, G. A. Theory of Wire Rope. **Journal of Engineering Mechanics**, New York: Springer International Publishing, v. 119, 1990. Citado 1 vez na página 43.

CROSSLEY, J.; SPENCER, A.; ENGLAND, A. Analytical solutions for bending and flexure of helically reinforced cylinders. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 40, n. 4, p. 777–806, 2003. Citado 1 vez na página 43.

DASTOUS, J.-B. Nonlinear finite-element analysis of stranded conductors with variable bending stiffness using the tangent stiffness method. **IEEE Transactions on Power Delivery**, IEEE, v. 20, n. 1, p. 328–338, 2005. Citado 5 vezes nas páginas 35, 44–46.

DIANA, G.; FALCO, M.; CIGADA, A.; MANENTI, A. On the measurement of overhead transmission lines conductor self-damping. **IEEE Transactions on Power Delivery**, IEEE, v. 15, n. 1, p. 285–292, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 27, 41, 47, 116.

ELATA, D.; ESHKENAZY, R.; WEISS, M. The mechanical behavior of a wire rope with an independent wire rope core. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 41, n. 5-6, p. 1157–1172, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 26, 43, 44.

EPRI. **ELECTRIC POWER RESEARCH INSTITUTE (EPRI)**. Palo Alto: Reference Book: Wind Induced Conductor Motion, 2006. Citado 35 vezes nas páginas 26, 27, 30–39, 48, 89, 97, 103, 116, 151.

EWINS, D. J. **Modal testing: theory, practice and application**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009. Citado 8 vezes nas páginas 83, 96, 178–180, 182.

FANG, J.; LYONS, G. Structural damping of tensioned pipes with reference to cables. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 193, n. 4, p. 891–907, 1996. Citado 7 vezes nas páginas 64, 74, 76, 77.

FARQUHARSON, F. B.; MCHUGH, R. E. Wind tunnel investigation of conductor vibration with use of rigid models [includes discussion]. **Transactions of the American**

Institute of Electrical Engineers. Part III: Power Apparatus and Systems, IEEE, v. 75, n. 3, p. 871–878, 1956. Citado 1 vez na página 89.

FLADUNG, W.; ROST, R. Application and correction of the exponential window for frequency response functions. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 11, n. 1, p. 23–36, 1997. Citado 2 vez na página 93.

FONTANARI, V.; BENEDETTI, M.; MONELLI, B. Elasto-plastic behavior of a Warrington-Seale rope: Experimental analysis and finite element modeling. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 82, p. 113–120, 2015. Citado 1 vez na página 43.

FOTI, F.; MARTINELLI, L. An enhanced unified model for the self-damping of stranded cables under aeolian vibrations. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, Elsevier, v. 182, p. 72–86, 2018. Citado 7 vezes nas páginas 26, 32, 44, 46, 97, 103.

_____. Mechanical modeling of metallic strands subjected to tension, torsion and bending. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 91, p. 1–17, 2016. Citado 5 vezes nas páginas 26, 35, 44, 46.

FOTI, F.; MARTINELLI, L.; PEROTTI, F. A parametric study on the structural damping of suspended cables. **Procedia engineering**, Elsevier, v. 199, p. 140–145, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 26, 35, 44, 47.

FRANKLIN, P. A. **Modal Analysis of Long Systems: A Transfer Matrix Approach**. 1989. Tese (Doutorado) – Johns Hopkins University. Citado 1 vez na página 58.

FU, Z.-F.; HE, J. **Modal analysis**. [S.l.]: Elsevier, 2001. Citado 6 vezes nas páginas 83, 179, 180, 182.

GARDONIO, P.; BRENNAN, M. Mobility and impedance methods in structural dynamics. In: **ADVANCED applications in acoustics, noise and vibration**. [S.l.]: CRC Press, 2004. P. 403–461. Citado 1 vez na página 63.

GAZZOLA, C. Modelling and assessment of aeolian vibrations of overhead transmission line conductors: theory and implementation. Italy, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 32, 34, 36.

GEUZAIN, M.; FOTI, F.; DENOËL, V. Minimal requirements for the vibration-based identification of the axial force, the bending stiffness and the flexural boundary conditions in cables. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 511, p. 116326, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 58, 62.

GIOSAN, I. Cargas induzidas por desprendimento de vórtices em estruturas independentes. **Metodologia de estimativa de resposta de derramamento de vórtice estrutural e simulação de elementos finitos**, v. 42, 2013. Citado 0 vez na página 33.

GLADWELL, G. The receptance function of a beam. **Mathematika**, London Mathematical Society, v. 6, n. 2, p. 134–141, 1959. Citado 2 vez na página 66.

GLADWELL, G.; BISHOP, R. Interior receptances of beams. **Journal of Mechanical Engineering Science**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 2, n. 1, p. 1–15, 1960. Citado 2 vezes nas páginas 63, 66.

GODARD, B.; GUERARD, S.; LILIEN, J.-L. Original real-time observations of aeolian vibrations on power-line conductors. **IEEE Transactions on Power Delivery**, IEEE, v. 26, n. 4, p. 2111–2117, 2011. Citado 1 vez na página 89.

GONG, J.; ZHI, X.; FAN, F.; SHEN, S. Static and dynamic stiffness in the modeling of inclined suspended cables. **Journal of Constructional Steel Research**, Elsevier, v. 172, p. 106210, 2020. Citado 1 vez na página 43.

GOODDING, J. C.; ARDELEAN, E. V.; BABUSKA, V.; ROBERTSON III, L. M.; LANE, S. A. Experimental techniques and structural parameter estimation studies of spacecraft cables. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 48, n. 6, p. 942–957, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 41, 42.

HAGEDORN, P. Wind-excited vibrations of transmission lines: A comparison of different mathematical models. **Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 8, p. 352–358, 1987. Citado 3 vezes nas páginas 33, 34.

HAGEDORN, P.; MITRA, N.; HADULLA, T. Vortex-excited vibrations in bundled conductors: A mathematical model. **Journal of Fluids and Structures**, Elsevier, v. 16, n. 7, p. 843–854, 2002. Citado 1 vez na página 42.

HAGEDORN, P. On the computation of damped wind-excited vibrations of overhead transmission lines. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 83, n. 2, p. 253–271, 1982. Citado 1 vez na página 42.

HERNÁNDEZ, W. P.; CASTELLO, D. A.; MATT, C. F. On the model building for transmission line cables: a Bayesian approach. **Inverse Problems in Science and Engineering**, Taylor & Francis, v. 26, n. 12, p. 1784–1812, 2018. Citado 13 vezes nas páginas 27, 41, 42, 44, 45, 51, 52, 54, 64, 151.

HONG, K.-J.; DER KIUREGHIAN, A.; SACKMAN, J. L. Bending behavior of helically wrapped cables. **Journal of Engineering Mechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 131, n. 5, p. 500–511, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 35, 44, 45.

HOVER, F.; TRIANTAFYLLOU, M. Linear dynamics of curved tensioned elastic beams. **Journal of Sound and Vibration**, v. 4, n. 228, p. 923–930, 1999. Citado 1 vez na página 41.

INMAN, D. J. **Vibration with control**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2017. Citado 1 vez na página 65.

INMAN, D. J.; SINGH, R. C. **Engineering vibration**. [S.l.]: Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 1994. v. 3. Citado 2 vezes nas páginas 44, 58.

IRVINE, H. M.; CAUGHEY, T. K. The linear theory of free vibrations of a suspended cable. **Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences**, The Royal Society London, v. 341, n. 1626, p. 299–315, 1974. Citado 3 vezes nas páginas 41, 54.

JOHANSEN, V.; ERSDAL, S.; SØRENSEN, A. J.; LEIRA, B. Modelling of inextensible cable dynamics with experiments. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Elsevier, v. 41, n. 4, p. 543–555, 2006. Citado 1 vez na página 41.

JOLICOEUR, C. Comparative study of two semicontinuous models for wire strand analysis. **Journal of Engineering Mechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 123, n. 8, p. 792–799, 1997. Citado 1 vez na página 43.

JOLICOEUR, C.; CARDOU, A. Semicontinuous mathematical model for bending of multilayered wire strands. **Journal of Engineering Mechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 122, n. 7, p. 643–650, 1996. Citado 2 vez na página 43.

KALOMBO, R.; MIRANDA, T.; ROCHA, P.; FERREIRA, J.; DA SILVA, C.; ARAÚJO, J. Fatigue performance of overhead conductors tested under the same value of H/w parameter. **Procedia Engineering**, Elsevier, v. 213, p. 346–358, 2018. Citado 1 vezes nas páginas 31, 33.

KANG, H. J.; ZHAO, Y. Y.; ZHU, H. P. Linear and nonlinear dynamics of suspended cable considering bending stiffness. **Journal of Vibration and Control**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 21, n. 8, p. 1487–1505, 2015. Citado 1 vez na página 43.

KARNOVSKY, I. A.; LEBED, O. I. **Formulas for structural dynamics: tables, graphs and solutions**. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2001. Citado 4 vezes nas páginas 58–60.

KAUFFMAN, J. L.; LESIEUTRE, G. A.; BABUŠKA, V. Damping models for shear beams with applications to spacecraft wiring harnesses. **Journal of Spacecraft and Rockets**, American Institute of Aeronautics e Astronautics, v. 51, n. 1, p. 16–22, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 41, 42, 50.

KOH, C.; RONG, Y. Dynamic analysis of large displacement cable motion with experimental verification. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 272, n. 1-2, p. 187–206, 2004. Citado 1 vez na página 43.

KRAUS, M.; HAGEDORN, P. Aeolian vibrations: wind energy input evaluated from measurements on an energized transmission line. **IEEE transactions on Power Delivery**, IEEE, v. 6, n. 3, p. 1264–1270, 1991. Citado 1 vez na página 89.

KRENK, S.; HØGSBERG, J. R. Damping of cables by a transverse force. **Journal of Engineering Mechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 131, n. 4, p. 340–348, 2005. Citado 1 vez na página 41.

KREYSZIG, E.; KREYSZING, H.; NORMINTON, E. Advanced Engineering Mathematics. **BS Grewal, Higher Engineering Mathematics**, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 56, 64.

LABEGALINI, P. R.; LABEGALINI, J. A.; FUCHS, R. D.; ALMEIDA, M. T. de. **Projetos mecânicos das linhas aéreas de transmissão**. [S.l.]: Editora Blucher, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 30–32.

LABROSSE, M.; NAWROCKI, A.; CONWAY, T. Frictional dissipation in axially loaded simple straight strands. **Journal of Engineering Mechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 126, n. 6, p. 641–646, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 26, 44.

LACARBONARA, W.; PAOLONE, A.; VESTRONI, F. Elastodynamics of nonshallow suspended cables: linear modal properties. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 129, n. 4, p. 425–433, 2007. Citado 2 vez na página 43.

LANGLOIS, S.; LEGERON, F.; LÉVESQUE, F. Time history modeling of vibrations on overhead conductors with variable bending stiffness. **IEEE transactions on Power Delivery**, IEEE, v. 29, n. 2, p. 607–614, 2013. Citado 8 vezes nas páginas 26, 35, 44, 46, 97, 103, 116, 151.

LAZAN, B. J. Damping of materials and members in structural mechanics. **PERGAMON PRESS LTD, OXFORD, ENGLAND. 1968, 317**, 1968. Citado 2 vezes nas páginas 64, 76.

LIN, R.; NG, T. Exact vibration modes of multiple-stepped beams with arbitrary steps and supports using elemental impedance method. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 152, p. 24–34, 2017. Citado 1 vez na página 63.

LIU, X.; HU, Y.; CAI, M. Free vibration analysis of transmission lines based on the dynamic stiffness method. **Royal Society open science**, The Royal Society, v. 6, n. 3, p. 181354, 2019. Citado 1 vez na página 43.

MACHADO, M.; DUTKIEWICZ, M.; MATT, C.; CASTELLO, D. Spectral model and experimental validation of hysteretic and aerodynamic damping in dynamic analysis of overhead transmission conductor. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 136, p. 106483, 2020. Citado 11 vezes nas páginas 27, 41–43, 47, 52–54, 64, 151, 178.

MAIN, J. A.; JONES, N. P. Vibration of tensioned beams with intermediate damper. I: Formulation, influence of damper location. **Journal of Engineering Mechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 133, n. 4, p. 369–378, 2007. Citado 1 vez na página 58.

MAZILU, T. Green's functions for analysis of dynamic response of wheel/rail to vertical excitation. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 306, n. 1-2, p. 31–58, 2007. Citado 1 vez na página 63.

MAZILU, T. Numerically Stable form of Green's Function for a Free-Free Uniform Timoshenko Beam. **Mathematics**, MDPI, v. 11, n. 1, p. 86, 2022. Citado 4 vezes nas páginas 63, 66, 70.

_____. The dynamics of an infinite uniform Euler-Bernoulli beam on bilinear viscoelastic foundation under moving loads. **Procedia Engineering**, Elsevier, v. 199, p. 2561–2566, 2017. Citado 1 vez na página 63.

MCCULLOCH, A.; PUE-GILCHRIST, A.; KIRKPATRICK, L. Ten Years of Progress with Self-Damping Conductor. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, IEEE, n. 3, p. 998–1011, 1980. Citado 1 vez na página 31.

MEDEIROS JÚNIOR, W. B.; PRÉVE, C. T.; BALBINO, F. O.; SILVA, T. A. d.; LOPES, E. M. O. On an integrated dynamic characterization of viscoelastic materials by fractional derivative and GHM models. **Latin American Journal of Solids and Structures**, Scielo Brasil, v. 16, n. 2, 2019. Citado 1 vez na página 183.

MENDONÇA, P. T.; FANCELLO, E. A. O Método de Elementos Finitos aplicado à Mecânica dos Sólidos. **Florianópolis: Orsa Maggiore**, 2019. Citado 4 vezes nas páginas 79, 80, 83.

MEYNEN, S.; VERMA, H.; HAGEDORN, P.; SCHÄFER, M. On the numerical simulation of vortex-induced vibrations of oscillating conductors. **Journal of Fluids and Structures**, Elsevier, v. 21, n. 1, p. 41–48, 2005. Citado 1 vez na página 89.

MILNE, H. The receptance functions of uniform beams. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 131, n. 3, p. 353–365, 1989. Citado 1 vez na página 63.

NOISEUX, D. Similarity laws of the internal damping of stranded cables in transverse vibrations. **IEEE Transactions on Power Delivery**, IEEE, v. 7, n. 3, p. 1574–1581, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 47, 64.

OTRIN, M.; BOLTEŽAR, M. Damped lateral vibrations of straight and curved cables with no axial pre-load. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 300, n. 3-5, p. 676–694, 2007. Citado 8 vezes nas páginas 27, 42–45, 48, 49.

_____. On the modeling of vibration transmission over a spatially curved cable with casing. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 325, n. 4-5, p. 798–815, 2009. Citado 5 vezes nas páginas 27, 42, 45, 49.

OZDEMIR, A. A.; GUMUSSOY, S. Transfer function estimation in system identification toolbox via vector fitting. **IFAC-PapersOnLine**, Elsevier, v. 50, n. 1, p. 6232–6237, 2017. Citado 1 vez na página 182.

PAPAILIOU, K. On the bending stiffness of transmission line conductors. **IEEE Transactions on Power Delivery**, IEEE, v. 12, n. 4, p. 1576–1588, 1997. Citado 14 vezes nas páginas 26, 34, 35, 44–46, 97, 103, 151.

RAO, S. S. **Mechanical vibrations**. [S.l.: s.n.], 2001. Citado 1 vez na página 58.

RAOOF, M.; HUANG, Y. P. Lateral vibrations of steel cables including structural damping. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Structures and Buildings**, Thomas Telford-ICE Virtual Library, v. 99, n. 2, p. 123–133, 1993. Citado 1 vez na página 64.

RAOOF, M.; KRAINCANIC, I. Critical examination of various approaches used for analysing helical cables. **The Journal of Strain Analysis for Engineering Design**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 29, n. 1, p. 43–55, 1994. Citado 2 vezes na página 43.

RAWLINS, C. Wind tunnel measurements of the power imparted to a model of a vibrating conductor. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, IEEE, n. 4, p. 963–971, 1983. Citado 1 vez na página 89.

RAWLINS, C. B. **Analytical Elements of Overhead Conductor Fabrication**. [S.l.]: Fultus Corporation, 2005. Citado 2 vezes na página 31.

_____. Some effects of mill practice on the stress strain behavior of ACSR. **IEEE transactions on power delivery**, IEEE, v. 14, n. 2, p. 602–629, 1999. Citado 1 vez na página 34.

REDDY, J. N. **Introduction to the Finite Element Method**. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 79, 83.

REGA, G.; ALAGGIO, R.; BENEDETTINI, F. Experimental investigation of the nonlinear response of a hanging cable. Part I: Local analysis. **Nonlinear Dynamics**, Springer, v. 14, p. 89–117, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 43, 89.

REGA, G.; ALAGGIO, R. Spatio-temporal dimensionality in the overall complex dynamics of an experimental cable/mass system. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 38, n. 10-13, p. 2049–2068, 2001. Citado 1 vez na página 43.

RICCIARDI, G.; SAITTA, F. A continuous vibration analysis model for cables with sag and bending stiffness. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 30, n. 5, p. 1459–1472, 2008. Citado 1 vez na página 43.

SHIN, K.; HAMMOND, J. **Fundamentals of Signal Processing for Sound and Vibration engineers**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. Citado 1 vez na página 105.

SILVA, J. M. M. e; MAIA, N. M. **Modal Analysis and Testing**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 363. Citado 4 vezes nas páginas 96, 182.

SOUSA, R.; SOUZA, R.; FIGUEIREDO, F.; MENEZES, I. The influence of bending and shear stiffness and rotational inertia in vibrations of cables: An analytical approach. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 33, n. 3, p. 689–695, 2011. Citado 4 vez na página 42.

SPAK, K. S.; AGNES, G. S.; INMAN, D. J. Cable modeling and internal damping developments. **Applied Mechanics Reviews**, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 65, n. 1, 2013. Citado 6 vezes nas páginas 27, 41, 42, 44.

_____. Modeling vibration response and damping of cables and cabled structures. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 336, p. 240–256, 2015. Citado 7 vezes nas páginas 27, 41–45, 50.

SRINIL, N.; REGA, G.; CHUCHEEPSAKUL, S. Large amplitude three-dimensional free vibrations of inclined sagged elastic cables. **Nonlinear Dynamics**, Springer, v. 33, n. 2, p. 129–154, 2003. Citado 1 vez na página 43.

STAKGOLD, I. **Boundary Value Problems of Mathematical Physics: Volume 1**. [S.l.]: SIAM, 2000. Citado 2 vez na página 65.

STANOVA, E.; FEDORKO, G.; FABIAN, M.; KMET, S. Computer modelling of wire strands and ropes Part I: Theory and computer implementation. **Advances in Engineering Software**, Elsevier, v. 42, n. 6, p. 305–315, 2011. Citado 1 vez na página 43.

STONE, B. The receptances of beams, in closed form, including the effects of shear and rotary inertia. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 206, n. 2, p. 87–94, 1992. Citado 1 vez na página 63.

TRANTAFYLLOU, M. The dynamics of taut inclined cables. **The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics**, Oxford University Press, v. 37, n. 3, p. 421–440, 1984. Citado 1 vez na página 41.

USABIAGA, H.; PAGALDAY, J. Analytical procedure for modelling recursively and wire by wire stranded ropes subjected to traction and torsion loads. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 45, n. 21, p. 5503–5520, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 26, 43, 44.

VECCHIARELLI, J. **Aeolian vibration of a conductor with a Stockbridge-type damper**. 1998. Tese (Doutorado). Citado 3 vezes nas páginas 44, 45, 47.

VELINSKY, S. General nonlinear theory for complex wire rope. **International Journal of Mechanical Sciences**, Elsevier, v. 27, n. 7-8, p. 497–507, 1985. Citado 1 vez na página 43.

WAGG, D.; NEILD, S. **Nonlinear vibration with control: for flexible and adaptive structures**. [S.l.]: Springer, 2010. Citado 1 vez na página 43.

WEBER, F.; BOSTON, C. Energy based optimization of viscous–friction dampers on cables. **Smart Materials and Structures**, IOP Publishing, v. 19, n. 4, p. 045025, 2010. Citado 1 vez na página 41.

WOLF, H.; SINGER, S.; PUSTAIĆ, D.; ALUJEVIĆ, N. Numerical aspects of determination of natural frequencies of a power transmission line cable equipped with in-line fittings. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 160, p. 510–518, 2018. Citado 1 vez na página 42.

XU, Y. L.; YU, Z. Non-linear vibration of cable–damper systems Part II: application and verification. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 225, n. 3, p. 465–481, 1999. Citado 1 vez na página 43.

YAMAGUCHI, H.; ADHIKARI, R. Energy-based evaluation of modal damping in structural cables with and without damping treatment. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 181, n. 1, p. 71–83, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 48, 116.

YU, Z.; XU, Y. L. Non-linear vibration of cable–damper systems Part I: Formulation. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 225, n. 3, p. 447–463, 1999. Citado 1 vez na página 43.

ZANG, C.; GRAFE, H.; IMREGUN, M. Frequency–domain criteria for correlating and updating dynamic finite element models. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 15, n. 1, p. 139–155, 2001. Citado 4 vezes nas páginas 131, 189.

ZASSO, A.; BELLOLI, M.; GIAPPINO, S.; MUGGIASCA, S. Pressure field analysis on oscillating circular cylinder. **Journal of Fluids and Structures**, Elsevier, v. 24, n. 5, p. 628–650, 2008. Citado 1 vez na página 89.

ZHANG, M.; ZHAO, G.; LI, J. Nonlinear dynamic analysis of high-voltage overhead transmission lines. **Shock and Vibration**, Hindawi, v. 2018, 2018. Citado 1 vez na página 43.

APÊNDICE A – PROPRIEDADE DE ORTOGONALIDADE DE AUTOFUNÇÕES

Neste apêndice, são demonstradas as propriedades de ortogonalidade das autofunções desenvolvidas na seção 4.2.

A.1 CONDIÇÃO DE ORTOGONALIDADE DAS AUTOFUNÇÕES

Para obter a condição de ortogonalidade associada a uma viga sujeita a carregamento axial, consideram-se dois autovalores ω_{n_i} e ω_{n_j} e suas correspondentes autofunções Y_{n_i} e Y_{n_j} . Portanto, a ??, qual seja:

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{A.1})$$

pode ser reescrita como

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 Y_{n_i}(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[T \frac{dY_{n_i}(x)}{dx} \right] = \rho A \omega_{n_i}^2 Y_{n_i}(x), \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 Y_{n_j}(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[T \frac{dY_{n_j}(x)}{dx} \right] = \rho A \omega_{n_j}^2 Y_{n_j}(x). \quad (\text{A.3})$$

Multiplicando EQUAÇÃO A.2 por Y_{n_j} e integrando ao longo do comprimento da viga, decorre que

$$\begin{aligned} & \int_0^L Y_{n_j}(x) \frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 Y_{n_i}(x)}{dx^2} \right] dx - \dots \\ & \dots - \int_0^L Y_{n_j}(x) \frac{d}{dx} \left[T \frac{dY_{n_i}(x)}{dx} \right] dx = \omega_{n_i}^2 \int_0^L \rho A Y_{n_i}(x) Y_{n_j}(x) dx. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Realizando a integração por partes do lado direito da EQUAÇÃO A.4, e utilizando qualquer combinação de condição de contorno, chega-se a

$$\begin{aligned}
& \int_0^L Y_{n_j}(x) \frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 Y_{n_i}(x)}{dx^2} \right] dx \\
&= Y_{n_j}(x) \frac{d}{dx} \left[EI \frac{d^2 Y_{n_i}(x)}{dx^2} \right] \Big|_0^L - \frac{dY_{n_j}(x)}{dx} \left[EI \frac{d^2 Y_{n_i}(x)}{dx^2} \right] \Big|_0^L + \int_0^L EI \frac{d^2 Y_{n_j}(x)}{dx^2} \frac{d^2 Y_{n_i}(x)}{dx^2} dx \\
&= \int_0^L EI \frac{d^2 Y_{n_j}(x)}{dx^2} \frac{d^2 Y_{n_i}(x)}{dx^2} dx,
\end{aligned} \tag{A.5}$$

e também a

$$\begin{aligned}
& \int_0^L Y_{n_j}(x) \frac{d}{dx} \left[T \frac{dY_{n_i}(x)}{dx} \right] dx = Y_{n_j}(x) T \frac{dY_{n_i}(x)}{dx} \Big|_0^L - \int_0^L T \frac{dY_{n_j}(x)}{dx} \frac{dY_{n_i}(x)}{dx} dx \\
&= - \int_0^L T \frac{dY_{n_j}(x)}{dx} \frac{dY_{n_i}(x)}{dx} dx.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Assim, a EQUAÇÃO A.4 pode ser escrita como

$$\int_0^L EI \frac{d^2 Y_{n_j}(x)}{dx^2} \frac{d^2 Y_{n_i}(x)}{dx^2} dx + \int_0^L T \frac{dY_{n_j}(x)}{dx} \frac{dY_{n_i}(x)}{dx} dx = \omega_{n_i}^2 \int_0^L \rho A \Phi_j(x) \Phi_i(x) dx. \tag{A.7}$$

Similarmente, multiplicando a EQUAÇÃO A.3 por Y_{n_j} e integrando ao longo do comprimento da viga, decorre que

$$\int_0^L EI \frac{d^2 Y_{n_i}(x)}{dx^2} \frac{d^2 Y_{n_j}(x)}{dx^2} dx + \int_0^L T \frac{dY_{n_i}(x)}{dx} \frac{dY_{n_j}(x)}{dx} dx = \omega_{n_j}^2 \int_0^L \rho A \Phi_i(x) \Phi_j(x) dx. \tag{A.8}$$

Subtraindo a EQUAÇÃO A.8 da EQUAÇÃO A.7, obtém-se

$$\left(\omega_{n_i}^2 - \omega_{n_j}^2 \right) \int_0^L \rho A Y_{n_i}(x) Y_{n_j}(x) dx = 0. \tag{A.9}$$

Como os autovalores são distintos, sabe-se da EQUAÇÃO A.9 que:

$$\int_0^L \rho A Y_{n_i}(x) Y_{n_j}(x) dx = \delta_{ij} M_i, \quad (\text{A.10})$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, definido por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Sabe-se ainda que

$$M_i = \int_0^L \rho A Y_{n_i}^2(x) dx, \quad (\text{A.12})$$

onde M_i é a massa modal.

Um outra forma de condição de ortogonalidade pode ser obtida a partir da EQUAÇÃO A.7 ou da EQUAÇÃO A.8, como

$$\int_0^L EI \frac{d^2 Y_{n_j}(x)}{dx^2} \frac{d^2 Y_{n_i}(x)}{dx^2} dx + \int_0^L T \frac{dY_{n_j}(x)}{dx} \frac{dY_{n_i}(x)}{dx} dx = \delta_{ij} \omega_{n_i}^2 M_i = \delta_{ij} K_i, \quad (\text{A.13})$$

onde a rigidez modal K_i é dada por

$$K_i = \int_0^L EI \left(\frac{d^2 Y_{n_i}(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \int_0^L T \left(\frac{dY_{n_i}(x)}{dx} \right)^2 dx. \quad (\text{A.14})$$

APÊNDICE B – SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

B.1 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Visando comparar todas as formulações expostas no capítulo 4, foram realizadas simulações numéricas. Considerou-se, nelas, um cabo condutor de liga de alumínio (CAL), com os dados: força de tração axial $T = 8727$ (N), rigidez à flexão $EI = 271.317$ (Nm²), massa por unidade de comprimento $\rho A = 0.6870$ (kg/m), comprimento do vão $L = 30.2$ (m) e fator de perda material $\eta = 0.015$, cujos dados foram previamente obtidos por meio de ensaios realizados no Laboratório de Ensaios Mecânicos dos Institutos Lactec. Vale ressaltar que as simulações foram realizadas no ambiente MATLAB. Na solução via expansão modal, foram utilizados 50 modos, ao passo que para a solução via elementos finitos foram utilizados 150 elementos.

B.1.1 Avaliação das Frequências Naturais e dos Modos de Vibrar

Foram avaliados, inicialmente, os modos e as frequências naturais, conforme a formulação desenvolvida na seção 4.2. Buscou-se comparar a solução analítica das formas modais descritas em termos hiperbólicos e trigonométricos, de acordo com a solução fornecida pela EQUAÇÃO 4.21, com a solução em termos exponenciais e trigonométricos, dada pela EQUAÇÃO 4.22. Além disso, os resultados são comparados com resultados obtidos via MEF.

Vale ressaltar que as raízes das equações características para o cômputo das frequências naturais, para todas as condições de contorno analisadas, foram calculadas utilizando o método da bisseção, através da função `fzero` já existente no ambiente MATLAB. Uma vez calculada a frequência natural ω_{n_j} , torna-se possível, portanto, determinar a forma modal (autofunção) $Y(x)_{n_j}$ correspondente.

São utilizadas abaixo as seguintes abreviações: H-T: solução em termos hiperbólicos e trigonométricos, E-T: solução em termos exponenciais e trigonométricos, MT: solução com molas torcionais.

B.1.1.1 Condição Engastada - Engastada

As oito primeiras frequências naturais obtidas através da resolução das EQUAÇÕES 4.26, 4.28 e 4.45 com $K_{T1} \rightarrow \infty$ e $K_{T2} \rightarrow \infty$, com as frequências correspondentes obtidas por meio do MEF, para a condição engastada - engastada, são mostradas na TABELA 12.

TABELA 12 – VALORES DAS OITO PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS NATURAIS (f_{n_j}) PARA A CONDIÇÃO ENGASTADA - ENGASTADA

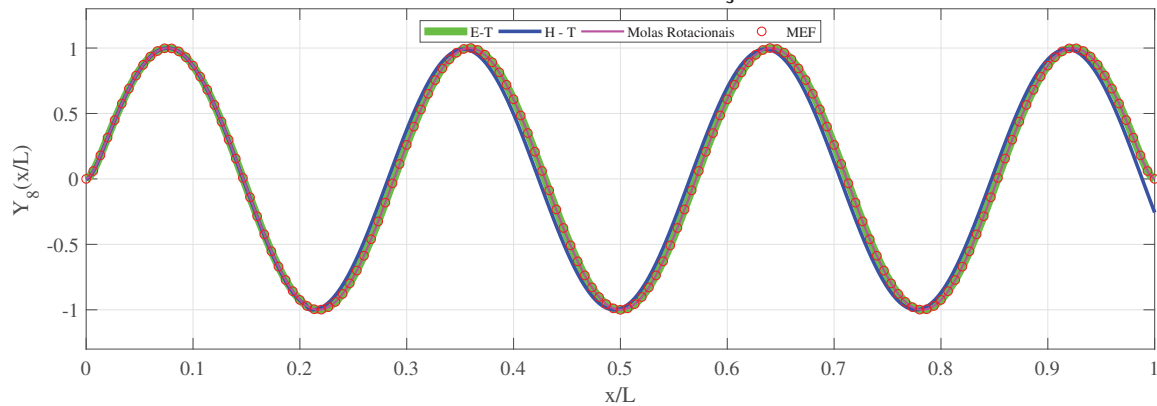
$f_{n_j} (Hz)$	1	2	3	4	5	6	7	8
H - T Eq.(4.26)	1,888	3,778	5,672	7,572	9,480	11,397	13,325	15,267
E - T Eq.(4.28)	1,888	3,778	5,672	7,572	9,480	11,397	13,325	15,267
MT Eq.(4.45) ⁽¹⁾	1,888	3,778	5,672	7,572	9,480	11,397	13,325	15,267
MEF	1,888	3,778	5,672	7,572	9,480	11,397	13,325	15,266

FONTE: O autor

NOTA: ⁽¹⁾ $K_{T1} \rightarrow \infty$ e $K_{T2} \rightarrow \infty$

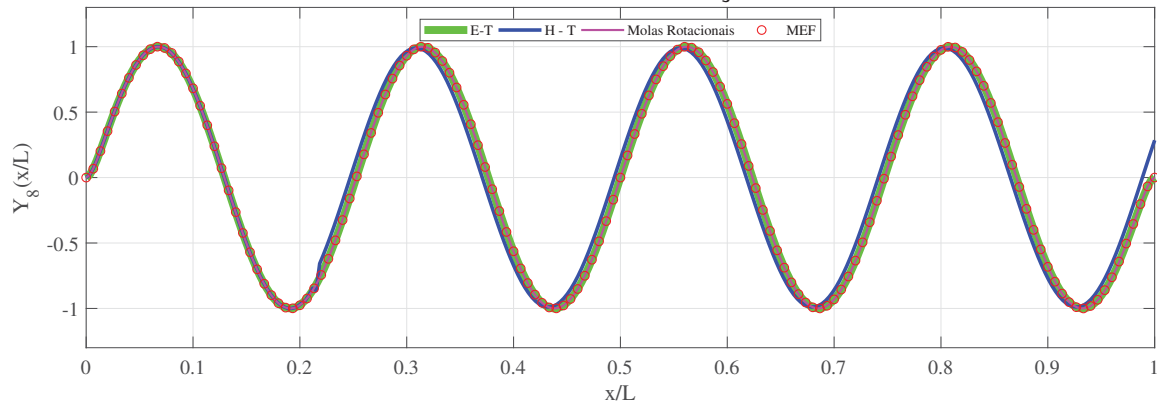
Nas FIGURAS 81 e 82, são ilustrados o 7º e o 8º modos de vibrar para a condição engastada — engastada.

FIGURA 81 – SÉTIMO MODO DE VIBRAR DA CONDIÇÃO ENGASTADA - ENGASTADA



FONTE: O autor

FIGURA 82 – OITAVO MODO DE VIBRAR DA CONDIÇÃO ENGASTADA - ENGASTADA



FONTE: O autor

Fica evidente, a partir da análise das FIGURAS 81 e 82, que a solução baseada em termos exponenciais e trigonométricos apresenta clara concordância com os resultados obtidos via MEF, para a condição engastada — engastada. Além disso, essa solução fornece uma representação mais apurada, especialmente nas regiões próximas das extremidades, quando comparada com a solução baseada em termos hiperbólicos e trigonométricos.

B.1.1.2 Condição Engastada — Apoiada

Na TABELA 13, são mostradas as oito primeiras frequências naturais para a condição engastada - apoiada, calculadas de acordo com as EQUAÇÕES 4.30, 4.32 e 4.45 com $K_{T1} \rightarrow \infty$ e $K_{T2} \rightarrow 0$, junto com as obtidas por meio do MEF.

TABELA 13 – VALORES DAS OITO PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS NATURAIS (f_{n_j}) PARA A CONDIÇÃO ENGASTADA - APOIADA

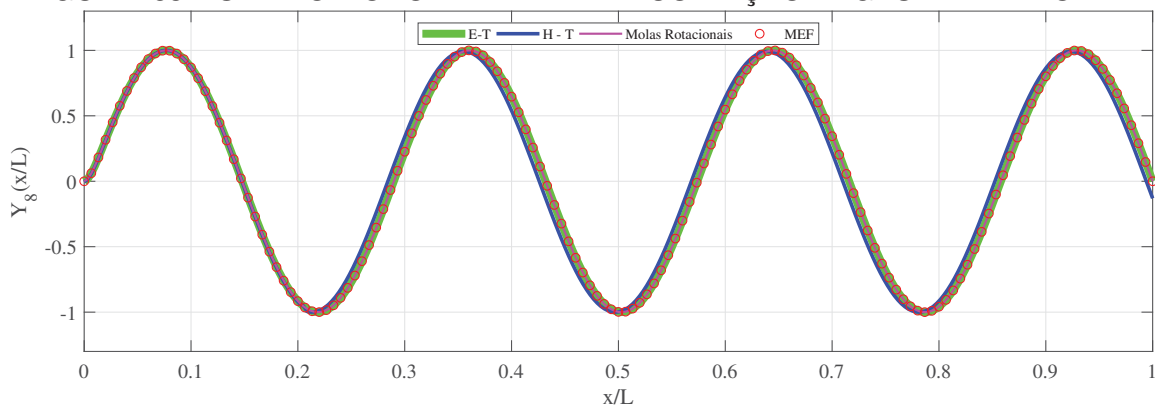
$f_{n_j}(Hz)$	1	2	3	4	5	6	7	8
H - T Eq.(4.30)	1,877	3,756	5,639	7,528	9,424	11,330	13,247	15,177
E - T Eq.(4.32)	1,877	3,756	5,639	7,528	9,424	11,330	13,247	15,177
MT Eq.(4.45) ⁽¹⁾	1,877	3,756	5,639	9.2397	11.560	13.8872	16.2227	18.5679
MEF	1,877	3,765	5,639	7,528	9,424	11,330	13,246	15,176

FONTE: O autor

NOTA: ⁽¹⁾ $K_{T1} \rightarrow \infty$ e $K_{T2} \rightarrow 0$

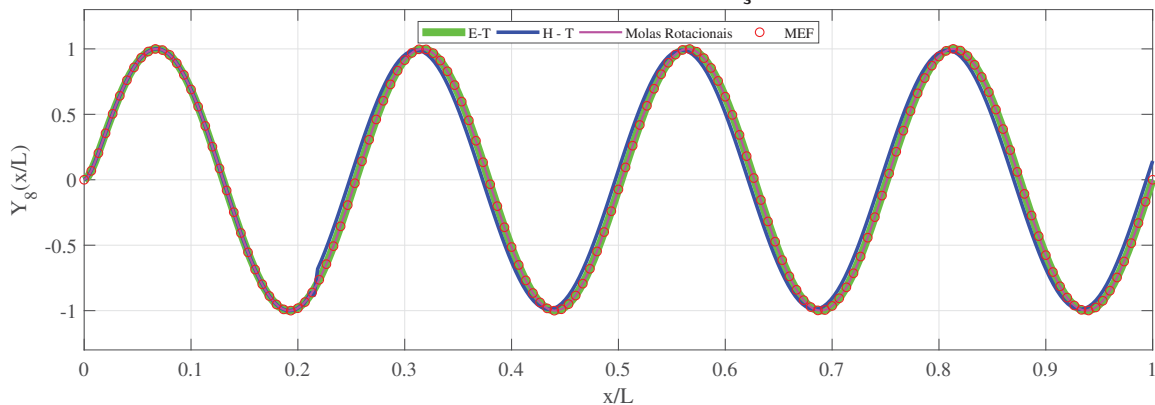
Nas FIGURAS 83 e 84, são ilustrados o 7º e o 8º modos de vibrar para a condição engastada — apoiada.

FIGURA 83 – SÉTIMO MODO DE VIBRAR DA CONDIÇÃO ENGASTADA - APOIADA



FONTE: O autor

FIGURA 84 – OITAVO MODO DE VIBRAR DA CONDIÇÃO ENGASTADA - APOIADA



FONTE: O autor

As FIGURAS 83 e 84 também apresentam a clara concordância entre a solução descrita em termos exponenciais e a descrita em trigonométricos com os resultados obtidos por meio do MEF, para a condição engastada - apoiada.

B.1.2 Avaliação das Funções Resposta em Frequência

Foram também avaliadas as três soluções desenvolvidas para o cálculo da receptância, quais sejam: a solução analítica na forma fechada, a solução via expansão modal e a solução via MEF. Em todas as simulações numéricas realizadas, se considerou a inertância $I(x, \xi, \omega)$, em diferentes pontos de excitação e resposta. A relação entre inertância e receptância é dada por:

$$I(x, \xi, \omega) = -\omega^2 \alpha(x, \xi, \omega). \quad (\text{B.1})$$

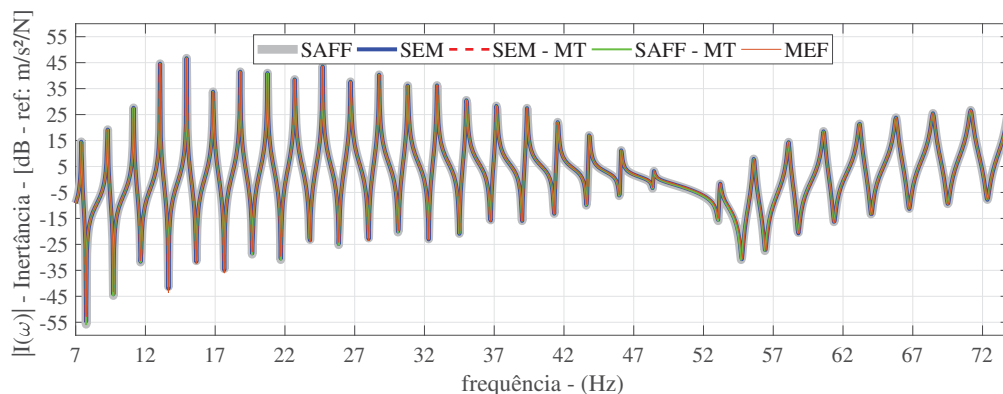
Vale ressaltar que, para a solução via expansão modal, foram utilizadas as formas modais descritas em termos exponenciais e trigonométricos, desenvolvidas na seção 4.2 e testadas na subseção B.1.1. Todas as simulações em questão foram realizadas para uma faixa de frequência de 7 a 74 Hz, com uma resolução de 0,05 Hz.

São utilizadas abaixo as seguintes abreviações: (SAFF) solução analítica na forma fechada, (SEM) solução via expansão modal, (SEM-MT) solução via expansão com molas torcionais, e (SAFF-MT) solução analítica na forma fechada com molas torcionais.

B.1.2.1 Condição Simplesmente Apoiada

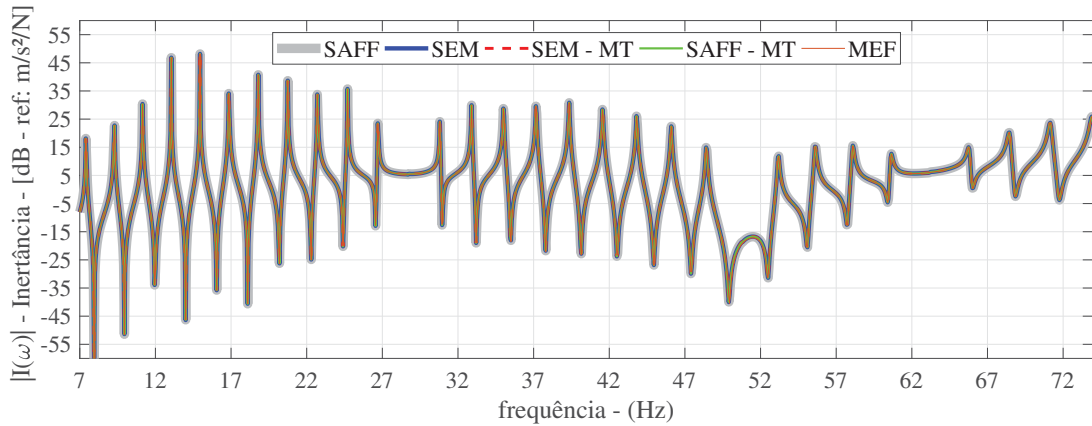
Nas FIGURAS 85, 86 e 87, são apresentados os resultados provenientes das simulações numéricas das três soluções desenvolvidas para a condição simplesmente apoiada. Para a simulação da solução analítica na forma fechada, foram implementadas as EQUAÇÕES 4.94 e 4.116, com $K_{T1} \rightarrow 0$ e $K_{T2} \rightarrow 0$. Já para a simulação da solução via expansão modal, foram utilizadas as formas modais dadas pelas EQUAÇÕES 4.24 e 4.48, com os mesmos valores limites de molas torcionais. Todas as figuras apresentam o módulo da inertância.

FIGURA 85 – INERTÂNCIA NUMÉRICA - CONDIÇÃO SIMPLESMENTE APOIADA - PONTO DA EXCITAÇÃO: $\xi = 1.219 \text{ (m)}$ - PONTO DA RESPOSTA: $x = 1.219 \text{ (m)}$



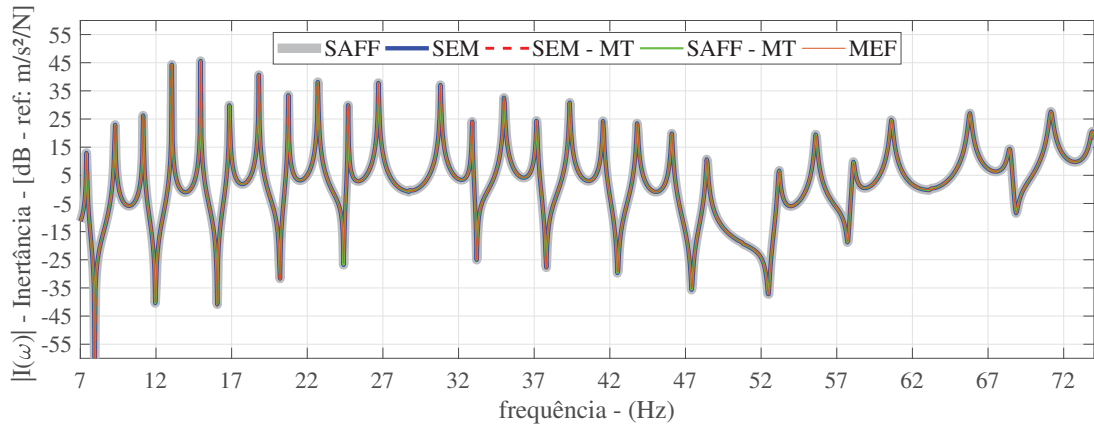
FONTE: O autor

FIGURA 86 – INERTÂNCIA NUMÉRICA - CONDIÇÃO SIMPLEMENTE APOIADA - PONTO DA EXCITAÇÃO: $\xi = 1.219$ (m) PONTO DA RESPOSTA: $x = 2.032$ (m)



FONTE: O autor

FIGURA 87 – INERTÂNCIA NUMÉRICA - CONDIÇÃO SIMPLEMENTE APOIADA - PONTO DA EXCITAÇÃO: $\xi = 1.219$ (m) PONTO DA RESPOSTA: $x = 16.253$ (m)



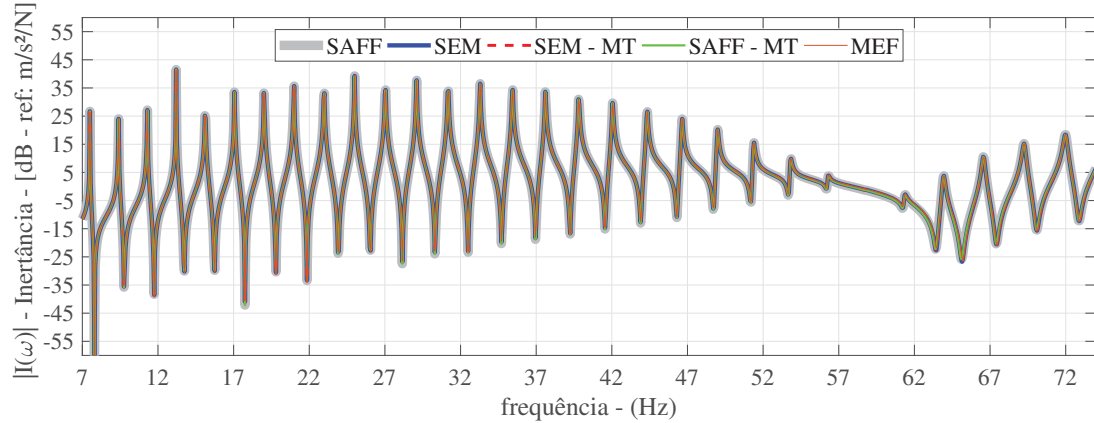
FONTE: O autor

A partir das FIGURAS 85, 86 e 87, pode-se constatar que as três formulações desenvolvidas exibem ótima correspondência. Além disso, observa-se a mesma correspondência ao se empregar as molas torcionais na condição limite associada.

B.1.2.2 Condição Engastada — Engastada

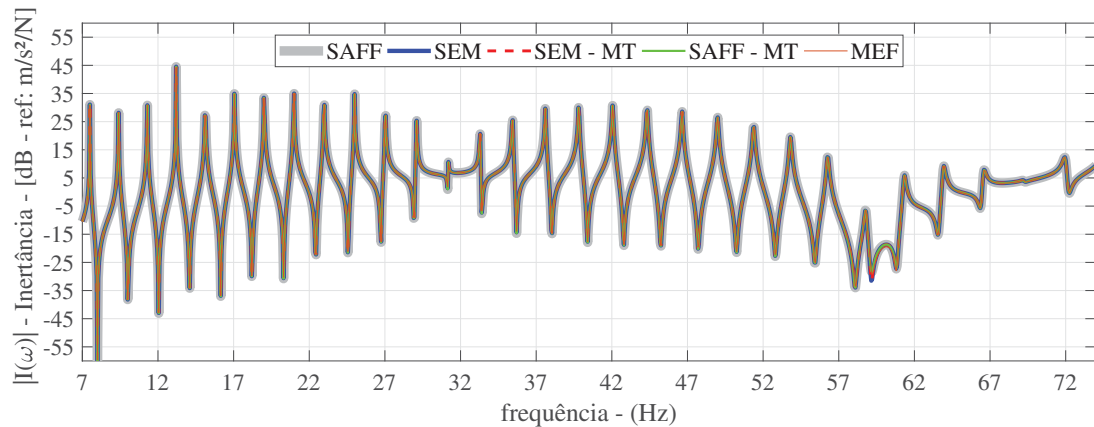
De maneira análoga à condição simplesmente apoiada, são ilustradas nas FIGURAS 88, 89 e 90 os resultados das simulações numéricas da inertância para a condição engastada - engastada. Para a simulação da solução analítica na forma fechada, foram implementadas as EQUAÇÕES 4.95 e 4.116 com $K_{T1} \rightarrow \infty$ e $K_{T2} \rightarrow \infty$. Já para a simulação solução via expansão modal, foram utilizados as formas modais dadas pelas EQUAÇÕES 4.27 e 4.48, com os mesmos valores limites das constantes de molas torcionais. Todas as figuras apresentam o módulo da inertância.

FIGURA 88 – INERTÂNCIA NUMÉRICA - CONDIÇÃO ENGASTADA - ENGASTADA - PONTO DA EXCITAÇÃO: $\xi = 1.219 \text{ (m)}$ PONTO DA RESPOSTA: $x = 1.219 \text{ (m)}$



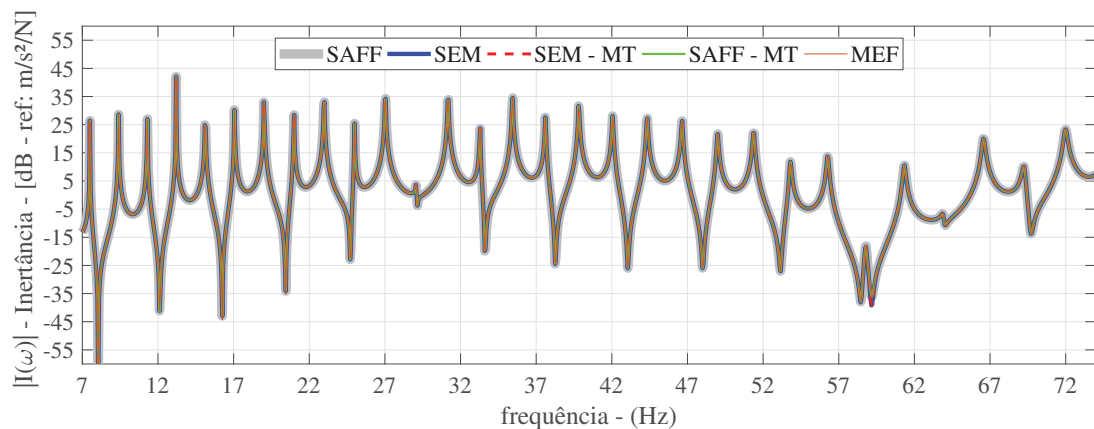
FONTE: O autor

FIGURA 89 – INERTÂNCIA NUMÉRICA - CONDIÇÃO ENGASTADA - ENGASTADA - PONTO DA EXCITAÇÃO: $\xi = 1.219 \text{ (m)}$ PONTO DA RESPOSTA: $x = 2.032 \text{ (m)}$



FONTE: O autor

FIGURA 90 – INERTÂNCIA NUMÉRICA - CONDIÇÃO ENGASTADA - ENGASTADA - PONTO DA EXCITAÇÃO: $\xi = 1.219 \text{ (m)}$ PONTO DA RESPOSTA: $x = 16.253 \text{ (m)}$



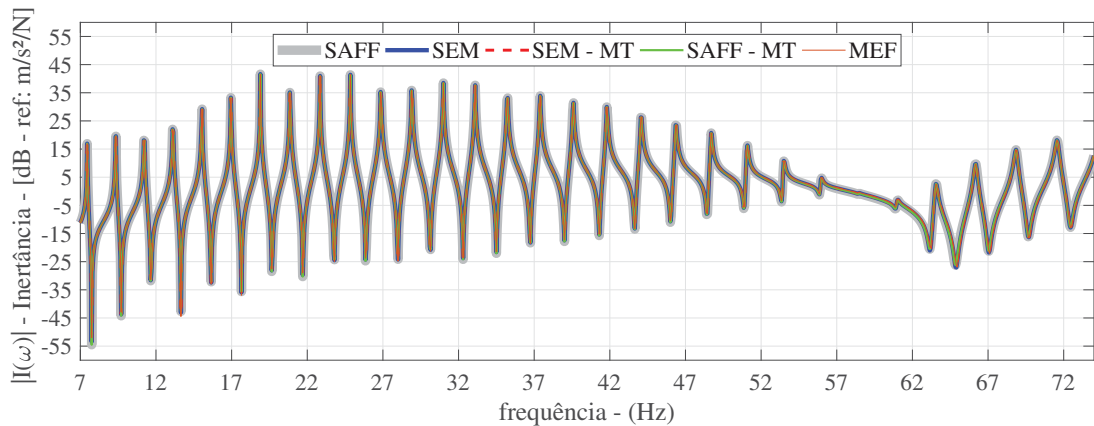
FONTE: O autor

Analisando as FIGURAS 88, 89 e 90, é possível verificar que as três formulações desenvolvidas também exibem uma ótima concordância para a condição engastada — engastada.

B.1.2.3 Condição Engastada - Apoiada

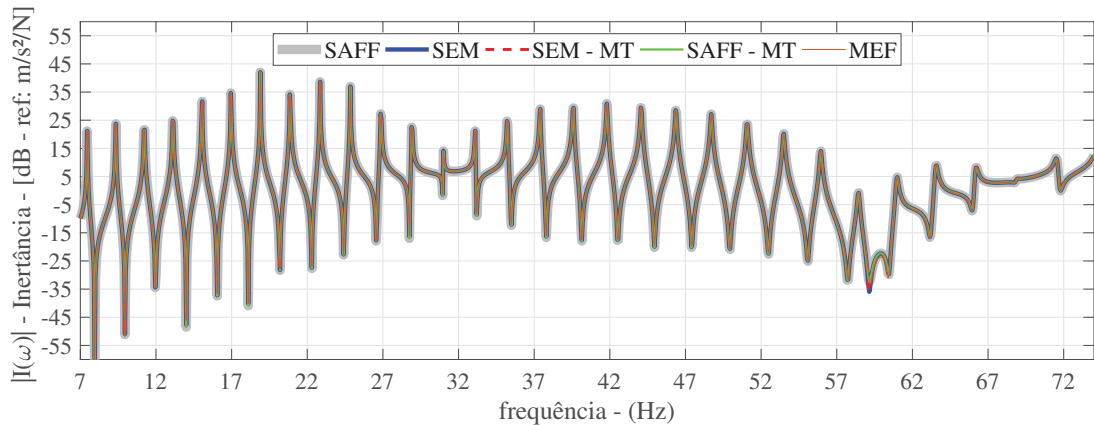
Por fim, nas FIGURAS 91, 92 e 93, são apresentados os resultados provenientes das simulações numéricas das três soluções desenvolvidas para a condição engastada - apoiada. Para a solução analítica na forma fechada, foram implementadas as EQUAÇÕES 4.96 e 4.116, com $K_{T1} \rightarrow \infty$ e $K_{T2} \rightarrow 0$. Já para a solução via expansão modal, foram utilizadas as formas modais dadas pelas EQUAÇÕES 4.31 e 4.48, com os mesmos valores limites de molas torcionais. Todas as figuras apresentam o módulo da inertância.

FIGURA 91 – INERTÂNCIA NUMÉRICA - CONDIÇÃO ENGASTADA - APOIADA - PONTO DA EXCITAÇÃO: $\xi = 1.219 (m)$ PONTO DA RESPOSTA: $x = 1.219 (m)$



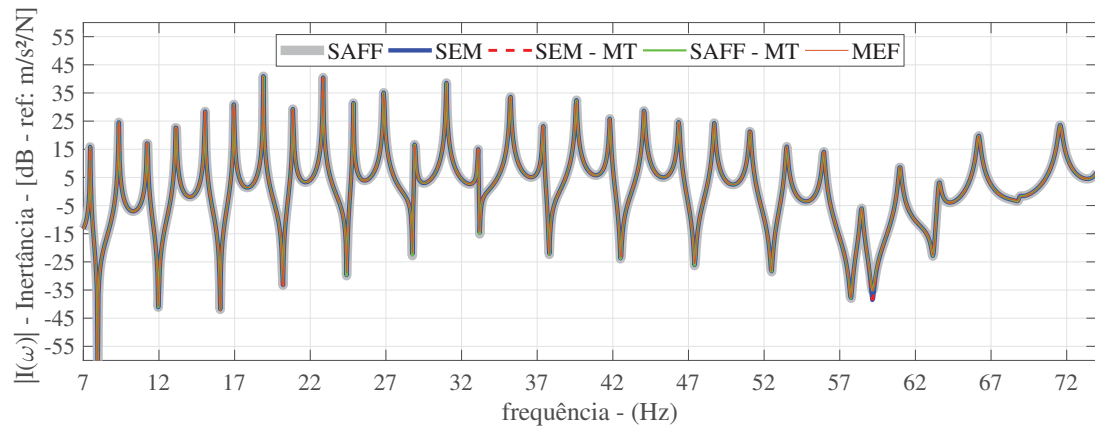
FONTE: O autor

FIGURA 92 – INERTÂNCIA NUMÉRICA - CONDIÇÃO ENGASTADA - APOIADA - PONTO DA EXCITAÇÃO: $\xi = 1.219 (m)$ PONTO DA RESPOSTA: $x = 2.032 (m)$



FONTE: O autor

FIGURA 93 – INERTÂNCIA NUMÉRICA - CONDIÇÃO ENGASTADA - APOIADA - PONTO DA EXCITAÇÃO: $\xi = 1.219$ (m) PONTO DA RESPOSTA: $x = 16.253$ (m)



FONTE: O autor

Analisando as FIGURAS 91, 92 e 93, é possível verificar que as três formulações desenvolvidas novamente exibem uma ótima concordância para a condição engastada — apoiada. Além disso, observa-se a mesma concordância ao se empregar as molas torcionais na condição limite associada.

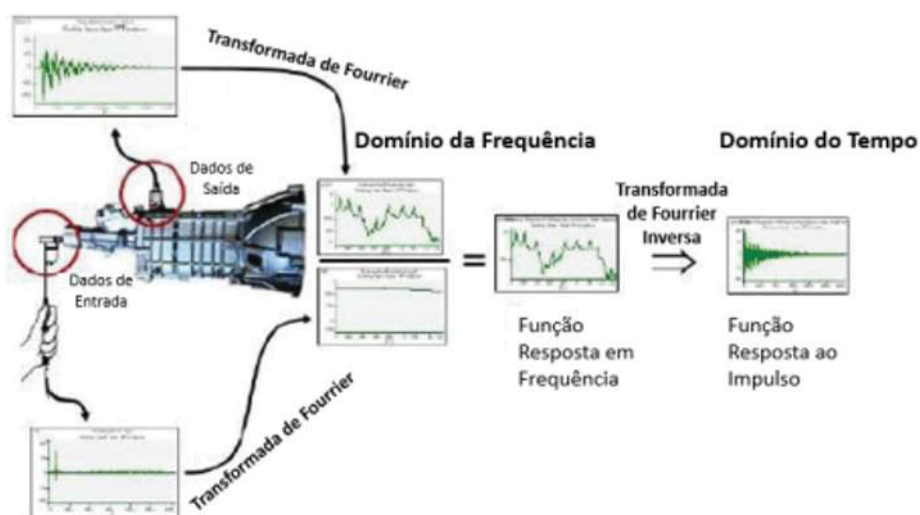
APÊNDICE C – ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL E OTIMIZAÇÃO

A presente tese trata da modelagem do comportamento dinâmico de cabos aéreos, em especial na identificação da rigidez à flexão e do amortecimento próprio equivalente. Para tanto, são empregadas tanto métodos de análise modal experimental (AME) quanto técnicas de otimização não linear (TONL). Dessa forma, alguns elementos de interesse, associadas a esses tópicos, são contemplados de forma compacta nesse apêndice.

C.1 ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL

A análise modal experimental (AME) é uma abordagem importante para entender e validar os princípios e os fenômenos vibracionais. Durante a AME, a estrutura em escrutínio é excitada por uma força conhecida com o intuito de avaliar as respostas em diferentes pontos. De maneira geral, a excitação é realizada por martelo de impacto ou por excitadores eletrodinâmicos (*shaker*). Os sinais de excitação e resposta são medidos por sensores e processados, via de regra, por analisadores digitais de sinais, que, por sua vez, possibilitam obter as funções de resposta em frequência (FRFs) e extrair os parâmetros modais da estrutura. Esse processo é ilustrado na FIGURA 94.

FIGURA 94 – ROTA PARA ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL



FONTE: Adaptado de Machado et al. (2020)

De acordo com Ewins (2009), existem três razões principais para o estudo da AME. São elas:

- Determinação da origem e do nível de resposta vibratória;

- Validação de modelos de simulação, bem como de suas previsões de vibração;
- Medição de parâmetros materiais, por exemplo, aqueles relacionados ao amortecimento.

A análise modal experimental (AME) é um processo de extração de parâmetros modais (frequências naturais ω_n ; razões de amortecimento ζ_n ; e constantes modais ${}_nA_{ij}$), a partir de dados experimentais obtidos em ensaios de vibração. Uma vez que os dados medidos podem estar na forma de funções resposta em frequência (FRFs) ou de funções de resposta ao impulso, existem técnicas de AME no domínio da frequência, como no domínio do tempo.

O fundamento da AME no domínio da frequência, utilizando FRFs, consiste em ajustar curvas aos dados usando um modelo matemático pré-definido da estrutura medida. Esse modelo pressupõe o número de graus de liberdade (GDL) da estrutura, o tipo de amortecimento e, possivelmente, o número de modos de vibração dentro da faixa de frequência medida. Essas suposições devem delimitar a expressão matemática de cada curva de FRF. Como resultado, o trabalho subsequente será um processo de ajuste de curvas, tentando derivar todos os parâmetros modais em uma expressão matemática de uma FRF usando os dados de medição.

Suponha-se que uma estrutura possa ser discretizada em um sistema de N graus de liberdade. A expressão analítica da função resposta em frequência (receptância), com amortecimento viscoso, é (FU; HE, 2001; EWINS, 2009):

$$\alpha_{ij}(\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{{}_nA_{ij}}{\omega_n^2 - \omega^2 + i2\zeta_n\omega\omega_n}, \quad (\text{C.1})$$

onde $\alpha_{ij}(\omega)$ é a receptancia entre os graus de liberdade i e j .

Se apenas os primeiros m modos estiverem dentro da faixa de frequência de uma medição em uma certa banda (a frequência sendo considerada logo acima de zero), então a expressão

$$\alpha_{ij}(\omega) = \sum_{n=1}^m \frac{{}_nA_{ij}}{\omega_n^2 - \omega^2 + i2\zeta_n\omega\omega_n}, \quad (\text{C.2})$$

exclui o impacto dos modos além da faixa de medição. Uma solução para considerar o efeito desses modos, que aparece nas medições, é incluir um termo residual de alta frequência $R_{ij}(\omega)$ de modo que

$$\alpha_{ij}(\omega) = \sum_{n=1}^m \frac{{}_nA_{ij}}{\omega_n^2 - \omega^2 + i2\zeta_n\omega\omega_n} + R_{ij}(\omega). \quad (\text{C.3})$$

Esse termo residual é geralmente definido como uma função linear para permitir a realização da análise modal sem maiores problemas adicionais causados pelos modos invisíveis (FU; HE, 2001).

Assim como ocorre, via de regra, em ajuste de curva, a função de erro e_{ij} é geralmente definida como a diferença entre a FRF estimada numericamente e a FRF medida experimentalmente, de modo que

$$e_{ij}(\omega) = \tilde{\alpha}_{ij}(\omega) - \alpha_{ij}(\omega) \quad (\text{C.4})$$

onde $\tilde{\alpha}_{ij}(\omega)$ é a FRF medida experimentalmente. Muitos métodos de análise modal são baseados na minimização dessa função de erro. Vale salientar que a validade e a precisão do resultado dependem não apenas da precisão dos dados experimentais, mas também da validade da expressão analítica da FRF (FU; HE, 2001; EWINS, 2009).

Sobre a denominação das FRFs, sabe-se que a equação de movimento de um sistema discreto com múltiplos graus de liberdade, amortecimento viscoso e sujeito a excitações externas, pode ser analisada no domínio da frequência através da transformada de Fourier. Tem-se, assim, que

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (\text{C.5})$$

$$-\omega^2\mathbf{M}\mathbf{X}(\omega) + i\omega\mathbf{C}\mathbf{X}(\omega) + \mathbf{K}\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \quad (\text{C.6})$$

onde $\mathbf{M}$ é a matriz de massa, $\mathbf{K}$ a matriz de rigidez, $\mathbf{C}$ a matriz de amortecimento, $\mathbf{x}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}(t)$, $\ddot{\mathbf{x}}(t)$, são, respectivamente, os vetores de deslocamento, velocidade e aceleração no domínio do tempo, e $\mathbf{X}(\omega)$ e $\mathbf{F}(\omega)$ os vetores de deslocamento e força, respectivamente, no domínio da frequência.

Sendo agora o ponto de excitação designado pelo subscrito r , e o ponto de resposta designado pelo subscrito s , têm-se, então, as seguintes FRFs:

- Receptância ($\alpha(\omega)$)¹

$$\alpha(\omega)_{sr} = \frac{X_s(\omega)}{F_r(\omega)} \quad (\text{C.7})$$

- Mobilidade ($M(\omega)$)

$$M(\omega)_{sr} = \frac{X_{V,s}(\omega)}{F_r(\omega)} = \frac{i\omega X_s(\omega)}{F_r(\omega)} \quad (\text{C.8})$$

- Inertância ($I(\omega)$)

$$I(\omega)_{sr} = \frac{X_{A,s}(\omega)}{F_r(\omega)} = \frac{-\omega^2 X_s(\omega)}{F_r(\omega)} \quad (\text{C.9})$$

onde X_V e X_A são, pela ordem, os vetores velocidade e aceleração no domínio da frequência. Todas essas funções, ditas funções resposta em frequência, são, para

¹ Alguns autores também utilizam $H(\omega)$ para representar receptância.

sistemas com múltiplos graus de liberdade, elementos de matrizes. Dessa forma, têm-se, respectivamente, as matrizes de receptância $\alpha(\omega)$, mobilidade $\mathbf{M}(\omega)$, e inércia $\mathbf{I}(\omega)$.

Já as matrizes inversas associadas são:

- Rigidez dinâmica $\mathbf{S}(\omega)$

$$\mathbf{S}(\omega) = \alpha(\omega)^{-1} \quad (\text{C.10})$$

- Impedância mecânica $\mathbf{Z}(\omega)$

$$\mathbf{Z}(\omega) = \mathbf{M}(\omega)^{-1} \quad (\text{C.11})$$

- Massa dinâmica $\mathbf{Y}(\omega)$

$$\mathbf{Y}(\omega) = \mathbf{I}(\omega)^{-1} \quad (\text{C.12})$$

Como citado anteriormente, as FRFs constituem a “matéria-prima” para os métodos de AME no domínio da frequência. Embora suas formas gerais se alterem, conforme os pontos de excitação e resposta, seus picos de máxima amplitude ocorrem nas mesmas frequências, ditas frequências de ressonância.

C.2 MÉTODOS DE AME CONSIDERADOS

O ambiente de programação e computação numérica MATLAB, utilizado nesta tese, possui um pacote de processamento de sinais que inclui a função `modalfit`. Essa função é utilizada em análise modal experimental para extrair os parâmetros modais de uma estrutura de interesse. A função `modalfit` possibilita a utilização de três métodos, quais sejam:

- Método da detecção dos picos (*Peak picking - PP*) ;
- Método da exponencial complexa por mínimos quadrados (*Least Squares Complex Exponential - LSCE*) ;
- Método das funções racionais por mínimos quadrados (*Least Squares Rational Function - LSRF*) .

O método *Peak picking*, é o método mais simples para análise modal experimental no domínio da frequência. Ele utiliza a suposição de sistemas de um grau de liberdade (SDOF) em torno de cada ressonância. O método consiste em separar cada modo próximo de um ponto de ressonância, visando extrair os seus parâmetros modais.

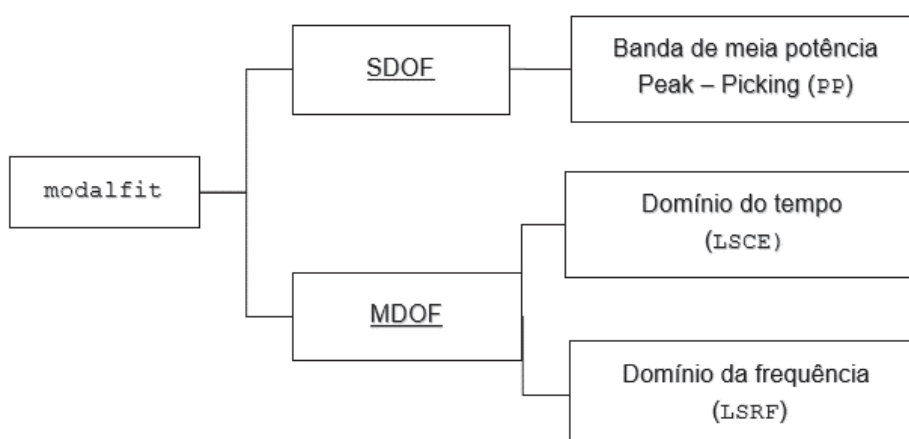
Mais informações sobre o método podem ser encontradas em Fu e He (2001), Ewins (2009) e Silva e Maia (2012).

O método da exponencial complexa por mínimos quadrados (LSCE) é um método de múltiplas entradas e múltiplas saídas para sistemas com múltiplos graus de liberdade (MDOF), e seu desenvolvimento se dá no domínio do tempo. Esse método examina as funções resposta ao impulso de um sistema com múltiplos graus de liberdade a partir de seus polos e resíduos complexos, por meio de exponencial complexa. É construído, então, um modelo autorregressivo, cuja solução leva ao estabelecimento de um polinômio, cujas raízes são os polos complexos do sistema. Ao estimar as raízes (e, portanto, as frequências naturais e as razões de amortecimento), os resíduos podem ser derivados do modelo autorregressivo para as formas modais. Cada função resposta ao impulso pode ser obtida a partir da transformada inversa de Fourier de uma FRF ou através do processo de decremento aleatório. Mais informações sobre o método podem ser encontradas em Fu e He (2001), Ewins (2009) e Silva e Maia (2012).

O método das funções racionais por mínimos quadrados (LSRF), que é o método empregado nesta tese, é uma abordagem de múltiplas entradas e múltiplas saídas para sistemas com múltiplos graus de liberdade (MDOF). Ele opera no domínio da frequência e consiste em representar cada FRF por meio de uma fração polinomial entre o numerador e o denominador, avaliando o ajuste de todas as FRFs a partir da minimização do erro quadrático absoluto entre a formulação analítica e o resultado experimental. Informações sobre a formulação detalhada do método em questão podem ser encontradas em Ozdemir e Gumussoy (2017).

É mostrado, na FIGURA 95, um resumo da função `modalfit`, disponível no ambiente MATLAB.

FIGURA 95 – RESUMO DA FUNÇÃO MODALFIT



FONTE: O autor

C.3 ATUALIZAÇÃO DE MODELOS VIA OTIMIZAÇÃO

A validação de um modelo matemático visa garantir sua exatidão, assegurando que ele represente adequadamente o sistema investigado nas condições de interesse. Uma vez criado o modelo, suas respostas são comparadas com medições experimentais. Com base nessas comparações, podem ser realizadas alterações no modelo, sendo o processo repetido até que se alcance uma correlação satisfatória entre os resultados matemáticos/numéricos e os experimentais.

As alterações comentadas acima podem ser feitas por tentativa e erro, variando os valores dos parâmetros estruturais até obter a representação desejada. No entanto, uma abordagem mais sistemática pode ser aplicada através da atualização estrutural. Por essa abordagem, o modelo numérico é refinado de maneira criteriosa, com a pré-seleção dos parâmetros a serem alterados e a utilização de dados medidos para estimar, por meio de técnicas de otimização, os valores dos parâmetros que minimizem as discrepâncias entre os resultados numéricos e experimentais.

As técnicas de otimização não linear (TONL) representam recursos valiosos para abordar essas situações. Além de otimizar funções buscando maximizar ou minimizar seus valores, também podem restringir os parâmetros (variáveis de projeto) dentro de limites preestabelecidos (espaço de projeto viável) (ARORA, 2015). Nesta tese, são empregados, de forma combinada e sequencial, algoritmos genéticos e programação quadrática sequencial, através o uso do pacote de otimização existente no ambiente MATLAB. Vale ressaltar que essa abordagem demonstrou grande eficácia em pesquisas anteriores (MEDEIROS JÚNIOR et al., 2019). Mais adiante, são destacadas algumas características dessas técnicas, após uma explanação preliminar breve sobre os elementos de um problema de otimização.

C.3.1 Variáveis de Projeto

Ao considerar a otimização do modelo numérico de uma estrutura, surge a oportunidade de modificar diversas grandezas associadas a esse modelo. Essas grandezas são representadas por um conjunto de variáveis de projeto, formando um vetor denotado como $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, onde n é o número total de variáveis de projeto para o problema em questão. Por meio de um processo genérico de otimização, esse vetor pode ser atualizado de forma a alcançar um ponto ótimo, representado pelo vetor $\mathbf{x}^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T$ (ARORA, 2015).

Um ponto ótimo reflete os valores ideais das variáveis de projeto, que resultam numa melhor representação do modelo numérico da estrutura em análise. Dessa forma, a abordagem de atualização por otimização do modelo numérico de uma estrutura implica modificar o vetor de variáveis de projeto, de modo a alcançar um ponto ótimo

que otimize com a característica acima mencionada.

C.3.2 Função Objetivo

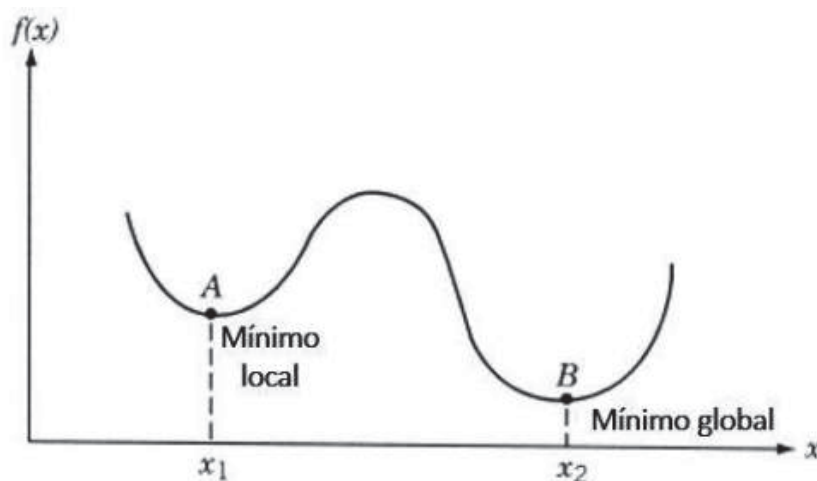
A noção de otimização está intrinsecamente relacionada a uma função que serve como medida da eficácia para a busca pretendida. Essa função é denominada de função objetivo, sendo usualmente representada por $f(x)$. Dependendo do contexto, um problema de otimização pode ter um único objetivo a ser alcançado ou pode envolver múltiplos objetivos simultaneamente.

Quando se trata da solução ou do conjunto de soluções que podem ser encontradas, é relevante enfatizar as seguintes categorias:

- Ótimo local: representa a melhor solução descoberta em uma região específica do espaço de busca;
- Ótimo global: corresponde à melhor solução encontrada em todo o espaço de busca.

Essas designações são ilustradas de forma gráfica na FIGURA 96, especialmente para pontos de mínimo.

FIGURA 96 – MÍNIMO LOCAL X MÍNIMO GLOBAL



FONTE: Adaptado de Brasil e Silva (2019)

É importante notar que nem todas as técnicas de otimização garantem a obtenção do ótimo global. A maioria dessas técnicas converge apenas para uma solução mais próxima do ponto inicial, ou seja, uma solução de ótimo local (ARORA, 2015). Logo, ao realizar um processo de otimização, é fundamental considerar essas distinções entre o ótimo local e o ótimo global, bem como compreender as limitações das técnicas utilizadas para atingir os melhores resultados possíveis no espaço de busca.

C.3.3 Funções de Restrição

Em uma variedade de problemas encontrados nos diversos campos da engenharia, é comum a imposição de condições que limitam o espaço de busca a valores viáveis ou de alguma forma condicionados. Essas condições são conhecidas como funções de restrição, e, conforme mencionado por Arora (2015), podem ser agrupadas em quatro categorias distintas:

- Restrições geométricas: são restrições que se relacionam com limitações geométricas que o sistema deve obedecer. Por exemplo, podem envolver restrições de tamanho, forma ou posicionamento de componentes;
- Restrições de comportamento: refletem limitações no comportamento ou desempenho do sistema. Por exemplo, podem impor limites em forças, tensões, velocidades ou outras variáveis de interesse;
- Restrições de igualdade: são restrições que estabelecem relações de igualdade entre variáveis. Por exemplo, podem expressar equações que devem ser satisfeitas pelo sistema;
- Restrições de desigualdade: estabelecem relações de desigualdade entre as variáveis. Elas podem representar limitações superiores ou inferiores para certos parâmetros.

Ao considerar essas diversas categorias de funções de restrição, torna-se possível modelar e resolver problemas de engenharia de forma mais apurada e adequada. Garante-se, então, que as soluções encontradas estejam em conformidade com as condições impostas pelo sistema e pelo projeto em questão.

C.3.4 Problema Padrão de Otimização

Com base em Arora (2015), um problema geral de otimização pode ser formulado na forma padrão do seguinte modo:

Face a um problema definido pelos valores de um vetor de n **variáveis de projeto**

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T, \quad (\text{C.13})$$

minimizar uma **função objetivo** $f(\mathbf{x})$, sujeita às **restrições de igualdade**

$$h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, p \quad (\text{C.14})$$

e às **restrições de desigualdade**

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0. \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{C.15})$$

De maneira geral, um projeto baseado em otimização pode ser descrito conforme o fluxograma mostrado na FIGURA 97.

FIGURA 97 – FLUXOGRAMA GENÉRICO DE UM PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO



FONTE: Adaptado de Brasil e Silva (2019)

C.4 TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO EMPREGADAS

Conforme mencionado anteriormente, o presente trabalho emprega duas TONL, de forma combinada. Essas técnicas são os algoritmos genéticos e a programação quadrática sequencial. A seguir, serão mencionadas algumas características relevantes associadas a essas técnicas.

C.4.1 Algoritmos Genéticos

O algoritmo genético representa um método de otimização fundamentado na teoria da evolução proposto por Charles Darwin. Nesse contexto, as características mais desejáveis que contribuem para a predominância da espécie são enfatizadas e amplificadas a cada iteração (ARORA, 2015; BALTHAZAR et al., 2021).

Pode-se dizer, de forma contextualizada, que o algoritmo genético começa com um conjunto de projetos, denominados população inicial ou primeira geração. Cada projeto, também denominado membro da população, é representado por uma *string* binária. Dessa geração, a próxima é formada utilizando três operadores: reprodução, cruzamento e mutação. Reprodução é um operador por meio do qual um projeto cor-

rente (atual) é introduzido numa nova população de forma tal que, suas características são transferidas aos membros mais aptos da população. Cruzamento corresponde a permitir, que aleatoriamente, determinados membros da população troquem características dos projetos entre eles. O operador mutação é utilizado para proteger o processo de uma perda completa prematura de material genético valioso durante a reprodução e o cruzamento. Ao final, um projeto com melhor aptidão é adotado como o projeto ótimo (ARORA, 2015; BRASIL; SILVA, 2019).

Como o algoritmo genético não requer a diferenciabilidade das funções envolvidas nos problemas, ele apenas pressupõe que as funções podem ser calculadas para um determinado projeto. Isso evita a convergência para mínimos locais do problema em análise, buscando, em geral, o mínimo global (ARORA, 2015; BRASIL; SILVA, 2019).

A TABELA 14 apresenta alguns termos básicos relacionados com o método em questão.

TABELA 14 – TERMOS EMPREGADOS EM ALGORITMOS GENÉTICOS

Termo	Definição
Cromossomo	Vetor de valores das variáveis de projeto de um dado ponto. Também chamado de projeto ou cadeia genética.
Gene	Unidade básica do cromossomo. Cada cromossomo tem um certo número de genes, descrevendo uma certa variável do problema.
População	Conjunto de cromossomos.
Geração	Número da iteração que o método executa.
Operações Genéticas	Operações às quais os cromossomos são submetidos.
Região Viável	Espaço que compreende as soluções possíveis ou viáveis do problema. É caracterizada pelas funções de restrição que definem as soluções.
Função Objetivo	Função a ser minimizada. Contém a informação numérica do desempenho de cada cromossomo na população.
Genótipo	Representa a informação contida nos cromossomos.

FONTE: Adaptado de Balthazar et al. (2021)

No ambiente computacional MATLAB, o método dos algoritmos genéticos encontra-se implementado na função `ga`.

C.4.2 Programação Quadrática Sequencial (SQP)

Os métodos de programação quadrática sequencial (SQP) são uma classe de técnicas utilizadas para resolver problemas de otimização não linear que envolvem

restrições. Esses métodos abordam o problema através da resolução iterativa de subproblemas internos, onde busca-se minimizar ou maximizar uma função quadrática com restrições lineares (ARORA, 2015).

É importante destacar que é necessário fornecer uma estimativa inicial da solução procurada, que, quando combinada com o método dos algoritmos genéticos, pode ser refinada para melhorar o resultado. No ambiente MATLAB, a implementação correspondente do método SQP pode ser encontrada na função `fmincon`.

APÊNDICE D – INDICADOR DE CORRELAÇÃO - LAC

Neste apêndice, apresentam-se os resultados relativos ao indicador de correlação LAC (*Local Amplitude Criterion*) para as funções resposta em frequência numéricas e experimentais, abrangendo toda a faixa de frequência analisada. Isso permitiu, em particular, avaliar o seu valor médio no ponto de medição (grau de liberdade) correspondente.

D.1 CORRELAÇÃO ENTRE FUNÇÕES RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Quando modelos numéricos são atualizados com base em resultados experimentais, deve-se aferir os resultados obtidos. Isso pode ser feito através de indicadores de correlação aplicados a funções resposta em frequência numéricas e experimentais. Esses indicadores, que são relativamente recentes, são baseados nos indicadores de correlação de modelos modais MAC (*Modal Assurance Criterion*) e COMAC (*Coordinate Modal Assurance Criterion*) .

Neste contexto, no presente trabalho, foi utilizado o indicador LAC (*Local Amplitude criterion*) , proposto por Zang et al. (2001). O LAC permite quantificar o nível de correlação entre duas FRFs individuais em função da frequência. Esse indicador apresenta como resultado um valor real compreendido entre 0 (nenhuma correlação) e 1 (correlação perfeita).

O LAC $\chi_{rs}(\omega)$ é definido por Zang et al. (2001):

$$\chi_{rs}(\omega) = \frac{2 \left| \tilde{H}_{X_{rs}}^*(\omega) \tilde{H}_{A_{rs}}(\omega) \right|}{\left(\tilde{H}_{X_{rs}}^*(\omega) \tilde{H}_{X_{rs}}(\omega) \right) + \left(\tilde{H}_{A_{rs}}^*(\omega) \tilde{H}_{A_{rs}}(\omega) \right)}, \quad (\text{D.1})$$

onde $\tilde{H}_{X_{rs}}$ e $\tilde{H}_{A_{rs}}$ são, respectivamente, as funções resposta em frequência experimental e numérica, entre os pontos r e s . O sobrescrito $*$ indica, por sua vez, o complexo conjugado da grandeza associada.

Com base na EQUAÇÃO D.1, o valor médio do indicador LAC $\bar{\chi}_{rs}(\omega)$ é definido como (ZANG et al., 2001)

$$\bar{\chi}_{rs} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_{rs}(\omega_i). \quad (\text{D.2})$$

A determinação do valor médio do LAC permite quantificar o grau de correlação das amplitudes entre as FRFs experimentais e numéricas, considerando os graus de liberdade analisados. Tal resultado fornece, portanto, um indicador de correlação

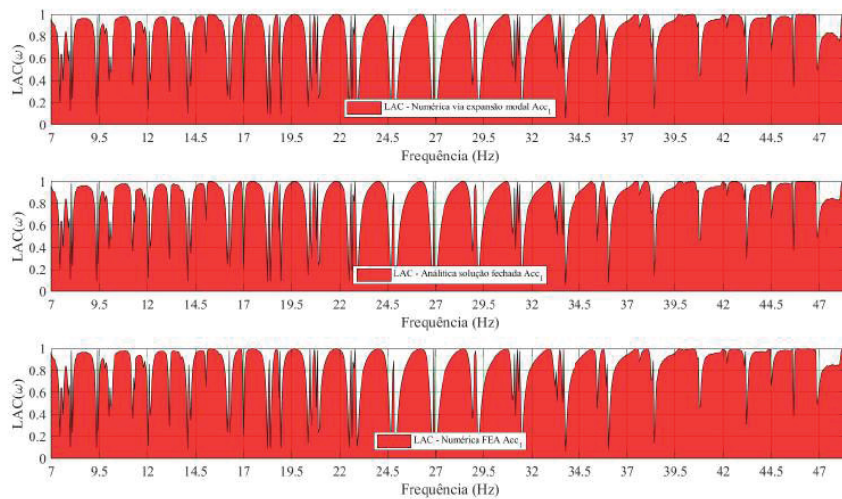
especial, assemelhando-se ao conceito do COMAC (*Coordinate Modal Assurance Criterion*)

Inicialmente, são exibidas as medidas de correlação entre as FRFs numéricas e as FRFs experimentais, obtidas por meio do ensaio de varredura harmônica. Em seguida, são apresentados os resultados correspondentes aos ensaios de impacto.

Utiliza-se, aqui, a mesma notação empregada no Capítulo 6, ela é a seguinte: SAFF - solução analítica na forma fechada, SEM - solução via expansão modal, MEF - solução via Método dos Elementos Finitos.

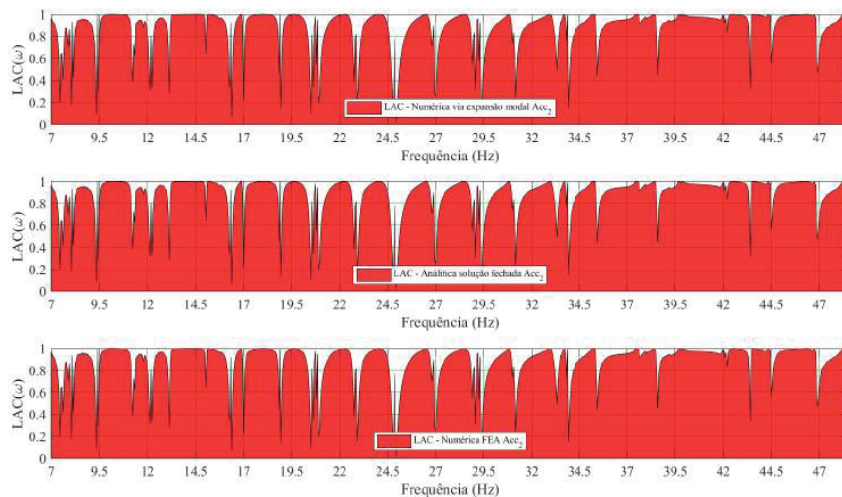
D.2 LAC - ENSAIOS DE VARREDURA HARMÔNICA

FIGURA 98 – LAC - ACELERÔMETRO R1 - 16% RMC - $T = 8727N$

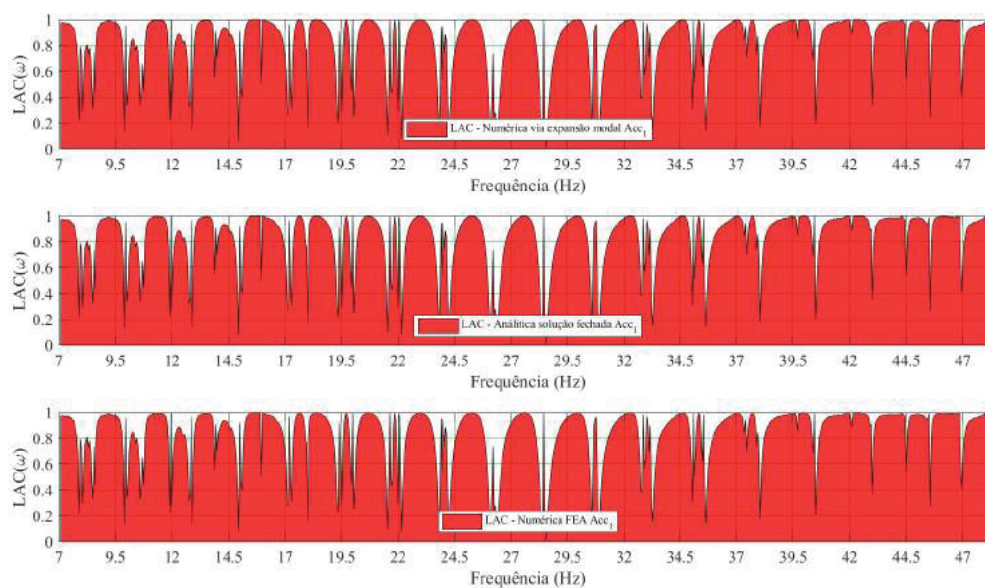


FONTE: O autor

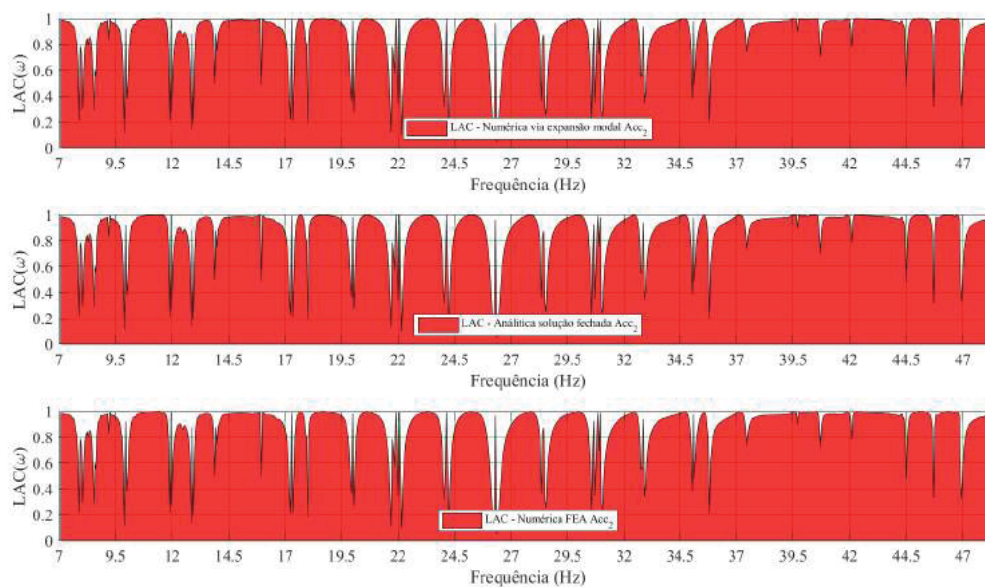
FIGURA 99 – LAC - ACELERÔMETRO R2 - 16% RMC - $T = 8727N$



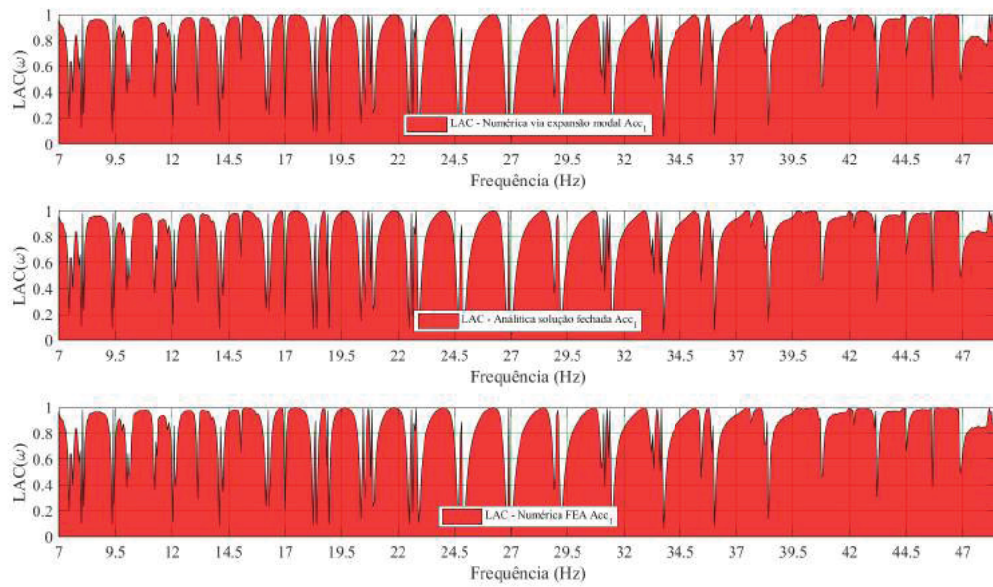
FONTE: O autor

FIGURA 100 – LAC - ACELERÔMETRO R1 - 18% RMC - $T = 9818N$ 

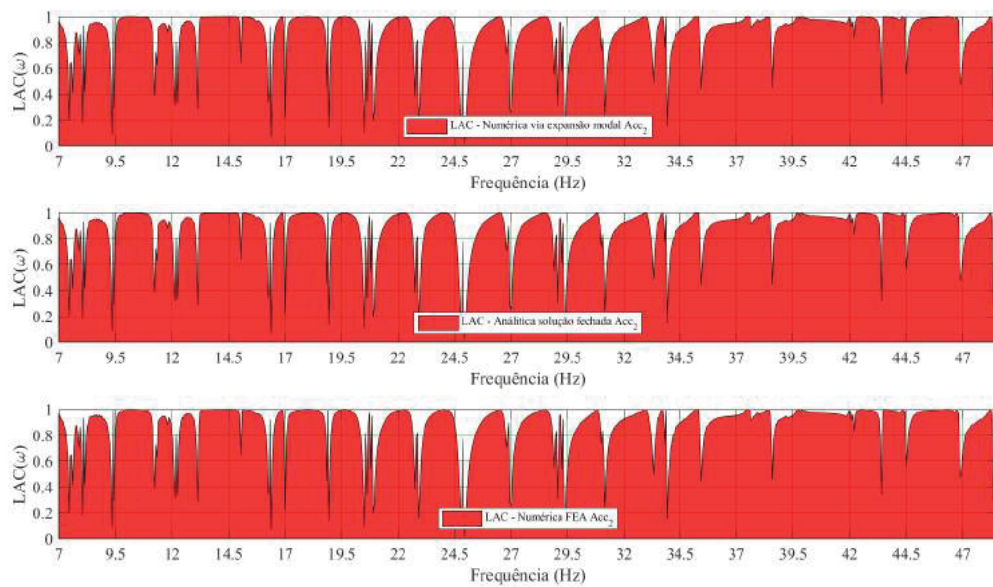
FONTE: O autor

FIGURA 101 – LAC - ACELERÔMETRO R2 - 18% RMC - $T = 9818N$ 

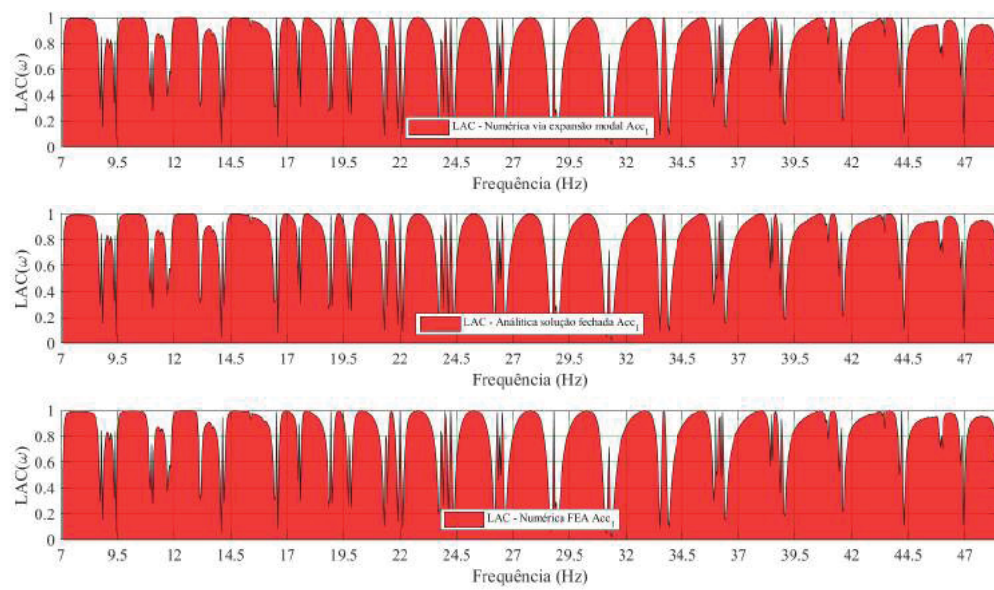
FONTE: O autor

FIGURA 102 – LAC - ACELERÔMETRO R1 - 20% RMC - $T = 10909N$ 

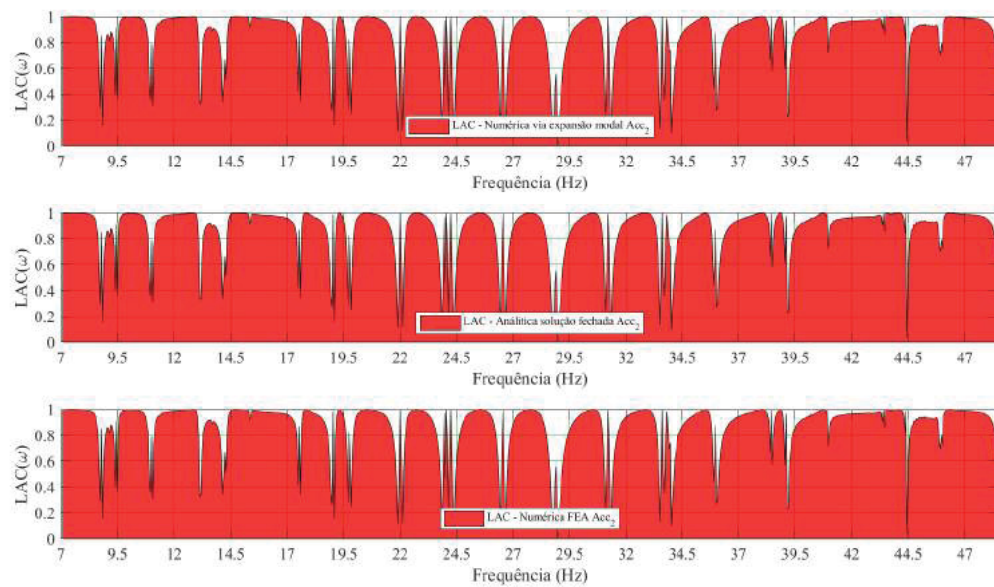
FONTE: O autor

FIGURA 103 – LAC - ACELERÔMETRO R2 - 20% RMC - $T = 10909N$ 

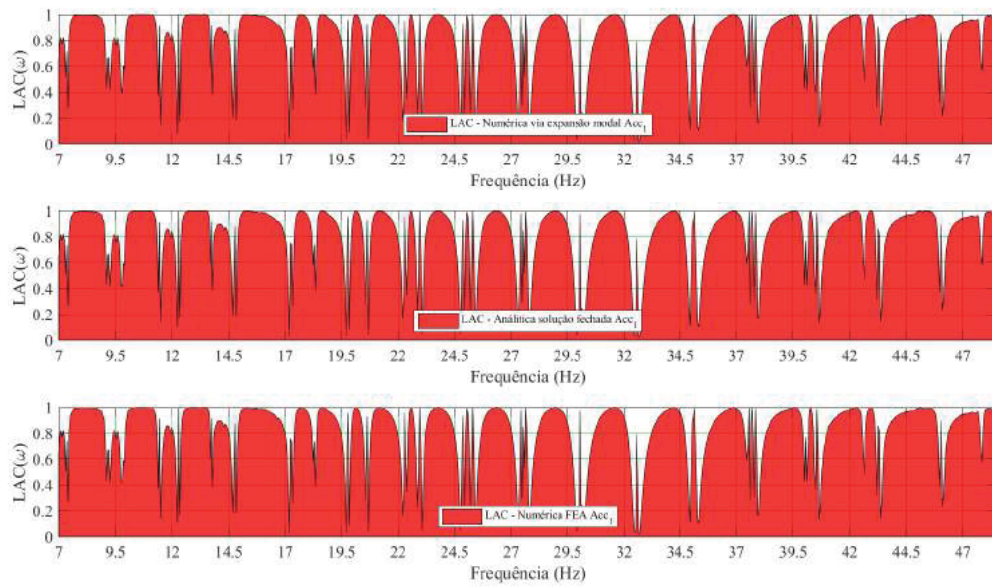
FONTE: O autor

FIGURA 104 – LAC - ACELERÔMETRO R1 - 22% RMC - $T = 12000N$ 

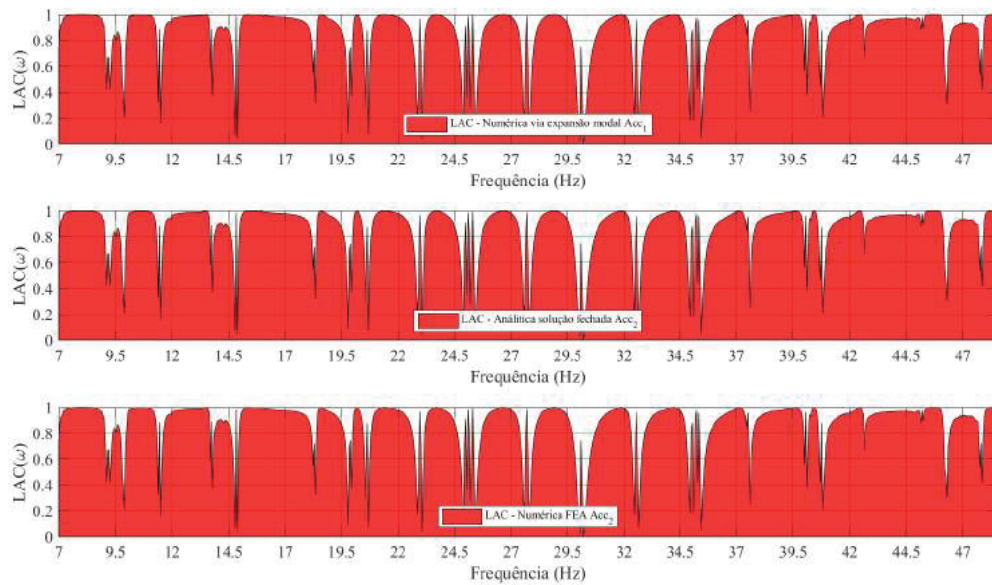
FONTE: O autor

FIGURA 105 – LAC - ACELERÔMETRO R2 - 22% RMC - $T = 12000N$ 

FONTE: O autor

FIGURA 106 – LAC - ACELERÔMETRO R1 - 24% RMC - $T = 13090N$ 

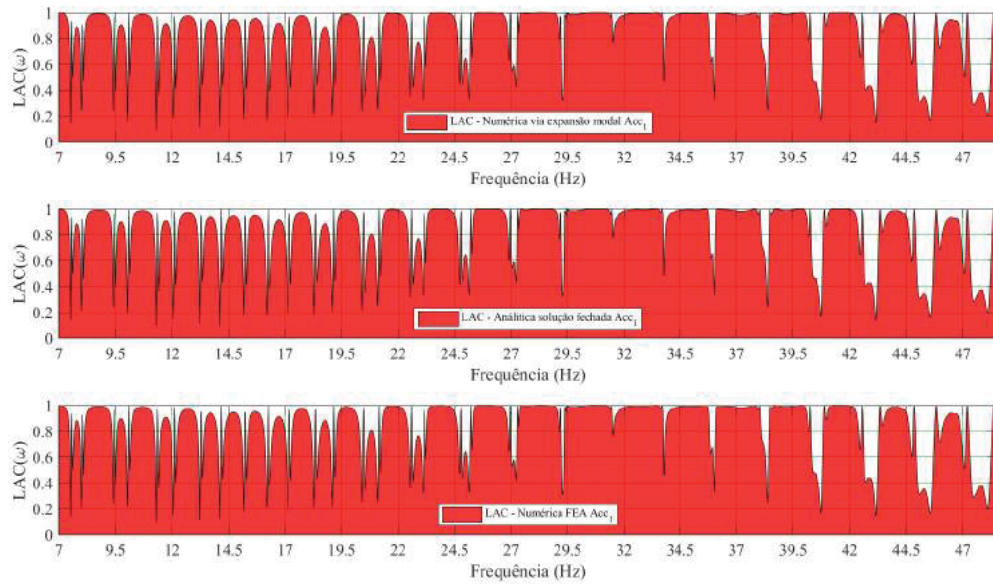
FONTE: O autor

FIGURA 107 – LAC - ACELERÔMETRO R2 - 24% RMC - $T = 13090N$ 

FONTE: O autor

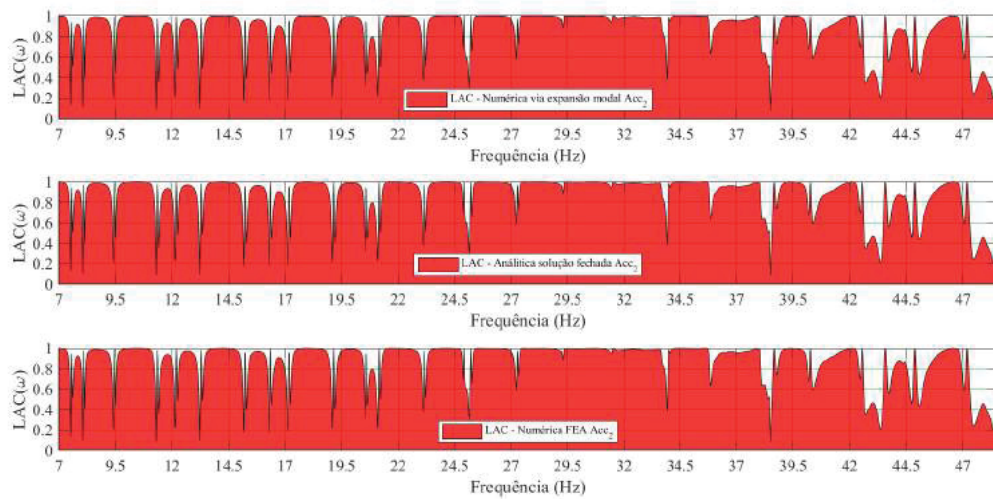
D.3 LAC - ENSAIOS DE IMPACTO

FIGURA 108 – LAC - ACELERÔMETRO R1 - 16% RMC - $T = 8727N$

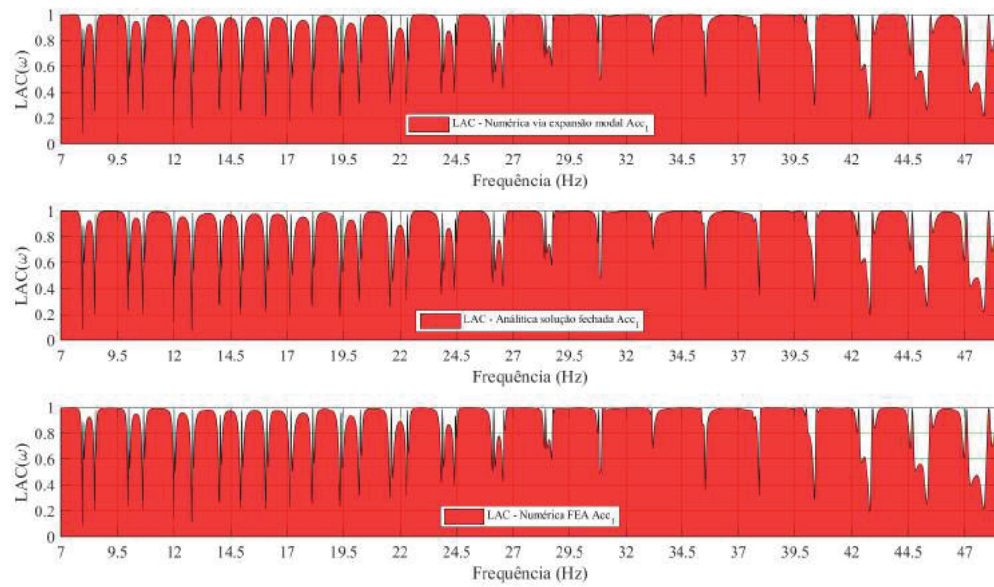


FONTE: O autor

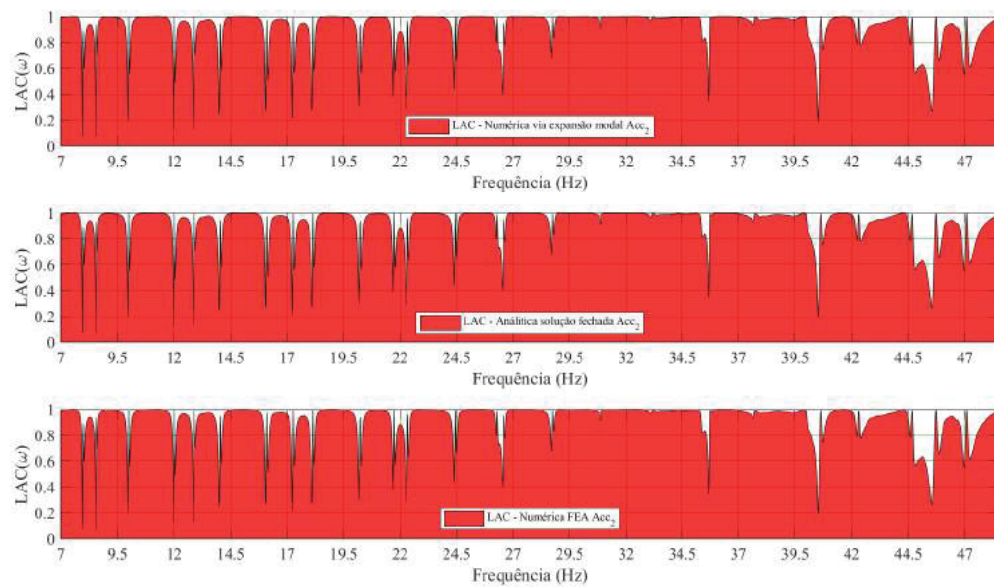
FIGURA 109 – LAC - ACELERÔMETRO R2 - 16% RMC - $T = 8727N$



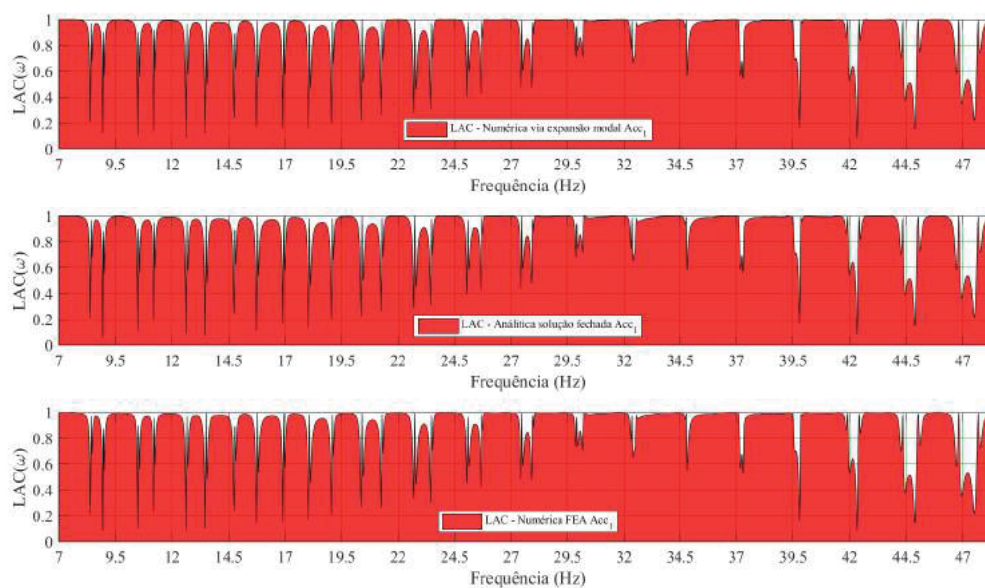
FONTE: O autor

FIGURA 110 – LAC - ACELERÔMETRO R1 - 18% RMC - $T = 9818N$ 

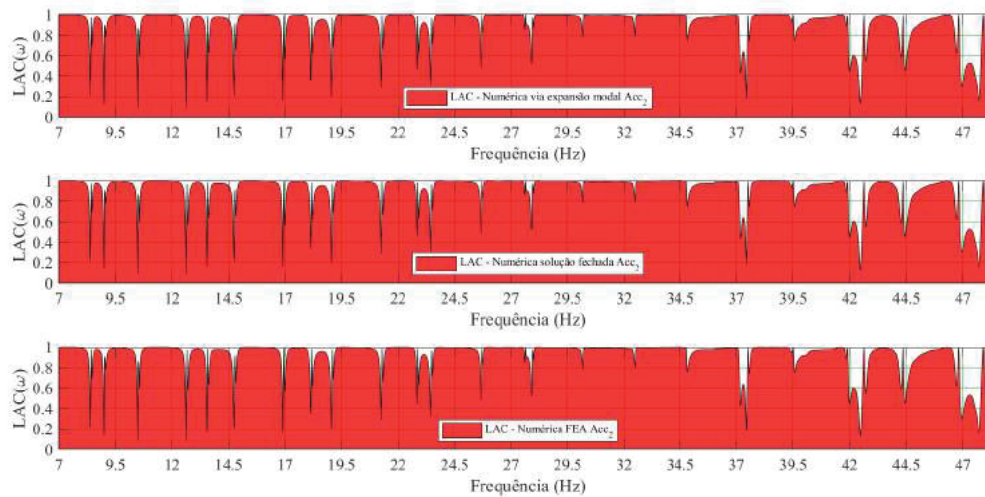
FONTE: O autor

FIGURA 111 – LAC - ACELERÔMETRO R2 - 18% RMC - $T = 9818N$ 

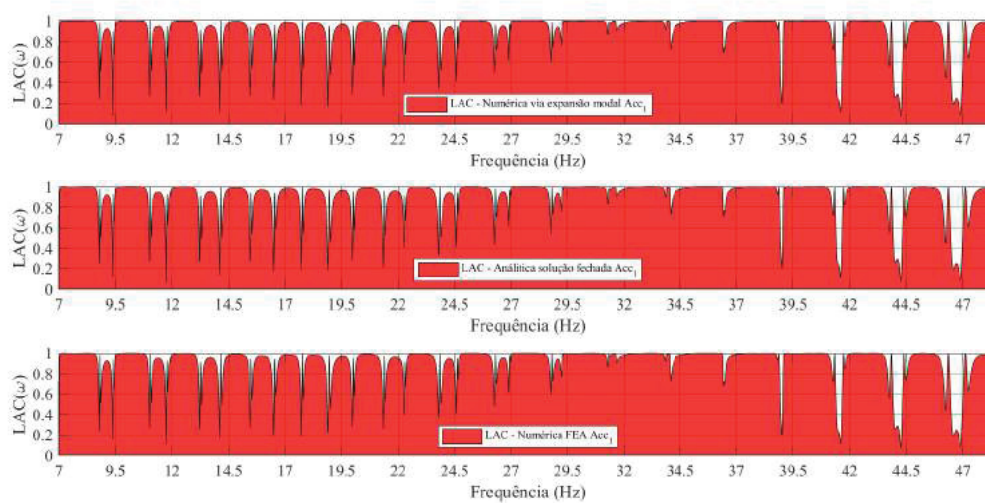
FONTE: O autor

FIGURA 112 – LAC - ACELERÔMETRO R1 - 20% RMC - $T = 9818N$ 

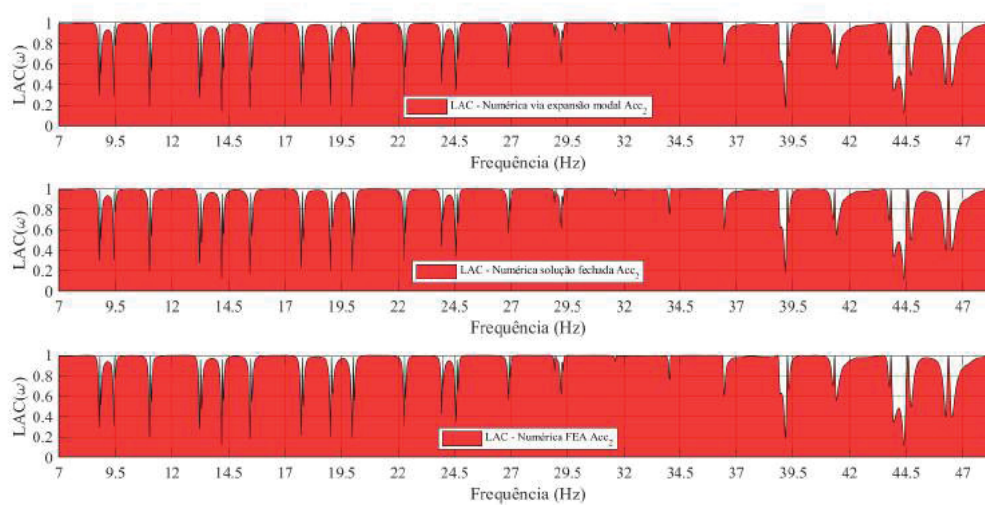
FONTE: O autor

FIGURA 113 – LAC - ACELERÔMETRO R2 - 20% RMC - $T = 9818N$ 

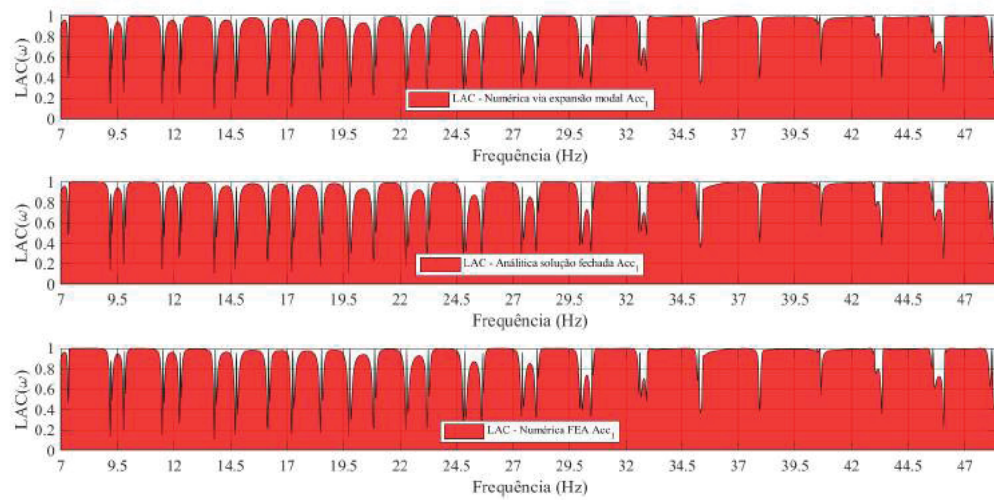
FONTE: O autor

FIGURA 114 – LAC - ACELERÔMETRO R1 - 22% RMC - $T = 12000N$ 

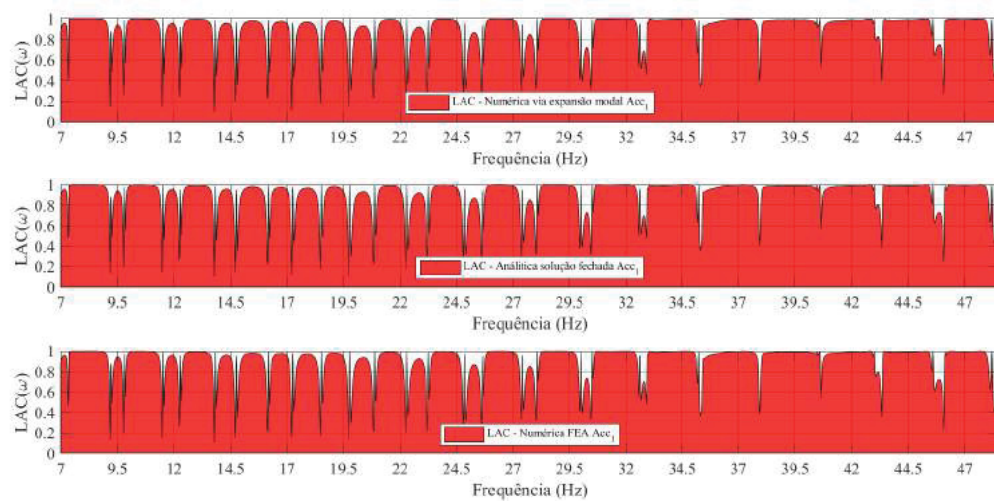
FONTE: O autor

FIGURA 115 – LAC - ACELERÔMETRO R2 - 22% RMC - $T = 12000N$ 

FONTE: O autor

FIGURA 116 – LAC - ACELERÔMETRO R2 - 24% RMC - $T = 24000N$ 

FONTE: O autor

FIGURA 117 – LAC - ACELERÔMETRO R2 - 24% RMC - $T = 24000N$ 

FONTE: O autor

APÊNDICE E – TABELAS COMPARATIVAS ENTRE OS RESULTADOS NUMÉRICOS E EXPERIMENTAIS

Neste apêndice, são relacionados, em tabelas e gráficos, os valores numéricos e experimentais para as amplitudes de ressonância das FRF's e as frequências naturais. Utiliza-se, aqui, a mesma notação empregada no Capítulo 6, qual seja: SAFF - solução analítica na forma fechada, SEM - solução via expansão modal, MEF - método dos elementos finitos

E.1 ENSAIOS DE VARREDURA HARMÔNICA (EVH)

E.1.1 Acelerômetro - R1

TABELA 15 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS - AC-R1 - [dB (ref. 1 m/s²/N)] - 16% RMC - $T = 8727N$ - EVH

Modos	Amp - exp	SAFF	SEM	MEF
4	11.503	19.428	19.419	19.411
5	23.937	34.017	34.060	34.075
6	21.970	28.769	28.793	28.790
7	23.996	34.619	34.666	34.645
8	27.118	35.778	35.715	35.762
9	28.975	39.680	39.773	39.691
10	27.278	41.423	41.509	41.424
11	26.158	30.851	30.777	30.866
12	13.503	31.644	31.536	31.676
13	6.067	27.433	27.518	27.413
14	14.612	20.282	20.355	20.269
15	20.655	7.366	7.371	7.320
16	23.467	23.816	23.858	23.777
17	27.313	24.792	24.693	24.827
18	22.127	28.707	28.769	28.667
19	28.499	28.669	28.738	28.629
20	28.413	27.717	27.618	27.756
21	28.171	26.537	26.580	26.510
22	28.656	24.134	24.138	24.125
23	25.755	19.805	19.817	19.794

FONTE: O autor

TABELA 16 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - (Hz) - 16% RMC - $T = 8727N$ - EVH

Modos	Freq - exp	SAFF	SEM	MEF
4	7,578	7,464	7,464	7,464
5	9,443	9,346	9,346	9,346
6	11,317	11,237	11,237	11,237
7	13,184	13,141	13,141	13,141
8	15,053	15,060	15,060	15,059
9	16,947	16,994	16,994	16,994
10	18,858	18,947	18,947	18,946
11	20,800	20,919	20,919	20,919
12	22,750	22,914	22,914	22,914
13	24,750	24,932	24,932	24,932
14	26,824	26,976	26,976	26,975
15	28,921	29,047	29,047	29,046
16	31,028	31,147	31,147	31,146
17	33,190	33,278	33,278	33,277
18	35,370	35,441	35,441	35,440
19	37,610	37,638	37,638	37,637
20	39,861	39,870	39,870	39,869
21	42,168	42,139	42,139	42,137
22	44,499	44,446	44,446	44,445
23	46,866	46,793	46,793	46,791

FONTE: O autor

TABELA 17 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - [dB (ref. 1 m/s²/N)] - 18% RMC - $T = 9818N$ - EVH

Modos	Amp - exp	SAFF	SEM	MEF
4	15,027	20,498	20,496	20,471
5	22,893	31,370	31,361	31,309
6	29,217	31,422	31,413	31,378
7	24,452	26,369	26,374	26,391
8	29,481	40,840	40,802	40,795
9	29,983	44,207	44,164	44,288
10	28,386	34,676	34,647	34,662
11	28,896	38,763	38,753	38,849
12	14,090	36,590	36,547	36,674
13	8,285	26,291	26,305	26,322
14	21,077	21,345	21,355	21,387
15	29,872	8,474	8,463	8,393
16	26,876	22,139	22,095	22,175
17	33,073	27,247	27,200	27,315
18	26,453	26,866	26,817	26,916
19	32,033	27,085	27,081	27,124
20	30,329	27,457	27,404	27,529
21	32,330	25,941	25,913	26,007
22	30,183	23,436	23,393	23,511

FONTE: O autor

TABELA 18 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - (Hz) - 18% RMC - $T = 9818N$ - EVH

Modos	Freq - exp	SAFF	SEM	MEF
4	8,033	7,913	7,913	7,913
5	10,015	9,907	9,907	9,907
6	12,008	11,910	11,910	11,910
7	13,979	13,925	13,925	13,925
8	15,957	15,955	15,955	15,955
9	17,943	18,000	18,000	18,000
10	19,943	20,063	20,063	20,063
11	21,997	22,146	22,146	22,146
12	24,100	24,250	24,250	24,250
13	26,150	26,377	26,377	26,377
14	28,359	28,530	28,530	28,530
15	30,558	30,709	30,709	30,709
16	32,779	32,917	32,917	32,917
17	35,051	35,155	35,155	35,155
18	37,363	37,425	37,425	37,424
19	39,706	39,728	39,728	39,727
20	42,074	42,066	42,066	42,065
21	44,485	44,440	44,440	44,439
22	46,925	46,852	46,852	46,851

FONTE: O autor

TABELA 19 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - [dB (ref. 1 m/s²/N)] - 20% RMC - $T = 10909N$ - EVH

Modos	Amp - exp	SAFF	SEM	MEF
4	13,261	19,942	19,939	19,974
5	24,917	23,839	23,835	23,873
6	25,843	32,751	32,738	32,820
7	24,539	34,896	34,912	34,828
8	30,409	37,364	37,340	37,442
9	30,072	35,693	35,671	35,752
10	28,483	45,047	45,043	45,035
11	24,387	32,761	32,736	32,801
12	11,714	32,016	31,984	32,056
13	9,979	32,932	32,963	32,908
14	19,623	26,887	26,902	26,892
15	29,386	8,526	8,548	8,444
16	29,104	22,335	22,367	22,312
17	23,086	30,060	30,045	30,059
18	27,423	31,118	31,127	31,116
19	30,558	31,391	31,361	31,394
20	30,990	29,730	29,752	29,730
21	30,616	27,693	27,720	27,693

FONTE: O autor

TABELA 20 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - (Hz) - 20% RMC - $T = 10909N$ - EVH

Modos	Freq - exp	SAFF	SEM	MEF
4	8,426	8,336	8,336	8,336
5	10,510	10,434	10,434	10,434
6	12,597	12,541	12,541	12,541
7	14,671	14,660	14,660	14,660
8	16,743	16,791	16,791	16,791
9	18,840	18,938	18,938	18,938
10	20,943	21,101	21,101	21,101
11	23,093	23,282	23,282	23,282
12	25,267	25,483	25,483	25,483
13	27,5	27,707	27,707	27,707
14	29,741	29,953	29,953	29,954
15	32,049	32,225	32,225	32,225
16	34,359	34,524	34,524	34,524
17	36,718	36,851	36,851	36,851
18	39,133	39,207	39,207	39,208
19	41,564	41,595	41,595	41,596
20	44,010	44,016	44,016	44,016
21	46,511	46,471	46,471	46,472

FONTE: O autor

TABELA 21 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - [dB (ref. 1 m/s²/N)] - 22% RMC - $T = 12000N$ - EVH

Modos	Amp - exp	SAFF	SEM	MEF
4	23,709	21,905	21,892	21,956
5	23,807	25,463	25,446	25,515
6	31,828	34,596	34,546	34,711
7	32,455	35,210	35,254	35,111
8	30,203	36,125	36,056	36,227
9	32,369	33,419	33,361	33,490
10	34,226	39,476	39,324	39,611
11	29,276	32,451	32,515	32,384
12	17,594	32,830	32,907	32,754
13	4,281	28,552	28,426	28,628
14	24,401	20,824	20,916	20,772
15	32,773	8,149	8,178	8,067
16	27,907	23,408	23,451	23,356
17	29,267	27,737	27,504	27,800
18	31,587	28,428	28,303	28,487
19	30,841	31,584	31,426	31,606
20	31,718	30,679	30,556	30,689

FONTE: O autor

TABELA 22 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - (Hz) - 22% RMC - $T = 12000N$ - EVH

Modos	Freq - exp	SAFF	SEM	MEF
4	8,841	8,738	8,738	8,738
5	11,032	10,936	10,936	10,936
6	13,196	13,143	13,143	13,143
7	15,364	15,360	15,360	15,360
8	17,523	17,589	17,589	17,589
9	19,737	19,833	19,833	19,833
10	21,905	22,092	22,092	22,092
11	24,158	24,369	24,369	24,369
12	26,437	26,665	26,665	26,665
13	28,75	28,981	28,981	28,981
14	31,115	31,320	31,320	31,320
15	33,510	33,682	33,682	33,682
16	35,923	36,070	36,070	36,070
17	38,419	38,485	38,485	38,485
18	40,887	40,928	40,928	40,928
19	43,422	43,401	43,401	43,401
20	45,966	45,905	45,905	45,905

FONTE: O autor

TABELA 23 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - [dB (ref. 1 m/s²/N)] - 24% RMC - $T = 13090N$ - EVH

Modos	Amp - exp	SAFF	SEM	MEF
4	13,965	16,625	16,638	16,603
5	32,961	23,986	24,013	23,951
6	28,484	26,388	26,423	26,355
7	33,057	31,378	31,312	31,420
8	28,878	37,644	37,796	37,568
9	31,498	50,209	49,880	50,080
10	30,103	45,340	45,762	45,160
11	27,421	31,364	31,234	31,369
12	17,578	32,610	32,855	32,591
13	20,700	28,469	28,264	28,440
14	27,584	26,005	26,443	25,982
15	30,952	9,636	9,766	9,518
16	22,731	30,154	30,118	29,865
17	30,894	32,619	32,981	32,495
18	35,570	35,205	34,973	34,897
19	35,558	34,054	34,427	33,947
20	37,741	33,950	34,250	33,794

FONTE: O autor

TABELA 24 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - (Hz) - 24% RMC - $T = 13090N$ - EVH

Modos	Freq - exp	SAFF	SEM	MEF
4	9,225	9,124	9,124	9,124
5	11,500	11,418	11,418	11,418
6	13,777	13,721	13,721	13,721
7	16,036	16,034	16,034	16,034
8	18,318	18,359	18,359	18,360
9	20,571	20,699	20,699	20,699
10	22,860	23,053	23,053	23,054
11	25,214	25,425	25,425	25,426
12	27,650	27,816	27,816	27,817
13	30,008	30,227	30,227	30,228
14	32,443	32,661	32,661	32,661
15	34,942	35,118	35,118	35,118
16	37,488	37,599	37,599	37,600
17	40,023	40,108	40,108	40,109
18	42,594	42,645	42,645	42,646
19	45,211	45,211	45,211	45,212
20	47,856	47,808	47,808	47,809

FONTE: O autor

E.1.2 Dados acelerômetro - R2

TABELA 25 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS - AC-R2 - [dB (ref. 1 m/s²/N)] - 16% RMC - $T = 8727N$ - EVH

Modos	Amp - exp	SAFF	SEM	MEF
4	6,690	15,039	15,041	15,020
5	23,696	33,232	33,224	33,291
6	18,359	24,911	24,907	24,935
7	20,311	30,963	30,954	30,990
8	25,819	34,576	34,585	34,551
9	22,628	33,096	33,079	33,107
10	31,083	40,262	40,239	40,257
11	15,984	23,852	23,860	23,854
12	30,627	37,468	37,476	37,480
13	9,078	13,619	13,600	13,578
14	26,559	33,772	33,781	33,797
15	17,488	19,654	19,624	19,605
16	28,076	35,207	35,185	35,166
17	23,695	23,909	23,911	23,937
18	22,355	30,668	30,646	30,619
19	24,954	24,417	24,393	24,365
20	26,537	26,475	26,467	26,477
21	25,041	22,771	22,770	22,793
22	25,178	18,580	18,559	18,540
23	23,392	17,292	17,289	17,305

FONTE: O autor

TABELA 26 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R2 - (Hz) - 16% RMC - $T = 8727N$ - EVH

Modos	Freq - exp	SAFF	SEM	MEF
4	7,576	7,464	7,464	7,464
5	9,443	9,345	9,345	9,345
6	11,317	11,237	11,237	11,237
7	13,183	13,141	13,141	13,141
8	15,054	15,059	15,059	15,059
9	16,948	16,993	16,993	16,993
10	18,859	18,945	18,945	18,945
11	20,802	20,917	20,917	20,917
12	22,764	22,911	22,911	22,911
13	24,750	24,929	24,929	24,929
14	26,828	26,972	26,972	26,972
15	28,921	29,042	29,042	29,042
16	31,029	31,141	31,141	31,141
17	33,188	33,270	33,270	33,270
18	35,369	35,432	35,432	35,432
19	37,612	37,628	37,628	37,627
20	39,864	39,858	39,858	39,858
21	42,170	42,126	42,126	42,125
22	44,498	44,431	44,431	44,431
23	46,867	46,776	46,776	46,776

FONTE: O autor

TABELA 27 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R2 - [dB (ref. 1 m/s²/N)] - 18% RMC - $T = 9818N$ - EVH

Modos	Amp - exp	SAFF	SEM	MEF
4	10,143	16,135	16,140	16,112
5	22,624	31,492	31,509	31,441
6	25,266	28,396	28,411	28,363
7	21,029	23,138	23,129	23,151
8	28,161	39,730	39,748	39,723
9	23,887	37,145	37,088	37,191
10	32,272	36,201	36,224	36,214
11	18,884	29,007	28,948	29,019
12	31,311	39,376	39,319	39,402
13	11,257	12,745	12,706	12,713
14	32,245	32,960	32,982	33,005
15	26,752	19,170	19,125	19,205
16	31,671	34,024	34,012	34,085
17	29,393	24,178	24,123	24,200
18	27,316	29,990	29,980	30,054
19	28,400	24,302	24,286	24,363
20	28,762	25,304	25,267	25,344
21	29,055	21,857	21,845	21,919
22	27,280	17,392	17,339	17,405

FONTE: O autor

TABELA 28 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R2 - (Hz) - 18% RMC - $T = 9818N$ - EVH

Modos	Freq - exp	SAFF	SEM	MEF
4	8,033	7,913	7,913	7,913
5	10,015	9,906	9,906	9,906
6	11,996	11,909	11,909	11,909
7	13,979	13,924	13,924	13,925
8	15,958	15,954	15,954	15,954
9	17,943	17,998	17,998	17,998
10	19,942	20,061	20,061	20,061
11	21,998	22,143	22,143	22,143
12	24,066	24,246	24,246	24,246
13	26,208	26,373	26,373	26,373
14	28,359	28,524	28,524	28,524
15	30,558	30,702	30,702	30,702
16	32,780	32,909	32,909	32,909
17	35,050	35,145	35,145	35,145
18	37,365	37,413	37,413	37,413
19	39,707	39,714	39,714	39,714
20	42,074	42,050	42,050	42,050
21	44,487	44,422	44,422	44,422
22	46,926	46,831	46,831	46,831

FONTE: O autor

TABELA 29 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R2 - [dB (ref. 1 m/s²/N)] - 20% RMC - $T = 10909N$ - EVH

Modos	Amp - exp	SAFF	SEM	MEF
4	8,322	15,215	15,216	15,251
5	24,345	23,578	23,580	23,615
6	22,065	28,695	28,701	28,773
7	20,604	32,359	32,350	32,269
8	29,222	34,466	34,479	34,556
9	23,950	29,732	29,744	29,799
10	32,489	44,968	44,980	45,018
11	14,743	24,603	24,616	24,649
12	28,021	35,127	35,144	35,180
13	13,086	21,414	21,391	21,344
14	31,344	41,352	41,356	41,357
15	26,125	18,621	18,597	18,586
16	32,938	35,271	35,245	35,229
17	19,217	27,475	27,491	27,498
18	28,481	34,441	34,443	34,439
19	26,937	27,251	27,274	27,277
20	29,342	29,060	29,052	29,047
21	27,487	25,943	25,933	25,931

FONTE: O autor

TABELA 30 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R2 - (Hz) - 20% RMC - $T = 10909N$ - EVH

Modos	Freq - exp	SAFF	SEM	MEF
4	8,53	8,34	8,34	8,34
5	10,61	10,43	10,43	10,43
6	12,70	12,54	12,54	12,54
7	14,77	14,66	14,66	14,66
8	16,84	16,79	16,79	16,79
9	18,94	18,94	18,94	18,94
10	21,04	21,10	21,10	21,10
11	23,19	23,28	23,28	23,28
12	25,37	25,48	25,48	25,48
13	27,60	27,70	27,70	27,70
14	29,841	29,949	29,949	29,949
15	32,148	32,220	32,220	32,220
16	34,461	34,518	34,518	34,518
17	36,821	36,844	36,844	36,844
18	39,231	39,199	39,199	39,199
19	41,664	41,586	41,586	41,586
20	44,115	44,005	44,005	44,005
21	46,617	46,459	46,459	46,459

FONTE: O autor

TABELA 31 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - [dB (ref. 1 m/s²/N)] - 22% RMC - $T = 12000N$ - EVH

Modos	Amp - exp	SAFF	SEM	MEF
4	18,833	17,192	17,195	17,244
5	23,787	25,245	25,250	25,297
6	28,129	30,665	30,680	30,781
7	28,651	32,402	32,388	32,299
8	29,492	33,632	33,653	33,735
9	26,106	27,998	28,016	28,068
10	38,908	39,000	39,044	39,140
11	19,222	25,544	25,520	25,469
12	34,809	38,218	38,192	38,150
13	16,220	16,408	16,440	16,460
14	34,911	36,793	36,767	36,748
15	29,466	16,518	16,540	16,589
16	31,643	35,748	35,727	35,729
17	25,500	24,865	24,930	24,965
18	32,736	31,776	31,755	31,766
19	27,190	27,985	28,038	28,074
20	30,258	29,089	29,131	29,161

FONTE: O autor

TABELA 32 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - (Hz) - 22% RMC - $T = 12000N$ - EVH

Modos	Freq - exp	SAFF	SEM	MEF
4	8,841	8,738	8,738	8,738
5	11,032	10,936	10,936	10,936
6	13,196	13,142	13,142	13,142
7	15,365	15,359	15,359	15,359
8	17,523	17,589	17,589	17,589
9	19,729	19,832	19,832	19,832
10	21,902	22,091	22,091	22,091
11	24,158	24,368	24,368	24,368
12	26,433	26,663	26,663	26,663
13	28,768	28,979	28,979	28,979
14	31,118	31,317	31,317	31,317
15	33,510	33,679	33,679	33,679
16	35,924	36,066	36,066	36,067
17	38,421	38,481	38,481	38,481
18	40,890	40,923	40,923	40,923
19	43,424	43,395	43,395	43,395
20	45,967	45,899	45,899	45,899

FONTE: O autor

TABELA 33 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R2 - [dB (ref. 1 m/s²/N)] - 24% RMC - $T = 13090N$ - EVH

Modos	Amp - exp	SAFF	SEM	MEF
4	9,136	12,219	12,221	12,196
5	32,657	23,979	23,982	23,937
6	24,760	23,366	23,369	23,327
7	29,221	27,540	27,535	27,588
8	27,806	38,140	38,157	38,030
9	25,232	39,287	39,267	39,465
10	35,025	48,929	48,944	49,088
11	17,396	25,142	25,156	25,104
12	34,938	41,528	41,561	41,504
13	21,873	16,246	16,270	16,212
14	38,909	45,319	45,349	45,428
15	27,557	24,984	25,025	25,082
16	27,801	38,125	38,106	38,153
17	26,959	29,884	29,873	29,941
18	36,618	33,575	33,613	33,639
19	31,849	30,373	30,363	30,416
20	36,293	30,740	30,726	30,759

FONTE: O autor

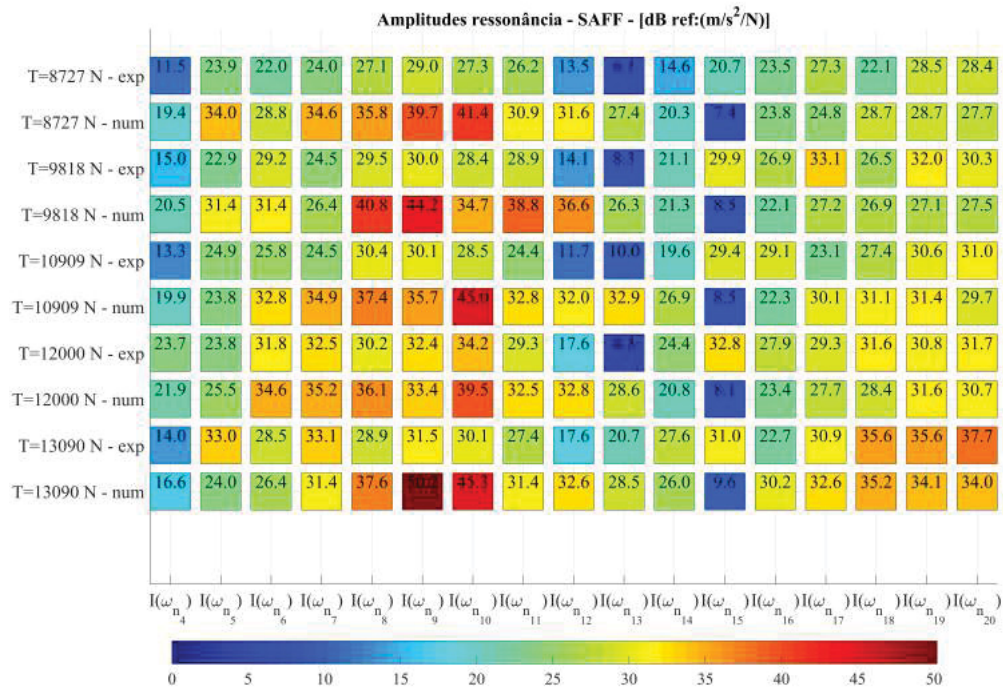
TABELA 34 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R2 - (Hz) - 24% RMC - $T = 13090N$ - EVH

Modos	Amp - exp	SAFF	SEM	MEF
4	9,136	12,219	12,221	12,196
5	32,657	23,979	23,982	23,937
6	24,760	23,366	23,369	23,327
7	29,221	27,540	27,535	27,588
8	27,806	38,140	38,157	38,030
9	25,232	39,287	39,267	39,465
10	35,025	48,929	48,944	49,088
11	17,396	25,142	25,156	25,104
12	34,938	41,528	41,561	41,504
13	21,873	16,246	16,270	16,212
14	38,909	45,319	45,349	45,428
15	27,557	24,984	25,025	25,082
16	27,801	38,125	38,106	38,153
17	26,959	29,884	29,873	29,941
18	36,618	33,575	33,613	33,639
19	31,849	30,373	30,363	30,416
20	36,293	30,740	30,726	30,759

FONTE: O autor

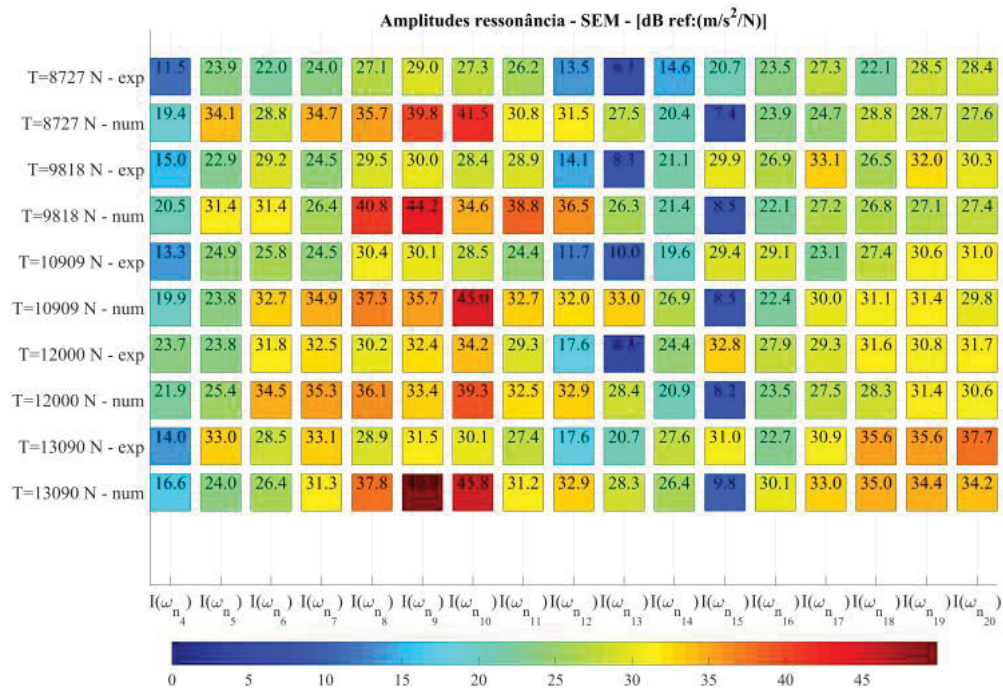
Visando verificar em maior detalhe a associação existente entre os dados experimentais e os resultados numéricos, são ilustradas, nas figuras 118a, 118b e 118c, para as soluções analítica na forma fechada (SAFF), via expansão modal (SEM) e via método dos elementos finitos (MEF), respectivamente, as relações existentes entre os valores numéricos e experimentais das amplitudes de ressonância $I_{rs}(\omega_{nj})$ referentes à medição do acelerômetro R1. Isso é feito para cada nível de tração. Adicionalmente, nas FIGURAS 119a, 119b e 119c, é ilustrada a mesma análise, porém para o acelerômetro R2.

FIGURA 118 – AMPLITUDE RESSONÂNCIA - EVH - ACELERÔMETRO R1
(a) EXPERIMENTAL X SAFF



FONTE: O autor

(b) EXPERIMENTAL X SEM



FONTE: O autor

(c) EXPERIMENTAL X MEF

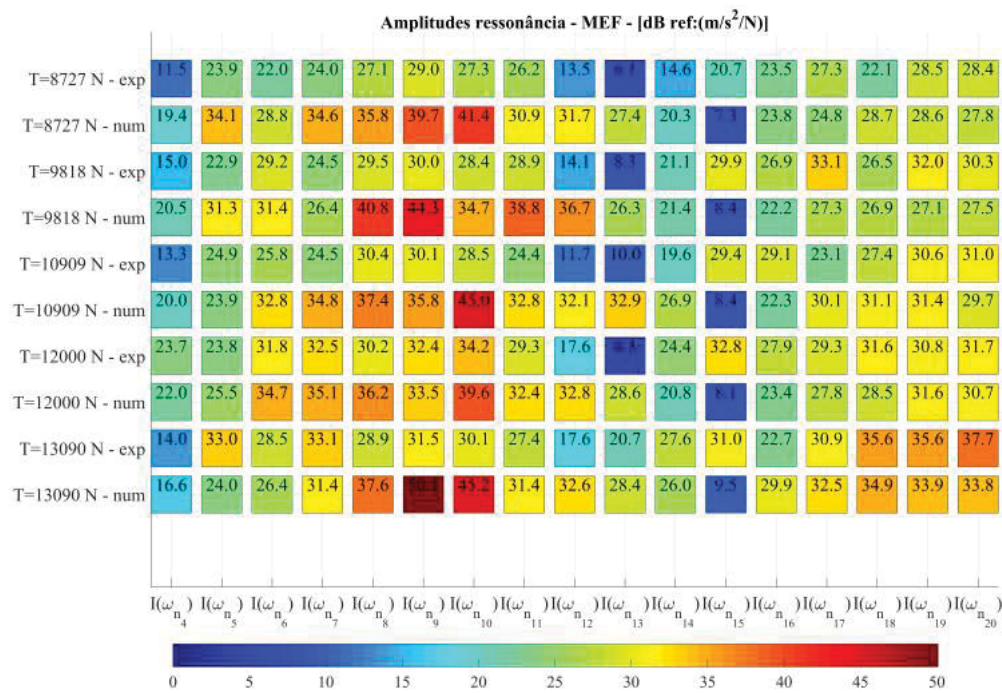
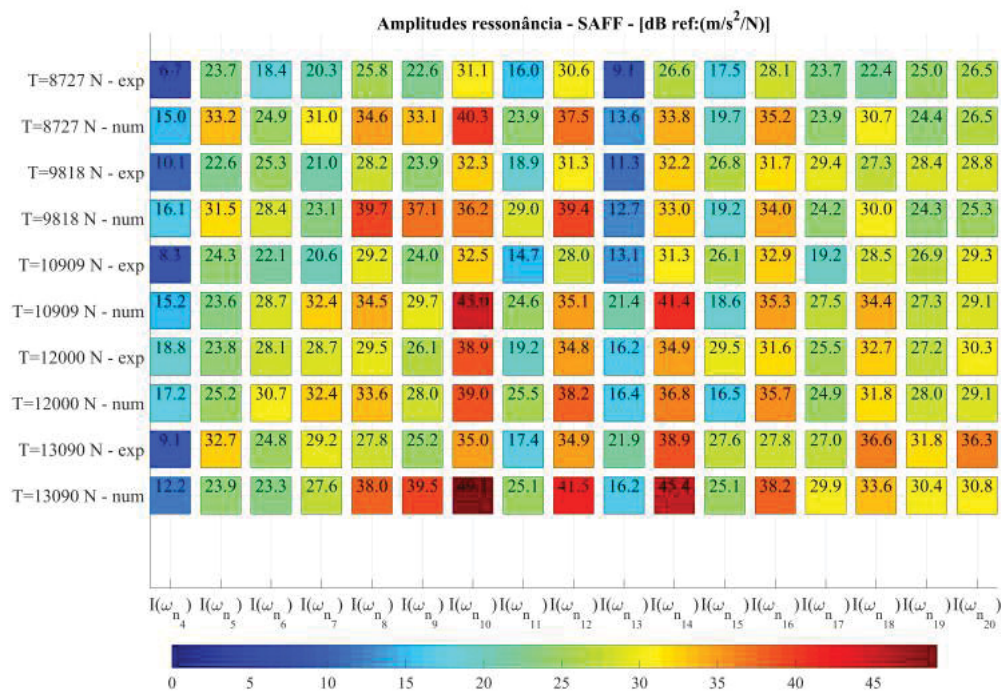
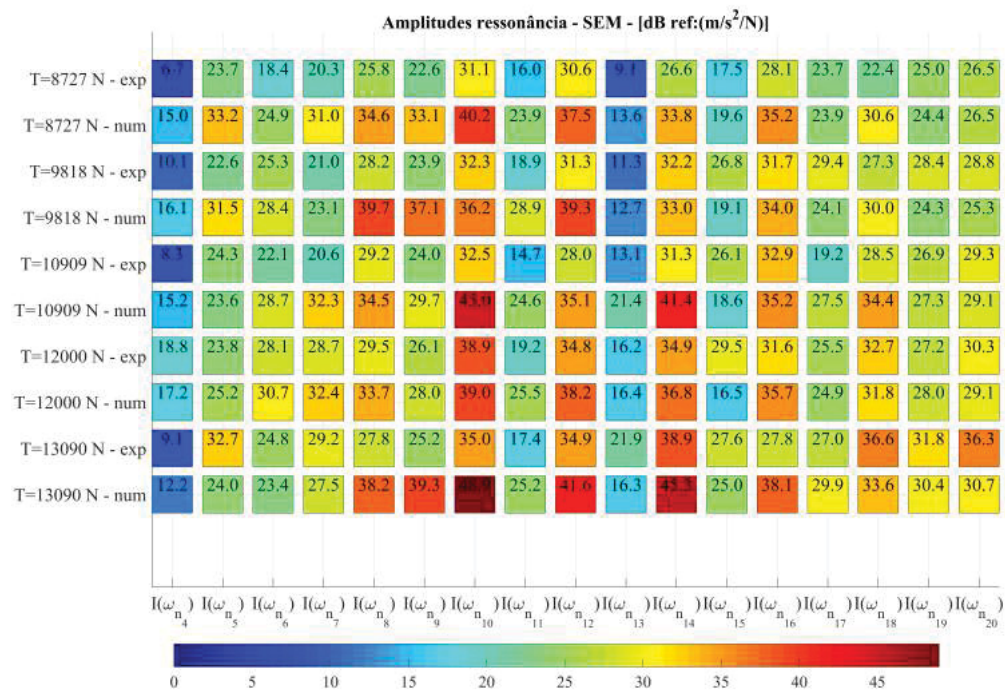


FIGURA 119 – AMPLITUDES RESSONÂNCIAS- EVH - ACELERÔMETRO R2
(a) EXPERIMENTAL X SAFF

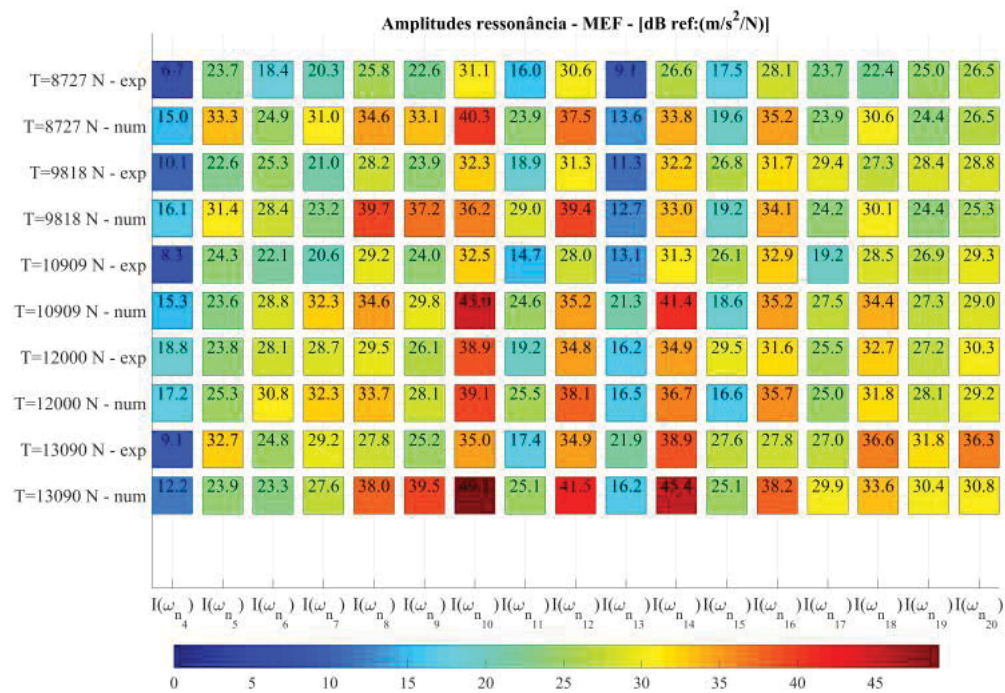


(b) EXPERIMENTAL X SEM



FONTE: O autor

(c) EXPERIMENTAL X FEA

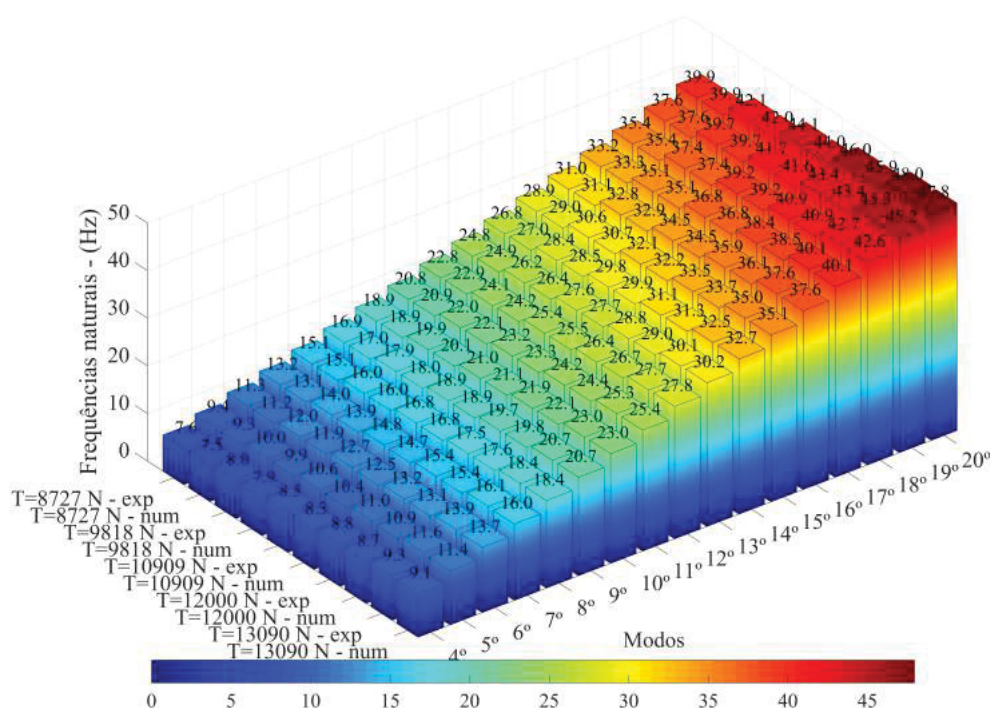


FONTE: O autor

Cada elemento das FIGURAS 118 e 119 acima, apresenta a magnitude do módulo da inércia $I(\omega_{n_j})$ (seja ela numérica ou experimental) em escala decibéis (dB), correspondente a uma determinada frequência de ressonância. A seleção da paleta de cores é orientada pelo propósito de destacar os pontos de ressonância que exibem notáveis disparidades entre os valores numéricos e experimentais. Em outras palavras, cores semelhantes sinalizam concordância entre os dados numéricos e experimentais, enquanto tonalidades distintas indicam divergências. Essa escolha visa simplificar a identificação das discrepâncias e semelhanças entre os resultados. Como pode se notar através das FIGURAS 118 e 119, embora haja algumas áreas restritas em que se manifesta uma discrepância considerável entre os valores numéricos e experimentais das amplitudes de ressonância, é possível visualizar que, na maioria dos casos, há uma consistência apropriada entre os resultados numéricos e experimentais para todos os níveis de tração analisados.

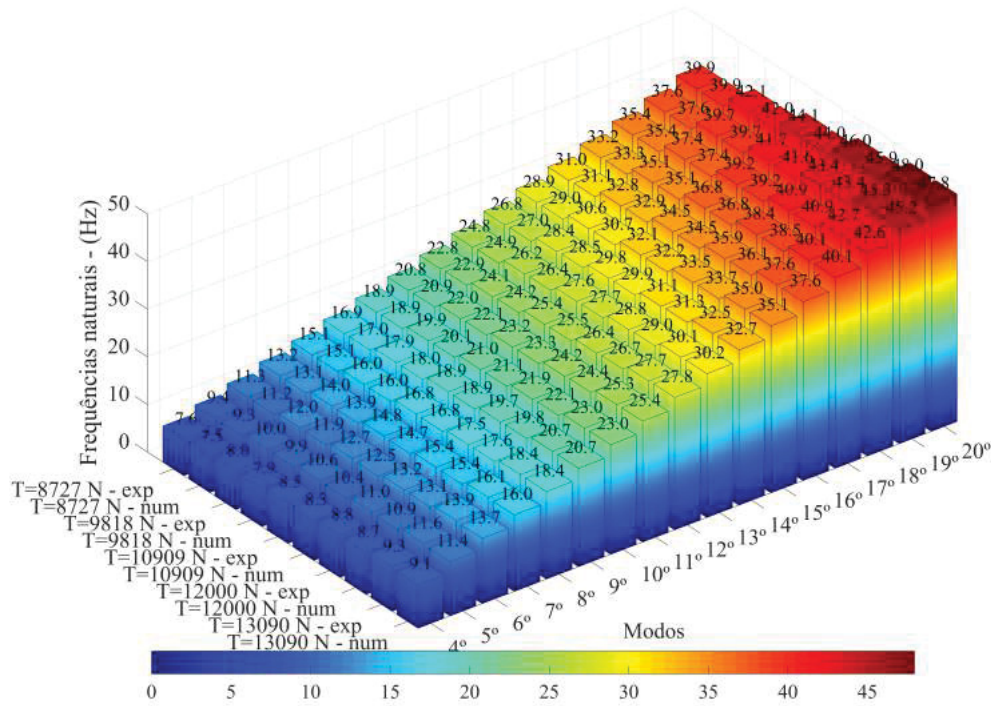
Seguindo a mesma linha de raciocínio, nas FIGURAS 120a, 120b e 120c, são apresentadas as comparações entre as frequências naturais numéricas e experimentais para o acelerômetro R1, ao passo que nas FIGURAS 121a, 121b e 121c essa análise é repetida para o acelerômetro R2. Cada barra das figuras fornece o valor da frequência natural (numérica ou experimental) em (Hz) para os modos de vibrar que estão compreendidos dentro da faixa de frequência analisada.

FIGURA 120 – FREQUÊNCIAS NATURAIS - EVH - ACELERÔMETRO R1
(a) EXPERIMENTAL X SAFF



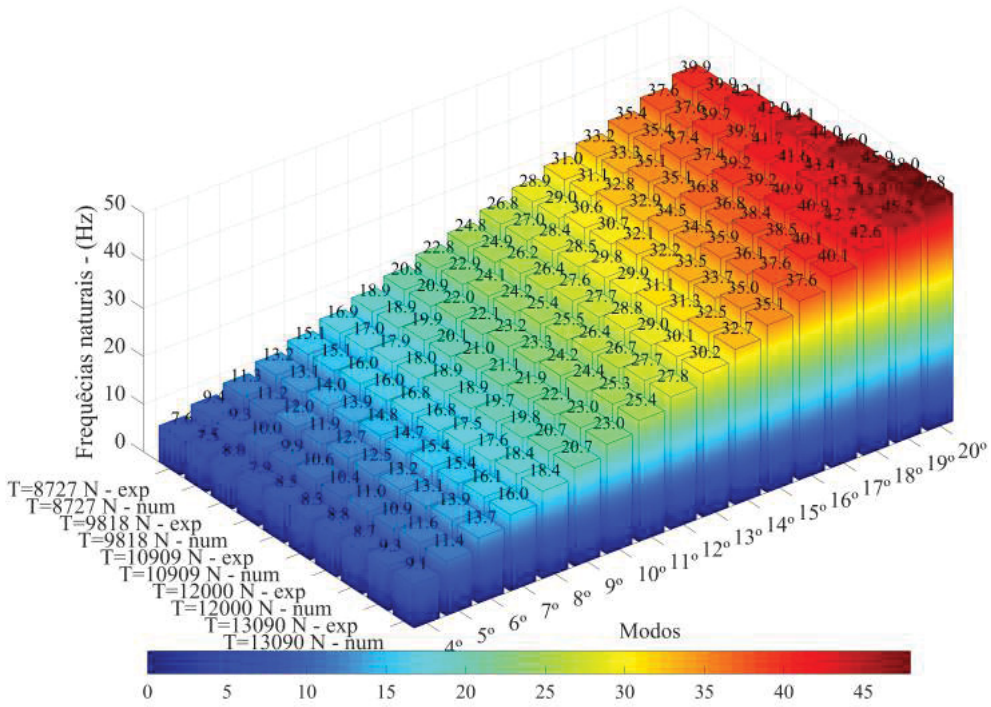
FONTE: O autor

(b) EXPERIMENTAL X SEM



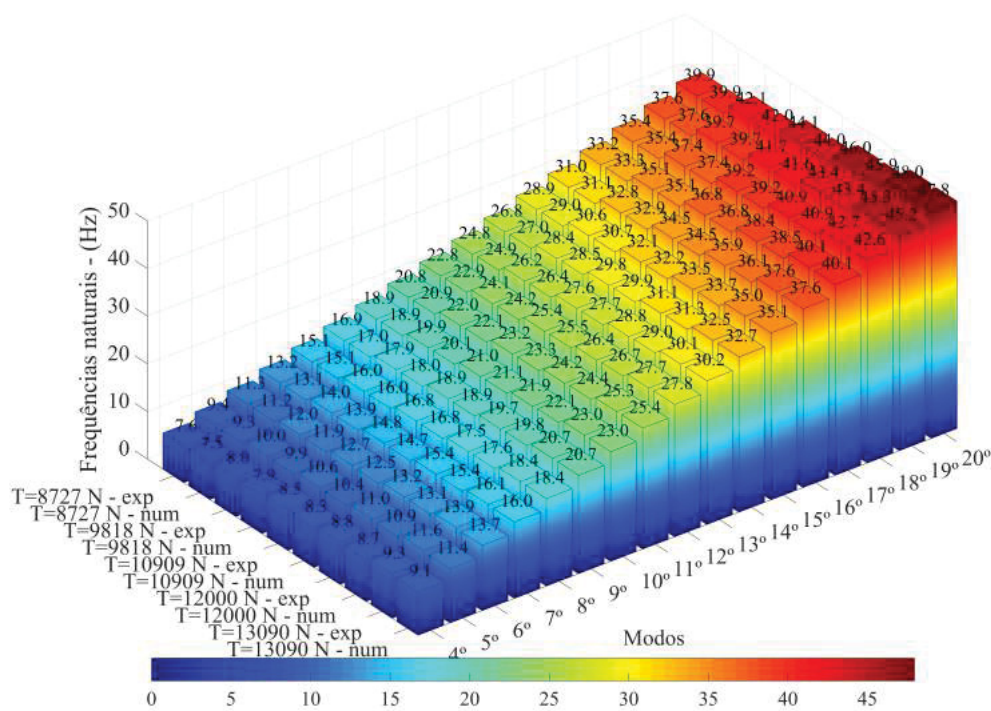
FONTE: O autor

(c) EXPERIMENTAL X SEM

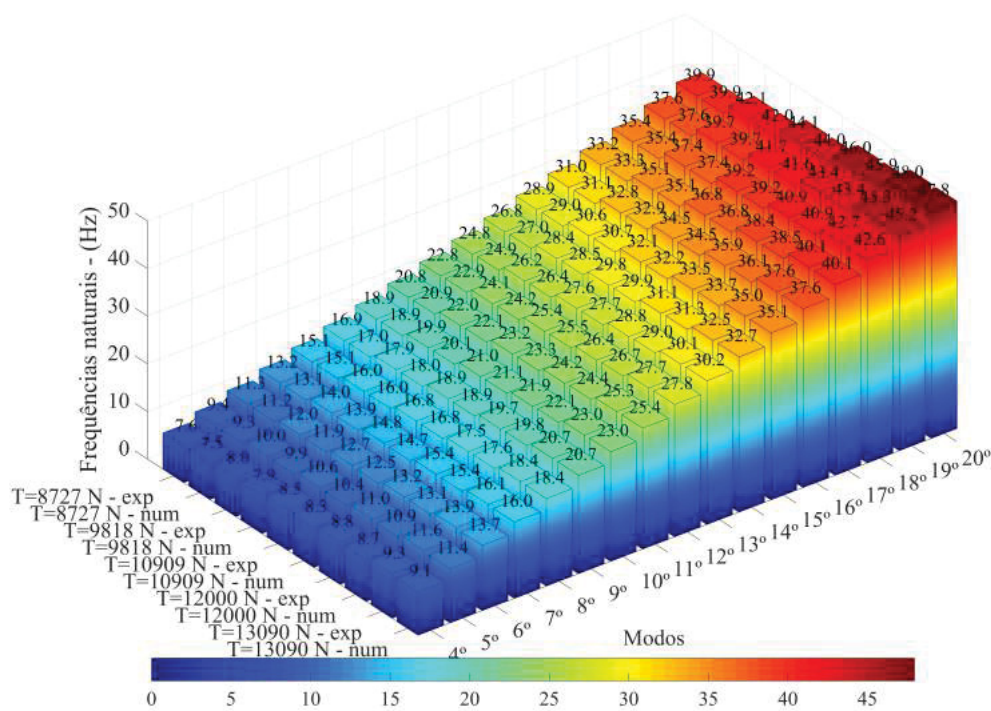


FONTE: O autor

FIGURA 121 – AMPLITUDE RESSONÂNCIA - EVH - ACELERÔMETRO R2
(a) EXPERIMENTAL X SAFF

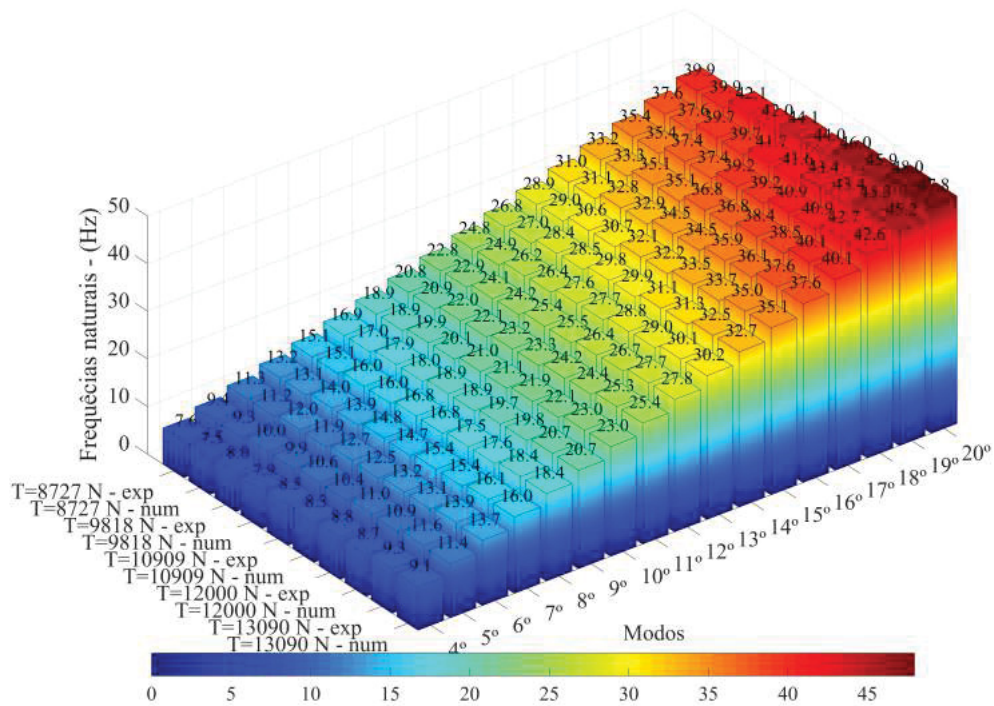


FONTE: O autor
(b) EXPERIMENTAL X SEM



FONTE: O autor

(c) EXPERIMENTAL X MEF



FONTE: O autor

Com base nas FIGURAS 120 e 121 acima, fica evidente que existe uma notável concordância entre os valores numéricos e experimentais das frequências naturais para todas as abordagens de solução adotadas.

E.2 ENSAIO DE IMPACTO (EMI)

E.2.1 Acelerômetro - R1

TABELA 35 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS - AC-R1 - [dB (ref. 1 m/s²/N)] - 16% RMC - $T = 8727N$ - EMI

Modos	Amp - exp	SAFF	SEM	MEF
4	13,755	27,163	27,111	27,097
5	19,616	26,606	26,564	26,534
6	23,381	36,998	37,001	36,978
7	24,940	37,550	37,578	37,566
8	27,744	35,638	35,608	35,517
9	28,984	34,420	34,530	34,681
10	29,240	35,476	35,552	35,609
11	28,996	33,732	33,761	33,722
12	28,408	31,639	31,668	31,625
13	26,882	29,112	29,177	29,212
14	23,038	25,234	25,271	25,242
15	17,872	19,790	19,867	19,915
16	3,356	9,605	9,771	9,867
17	16,323	14,378	14,485	14,500
18	15,039	19,548	19,629	19,648
19	22,111	21,825	21,898	21,916
20	24,418	22,764	22,828	22,833
21	25,471	22,829	22,886	22,904
22	23,976	22,219	22,274	22,332
23	23,156	20,997	21,051	21,104

FONTE: O autor

TABELA 36 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - (Hz) - 16% RMC - $T = 8727N$ - EMI

Modos	Freq - exp	SAFF	SEM	MEF
4	7,587	7,516	7,516	7,516
5	9,495	9,412	9,412	9,412
6	11,413	11,318	11,318	11,318
7	13,340	13,239	13,239	13,239
8	15,281	15,175	15,175	15,174
9	17,240	17,128	17,128	17,128
10	19,211	19,101	19,101	19,101
11	21,207	21,096	21,096	21,095
12	23,213	23,115	23,115	23,114
13	25,255	25,159	25,159	25,158
14	27,301	27,231	27,231	27,230
15	29,395	29,332	29,332	29,331
16	31,480	31,465	31,465	31,464
17	33,624	33,631	33,631	33,629
18	35,772	35,832	35,832	35,830
19	38,010	38,069	38,069	38,067
20	40,213	40,345	40,345	40,342
21	42,473	42,663	42,663	42,662
22	44,750	45,020	45,020	45,021
23	47,076	47,426	47,426	47,425

FONTE: O autor

TABELA 37 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - [dB (ref. 1 m/s²/N)] - 18% RMC - $T = 9818N$ - EMI

Modos	Amp - exp	SAFF	SEM	MEF
4	14,6384	33,9708	33,6886	33,5244
5	20,0860	28,5151	28,3118	28,2441
6	23,6060	36,1746	35,8768	35,7836
7	25,6842	33,4961	33,8361	33,8566
8	27,4901	36,6321	37,0251	37,0072
9	28,6799	36,2307	36,6166	36,5784
10	29,0897	34,7537	35,1455	35,0962
11	29,2182	34,0495	33,7989	33,7891
12	28,1172	32,3896	32,1877	32,1799
13	26,2355	29,7400	30,0298	29,9622
14	22,9074	26,4405	26,4722	26,4453
15	17,2289	20,5344	20,5918	20,5867
16	6,6432	8,8993	9,1380	9,2427
17	15,2084	16,1559	16,2249	16,1864
18	17,4196	21,0522	21,1762	21,1146
19	24,2548	23,2360	23,3013	23,2508
20	25,2106	24,0862	24,1603	24,1096
21	26,1549	24,0700	24,1783	24,1227
22	25,4601	23,3499	23,4923	23,4323

FONTE: O autor

TABELA 38 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - (Hz) - 18% RMC - $T = 9818N$ - EMI

Modos	Freq - exp	SAFF	SEM	MEF
4	8,016	7,962	7,962	7,962
5	10,029	9,967	9,967	9,968
6	12,053	11,984	11,984	11,984
7	14,085	14,012	14,012	14,012
8	16,132	16,055	16,055	16,055
9	18,319	18,114	18,114	18,114
10	20,268	20,192	20,192	20,192
11	22,368	22,289	22,289	22,289
12	24,475	24,409	24,409	24,409
13	26,618	26,552	26,552	26,552
14	28,765	28,721	28,721	28,721
15	30,955	30,918	30,918	30,918
16	33,080	33,144	33,144	33,143
17	35,367	35,400	35,400	35,400
18	37,687	37,690	37,690	37,689
19	39,961	40,013	40,013	40,012
20	42,259	42,372	42,372	42,370
21	44,610	44,421	44,421	44,420
22	46,984	46,922	46,922	46,920

FONTE: O autor

TABELA 39 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - [dB (ref. 1 m/s²/N)] - 20% RMC - $T = 10909N$ - EMI

Modos	Amp - exp	SAFF	SEM	MEF
4	14,540	25,296	25,254	25,155
5	20,709	37,399	37,672	37,835
6	23,810	40,815	41,093	41,081
7	26,196	35,723	35,918	35,997
8	28,228	40,682	40,887	40,835
9	28,612	38,794	38,866	38,811
10	29,462	37,647	37,720	37,684
11	29,812	36,210	36,298	36,276
12	28,286	33,855	33,927	33,921
13	26,457	31,893	32,200	32,167
14	23,551	28,030	28,209	28,213
15	17,359	21,981	22,188	22,212
16	7,114	8,767	9,021	9,147
17	14,317	18,108	18,423	18,367
18	19,957	23,118	23,338	23,309
19	24,490	25,209	25,422	25,399
20	26,005	26,072	26,313	26,285
21	27,016	26,017	26,294	26,254

FONTE: O autor

TABELA 40 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - (Hz) - 20% RMC - $T = 10909N$ - EMI

Modos	Freq - exp	SAFF	SEM	MEF
4	8,437	8,386	8,386	8,387
5	10,552	10,498	10,498	10,498
6	12,684	12,620	12,620	12,620
7	14,817	14,753	14,753	14,754
8	16,968	16,901	16,901	16,901
9	19,131	19,065	19,065	19,065
10	21,309	21,246	21,246	21,246
11	23,505	23,447	23,447	23,447
12	25,718	25,669	25,669	25,669
13	27,963	27,914	27,914	27,914
14	30,208	30,185	30,185	30,185
15	32,497	32,482	32,482	32,482
16	34,740	34,808	34,808	34,808
17	37,113	37,164	37,164	37,164
18	39,498	39,552	39,552	39,551
19	41,879	41,973	41,973	41,972
20	44,273	44,429	44,429	44,428
21	46,712	46,720	46,720	46,720

FONTE: O autor

TABELA 41 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - [dB (ref. 1 m/s²/N)] - 22% RMC - $T = 12000N$ - EMI

Modos	Amp - exp	SAFF	SEM	MEF
4	16,205	26,546	26,600	26,736
5	21,450	28,247	28,201	28,105
6	25,848	32,979	33,064	33,191
7	27,667	33,388	33,321	33,243
8	28,923	39,678	39,702	39,732
9	30,947	36,388	36,316	36,286
10	31,115	36,651	36,767	36,839
11	31,185	36,164	36,212	36,264
12	30,181	33,281	33,245	33,282
13	28,526	31,153	31,198	31,253
14	24,339	27,199	27,255	27,316
15	16,812	20,845	20,859	20,952
16	0,000	8,274	8,514	8,750
17	16,545	17,255	17,299	17,325
18	22,714	22,059	22,144	22,173
19	26,118	24,197	24,228	24,269
20	27,581	25,002	25,064	25,102

FONTE: O autor

TABELA 42 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - (Hz) - 22% RMC - $T = 12000N$ - EMI

Modos	Freq - exp	SAFF	SEM	MEF
4	8,851	8,794	8,794	8,795
5	11,069	11,009	11,009	11,009
6	13,300	13,233	13,233	13,233
7	15,538	15,470	15,470	15,470
8	17,790	17,721	17,721	17,721
9	20,000	19,988	19,988	19,988
10	22,332	22,274	22,274	22,274
11	24,633	24,580	24,580	24,580
12	26,941	26,908	26,908	26,908
13	29,284	29,260	29,260	29,260
14	31,625	31,637	31,637	31,637
15	34,009	34,043	34,043	34,042
16	36,520	36,477	36,477	36,477
17	38,859	38,943	38,943	38,943
18	41,285	41,441	41,441	41,441
19	43,769	43,974	43,974	43,974
20	46,254	46,543	46,543	46,542

FONTE: O autor

TABELA 43 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - [dB (ref. 1 m/s²/N)] - 24% RMC - $T = 13090N$ - EMI

Modos	Amp - exp	SAFF	SEM	MEF
4	17,375	30,427	30,164	30,828
5	21,719	33,291	33,601	32,935
6	25,954	39,288	39,696	38,891
7	27,351	35,374	35,072	35,715
8	29,925	38,892	38,538	39,277
9	30,968	37,800	37,447	38,151
10	31,286	37,871	38,265	37,623
11	30,955	38,092	38,138	38,119
12	29,256	35,349	35,131	35,562
13	28,248	32,057	32,051	32,293
14	24,460	28,394	28,216	28,598
15	14,807	22,492	22,513	22,596
16	0,000	7,447	7,669	7,936
17	18,889	19,621	19,719	19,643
18	24,563	24,262	24,252	24,325
19	27,294	26,245	26,314	26,266
20	28,641	26,972	27,012	27,010

FONTE: O autor

TABELA 44 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - (Hz) - 24% RMC - $T = 13090N$ - EMI

Modos	Amp - exp	SAFF	SEM	MEF
4	9,239	9,176	9,176	9,177
5	11,553	11,485	11,485	11,485
6	13,881	13,802	13,802	13,803
7	16,215	16,132	16,132	16,132
8	18,562	18,474	18,474	18,475
9	20,923	20,832	20,832	20,833
10	23,293	23,206	23,206	23,208
11	25,688	25,599	25,599	25,601
12	28,092	28,013	28,013	28,015
13	30,525	30,449	30,449	30,451
14	32,955	32,908	32,908	32,911
15	35,421	35,393	35,393	35,397
16	37,939	37,906	37,906	37,910
17	40,472	40,447	40,447	40,452
18	42,981	43,019	43,019	43,025
19	45,551	45,623	45,623	45,629
20	48,122	48,260	48,260	48,268

FONTE: O autor

E.2.2 Acelerômetro - R2

TABELA 45 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS - AC-R2 - [dB (ref. 1 m/s²/N)]- 16% RMC - $T = 8727N$ - EMI

Modos	Amp - exp	SAFF	SEM	MEF
4	9,053	22,932	22,930	23,044
5	20,148	27,391	27,391	27,461
6	19,487	34,079	34,093	34,146
7	22,544	35,934	35,949	35,964
8	25,207	33,863	33,876	33,927
9	24,487	29,851	29,854	29,804
10	28,648	35,508	35,521	35,501
11	22,732	27,834	27,851	27,849
12	30,879	34,639	34,656	34,653
13	18,346	20,017	20,029	20,016
14	31,271	33,182	33,200	33,193
15	5,646	3,192	3,163	3,142
16	30,289	31,247	31,258	31,249
17	15,815	17,646	17,657	17,648
18	22,202	28,832	28,847	28,837
19	19,095	20,731	20,741	20,735
20	26,448	25,411	25,427	25,416
21	22,086	21,093	21,107	21,098
22	22,269	20,965	20,978	20,971
23	20,406	19,587	19,601	19,594

FONTE: O autor

TABELA 46 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R2 - (Hz) - 16% RMC - $T = 8727N$ - EMI

Modos	Freq - exp	SAFF	SEM	MEF
4	7,586	7,516	7,516	7,516
5	9,495	9,412	9,412	9,412
6	11,413	11,319	11,319	11,319
7	13,340	13,239	13,239	13,239
8	15,281	15,175	15,175	15,175
9	17,240	17,129	17,129	17,129
10	19,210	19,102	19,102	19,102
11	21,207	21,097	21,097	21,097
12	23,212	23,116	23,116	23,116
13	25,255	25,161	25,161	25,161
14	27,301	27,233	27,233	27,233
15	29,395	29,335	29,335	29,335
16	31,485	31,469	31,469	31,469
17	33,622	33,635	33,635	33,635
18	35,772	35,837	35,837	35,837
19	38,008	38,075	38,075	38,075
20	40,210	40,351	40,351	40,351
21	42,473	42,663	42,663	42,662
22	44,750	45,020	45,020	45,021
23	47,076	47,426	47,426	47,425

FONTE: O autor

TABELA 47 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R2 - [dB (ref. 1 m/s²/N)] - 18% RMC - $T = 9818N$ - EMI

Modos	Amp - exp	SAFF	SEM	MEF
4	9,900	30,244	30,233	30,090
5	20,428	29,560	29,545	29,450
6	19,702	33,350	33,331	33,237
7	23,249	30,099	30,124	30,187
8	24,924	32,852	32,886	32,939
9	24,241	30,434	30,469	30,502
10	28,719	34,545	34,521	34,499
11	22,958	28,002	27,990	27,980
12	30,732	35,168	35,166	35,162
13	17,805	20,194	20,181	20,180
14	31,481	33,477	33,503	33,490
15	0,016	3,227	3,196	3,185
16	30,443	31,567	31,590	31,574
17	13,913	18,058	18,067	18,059
18	26,163	29,043	29,061	29,047
19	21,118	21,014	21,013	21,015
20	27,035	25,614	25,612	25,616
21	22,751	21,230	21,243	21,233
22	23,622	21,127	21,137	21,131

FONTE: O autor

TABELA 48 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R2 - (Hz) - 18% RMC - $T = 9818N$ - EMI

Modos	Freq - exp	SAFF	SEM	MEF
4	8,016	7,961	7,961	7,961
5	10,028	9,967	9,967	9,967
6	12,053	11,982	11,982	11,983
7	14,085	14,011	14,011	14,011
8	16,132	16,053	16,053	16,053
9	18,194	18,111	18,111	18,111
10	20,268	20,188	20,188	20,188
11	22,368	22,284	22,284	22,284
12	24,472	24,403	24,403	24,403
13	26,617	26,545	26,545	26,545
14	28,765	28,712	28,712	28,712
15	30,800	30,907	30,907	30,907
16	33,139	33,131	33,131	33,130
17	35,361	35,385	35,385	35,385
18	37,685	37,672	37,672	37,671
19	39,959	39,992	39,992	39,991
20	42,257	42,348	42,348	42,347
21	44,610	44,421	44,421	44,420
22	46,984	46,922	46,922	46,920

FONTE: O autor

TABELA 49 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R2 - [dB (ref. 1 m/s²/N)] - 20% RMC - $T = 10909N$ - EMI

Modos	Amp - exp	SAFF	SEM	MEF
4	9,734	20,438	20,445	20,330
5	21,181	38,904	38,894	39,130
6	19,938	37,791	37,797	37,772
7	23,788	34,150	34,143	34,282
8	25,713	38,579	38,589	38,517
9	24,237	34,043	34,054	33,962
10	28,911	37,019	37,028	36,960
11	23,639	29,510	29,519	29,466
12	31,005	36,626	36,625	36,659
13	18,195	23,436	23,440	23,444
14	31,893	36,280	36,287	36,275
15	0,402	4,146	4,125	4,120
16	30,458	34,489	34,493	34,491
17	12,854	20,846	20,852	20,850
18	28,096	32,085	32,089	32,086
19	21,207	23,926	23,931	23,927
20	27,691	28,597	28,601	28,598
21	23,534	24,095	24,100	24,102

FONTE: O autor

TABELA 50 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R2 - (Hz) - 20% RMC - $T = 10909N$ - EMI

Modos	Freq - exp	SAFF	SEM	MEF
4	8,436	8,387	8,387	8,387
5	10,552	10,498	10,498	10,498
6	12,684	12,620	12,620	12,620
7	14,817	14,754	14,754	14,754
8	16,968	16,902	16,902	16,902
9	19,131	19,065	19,065	19,066
10	21,309	21,247	21,247	21,247
11	23,511	23,448	23,448	23,448
12	25,714	25,671	25,671	25,671
13	27,963	27,917	27,917	27,917
14	30,209	30,188	30,188	30,188
15	32,340	32,485	32,485	32,486
16	34,779	34,812	34,812	34,812
17	37,109	37,169	37,169	37,169
18	39,543	39,557	39,557	39,557
19	41,879	41,979	41,979	41,979
20	44,266	44,436	44,436	44,436
21	46,712	46,720	46,720	46,720

FONTE: O autor

TABELA 51 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - [dB (ref. 1 m/s²/N)] - 22% RMC - $T = 12000N$ - EMI

Modos	Amp - exp	SAFF	SEM	MEF
4	11,420	20,146	20,134	20,255
5	21,742	30,789	30,810	30,663
6	21,937	26,898	26,915	26,824
7	25,259	34,331	34,362	34,217
8	26,424	35,916	35,907	36,006
9	26,532	34,963	34,987	34,951
10	30,641	37,169	37,200	37,139
11	25,090	28,853	28,884	28,827
12	33,009	36,378	36,382	36,393
13	20,205	22,301	22,325	22,300
14	33,381	35,510	35,522	35,511
15	0,316	3,806	3,779	3,758
16	27,870	33,497	33,521	33,504
17	15,428	19,771	19,790	19,773
18	30,123	30,917	30,935	30,917
19	22,726	22,767	22,786	22,769
20	29,183	27,363	27,385	27,371

FONTE: O autor

TABELA 52 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R1 - (Hz) - 22% RMC - $T = 12000N$ - EMI

Modos	Freq - exp	SAFF	SEM	MEF
4	8,851	8,793	8,793	8,793
5	11,068	11,006	11,006	11,007
6	13,300	13,230	13,230	13,230
7	15,538	15,466	15,466	15,466
8	17,790	17,715	17,715	17,715
9	20,057	19,981	19,981	19,981
10	22,332	22,264	22,264	22,265
11	24,633	24,568	24,568	24,568
12	26,941	26,893	26,893	26,893
13	29,284	29,241	29,241	29,242
14	31,628	31,615	31,615	31,615
15	33,960	34,016	34,016	34,016
16	36,394	36,446	36,446	36,446
17	38,857	38,906	38,906	38,906
18	41,284	41,398	41,398	41,398
19	43,767	43,924	43,924	43,924
20	46,258	46,485	46,485	46,485

FONTE: O autor

TABELA 53 – AMPLITUDES NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R2 - [dB (ref. 1 m/s²/N)] - 24% RMC - $T = 13090N$ - EMI

Modos	Amp - exp	SAFF	SEM	MEF
4	12,563	25,041	25,030	25,272
5	22,158	34,679	34,698	34,444
6	22,024	37,050	37,081	36,842
7	24,959	32,169	32,161	32,314
8	27,404	35,451	35,445	35,609
9	26,528	32,362	32,357	32,481
10	30,851	38,920	38,946	38,858
11	24,814	31,991	32,005	32,037
12	31,997	37,282	37,286	37,342
13	20,006	23,846	23,872	23,834
14	33,525	37,462	37,486	37,466
15	0,166	4,388	4,361	4,349
16	24,019	35,574	35,595	35,587
17	17,744	21,626	21,645	21,639
18	31,906	32,653	32,669	32,662
19	23,838	24,473	24,490	24,481
20	30,044	29,153	29,170	29,161

FONTE: O autor

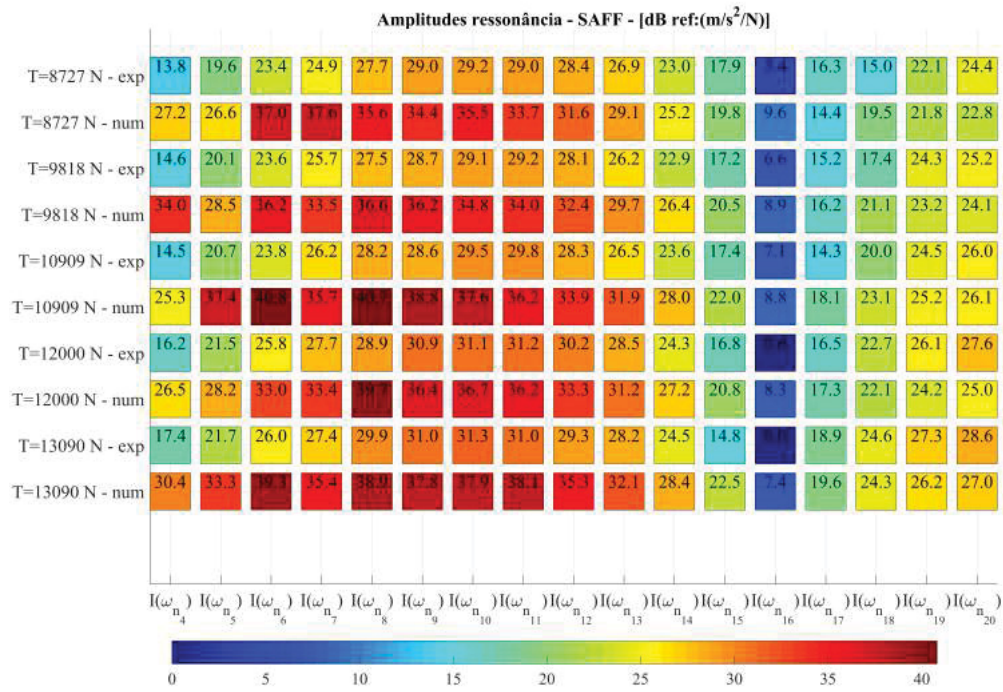
TABELA 54 – FREQUENCIAS NATURAIS NUMÉRICAS X EXPERIMENTAIS AC-R2 - (Hz) - 24% RMC - $T = 13090N$ - EMI

Modos	Freq - exp	SAFF	SEM	MEF
4	9,239	9,176	9,176	9,176
5	11,553	11,484	11,484	11,484
6	13,881	13,802	13,802	13,802
7	16,215	16,131	16,131	16,131
8	18,562	18,473	18,473	18,473
9	20,923	20,830	20,830	20,831
10	23,293	23,204	23,204	23,205
11	25,688	25,597	25,597	25,597
12	28,091	28,010	28,010	28,010
13	30,525	30,445	30,445	30,445
14	32,957	32,904	32,904	32,904
15	35,420	35,389	35,389	35,389
16	37,963	37,900	37,900	37,900
17	40,471	40,440	40,440	40,440
18	42,980	43,011	43,011	43,011
19	45,550	45,613	45,613	45,613
20	48,121	48,249	48,249	48,249

FONTE: O autor

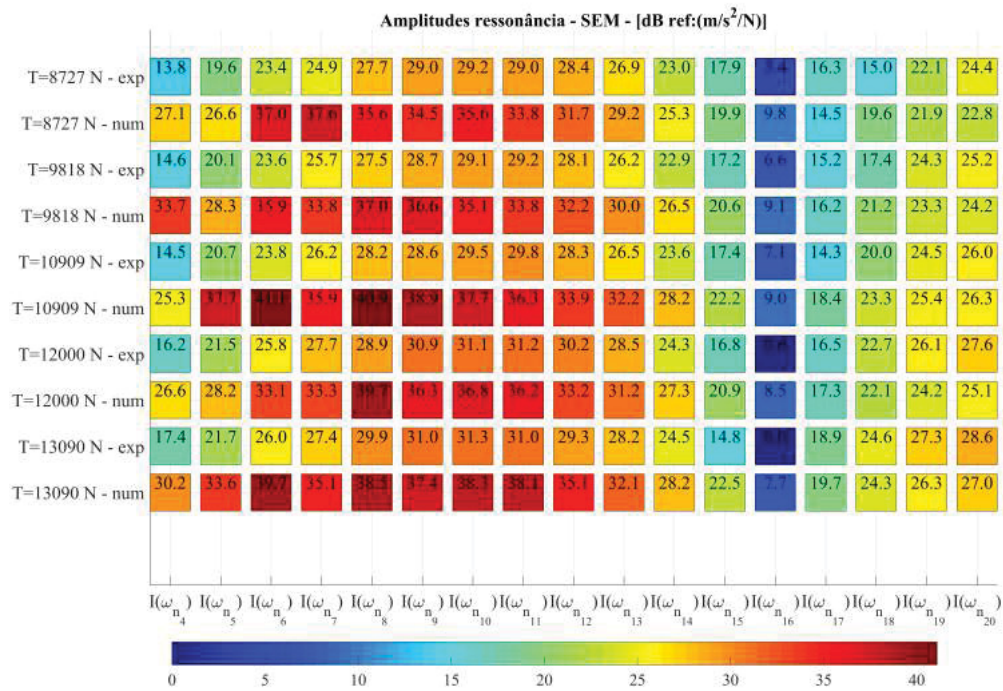
De maneira semelhante ao que foi exposto previamente no contexto do ensaio de varredura harmônica, são ilustradas nas figuras 122a, 122b e 122c, respectivamente, para a solução analítica na forma (SAFF), solução via expansão modal (SEM) e método dos elementos finitos (MEF), as relações existentes entre os valores numéricos e experimentais das amplitudes de ressonância $I_{rs}(\omega_{nj})$ referentes à medição do acelerômetro R1, para cada nível de tração. Já nas FIGURAS 123a, 123b e 123c, é exibida a mesma análise, porém para o acelerômetro R2

FIGURA 122 – AMPLITUDE RESSONÂNCIA - EMI - ACELERÔMETRO R1
(a) EXPERIMENTAL X SAFF



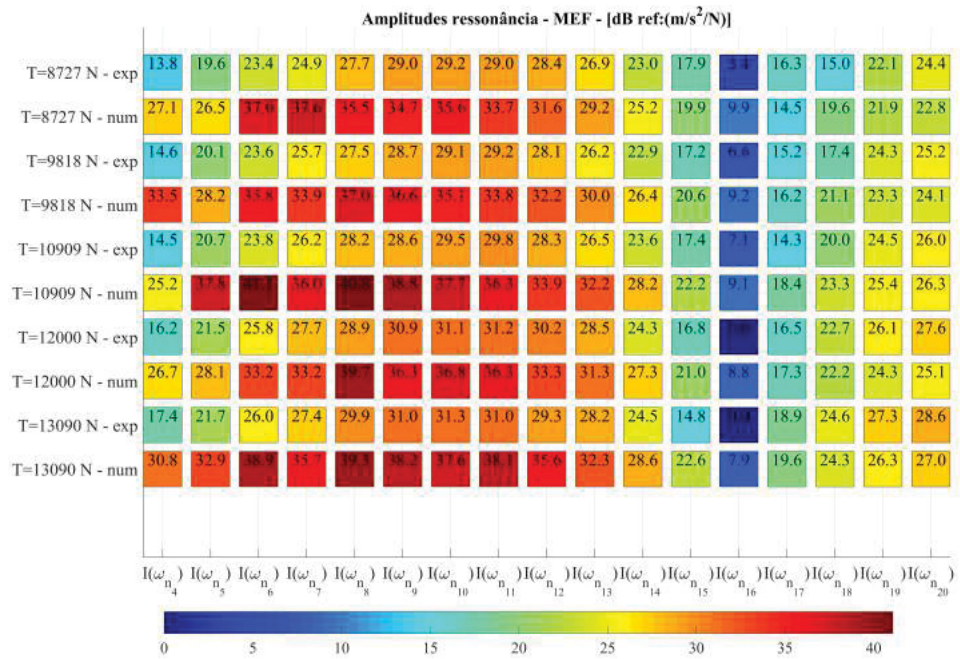
FONTE: O autor

(b) EXPERIMENTAL X SEM



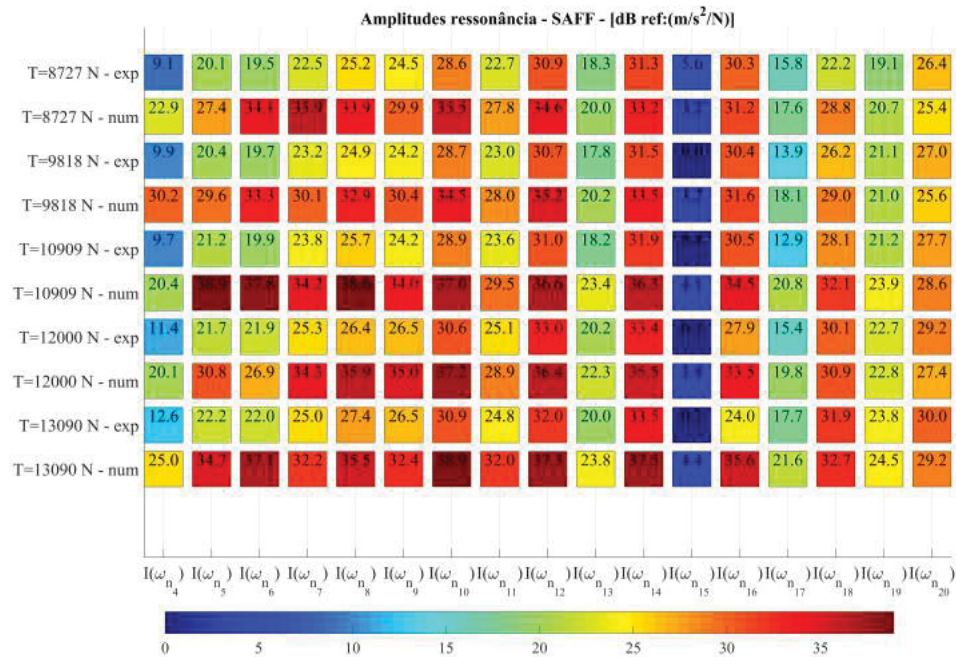
FONTE: O autor

(c) EXPERIMENTAL X MEF



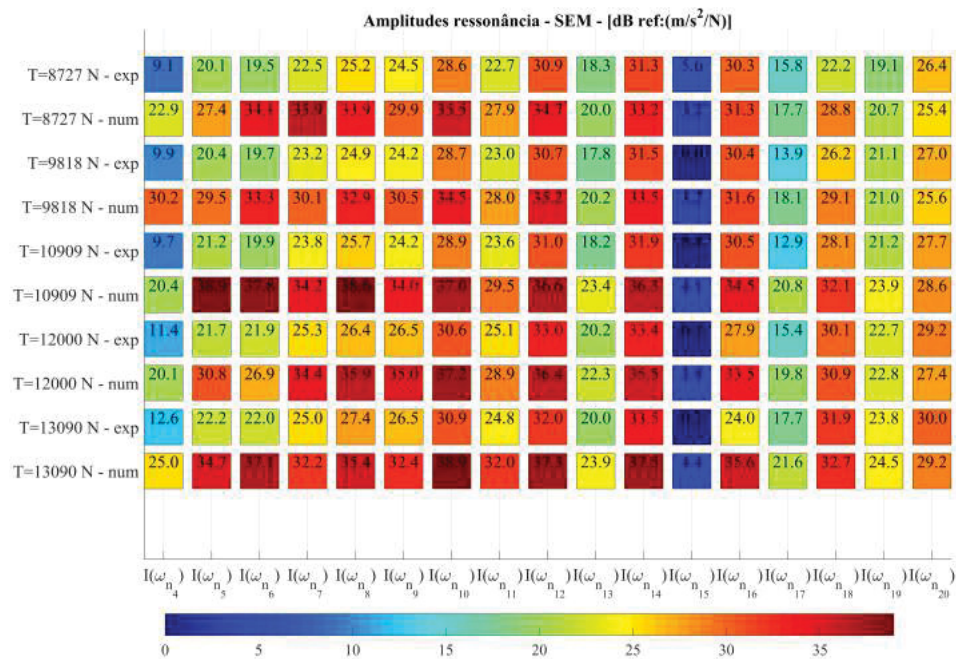
FONTE: O autor

FIGURA 123 – AMPLITUDE RESSONÂNCIA - EMI - ACELERÔMETRO R2
(a) EXPERIMENTAL X SAFF



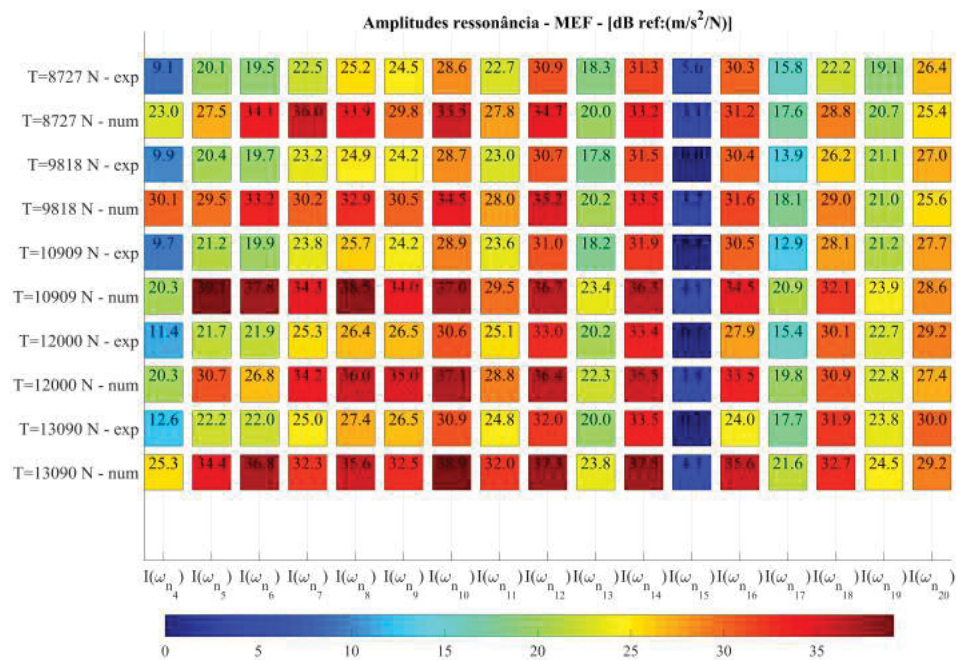
FONTE: O autor

(b) EXPERIMENTAL X SEM



FONTE: O autor

(c) EXPERIMENTAL X MEF



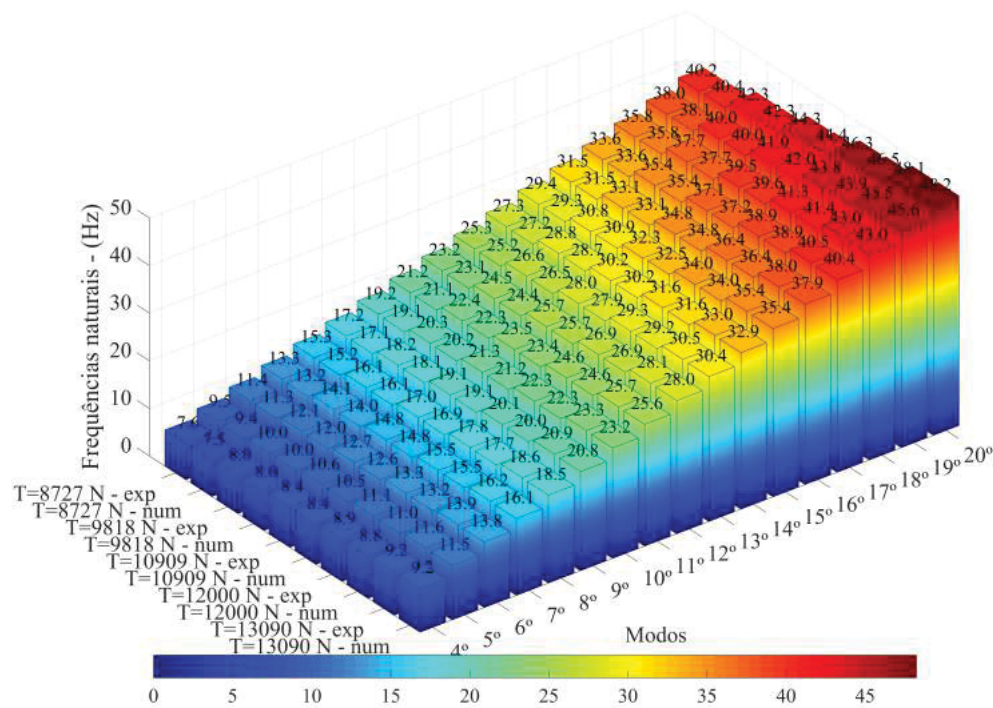
FONTE: O autor

Ao examinar as figuras acima, nota-se que algumas áreas apresentam discrepâncias significativas entre os valores numéricos e experimentais das amplitudes de

ressonância. Contudo, também é constatado que a maioria das comparações exibem consistência satisfatória para todos os níveis de força de tração investigados.

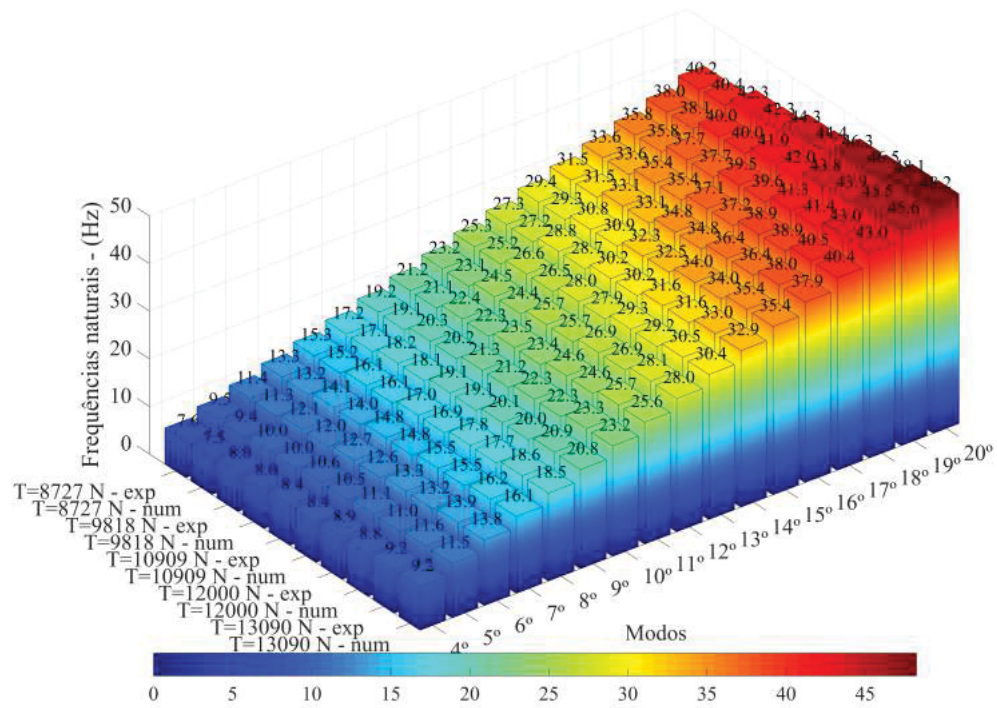
Também em analogia ao que já foi feito anteriormente, apresentam-se, nas FIGURAS 124a, 124b e 124c, gráficos comparativos entre as frequências naturais e experimentais referentes ao acelerômetro R1. Adicionalmente, nas FIGURAS 125a, 125b e 125c, essa análise é feita para o acelerômetro R2.

FIGURA 124 – FREQUÊNCIAS NATURAIS - EMI - ACELERÔMETRO R1
(a) EXPERIMENTAL X SAFF



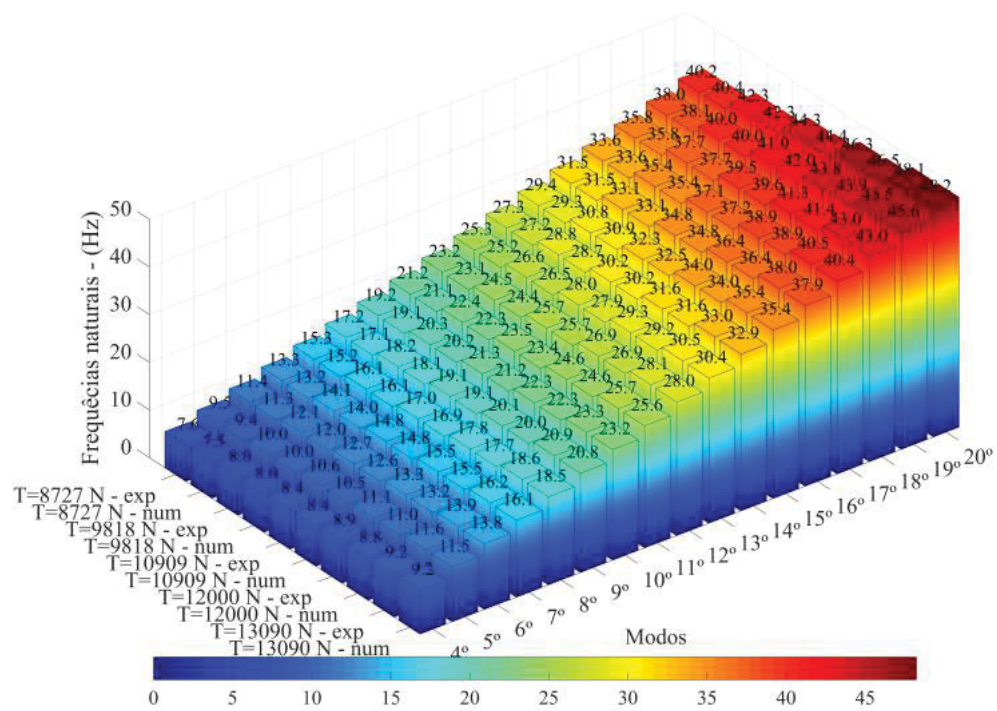
FONTE: O autor

(b) EXPERIMENTAL X SEM



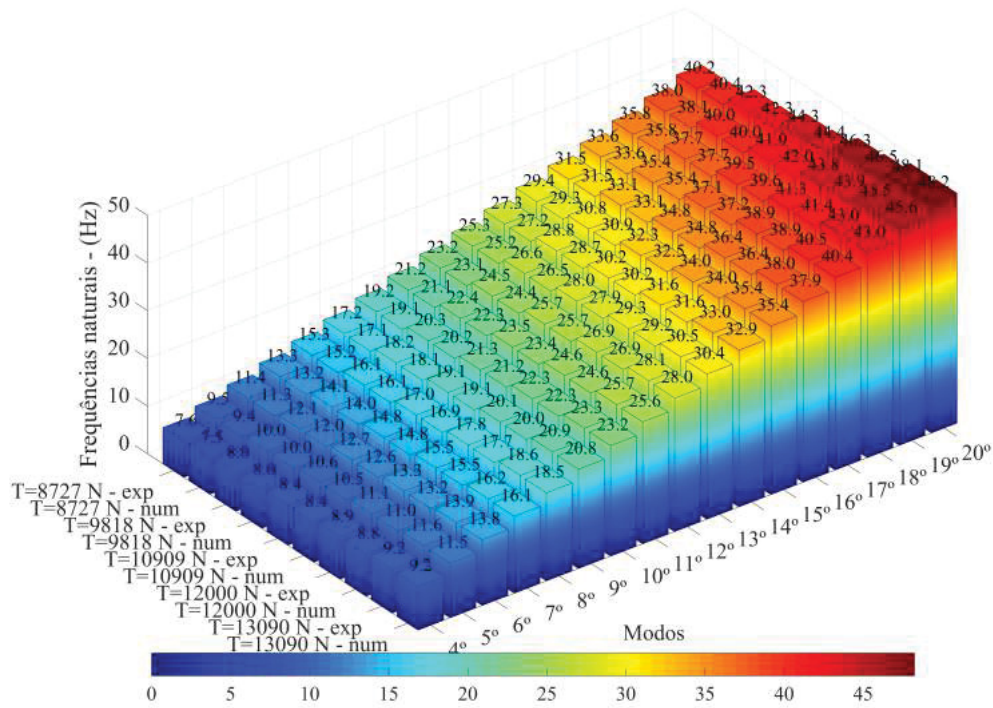
FONTE: O autor

(c) EXPERIMENTAL X MEF



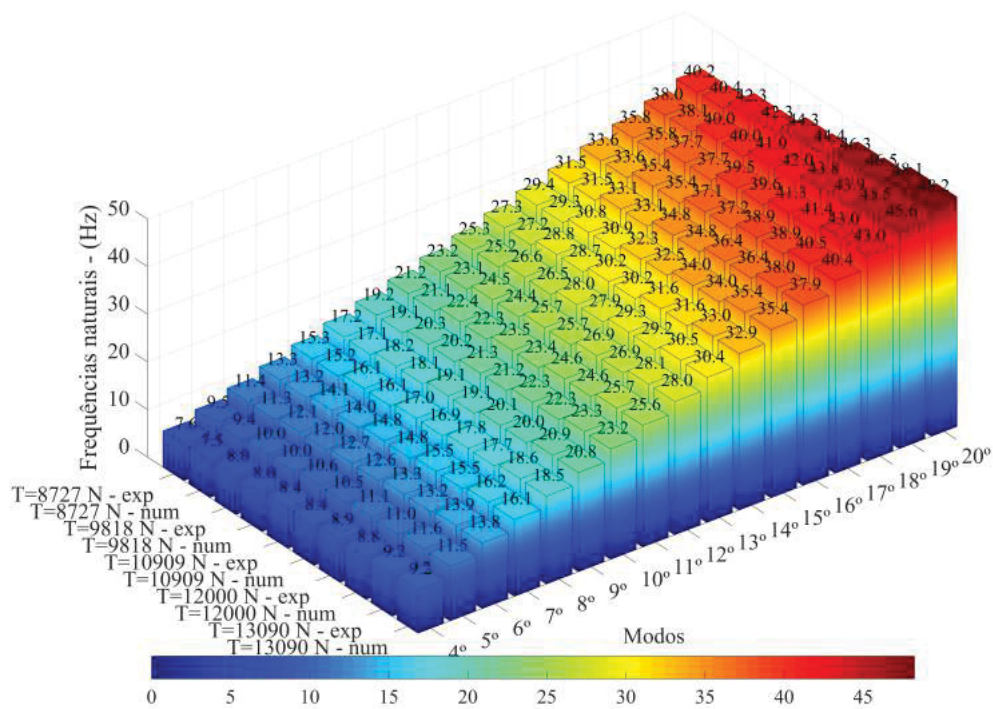
FONTE: O autor

FIGURA 125 – AMPLITUDE RESSONÂNCIA - EMI - ACELERÔMETRO R2
(a) EXPERIMENTAL X SAFF



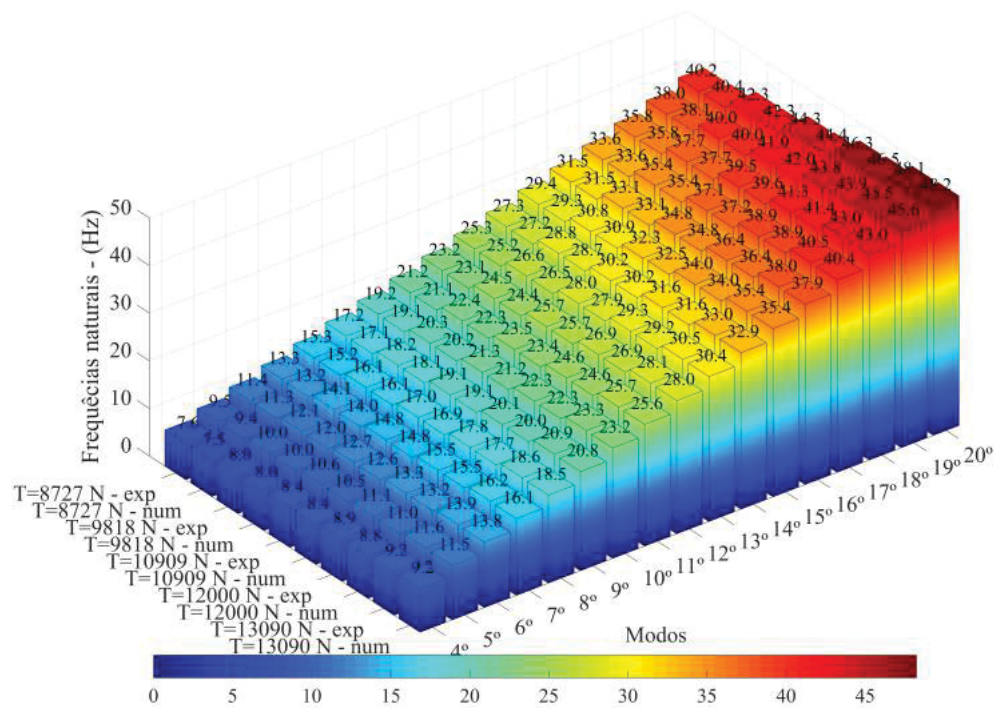
FONTE: O autor

(b) EXPERIMENTAL X SEM



FONTE: O autor

(c) EXPERIMENTAL X MEF



FONTE: O autor

Com base nas FIGURAS 124 e 125, fica evidente que há uma notável concordância entre os valores numéricos e experimentais das frequências naturais. Essa concordância é identificável em todos os níveis de força de tração analisados, bem como para as diferentes abordagens de solução empregadas.

APÊNDICE F – AJUSTE LINEAR DOS PARÂMETROS IDENTIFICADOS

Neste apêndice, são apresentadas as equações relacionadas aos ajustes lineares dos parâmetros identificados, a saber: a rigidez à flexão (EI) e o fator de perda material equivalente (η). Essas equações são apresentadas individualmente para cada tipo de ensaio, acelerômetro de medição e método de solução empregado.

F.1 ENSAIOS DE VARREDURA HARMÔNICA

F.1.1 Acelerômetro R1

Solução analítica na forma fechada - SAFF

- Rigidez à flexão em função da força $EI_{SAFFR1}^{EVH}(T)$

$$EI_{SAFFR1}^{EVH}(T) = 0,0016T + 292,7906 \quad (F.1)$$

- Fator de perda material equivalente em função da força $\eta_{SAFFR1}^{EVH}(T)$

$$\eta_{SAFFR1}^{EVH}(T) = -9,5328 \times 10^{-7}T + 0,0232 \quad (F.2)$$

Solução via expansão modal - SEM

- Rigidez à flexão em função da força $EI_{SEMR1}^{EVH}(T)$

$$EI_{SEMR1}^{EVH}(T) = 0,0015T + 293,6376 \quad (F.3)$$

- Fator de perda material equivalente em função da força $\eta_{SEMR1}^{EVH}(T)$

$$\eta_{SEMR1}^{EVH}(T) = -9,4411 \times 10^{-7}T + 0,0232 \quad (F.4)$$

Método dos elementos finitos - MEF

- Rigidez à flexão em função da força $EI_{MEFR1}^{EVH}(T)$

$$EI_{MEFR1}^{EVH}(T) = 0,0016T + 292,7933 \quad (F.5)$$

- Fator de perda material equivalente em função da força $\eta_{MEFR1}^{EVH}(T)$

$$\eta_{MEFR1}^{EVH}(T) = -8,9829 \times 10^{-7}T + 0,0226 \quad (F.6)$$

F.1.2 Acelerômetro R2

Solução analítica na forma fechada - SAFF

- Rigidez à flexão em função da força $EI_{SAFFR2}^{EVH}(T)$

$$EI_{SAFFR2}^{EVH}(T) = 0,0012T + 295,6355 \quad (F.7)$$

- Fator de perda material equivalente em função da força $\eta_{SAFFR2}^{EVH}(T)$

$$\eta_{SAFFR2}^{EVH}(T) = -1,2008 \times 10^{-6}T + 0,0271 \quad (F.8)$$

Solução via expansão modal - SEM

- Rigidez à flexão em função da força $EI_{SEMR2}^{EVH}(T)$

$$EI_{SEMR2}^{EVH}(T) = 0,0012T + 295,5546 \quad (F.9)$$

- Fator de perda material equivalente em função da força $\eta_{SEMR2}^{EVH}(T)$

$$\eta_{SEMR2}^{EVH}(T) = -1,2191 \times 10^{-6}T + 0,0273 \quad (F.10)$$

Método dos elementos finitos - MEF

- Rigidez à flexão em função da força $EI_{MEFR2}^{EVH}(T)$

$$EI_{MEFR2}^{EVH}(T) = 0,0012T + 295,5183 \quad (F.11)$$

- Fator de perda material equivalente em função da força $\eta_{MEFR2}^{EVH}(T)$

$$\eta_{MEFR2}^{EVH}(T) = -1,2191 \times 10^{-6}T + 0,0273 \quad (F.12)$$

F.2 ENSAIOS DE IMPACTO

F.2.1 Acelerômetro R1

Solução analítica na forma fechada - SAFF

- Rigidez à flexão em função da força $EI_{SAFFR1}^{EMI}(T)$

$$EI_{SAFFR1}^{EMI}(T) = 0,0058T + 271,1702 \quad (F.13)$$

- Fator de perda material equivalente em função da força $\eta_{SAFFR1}^{EMI}(T)$

$$\eta_{SAFFR1}^{EMI}(T) = -8,0672 \times 10^{-7}T + 0,0324 \quad (F.14)$$

Solução via expansão modal - SEM

- Rigidez à flexão em função da força $EI_{SEM_{R1}}^{EMI}(T)$

$$EI_{SEM_{R1}}^{EMI}(T) = 0,0057T + 272,7136 \quad (F.15)$$

- Fator de perda material equivalente em função da força $\eta_{SEM_{R1}}^{EMI}(T)$

$$\eta_{SEM_{R1}}^{EMI}(T) = -8,0672 \times 10^{-7}T + 0,0323 \quad (F.16)$$

Método dos elementos finitos - MEF

- Rigidez à flexão em função da força $EI_{MEF_{R1}}^{EMI}(T)$

$$EI_{MEF_{R1}}^{EMI}(T) = 0,0059T + 270,1171 \quad (F.17)$$

- Fator de perda material equivalente em função da força $\eta_{MEF_{R1}}^{EMI}(T)$

$$\eta_{MEF_{R1}}^{EMI}(T) = -8,5259 \times 10^{-7}T + 0,0329 \quad (F.18)$$

F.2.2 Acelerômetro R2

Solução analítica na forma fechada - SAFF

- Rigidez à flexão em função da força $EI_{SAFF_{R2}}^{EMI}(T)$

$$EI_{SAFF_{R2}}^{EMI}(T) = 0,0050T + 278,9339 \quad (F.19)$$

- Fator de perda material equivalente em função da força $\eta_{SAFF_{R2}}^{EMI}(T)$

$$\eta_{SAFF_{R2}}^{EMI}(T) = -9,2590 \times 10^{-7}T + 0,0326 \quad (F.20)$$

Solução via expansão modal - SEM

- Rigidez à flexão em função da força $EI_{SEM_{R2}}^{EMI}(T)$

$$EI_{SEM_{R2}}^{EMI}(T) = 0,0049T + 279,2376 \quad (F.21)$$

- Fator de perda material equivalente em função da força $\eta_{SEM_{R2}}^{EMI}(T)$

$$\eta_{SEM_{R2}}^{EMI}(T) = -9,1673 \times 10^{-7}T + 0,0326 \quad (F.22)$$

Método dos elementos finitos - MEF

- Rigidez à flexão em função da força $EI_{MEF_{R2}}^{EMI}(T)$

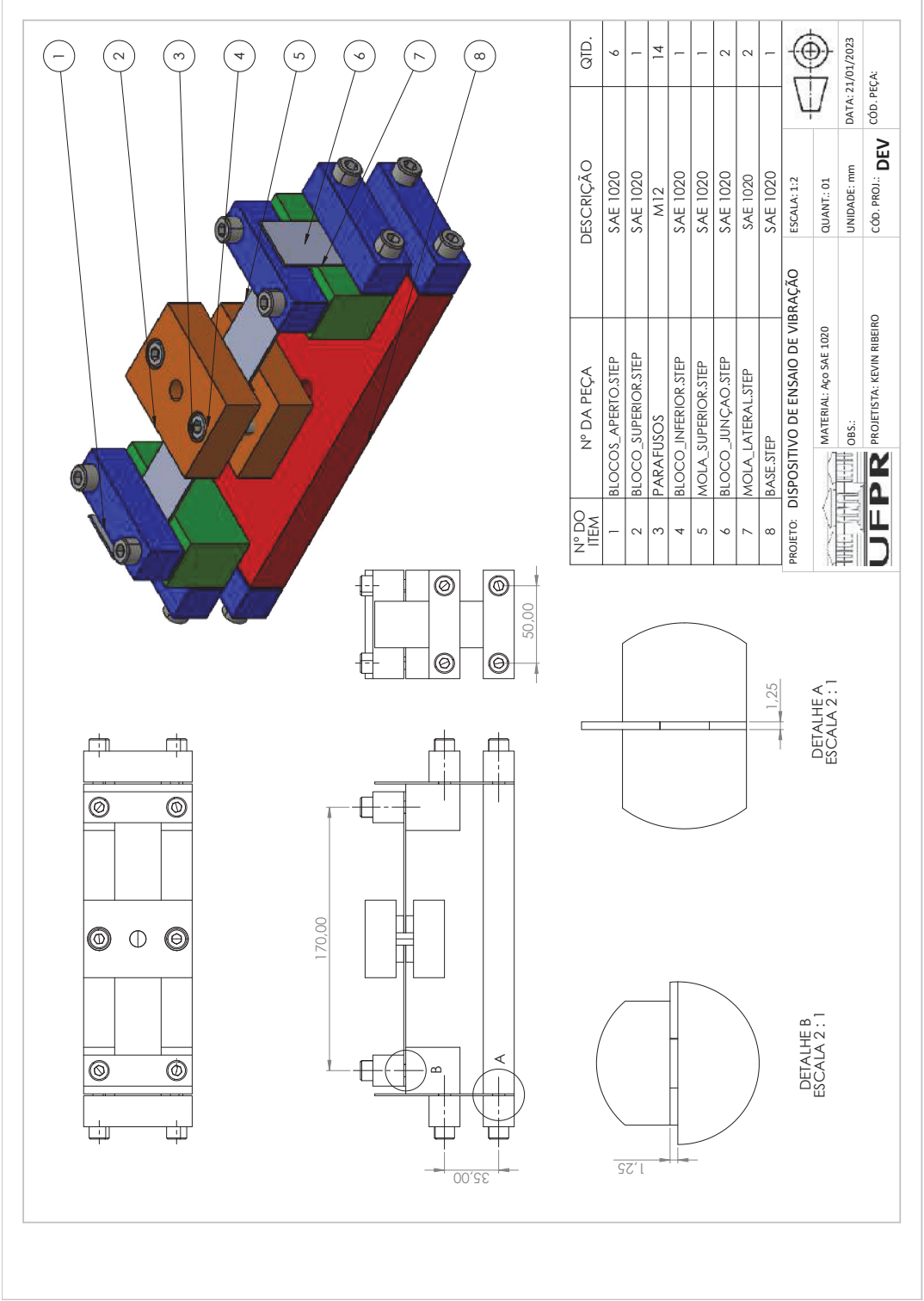
$$EI_{MEF_{R2}}^{EMI}(T) = 0,0049T + 279,3394 \quad (F.23)$$

- Fator de perda material equivalente em função da força $\eta_{MEF_{R2}}^{EMI}(T)$

$$\eta_{MEF_{R2}}^{EMI}(T) = -9,2590 \times 10^{-7}T + 0,0326 \quad (F.24)$$

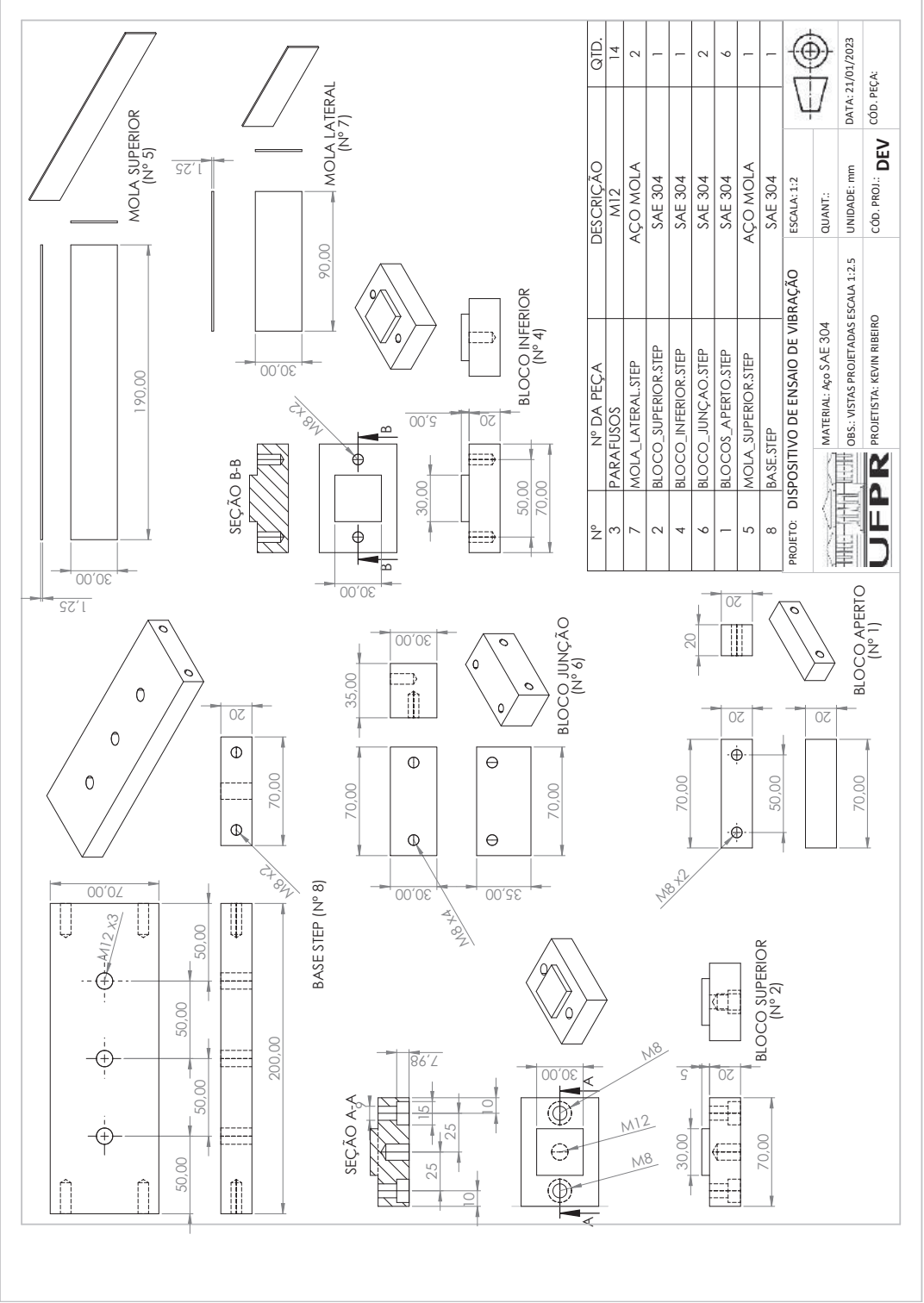
APÊNDICE G – PROJETO EM CAD DO ACOPLAMENTO FLEXÍVEL

FIGURA 126 – CONEXÃO FLEXÍVEL - DESENHO EM CONJUNTO



FONTE: O autor

FIGURA 127 – CONEXÃO FLEXÍVEL - DETALHAMENTO



FONTE: O autor