

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

JAQUELINE ALINE IENSEN GOULART

**HIPOELITICIDADE GLOBAL E
APROXIMAÇÃO DE NÚMEROS REAIS**

Curitiba

2016

JAQUELINE ALINE IENSEN GOULART

**HIPOELITICIDADE GLOBAL E
APROXIMAÇÃO DE NÚMEROS REAIS**

Monografia apresentada para a disciplina
“Trabalho de Conclusão de Curso II” como
requisito parcial para a obtenção do grau de
Licenciada em Matemática da Universidade
Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Kirilov.

Curitiba

2016

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter estado presente em todos os momentos desta jornada sempre me dando força quando eu achava que não conseguiria.

Aos meus pais Levi e Jandira, por garantirem a mim e aos meus irmãos a oportunidade de estudar mesmo em meio às dificuldades da vida e pelo apoio dado a todo momento. Por nos ajudarem a conquistar aquilo que não tiveram a oportunidade de fazer para si mesmos.

Ao meu esposo Antonio, pelo apoio fundamental que sempre me dedicou, pelo carinho e preocupação que demonstrou durante esta jornada. Pelas noites em que me acompanhou para que eu pudesse estudar e pelas palavras de apoio nos momentos em que eu precisava ouvir.

Aos meus irmãos, Janaina, Ricardo e Roberto, pelo apoio durante esse tempo e por entenderem que muitas vezes não pude estar presente porque precisava estudar.

Aos meus colegas de curso, Arthur, Bruno, Carlos, Rodrigo e Sabrina, pelos momentos compartilhados, pelas horas de estudo e por nunca negarem ajuda mesmo quando já tinham seus próprios afazeres.

Aos professores do curso, pela paciência e dedicação durante suas aulas e fora delas. Em especial, agradeço ao professor Alexandre Kirilov, por me orientar na realização desse trabalho, pois sua ajuda foi essencial, sem ela não teria conseguido concluir com êxito essa missão.

Aos professores Cleber e Fernando, por aceitarem fazer parte da banca examinadora desse trabalho e pelas sugestões dadas que ajudaram a melhorar o resultado final.

Resumo

Neste trabalho exploramos a relação existente entre aproximação de números reais por racionais e a regularidade de soluções de equações diferenciais parciais de primeira ordem com coeficientes constantes no plano cartesiano. Para isso estudamos o problema de melhor aproximação de números reais através de frações contínuas e seus convergentes. Um destaque desse trabalho é a prova rigorosa de que o operador $\partial_x + (a + ib)\partial_y$, com a e b reais, é globalmente hipolítico se e somente se $b \neq 0$ ou a é um número irracional não-Liouville.

Palavras-chave: Frações contínuas, hipoliticidade global, número de Liouville, séries de Fourier.

Abstract

In this work we explore the relation between approximation of real numbers by rational numbers and regularity of solution of first order partial differential equations with constant coefficients in the Cartesian plane. For this we study the problem of better approximation of real numbers through continuous fractions and their convergents. A highlight of this work is the rigorous proof that the operator $\partial_x + (a + ib)\partial_y$, with a and b being real numbers, is globally hypoelliptic if and only if either $b \neq 0$ or a is an irrational non-Liouville number.

Key-Words: Continued fractions, global hypoellipticity, Liouville number, Fourier series.

Sumário

Introdução	7
1 Frações Contínuas Simples	9
1.1 Expansão de números racionais	11
1.2 Expansão de números irracionais	15
1.3 Convergentes de frações contínuas simples	18
2 Aproximações por Números Racionais	26
2.1 Aproximações de primeira ordem	27
2.2 Aproximações de segunda ordem	28
2.3 Números de Liouville	34
3 Séries de Fourier	36
3.1 Coeficientes de Fourier	36
3.2 Convergência de Séries de Funções	39
3.3 Séries de Fourier e Decaimento Rápido	40
4 Hipoeliticidade Global	45
4.1 Condição de Greenfield-Wallach	46
4.2 Hipoeliticidade Global para $\partial_x + \alpha\partial_y$	49
Conclusão	54
Referências Bibliográficas	55

Introdução

O principal objetivo dessa monografia é estudar a hipoeliticidade global de operadores diferenciais parciais com coeficientes constantes definidos no plano cartesiano.

Dizemos que um operador diferencial P é globalmente hipoelítico se todas as soluções 2π -periódicas da equação $Pu = f$, com f suave e 2π -periódica, também são suaves.

Esse estudo foi inspirado em três artigos: *Global hypoellipticity and Liouville numbers* e *Hypoelliptic vector fields and continuous fractions*, ambos de S. Greenfield e N. Wallach, ver [4] e [3], além do artigo Hipoeliticidade Global no Toro Bidimensional, de N. Bobko, ver [2]. O principal teorema desse trabalho é o seguinte:

Teorema 0.1. *O operador diferencial $L = \frac{\partial}{\partial x} - (a + ib)\frac{\partial}{\partial y}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, é globalmente hipoelítico se, e somente se*

1. $b \neq 0$ ou
2. a é um número irracional não-Liouville.

Para escrever esse trabalho foi preciso desenvolver um estudo cuidadoso de aproximação de números reais por racionais e relacioná-la com a transformada discreta de Fourier.

Para isso organizamos esse trabalho da seguinte forma:

No primeiro capítulo falaremos sobre uma forma diferente de representar os números reais, as frações contínuas simples. Provaremos que qualquer número real pode ser representado dessa forma e apresentaremos alguns exemplos e resultados necessários ao desenvolvimento do trabalho.

No capítulo seguinte, estudaremos o problema clássico de aproximar números irracionais por números racionais. Estudaremos o teorema de Hurwitz, que garante

que todo número irracional possui uma aproximação de ordem 2, e apresentaremos o exemplo do número de ouro, $\sqrt{5} + 1/2$ que não admite aproximações de ordens superiores. Na sequência relacionamos a teoria das frações contínuas com a teoria das aproximações por racionais, obtendo uma nova ferramenta para o estudo de aproximações.

O terceiro capítulo é dedicado ao estudo das séries e coeficientes de Fourier. Dada uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ contínua e 2π -periódica, e um par $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, definimos o coeficiente de Fourier de ordem (m, n) da função f por

$$\hat{f}(m, n) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) e^{-i\langle (m, n), (x, y) \rangle} dx dy.$$

Mostraremos a relação fundamental entre derivadas e coeficientes de Fourier, obtendo informações sobre comportamento dos coeficientes de Fourier de uma função suave e 2π -periódica quando $|(m, n)| \rightarrow \infty$. Na sequência mostraremos que a transformada discreta de Fourier dessas funções estão em bijeção com as sequências rapidamente decrescentes.

O último capítulo deste trabalho traz a famosa condição de Greenfield-Wallach, que fornece condições necessárias e suficientes para que o operador diferencial parcial com coeficientes constantes em \mathbb{R}^2 seja globalmente hipoelítico. A partir dessa condição obtemos uma caracterização mais cuidadosa dessa propriedade em termos de seus coeficientes.

Capítulo 1

Frações Contínuas Simples

Neste capítulo serão introduzidos alguns resultados sobre frações contínuas que serão utilizados no estudo de aproximações de números reais por racionais.

Para começar, podemos pensar em fração contínua simplesmente como uma forma diferente de representar os números, escrevendo-os na forma

$$a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{a_3 + \frac{b_3}{\ddots + \frac{b_m}{a_m}}}}, \quad (1.1)$$

com $a_j, b_j \in \mathbb{Z}$, para $j = 1, 2, \dots, m$.

Por exemplo:

$$2 + \frac{3}{4 + \frac{3}{4 + \frac{3}{5}}} = \frac{47}{18} \quad \text{e} \quad -3 + \frac{2}{1 + \frac{2}{3}} = -\frac{9}{5}.$$

Dizemos que a fração contínua (1.1) é simples quando

$$b_1 = b_2 = \dots = b_m = 1 \text{ e } a_j \in \mathbb{N}, \text{ para } j \geq 2,$$

Esse é o tipo de fração contínua que trataremos nesse trabalho. Antes de pros-

seguir, vamos analisar mais um exemplo:

$$\begin{aligned} \frac{85}{32} &= 2 + \frac{21}{32} = 2 + \frac{1}{\frac{32}{21}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{11}{21}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{21}{11}}} \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{10}{11}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{11}{10}}}}} \end{aligned}$$

Recordando que uma fração é dita “imprópria” quando o numerador é maior que o denominador e “própria” quando o numerador é menor que o denominador, podemos descrever o processo acima do ponto de vista de algoritmos da seguinte forma:

- p_1 . Se a fração for imprópria siga para o passo p_2 ; caso contrário inverta ela e siga para o passo p_2 ;
- p_2 . transforme a fração imprópria em uma fração própria não negativa subtraindo sua parte inteira e siga para o passo p_3 ;
- p_3 . Se o denominador da fração imprópria for 1 o processo encerra aqui; caso contrário retorne ao passo p_1 .

Após testar esse procedimento com alguns números racionais, ficamos com a sensação de que ele nos fornecerá sempre uma fração contínua simples, porém várias perguntas surgem naturalmente:

- a. É possível provar que qualquer número racional pode ser representado por uma fração simples?
- b. O que garante que o procedimento acima tem fim? Em outras palavras, o algoritmo acima será interrompido após um número finito de iterações?
- c. E os números irracionais, também podem ser representados por uma fração simples? Em caso afirmativo, como obter a fração simples que o representa?
- d. Esta representação em fração contínua simples é única?

Para responder a essas perguntas vamos introduzir a definição precisa de fração contínua simples e provar alguns resultados sobre representação dos números reais nesse formato.

Definição 1.1. *Dados $a_0 \in \mathbb{Z}$ e uma sequência (finita ou infinita) de números inteiros positivos a_1, a_2, a_3, \dots , chamaremos de fração contínua simples a expressão*

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}. \quad (1.2)$$

Como a expressão (1.2) depende apenas da sequência de inteiros a_j , é costume denotá-la por

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots],$$

e chamar essa representação de expansão em fração contínua simples.

1.1 Expansão de números racionais

Nessa seção mostraremos que qualquer número racional possui uma expansão em fração contínua simples finita. Também discutiremos a questão de unicidade de representação em frações contínuas simples.

Teorema 1.2. *Qualquer fração contínua simples finita representa um número racional. Reciprocamente, qualquer número racional pode ser representado por uma fração contínua simples finita.*

Demonstração

A demonstração da primeira parte é imediata. Para provar a recíproca, seja p/q um número racional qualquer. Pelo algoritmo da divisão, existem inteiros a_0 e r_0 , com $0 \leq r_0 < q$, tais que $p = a_0q + r_0$, ou seja,

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q}. \quad (1.3)$$

Se $r_0 = 0$, o número p/q é inteiro e o processo termina aqui. Neste caso $p/q = a_0$ e a fração contínua é a mais simples possível: $p/q = [a_0]$.

Caso contrário, podemos escrever

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_0}}, \quad 0 \leq r_0 < q.$$

Agora repetimos o mesmo procedimento acima com q/r_0 , ou seja, usamos o algoritmo da divisão para encontrar a_1 e r_1 tais que

$$\frac{q}{r_0} = a_1 + \frac{r_1}{r_0}, \quad 0 \leq r_1 < r_0. \quad (1.4)$$

Se $r_1 = 0$, o processo termina. Neste caso basta levar (1.4) em (1.3) e teremos

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0; a_1].$$

Se $r_1 \neq 0$, repetimos esse mesmo procedimento com a fração r_0/r_1 , e assim sucessivamente.

Note que o processo termina quando obtivermos $r_n = 0$ para algum n , o que ocorrerá, pois

$$q > r_1 > r_2 > \dots \geq 0$$

é uma sequência decrescente de inteiros não negativos.

Dessa forma temos

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= a_0 + \frac{r_0}{q}, & 0 < r_0 < q, \\ \frac{q}{r_0} &= a_1 + \frac{r_1}{r_0}, & 0 < r_1 < r_0, \\ \frac{r_0}{r_1} &= a_2 + \frac{r_2}{r_1}, & 0 < r_2 < r_1, \\ &\vdots & \vdots \\ \frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} &= a_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}, & 0 < r_{n-1} < r_{n-2}, \\ \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &= a_n, & r_n = 0, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1}}}}} = [a_0; a_1, \dots, a_n]. \quad (1.5)$$

□

Observação: Na expressão (1.5), a última fração pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{1}{a_{n-1}} = \frac{1}{(a_{n-1} - 1) + \frac{1}{1}}.$$

Isso significa que a expressão $[a_0; a_1, \dots, a_{n-1} - 1, 1]$ também é uma expansão de p/q em fração contínua simples, ou seja, nesta situação não temos unicidade de representação em frações contínuas.

Com exceção deste caso específico, em que expressamos o número inteiro k como $(k - 1) + 1$, a unicidade da expansão em fração contínua simples é consequência do algoritmo da divisão.

Exemplo 1.3. *As duas representações abaixo correspondem ao mesmo número racional.*

$$[1; 2, 3, 4] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{(4-1) + \frac{1}{1}}}} = [1; 2, 3, 3, 1].$$

O próximo resultado apresenta uma relação que escapa à nossa “intuição decimal”, mas após pensar em um ou dois exemplos, vemos que realmente funciona e temos a demonstração em mãos.

Proposição 1.4. *Sejam $p, q \in \mathbb{Z}$ com $p > q$. Se $p/q = [a_0; a_1, \dots, a_n]$, então,*

$$\frac{q}{p} = [0; a_0, a_1, \dots, a_n].$$

Reciprocamente, se $q/p = [0; a_0, a_1, \dots, a_n]$, então $p/q = [a_0; a_1, \dots, a_n]$.

Demonstração

Por hipótese, $p > q$, então podemos escrever

$$\frac{q}{p} = 0 + \frac{1}{\frac{p}{q}}$$

Como $p/q = [a_0; a_1, \dots, a_n]$, substituindo a representação em fração contínua na expressão acima teremos

$$\frac{q}{p} = 0 + \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}}}$$

Note que o mesmo raciocínio pode ser usado para a recíproca. De fato

$$\frac{q}{p} = [0; a_0, a_1, \dots, a_n] = 0 + \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}}}$$

Chamando de $x \doteq [a_0; a_1, \dots, a_n]$ e substituindo essa expansão na expressão abaixo teremos:

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{\frac{q}{p}} = \frac{1}{0 + \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}}}} = \frac{1}{0 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x.$$

□

Exemplo 1.5. Vamos expressar o número $87/59$ e o seu inverso como fração con-

tínua.

$$\begin{aligned} \frac{87}{59} &= 1 + \frac{28}{59} = 1 + \frac{1}{\frac{59}{28}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{3}{28}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{28}{3}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{9 + \frac{1}{3}}} = [1; 2, 9, 3]. \end{aligned}$$

Agora, para escrever a expansão do inverso $59/87$ basta fazer

$$\frac{59}{87} = [0; 1, 2, 9, 3] = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{9 + \frac{1}{3}}}}.$$

1.2 Expansão de números irracionais

Para construir a expansão de um número irracional em fração contínua simples, vamos adaptar o procedimento que usamos para os números racionais da seguinte forma:

Seja x um número irracional qualquer e $a_0 = [x]$ o maior inteiro menor ou igual a x , neste caso

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1}, \text{ com } 0 < \frac{1}{x_1} < 1.$$

Note que x_1 é um número irracional, caso contrário a identidade acima levaria a uma contradição.

Como $x_1 = \frac{1}{x - a_0} > 1$, podemos escrever

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \text{ com } a_1 = [x_1] \geq 1 \text{ e } 0 < \frac{1}{x_2} < 1.$$

Da mesma forma $x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1} > 1$ é um número irracional e podemos repetir esse processo obtendo, sucessivamente, as equações

$$\begin{aligned}
 x &= a_0 + \frac{1}{x_1}, & x_1 > 1 \text{ e } a_0 = [x] \in \mathbb{Z}; \\
 x_1 &= a_1 + \frac{1}{x_2}, & x_2 > 1 \text{ e } a_1 = [x_1] \geq 1; \\
 x_2 &= a_2 + \frac{1}{x_3}, & x_3 > 1 \text{ e } a_2 = [x_2] \geq 1; \\
 &\vdots & \vdots \\
 x_n &= a_n + \frac{1}{x_{n+1}}, & x_{n+1} > 1 \text{ e } a_n = [x_n] \geq 1; \\
 &\vdots & \vdots
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Note que todos os números a_j são inteiros, enquanto todos os números x_j são irracionais, logo o procedimento acima jamais termina. De fato, isso só ocorreria se $x_n = a_n$ para algum n , o que é impossível.

Fazendo substituições, obtemos uma fração contínua simples infinita associada ao número x da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 x &= a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2}} = \dots \\
 &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n + \dots}}} = [a_0; a_1, a_2, \dots]
 \end{aligned}$$

A representação de um irracional x em fração contínua simples infinita também possui unicidade em sua representação, uma vez que os valores x_1, x_2, x_3, \dots são únicos.

Exemplo 1.6. *Vamos obter a expansão de $\sqrt{2}$ em fração contínua simples.*

Começamos observando que o maior inteiro menor que $\sqrt{2}$ é 1, logo

$$\sqrt{2} = \underbrace{1}_{=a_0} + \underbrace{\sqrt{2} - 1}_{=1/x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1.$$

Logo,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = 1 + \frac{1}{\underbrace{2}_{=a_1} + \underbrace{\sqrt{2} - 1}_{=1/x_2}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}}.$$

Continuando esse processo indefinidamente teremos

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}} = [1; 2, 2, 2, \dots].$$

Neste ponto não podemos deixar de expressar nossa admiração com a expansão em fração contínua simples de $\sqrt{2}$. Essa é uma das boas surpresas que apareceram nesse estudo.

Outros exemplos notáveis são os seguintes

- i. $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, \dots]$;
- ii. $\frac{e-1}{2} = [0; 1, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, \dots]$;
- iii. $\frac{e-1}{e+1} = [0; 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, \dots]$;
- iv. $\sqrt{e} = [1; 1, 1, 1, 5, 1, 1, 9, 1, 1, 13, 1, 1, \dots]$.

Mas nem todos os irracionais possuem representações como os acima, por exemplo:

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \dots]$$

não segue nenhum padrão em sua representação.

Durante o desenvolvimento desse trabalho tivemos a oportunidade de estudar esses padrões nas representações em frações contínuas simples e entender um pouco melhor esse assunto. Tendo em vista o foco de nosso estudo e os objetivos desse trabalho, infelizmente não poderemos nos aprofundar nessa direção, mas indicamos para o leitor interessado no assunto as referências [1] e [10].

Finalizamos essa seção com um resultado que é essencialmente uma releitura do Teorema 1.2.

Teorema 1.7. *Um número real é racional se e somente se sua representação em fração contínua simples for finita.*

A demonstração desse teorema é exatamente a mesma do Teorema 1.2. A opção por colocá-lo nesse ponto tem a ver com suas consequências, que nas primeiras páginas desse texto não seriam tão claras:

- ▷ a expansão em fração contínua simples de um número é infinita se, e somente se, este número é irracional;
- ▷ todo número real possui expansão em fração contínua simples.

1.3 Convergentes de frações contínuas simples

Dada uma fração contínua simples infinita $[a_0; a_1, \dots, a_n, \dots]$, seus convergentes são os números:

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \frac{a_0}{1} = [a_0] \\
 C_1 &= a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0; a_1] \\
 C_2 &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = [a_0; a_1, a_2] \\
 &\vdots \\
 C_n &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Nosso objetivo é mostrar que estes convergentes fornecem boas aproximações racionais para o número irracional representado por essa fração contínua simples.

Note que, não faz muito sentido considerar os convergentes de uma fração contínua simples finita, pois o objetivo da teoria de aproximações é encontrar boas aproximações racionais para um número irracional.

Para analisar o comportamento da sequência de convergentes da fração contínua associada a um número racional, vamos definir duas novas sequências cuja utilidade ficará clara no decorrer do texto.

Definição 1.8. *Dada uma fração contínua simples infinita $[a_0; a_1, \dots, a_n, \dots]$, definimos as sequências $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} p_{-1} &= 1, & p_0 &= a_0, & q_{-1} &= 0, & q_0 &= 1 \\ p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, & q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Antes de provar o resultado que nos interessa sobre convergentes, vamos provar uma fórmula que será útil no prosseguimento desse trabalho.

Teorema 1.9. *Para todo número real x vale a fórmula*

$$[a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, x] = \frac{x p_{n-1} + p_{n-2}}{x q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Demonstração

Para $n = 1$ temos $\frac{x p_0 + p_{-1}}{x q_0 + q_{-1}} = \frac{x a_0 + 1}{1x + 0} = a_0 + \frac{1}{x} = [a_0; x]$.

Suponha agora que a fórmula vale para n , então

$$\begin{aligned} [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, x] &= [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1/x] \\ &= \frac{(a_n + 1/x)p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + 1/x)q_{n-1} + q_{n-2}} \\ &= \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-1}/x + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-1}/x + q_{n-2}} \\ &= \frac{p_n + p_{n-1}/x}{q_n + q_{n-1}/x} = \frac{x p_n + p_{n-1}}{x q_n + q_{n-1}}, \end{aligned}$$

o que conclui a prova. □

Teorema 1.10. *Dada uma fração contínua simples infinita $[a_0; a_1, \dots, a_j, \dots]$, o n -ésimo convergente C_n é igual a $\frac{p_n}{q_n}$, $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração

Para $n = 1$ temos $p_1 = a_1 p_0 + p_{-1} = a_1 a_0 + 1$ e $q_1 = a_1 q_0 + q_{-1} = a_1$, logo

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = C_1.$$

Suponhamos, agora, que (1.7) seja válido para $n \leq k$ e mostremos que vale para $n = k + 1$

$$C_{k+1} = [a_0; a_1, \dots, a_k, a_{k+1}] = [a_0; a_1, \dots, a_k + \frac{1}{a_{k+1}}] = [a_0; a_1, \dots, a_k^*] = C_k^*.$$

Aqui, por motivos tipográficos, cometemos um abuso de notação chamando de C_k^* o k -ésimo convergente da fração contínua

$$[a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, a_k^*, a_{k+2}, a_{k+3}, \dots], \quad \text{na qual } a_k^* = a_k + \frac{1}{a_{k+1}}.$$

Agora basta usar a hipótese de indução no convergente C_k^* , obtendo

$$\begin{aligned} C_{k+1} = C_k^* &= \frac{a_k^* p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k^* q_{k-1} + q_{k-2}} = \frac{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) q_{k-1} + q_{k-2}} \\ &= \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2} + \frac{1}{a_{k+1}} p_{k-1}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2} + \frac{1}{a_{k+1}} q_{k-1}} = \frac{p_k + (1/a_{k+1}) p_{k-1}}{q_k + (1/a_{k+1}) q_{k-1}} \\ &= \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 1.11. *Recordemos que a fração contínua simples $[1; 2, 2, 2, 2, \dots]$ representa o número real $\sqrt{2}$. Agora, usando as fórmulas acima para o cálculo dos con-*

vergentes, temos:

$$C_0 = \frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$C_1 = \frac{p_1}{q_1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$C_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2 p_1 + p_0}{a_2 q_1 + q_0} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{7}{5} = 1,4$$

$$C_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1} = \frac{2 \cdot 7 + 3}{2 \cdot 5 + 2} = \frac{17}{12} = 1,4166667$$

$$C_4 = \frac{p_4}{q_4} = \frac{a_4 p_3 + p_2}{a_4 q_3 + q_2} = \frac{2 \cdot 17 + 7}{2 \cdot 12 + 5} = \frac{41}{29} = 1,4137931$$

$$C_5 = \frac{p_5}{q_5} = \frac{a_5 p_4 + p_3}{a_5 q_4 + q_3} = \frac{2 \cdot 41 + 17}{2 \cdot 29 + 12} = \frac{99}{70} = 1,4142857$$

o que fornece uma boa sequência de aproximações para o valor de $\sqrt{2}$.

Para provar que os convergentes constituem de fato uma sequência de valores que converge para o valor representado pela fração contínua simples, precisamos provar alguns resultados preliminares.

Proposição 1.12. *Os termos das sequências $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ associadas a uma fração contínua simples satisfazem a seguinte relação, conhecida como Fórmula do determinante:*

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1}, \quad n \geq 0. \quad (1.8)$$

Demonstração

Para $n = 0$, temos

$$p_0 q_{-1} - q_0 p_{-1} = a_0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 = (-1)^{-1} = (-1)^{0-1}.$$

Supondo que a fórmula é válida para n temos,

$$\begin{aligned} p_{n+1} q_n - q_{n+1} p_n &= (a_{n+1} p_n + p_{n-1}) q_n - (a_{n+1} q_n + q_{n-1}) p_n \\ &= a_{n+1} (p_n q_n - q_n p_n) - (q_{n-1} p_n - p_{n-1} q_n) \\ &= -(-1)^{n-1} = (-1)^{(n+1)-1} \end{aligned}$$

□

Proposição 1.13. *Os convergentes de frações contínuas simples infinitas satisfazem*

$$C_n - C_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}, \quad n \geq 1, \quad (1.9)$$

e

$$C_n - C_{n-2} = \frac{a_n (-1)^{n-2}}{q_n q_{n-2}}, \quad n \geq 2. \quad (1.10)$$

Demonstração

Para $n \geq 1$, basta dividir ambos os membros da expressão (1.8) por $q_n q_{n-1}$, obtendo

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}},$$

o que prova (1.9).

Para provar (1.10), começamos com as equações (1.7) obtendo

$$\begin{aligned} p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) p_{n-2} \\ &= a_n (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) = a_n (-1)^{n-2}. \end{aligned}$$

Dividindo os extremos da expressão acima por $q_n q_{n-2}$ obtemos

$$C_n - C_{n-2} = \frac{a_n (-1)^{n-2}}{q_n q_{n-2}}.$$

□

Teorema 1.14. *Considere a sequência $\{C_n\}$ de convergentes de uma fração contínua simples infinita, então:*

- i. a subsequência dos convergentes de ordem par $\{C_{2n}\}$ é crescente;*
- ii. a subsequência dos convergentes de ordem ímpar $\{C_{2n+1}\}$ é decrescente;*
- iii. todo convergente de ordem par é menor que qualquer convergente de ordem ímpar; e*
- iv. cada convergente C_n , com $n \geq 2$, está entre os convergentes C_{n-1} e C_{n-2} .*

Logo, os termos da sequência $\{C_n\}$ satisfazem

$$C_0 < C_2 < C_4 < \dots < C_{2n} < \dots < C_{2n+1} < \dots < C_5 < C_3 < C_1.$$

Demonstração

Note que $a_n > 0$ para $n \geq 1$ e $q_n > 0$ para $n \geq 0$, logo pela propriedade anterior temos

$$C_{2n} - C_{2n-2} = \frac{a_{2n}(-1)^{2n-2}}{q_{2n}q_{2n-2}} > 0 \implies C_{2n-2} < C_{2n}$$
$$C_{2n+1} - C_{2n-1} = \frac{a_{2n+1}(-1)^{2n-1}}{q_{2n+1}q_{2n-1}} < 0 \implies C_{2n+1} < C_{2n-1}$$

e, também da propriedade anterior, temos

$$C_{2n} - C_{2n-1} = \frac{(-1)^{2n-1}}{q_{2n}q_{2n-1}} < 0 \implies C_{2n} < C_{2n-1},$$
$$C_{2n+1} - C_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{q_{2n+1}q_{2n}} > 0 \implies C_{2n} < C_{2n+1}.$$

Das duas primeiras desigualdades concluímos que $\{C_{2n}\}$ é uma sequência crescente e que $\{C_{2n+1}\}$ é uma sequência decrescente. Temos também que

$$C_{2n-2} < C_{2n} < C_{2n+1} < C_{2n-1}.$$

Portanto, C_n está entre C_{n-1} e C_{n-2} .

Na última desigualdade, fazendo $n = 1$, obtemos $C_0 < C_2 < C_3 < C_1$.

Para $n = 2$, temos $C_2 < C_4 < C_5 < C_3$. Portanto,

$$C_0 < C_2 < C_4 < C_5 < C_3 < C_1.$$

Por indução obtemos

$$C_0 < C_2 < \dots < C_{2n-2} < C_{2n} < \dots < C_{2n+1} < C_{2n-1} < \dots < C_3 < C_1,$$

o que conclui a prova o teorema. □

Teorema 1.15. *Os convergentes de uma fração contínua simples infinita convergem e seu limite é dado por*

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} C_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} C_{2n+1}.$$

Demonstração

Como $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$, com $a_{n+1}, q_n, q_{n-1} \in \mathbb{N}$, então $\{q_n\}$ é uma sequência crescente de números naturais, logo

$$C_{2n} - C_{2n-1} = \frac{-1}{q_{2n}q_{2n-1}} \longrightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Segue do teorema dos intervalos encaixados que a sequência $\{C_n\}$ possui um único ponto de acumulação e portanto é convergente.

□

Teorema 1.16. *A sequência dos convergentes $\{C_n\}_{n=0}^\infty$ converge para um número irracional.*

Demonstração

Suponhamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = l = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p}{q} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = \frac{p}{q}.$$

Do teorema 1.14 temos

$$C_{2n} = \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{p}{q} < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < C_{2n+1}, \quad n \geq 0.$$

Logo,

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p}{q} > 0 \Rightarrow \frac{p_{2n+1}q - pq_{2n+1}}{q_{2n+1}q} > 0.$$

Mas, $p_{2n+1}q - pq_{2n+1} \in \mathbb{Z}$ e $\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} \neq \frac{p}{q}$. Logo, $p_{2n+1}q - pq_{2n+1} \geq 1$.

Dividindo ambos os lados por $q_{2n+1}q$ obtemos

$$\frac{p_{2n+1}q - pq_{2n+1}}{q_{2n+1}q} \geq \frac{1}{q_{2n+1}q},$$

ou seja,

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p}{q} \geq \frac{1}{q_{2n+1}q}.$$

Mas,

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p}{q} < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = C_{2n+1} - C_{2n} = \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}},$$

ou seja,

$$\frac{1}{q_{2n+1}q} < \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}}.$$

Portanto, $q_{2n} < q$ para todo $n \geq 1$. Contradição, pois $\{q_n\}$ é uma sequência crescente.

□

Capítulo 2

Aproximações por Números Racionais

Neste capítulo estamos interessados em estudar de que forma os números irracionais podem ser aproximados por racionais, obtendo estimativas precisas e identificando casos de boas aproximações através de frações convenientes.

Intuitivamente, dado um irracional qualquer λ , a primeira coisa que nos vem a mente é: “ λ está entre dois inteiros consecutivos. Quais são estes inteiros?”

Esse resultado pode ser chamado de aproximação por inteiros e enunciado nos seguintes termos: para cada número irracional λ , existe um único inteiro m tal que:

$$|\lambda - m| < \frac{1}{2}. \quad (2.1)$$

Embora seja um resultado bastante intuitivo, sua demonstração rigorosa não é tão trivial quanto possa aparentar. A localização do inteiro mais próximo e sua unicidade passam pelo princípio da boa ordenação. No livro de Niven, ver [9], há uma demonstração bastante intuitiva deste resultado.

No restante do capítulo apresentamos resultados bastante gerais sobre aproximações por racionais e suas limitações. Faremos uma conexão entre aproximações e frações contínuas e apresentamos o número de Liouville.

2.1 Aproximações de primeira ordem

Os dois resultados que veremos agora oferecem aproximações de primeira ordem, ou seja, aproximações melhores que o inverso de um polinômio de primeira ordem.

Nas seções seguintes veremos que existem aproximações de ordens superiores.

Teorema 2.1. *Para quaisquer números λ irracional e n natural dados, existe um inteiro m tal que*

$$\left| \lambda - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{2n}.$$

Demonstração

Como $n\lambda$ é irracional, seja m o inteiro mais próximo de $n\lambda$, então

$$|n\lambda - m| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \lambda - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{2n}.$$

□

Teorema 2.2. *Seja λ um número irracional e k um inteiro positivo, então existe um número racional m/n , com $n \leq k$ tal que*

$$\left| \lambda - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{nk}.$$

Demonstração

Dado um número irracional λ e um inteiro positivo k , considere os k números $\lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots, k\lambda$.

O primeiro passo é separar a parte inteira de cada um desses números, ou seja, escrever cada um destes números como um inteiro mais a parte decimal.

$$\begin{array}{rcl} \lambda & = & a_1 + \beta_1 \Rightarrow \lambda - a_1 = \beta_1 \\ 2\lambda & = & a_2 + \beta_2 \Rightarrow \lambda - a_2 = \beta_2 \\ & \vdots & \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ k\lambda & = & a_k + \beta_k \Rightarrow \lambda - a_k = \beta_k \end{array}$$

sendo $a_j \in \mathbb{Z}$ e $0 < \beta_j < 1$, para todo $j = 1, 2, \dots, k$.

A seguir particionamos o intervalo escrevendo

$$[0, 1] = \bigcup_{j=1}^k I_j, \quad \text{com } I_j \doteq \left[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k} \right].$$

A partir deste ponto dividiremos a demonstração em dois casos distintos, em relação ao subintervalo I_1 :

Caso 1: O intervalo $I_1 = [0, 1/k]$ contém algum β_n , com $1 \leq n \leq k$.

O resultado é imediato, pois $\beta_n = n\lambda - a_n$ logo $\left| \lambda - \frac{a_n}{n} \right| < \frac{1}{kn}$.

Caso 2: O intervalo I_1 não contém nenhum dos β_ℓ 's.

Neste caso, os k números β_ℓ estão nos $k - 1$ intervalos I_j , segue do princípio da casa dos pombos que algum I_{j_0} contém dois ou mais β_ℓ 's. Vamos denotar por β_r e β_s , com $r < s$, duas partes decimais que estão em um mesmo intervalo I_{j_0} , então

$$|\beta_s - \beta_r| < \frac{1}{k}. \tag{2.2}$$

Como $\beta_s = s\lambda - a_s$ e $\beta_r = r\lambda - a_r$ então

$$\beta_s - \beta_r = (s\lambda - a_s) - (r\lambda - a_r) = (s - r)\lambda - (a_s - a_r).$$

Denotando $n \doteq s - r \in \mathbb{N}$ e $m \doteq a_s - a_r \in \mathbb{Z}$, de (2.2) temos

$$|n\lambda - m| < \frac{1}{k} \Rightarrow \left| \lambda - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{kn}.$$

Note que $0 \leq r < s \leq k$, logo o denominador $n = s - r \leq k$, o que conclui a prova do teorema. □

2.2 Aproximações de segunda ordem

A ideia aqui é mostrar que as aproximações de irracionais podem ser melhor controladas, obtendo aproximações por inversos de um polinômio de ordem 2.

Dado um número irracional arbitrário, também mostraremos que, a menos de uma constante, esse é o melhor tipo de aproximação que é possível obter.

Teorema 2.3. *Para qualquer número irracional λ existem infinitos números racio-*

nais m/n , com $\text{mdc}(m, n) = 1, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ tais que

$$\left| \lambda - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{n^2}. \quad (2.3)$$

Demonstração

Primeiramente, observemos que qualquer número racional m/n , satisfazendo a desigualdade do Teorema 2.2, automaticamente satisfará a desigualdade do Teorema 2.3. De fato, como $k \geq n$ então

$$\left| \lambda - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{kn} \leq \frac{1}{n^2}.$$

O problema do Teorema 2.2, é que m/n não precisa estar na forma irredutível e não fala nada a respeito de uma infinidade de racionais satisfazendo a desigualdade. O restante desta demonstração é dedicada a preencher estas lacunas.

Primeiro vamos mostrar que se um número racional m/n qualquer satisfaz o Teorema 2.3, então sua forma irredutível satisfaz uma desigualdade na forma desejada.

Vamos denotar por M/N a forma irredutível do número racional m/n ; aqui podemos supor $n \geq N > 0$.

Assim, se λ satisfaz $|\lambda - m/n| < 1/n^2$, então

$$\left| \lambda - \frac{M}{N} \right| = \left| \lambda - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N^2}.$$

Para provar que há uma infinidade de racionais satisfazendo (2.3), vamos supor que esse número é finito, ou seja, que

$$\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \frac{m_3}{n_3}, \dots, \frac{m_\ell}{n_\ell}, \quad (2.4)$$

são os únicos números racionais tais que

$$\left| \lambda - \frac{m_j}{n_j} \right| < \frac{1}{n_j^2}, \quad j = 1, 2, \dots, \ell.$$

Tomando $k > \max\{n_1, n_2, \dots, n_\ell\}$, obtemos

$$\left| \lambda - \frac{m_j}{n_j} \right| \geq \frac{1}{k}, \quad j = 1, 2, \dots, \ell. \quad (2.5)$$

Aplicando o Teorema 2.2 obtemos um novo número racional m/n , tal que

$$\left| \lambda - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{kn} \leq \frac{1}{k}.$$

Segue de (2.5) que m/n não é nenhum dos números da lista (2.4), o que contradiz o fato desses números serem os únicos racionais com tais propriedades. \square

O próximo teorema traz uma aproximação um pouco melhor que aquela fornecida pelo teorema 2.3. A prova desse resultado usa propriedades das frações contínuas apresentadas no capítulo anterior.

Teorema 2.4. (Hurwitz) *Para qualquer número irracional λ existe uma infinidade de números racionais p/q tais que*

$$\left| \lambda - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}. \quad (2.6)$$

A estratégia da prova desse teorema é mostrar que, de cada três convergentes sucessivos da expansão de λ , pelo menos um satisfaz (2.6). Isso garante que a sequência de convergentes $\{C_n = p_n/q_n\}$ possui uma subsequência $\{C_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ satisfazendo (2.6).

Para isso, primeiro provaremos dois lemas técnicos.

Lema 2.5. *Seja λ um número irracional. Se a desigualdade (2.6) é falsa para dois convergentes consecutivos*

$$C_{j-1} = \frac{p_{j-1}}{q_{j-1}} \quad e \quad C_j = \frac{p_j}{q_j}, \quad \text{com } j \in \mathbb{N},$$

então

$$r_j + r_j^{-1} < \sqrt{5}, \quad \text{sendo } r_j \doteq \frac{q_j}{q_{j-1}}. \quad (2.7)$$

Demonstração

De fato, se (2.6) é falsa para C_{j-1} e C_j então

$$\left| \lambda - \frac{p_{j-1}}{q_{j-1}} \right| + \left| \lambda - \frac{p_j}{q_j} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_{j-1}^2} + \frac{1}{\sqrt{5}q_j^2}.$$

Como λ está entre C_{j-1} e C_j então

$$\left| \lambda - \frac{p_{j-1}}{q_{j-1}} \right| + \left| \lambda - \frac{p_j}{q_j} \right| = \left| \frac{p_{j-1}}{q_{j-1}} - \frac{p_j}{q_j} \right|.$$

Agora, pela Proposição 1.13, temos que

$$\left| \frac{p_{j-1}}{q_{j-1}} - \frac{p_j}{q_j} \right| = \frac{1}{q_{j-1}q_j}.$$

Combinando as três expressões acima temos

$$\frac{1}{\sqrt{5}q_{j-1}^2} + \frac{1}{\sqrt{5}q_j^2} \leq \frac{1}{q_{j-1}q_j},$$

e multiplicando a desigualdade acima por $q_{j-1}q_j\sqrt{5}$ obtemos

$$r_j + r_j^{-1} = \frac{q_j}{q_{j-1}} + \frac{q_{j-1}}{q_j} \leq \sqrt{5}.$$

Como o lado esquerdo dessa desigualdade é racional então essa desigualdade é estrita, o que conclui a prova do Lema. \square

No próximo lema, será utilizado um número conhecido como o número de ouro, $\sqrt{5} + 1/2$. Este número é bem conhecido devido às suas incontáveis aplicações, em obras de arte, em construções, na natureza, etc.

Lema 2.6. *Seja $x > 1$ um número real. Se $x + x^{-1} < \sqrt{5}$, então*

$$x < \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \quad e \quad x^{-1} > \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Demonstração

Para provar esse resultado, vamos analisar o comportamento da função

$$f(x) = x + x^{-1}, \text{ com } x \geq 1.$$

Note que $f(1) = 2$, e para $x_0 = (\sqrt{5} + 1)/2$ temos $x_0^{-1} = (\sqrt{5} - 1)/2$ e portanto $f(x_0) = x_0 + x_0^{-1} = \sqrt{5}$.

Como $f'(x) = 1 + x^{-2} > 0$, para $x > 1$, então f é crescente. Logo

$$2 < x + x^{-1} < \sqrt{5} \Rightarrow 1 < x < \frac{\sqrt{5} + 1}{2},$$

e, invertendo a última desigualdade, temos

$$1 > x^{-1} > \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^{-1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

□

Demonstração do Teorema de Hurwitz

Suponha, por absurdo, que exista um $j \in \mathbb{N}$ tal que (2.6) seja falsa para os três convergentes sucessivos

$$C_{j-1} = \frac{p_{j-1}}{q_{j-1}}, \quad C_j = \frac{p_j}{q_j} \quad \text{e} \quad C_{j+1} = \frac{p_{j+1}}{q_{j+1}}.$$

Segue do Lema 2.5 que

$$r_j + r_j^{-1} < \sqrt{5} \quad \text{e} \quad r_{j+1} + r_{j+1}^{-1} < \sqrt{5},$$

e do Lema 2.6 que

$$r_j^{-1} > \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad \text{e} \quad r_{j+1} < \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

De (1.7) recordamos que $q_j = a_j q_{j-1} + q_{j-2}$, logo

$$a_{j+1} + r_j^{-1} = a_{j+1} + \frac{q_{j-1}}{q_j} = \frac{a_{j+1} q_j + q_{j-1}}{q_j} = r_{j+1}.$$

Segue das duas expressões acima que

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5} + 1}{2} &> r_{j+1} = a_{j+1} + r_j^{-1} \\ &> a_{j+1} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \\ &\geq 1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \end{aligned}$$

e isto é uma contradição. □

Teorema 2.7. *A constante $\sqrt{5}$ no teorema anterior é a melhor possível. Em outras palavras, o Teorema 2.4 não vale se substituirmos $\sqrt{5}$ por um valor maior.*

Demonstração

Note que, basta exibir um número irracional λ para o qual $\sqrt{5}$ seja a maior constante possível.

Considere o número irracional $\lambda = [1; 1, 1, 1, \dots]$. Como

$$\lambda = 1 + \frac{1}{[1; 1, 1, 1, \dots]} = 1 + \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda^2 = \lambda + 1 \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Seguindo o método de construção da representação de números irracionais em frações contínuas simples apresentado em (1.6), página 16, verifica-se (por indução) que $\lambda_j = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ para todo $j \geq 0$. Então

$$\lambda_{i+1} = (\lambda_i - a_i)^{-1} = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} - 1 \right)^{-1} = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^{-1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Agora, tomando $p_0 = q_0 = q_1 = 1$ e $p_1 = q_2 = 2$ nas equações (1.7) que definem p_j e q_j , teremos

$$p_j = p_{j-1} + p_{j-2} \quad \text{e} \quad q_i = q_{i-1} + q_{i-2},$$

segue por indução matemática que $q_n = p_{n-1}$ para $n \geq 1$. Logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n-1}}{q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Daqui segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lambda_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} \right) = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \sqrt{5}.$$

Pela definição de limite de uma sequência, dado qualquer $c > \sqrt{5}$, existe apenas uma quantidade finita de índices n tais que

$$\lambda_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} > c.$$

Agora, segue dos cálculos que fizemos acima e da representação dada no Teorema

1.9 que

$$\begin{aligned} \left| \lambda - \frac{p_n}{q_n} \right| &= \frac{\lambda p_n + p_{n-1}}{\lambda q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{-(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n)}{q_n(\lambda q_n + q_{n-1})} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{q_n(\lambda q_n + q_{n-1})} = \frac{1}{q_n^2(\lambda_{n+1} + q_{n-1}/q_n)} < \frac{1}{c q_n^2} \end{aligned}$$

vale apenas para um número finito de valores de n .

Assim, há somente um número finito de números racionais $\frac{p}{q}$ satisfazendo

$$\left| \lambda - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{c q^2}.$$

□

2.3 Números de Liouville

Apesar de não ser possível encontrar aproximações melhores para qualquer irracional, existem vários resultados nesse sentido para tipos especiais de números irracionais.

Por exemplo, se o número irracional λ é algébrico de grau n (raiz de um polinômio não nulo de grau n com coeficientes inteiros) então é possível demonstrar que existe $c > 0$ tal que

$$\left| \lambda - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^n},$$

para todo racional p/q . A demonstração desse resultado pode ser obtida na referência [8], pág. 31.

Em contraposição a esse resultado, dizemos que um número irracional α é aproximável de ordem ν se existe uma constante $c > 0$ e uma sequência de números racionais distintos irredutíveis $\{p_n/q_n\}$, com $q_n > 0$, tais que

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^\nu}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A ordem de aproximação do número α é definido como o supremo dos valores ν tal que α é aproximável de ordem ν .

Na seção anterior mostramos que todos os números irracionais são aproximáveis

de ordem 2, mas não falamos nada da ordem desses irracionais. Na verdade esse problema é bastante difícil. Por exemplo, Klaus Friedrich Roth recebeu a medalha Fields de 1958 por ter demonstrado que todo número irracional algébrico α tem ordem 2. Para mais detalhes sobre esse e outros problemas de aproximação indicamos a referência [6].

Um número que não é algébrico é chamado de transcendente. Em 1874, George Cantor provou que existiam números transcendentos dando uma demonstração indireta. Basicamente ele provou que o conjunto dos números algébricos é enumerável e, como os reais são não enumeráveis, garantiu assim a existência dos números transcendentos. Porém ele não apresentou nenhum exemplo concreto de número transcendente, apenas provou que existiam.

Foi o matemático francês Joseph Liouville que encontrou um exemplo de número transcendente e provou que esse número não era raiz de um polinômio com coeficientes inteiros. O número em questão é conhecido atualmente como constante de Liouville

$$\begin{aligned}\alpha &= \sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j!} = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \frac{1}{10^{4!}} + \frac{1}{10^{5!}} + \frac{1}{10^{6!}} + \dots \\ &= 0,11000100\dots00100\dots00100\dots\end{aligned}$$

possui dígitos não nulos apenas na 1ª, 2ª, 6ª, 24ª, 120ª, ... casa decimal.

Em termos de aproximação, a constante de Liouville é excepcionalmente bem aproximável, na verdade pode-se provar que a constante de Liouville é aproximável de qualquer ordem que se queira. Isso inspira a seguinte definição.

Definição 2.8. *Um número irracional α é dito número de Liouville se, para cada $N \in \mathbb{N}$, existe $C > 0$ e uma sequência de números racionais distintos $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j \in \mathbb{N}}$ tais que*

$$\left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{C}{|q_j|^N}, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Os números de Liouville desempenham um papel importante no estudo da regularidade de solução de equações diferenciais, conforme veremos no último capítulo desse trabalho.

Capítulo 3

Séries de Fourier

Neste capítulo introduzimos notações e resultados fundamentais sobre séries e coeficientes de Fourier de funções periódicas. Como estamos interessados no estudo de equações diferenciais parciais periódicas em \mathbb{R}^2 , vamos introduzir a análise de Fourier apenas para estas funções.

3.1 Coeficientes de Fourier

Denotaremos por $C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^2)$ o espaço vetorial das funções $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ infinitamente diferenciáveis e 2π -periódicas.

Dada uma função $f \in C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^2)$ e um par $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, definimos o coeficiente de Fourier de ordem (m, n) da função f por

$$\hat{f}(m, n) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) e^{-i\langle (m, n), (x, y) \rangle} dx dy.$$

Observação 3.1. *Como o integrando acima é contínuo e o domínio de integração é compacto, então os coeficientes de Fourier estão bem definidos e constituem uma sequência $\{\hat{f}(m, n)\}$ de números complexos indexada em \mathbb{Z}^2 . Alguns autores se referem a essa sequência como a transformada de Fourier discreta.*

Uma das propriedades fundamentais dos coeficientes de Fourier, para quem estuda equações diferenciais, é a seguinte:

Proposição 3.2. *Se $f \in C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^2)$ então suas derivadas parciais satisfazem a seguinte relação:*

$$\widehat{\frac{\partial^{k+\ell} f}{\partial x^k \partial y^\ell}}(m, n) = i^{k+\ell} m^k n^\ell \hat{f}(m, n), \quad (3.1)$$

para todo $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ e $k, \ell \in \mathbb{Z}_+$.

Demonstração

Basta provar que o resultado vale para $k \in \mathbb{N}$ e $\ell = 0$. De fato, a prova para o caso $\ell \in \mathbb{N}$ e $k = 0$ é completamente análoga e o caso geral $k, \ell \in \mathbb{N}$ segue da linearidade da derivada.

A prova será feita por indução sobre $k \in \mathbb{N}$. Para $k = 1$, como f é suave, integramos por partes em relação a variável x obtendo:

$$\begin{aligned} \widehat{\frac{\partial f}{\partial x}}(m, n) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) e^{-i\langle(m, n), (x, y)\rangle} dx dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{-i\langle(m, n), (x, y)\rangle} f(x, y) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) (-im) e^{-i\langle(m, n), (x, y)\rangle} dx \right) dy. \end{aligned}$$

Como f é periódica, $e^{-i\langle(m, n), (x, y)\rangle} f(x, y) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$, pois $f(-\pi, y) = f(\pi, y)$, para todo y , e

$$e^{-i\langle(m, n), (\pi, y)\rangle} - e^{-i\langle(m, n), (-\pi, y)\rangle} = (e^{-im\pi} - e^{im\pi}) e^{-iny} = -2 \sin(m\pi) e^{-iny} = 0,$$

logo

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x}}(m, n) = \frac{im}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) e^{-i\langle(m, n), (x, y)\rangle} dx dy = im \hat{f}(m, n). \quad (3.2)$$

Suponha agora que a fórmula seja válida para $k \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$\widehat{\frac{\partial^k f}{\partial x^k}}(m, n) = (im)^k \hat{f}(m, n), \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2, \quad (3.3)$$

então integrando por partes teremos

$$\begin{aligned} \widehat{\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}}(m, n) &= \widehat{\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}}(m, n) \stackrel{(3.2)}{=} im \widehat{\frac{\partial^k f}{\partial x^k}}(m, n) \\ &\stackrel{(3.3)}{=} im(im)^k \hat{f}(m, n) = (im)^{k+1} \hat{f}(m, n), \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

A principal aplicação do Teorema acima é transformar uma equação diferencial em uma sequência de equações algébricas. Por exemplo, considere a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + (a + ib) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = f(x, y).$$

aqui a e b são constantes reais, $f \in C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^2)$ é uma função dada e procuramos uma função 2π -periódica $u = u(x, y)$ diferenciável que satisfaça esta equação.

Aplicando o Teorema 3.1 obtemos, para cada par $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, a equação algébrica

$$im \hat{u}(m, n) + (a + ib)in \hat{u}(m, n) = \hat{f}(m, n),$$

ou seja,

$$(im + (a + ib)in) \hat{u}(m, n) = \hat{f}(m, n).$$

Quando $|bn| + |m + an| \neq 0$, podemos escrever

$$\hat{u}(m, n) = \frac{\hat{f}(m, n)}{-bn + i(m + an)},$$

e dessa forma obtivemos a sequência dos coeficientes de Fourier da função $u = u(x, y)$ solução da equação inicial.

Para encontrar a solução resta saber como encontrar a função que possui tais coeficientes de Fourier. Mostraremos adiante que a solução é obtida através da Série de Fourier.

3.2 Convergência de Séries de Funções

O método de resolução de equações diferenciais através dos coeficientes de Fourier passa pelo estudo da convergência de uma série de funções. Para desenvolver

os resultados que precisaremos nesse trabalho vamos registrar aqui três resultados clássicos de séries de funções.

Também assumimos que definições usuais, como convergência uniforme e absoluta de sequências e séries de funções, são de conhecimento do leitor. Recomendamos o livro *Curso de Análise, volume 1*, do Prof. Elon Lajes Lima, ver [7], para maiores detalhes a respeito das definições e demonstrações dos resultados abaixo.

Teorema 3.3. (*Critério M de Weierstrass*) *Seja $\{f_k\}$ uma sequência de funções definida em um conjunto $B \subset \mathbb{R}^2$ e $\{M_k\}$ uma sequência de números reais não negativos tais que*

$$\sup_{x \in B} |f_k(x)| \leq M_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Se a série numérica $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ é convergente, então a série de funções $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ é uniformemente convergente em B .

Como a soma da série pode ser calculada em todos os pontos de B então podemos considerar a função $s : B \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x), \quad x \in B. \quad (3.4)$$

Teorema 3.4. (*Continuidade de uma função definida por uma série*)

Com as mesmas hipóteses do teorema acima, se f_k é contínua em um ponto $x_0 \in B$, para todo $k \in \mathbb{N}$, então a função $s = s(x)$ definida em (3.4) também é contínua em x_0 .

Note que o teorema acima é apenas uma versão para séries do resultado clássico: “o limite uniforme de uma sequência de funções contínuas é uma função contínua”. No caso, a sequência de funções em questão é a sequência das somas parciais da série de funções, que por hipótese, converge uniformemente para a função soma $s = s(x)$.

O próximo resultado afirma que podemos derivar uma série de funções termo a termo quando a série das derivadas converge uniformemente.

Teorema 3.5. (*Derivação Termo a Termo*) *Seja $B \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x, y)$ uma série de funções definida em B que converge pontualmente para uma função $s : B \rightarrow \mathbb{R}^2$.*

Se f_k é de classe C^1 em B , para todo $k \in \mathbb{N}$, e a série $\sum_{k=0}^{\infty} \partial f_k / \partial x$ converge uniformemente em B , então a função $s = s(x, y)$ possui derivada parcial em relação

a variável x e

$$\frac{\partial s}{\partial x}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial f_k}{\partial x}(x, y),$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x, y) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial f_k}{\partial x}(x, y).$$

Obviamente vale o análogo do resultado acima para derivadas parciais em relação à variável y .

3.3 Séries de Fourier e Decaimento Rápido

A Série de Fourier de uma função $f = f(x, y)$ em $C_{2\pi}^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ é a série

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}(m, n) e^{i\langle (m,n), (x,y) \rangle},$$

na qual

$$\hat{f}(m, n) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) e^{-i\langle (m,n), (x,y) \rangle} dx dy,$$

para cada $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$.

Para garantir a convergência dessa série, e principalmente que f é igual sua série de Fourier, vamos analisar o comportamento dos coeficientes de Fourier $\hat{f}(m, n)$ quando $|m| + |n| \rightarrow \infty$.

Primeiramente, como $f \in C_{2\pi}^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ então para qualquer k natural temos

$$\begin{aligned} \left| \widehat{\frac{\partial^k f}{\partial x^k}}(m, n) \right| &= \left| \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, y) e^{-i\langle (m,n), (x,y) \rangle} dx dy \right| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, y) \right| |e^{-i\langle (m,n), (x,y) \rangle}| dx dy \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, y) \right| dx dy. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Como toda função contínua em um compacto é limitada, então existe $M_k > 0$ tal que $|\partial^k f / \partial x^k(x, y)| \leq M_k$, para todo $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$. Da periodicidade de f

temos

$$\sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, y) \right| \leq M_k, \quad (3.6)$$

Pela Proposição 3.1, temos:

$$\hat{f}(m, n) = \frac{1}{(im)^k} \widehat{\frac{\partial^k f}{\partial x^k}}(m, n),$$

logo

$$\begin{aligned} \left| \hat{f}(m, n) \right| &= \frac{1}{|m|^k} \left| \widehat{\frac{\partial^k f}{\partial x^k}}(m, n) \right| \\ &\stackrel{(3.5)}{\leq} \frac{1}{|m|^k} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, y) \right| dx dy \\ &\stackrel{(3.6)}{\leq} \frac{1}{|m|^k} \frac{1}{(2\pi)^2} M_k \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx dy \\ &= \frac{M_k}{|m|^k}. \end{aligned}$$

Isso mostra que, para cada k natural fixado, a sequência de números reais $\{|\hat{f}(m, n)|\}$ vai para zero mais rápido que $1/|m|^k$. Repetindo o argumento acima prova-se que, fixado k natural, existe $N_k > 0$ tal que

$$\left| \hat{f}(m, n) \right| \leq \frac{N_k}{|n|^k}.$$

Finalmente, recordando que as normas em \mathbb{R}^2 são equivalentes, para cada k natural, obtemos um $C_k > 0$ tal que

$$\left| \hat{f}(m, n) \right| \leq \frac{C_k}{(|m| + |n|)^k}, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0, 0)\}.$$

As sequências que gozam dessa propriedade recebem um nome especial para dar destaque a esse decaimento mais veloz que qualquer polinômio.

Definição 3.6. Dizemos que uma sequência numérica $\{a_{(m,n)}\}_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ é rápida-

mente decrescente se, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe um $C_k > 0$ tal que:

$$|a_{(m,n)}| \leq \frac{C_k}{|(m,n)|^k}, \quad \forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2, \quad \text{com } |m| + |n| \neq 0.$$

Tendo em vista essa definição e os cálculos do início dessa sessão, ficou demonstrado o seguinte teorema:

Teorema 3.7. *Se $f \in C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^2)$ então os coeficientes de Fourier definem uma sequência rapidamente decrescente.*

Nosso objetivo agora é provar a recíproca desse resultado, ou seja,

Teorema 3.8. *Se $(a_{(m,n)})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ é uma sequência rapidamente decrescente, então a função*

$$g(x,y) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{(m,n)} e^{i\langle (m,n), (x,y) \rangle}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.7)$$

está bem definida, é suave e 2π -periódica.

Demonstração

Primeiramente, vamos mostrar que g está bem definida, ou seja, que a série

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{(m,n)} e^{i\langle (m,n), (x,y) \rangle}$$

converge pontualmente, qualquer que seja $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Por hipótese, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\exists C_k > 0$ tal que

$$|a_{(m,n)}| \leq \frac{C_k}{|(m,n)|^k}, \quad \forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2, \quad m^2 + n^2 \neq 0.$$

Em particular, para $k = 2$ temos

$$|a_{(m,n)}| \leq \frac{C_2}{|(m,n)|^2} = \frac{C_2}{m^2 + n^2} \leq \frac{C_2}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*.$$

Como a série numérica $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} C_2/n^2$ é convergente e

$$|a_{(m,n)} e^{i\langle (m,n), (x,y) \rangle}| = |a_{(m,n)}| |e^{i\langle (m,n), (x,y) \rangle}| = |a_{(m,n)}| \leq \frac{C_2}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*,$$

então pelo Critério M de Weierstrass (3.3), temos que a série de funções $\sum a_{(m,n)} e^{i\langle (m,n), (x,y) \rangle}$

converge uniformemente a g ; dessa forma g está bem definida em \mathbb{R}^2 .

Para mostrar que $g \in C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^2)$, começamos observando que as funções $a_{(m,n)}e^{i\langle(m,n),(x,y)\rangle}$ são contínuas em \mathbb{R}^2 e g é uniformemente convergente, logo pelo Teorema (3.4), g é contínua.

A seguir, notamos que $a_{(m,n)}e^{i\langle(m,n),(x,y)\rangle}$ é de classe C^1 em \mathbb{R}^2 e g converge uniformemente. Derivando a série termo a termo, temos

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{(m,n)} e^{i\langle(m,n),(x,y)\rangle} \right) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{(m,n)} im e^{i(mx+ny)}.$$

Para verificar a convergência uniforme da última série acima, observe que

$$\left| a_{(m,n)} im e^{i(mx+ny)} \right| = |a_{(m,n)}| |m|.$$

Como $(a_{(m,n)})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ é rapidamente decrescente, existe $C_4 > 0$ tal que

$$|a_{(m,n)}| \leq \frac{C_4}{|(m,n)|^4}.$$

Assim

$$\left| a_{(m,n)} im e^{i(mx+ny)} \right| \leq \frac{C_4 |m|}{(m^2 + n^2)^2} \leq \frac{C_4 |m|}{m^4} \leq \frac{C_4}{m^3}$$

Segue do critério M de Weierstrass que $\partial g / \partial x$ converge uniformemente, e portanto $\partial g / \partial x$ é contínua. Repetindo esse argumento para a derivada parcial em relação a y podemos concluir que g é de classe C^1 .

Seque por indução que g é uma função suave em \mathbb{R}^2 .

Para concluir a prova, falta verificar apenas que g é 2π -periódica, ou seja, que $g((x,y) + 2\pi(r,s)) = g(x,y)$, para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $(r,s) \in \mathbb{Z}^2$.

Note que o termo $e^{i\langle(m,n),(x,y)\rangle}$ aparece em todos os termos da série (3.7). Como

$$\begin{aligned} e^{i\langle(m,n),(x,y)+2\pi(r,s)\rangle} &= e^{i\langle(m,n),(x+2r\pi,y+2s\pi)\rangle} = e^{im(x+2r\pi)} e^{in(y+2s\pi)} \\ &= e^{imx} e^{i2mr\pi} e^{iny} e^{i2sn\pi} = e^{imx} e^{iny} = e^{i\langle(m,n),(x,y)\rangle}. \end{aligned}$$

□

Para concluir, vamos reunir os resultado desse capítulo em um único teorema, para referência futura.

Teorema 3.9. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ se, e somente se, \mathbb{C} uma função contínua e 2π -periódica, então:*

$$f \in C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^2) \iff \{\hat{f}(m, n)\} \text{ é rapidamente decrescente.}$$

e neste caso

$$f(x, y) = \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}(m, n) e^{i\langle (m, n), (x, y) \rangle}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Capítulo 4

Hipoeliticidade Global

Neste capítulo vamos apresentar condições necessárias e suficientes para que o operador diferencial

$$L = \frac{\partial}{\partial x} - \alpha \frac{\partial}{\partial y}, \text{ com } \alpha \in \mathbb{C},$$

seja globalmente hipoelítico.

Em particular, se α é um número irracional, essa caracterização depende de suas aproximações racionais e o número de Liouville naturalmente aparece.

Dizemos que L é globalmente hipoelítico se todas as soluções $u = u(x, y)$ da equação $Lu = f$, com $f \in C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^2)$, também estão no espaço $C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Aqui, estamos chamando de solução apenas as soluções clássicas, ou seja, funções continuamente diferenciáveis e periódicas $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfaçam a equação $Lu = f$.

Exemplo 4.1. $L = \frac{\partial}{\partial x} - 0 \frac{\partial}{\partial y}$ não é globalmente hipoelítico.

De fato, a função $u(x, y) = |\operatorname{sen}(y)|^3$, com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, é 2π -periódica de classe C^1 e satisfaz $Lu = 0$, porém $u \notin C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Estamos cientes de que a definição de hipoeliticidade global é bem mais geral por considerar soluções fracas (no sentido das distribuições). Nesse sentido, o presente capítulo terá essa imprecisão de linguagem. Entretanto, todos os cálculos desenvolvidos aqui, como o desenvolvimento formal em série de Fourier, são coerentes com a teoria de distribuições e teoremas da análise funcional.

4.1 Condição de Greenfield-Wallach

No início da década de 70, os matemáticos Stephen Greenfield e Nollan Wallach publicaram uma série de trabalhos pioneiros sobre regularidade de soluções periódicas para equações diferenciais parciais com coeficientes constantes, dando início ao estudo de hipoeliticidade global, ver [3] e [4].

O objetivo dessa seção é justamente apresentar esse resultado para o caso de duas variáveis seguindo os trabalhos originais desses autores citados logo acima e a referência [2]. Antes disso, precisamos fazer uma observação.

Observação 4.2. Se M é um operador diferencial com coeficientes constantes agindo em funções complexas de duas variáveis então existem $\gamma, \beta \in \mathbb{C}$, não ambos nulos, tais que

$$M = \gamma \frac{\partial}{\partial x} - \beta \frac{\partial}{\partial y}.$$

Agora, se $\gamma \neq 0$ então M é globalmente hipoelítico se, e somente se, o operador

$$\frac{1}{\gamma} M = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\beta}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y}$$

é globalmente hipoelítico.

De fato, suponha que M é globalmente hipoelítico. Se $u = u(x, y)$ é solução de $\gamma^{-1}Mu = f$ e $f \in C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^2)$, então u também é solução da equação $Mu = \gamma f$. Como $\gamma f \in C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^2)$ e M é globalmente hipoelítico segue que $u \in C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Disso podemos concluir que $\gamma^{-1}M$ é (GH). A recíproca segue os mesmos argumentos.

Obviamente, se $\beta \neq 0$, vale o resultado análogo: M é globalmente hipoelítico se, e somente se, $\beta^{-1}M = (\gamma\beta^{-1})\partial/\partial x - \partial/\partial y$ é globalmente hipoelítico.

Dessa forma, estudar a hipoeliticidade global de um operador diferencial M com coeficientes constantes agindo em funções complexas de duas variáveis é equivalente a estudar a hipoeliticidade global de um operador que pode ser escrito na forma

$$\frac{\partial}{\partial x} - \alpha \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{ou} \quad \lambda \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$$

com $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$ não nulos.

Mas, novamente, dividindo o segundo operador acima por $\lambda \neq 0$, vemos que

basta estudar a hipoeliticidade global de um operador da forma

$$L = \frac{\partial}{\partial x} - \alpha \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{com } \alpha \in \mathbb{C}. \quad (4.1)$$

para caracterizar a hipoeliticidade global de qualquer operador diferencial parcial com coeficientes constantes em duas variáveis reais.

Teorema 4.3 (Greenfield-Wallach). *O operador L dado por (4.1) é globalmente hipoelítico se, e somente se, existem constantes positivas A e B tais que*

$$|m - \alpha n| \geq \frac{A}{\|(m, n)\|^B}, \quad (4.2)$$

para todo $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ com $\|(m, n)\| \neq 0$.

Demonstração

(\Rightarrow) Suponha, por absurdo, que para cada $A, B > 0$ exista $(m_0, n_0) \in \mathbb{Z}^2$ tal que a desigualdade (4.2) é falsa. Fixando $A = 1$, para cada $B = j \in \mathbb{N}$ obtemos um par ordenado de inteiros $(m_j, n_j) \neq (0, 0)$ tais que:

$$|m_j - \alpha n_j| < \frac{1}{\|(m_j, n_j)\|^j}. \quad (4.3)$$

Considere agora a sequência $\{a_{(m,n)}\}$, com $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, definida por

$$a_{(m,n)} = \begin{cases} 1, & \text{se } (m, n) = (m_j, n_j), \text{ para algum } j \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Desta forma $\{a_{(m,n)}\}$ não é rapidamente decrescente e, pelo Teorema (3.7), a série de Fourier

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{(m,n)} e^{i\langle (m,n), (x,y) \rangle}$$

não corresponde a uma função de classe C^∞ .

Por outro lado, a representação formal em série de Fourier de $Lu(x, y)$ é

$$\begin{aligned} (Lu)(x, y) &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \widehat{(Lu)}(m, n) e^{i\langle (m,n), (x,y) \rangle} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} i(m_j - \alpha n_j) e^{i\langle (m_j, n_j), (x,y) \rangle}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

e pelo Teorema 3.9 temos

$$f(x, y) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}(m, n) e^{i\langle (m,n), (x,y) \rangle}. \quad (4.5)$$

Como estamos supondo $Lu(x, y) = f(x, y)$, segue da unicidade de representação em séries de Fourier, que

$$\hat{f}(m, n) = \begin{cases} i(m_j - \alpha n_j), & \text{se } (m, n) = (m_j, n_j), \text{ para algum } j \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, para cada $N \in \mathbb{N}$, por (4.3) temos que

$$|\hat{f}(m_j, n_j)| = |m_j - \alpha n_j| < \frac{1}{\|(m_j, n_j)\|^j} < \frac{1}{\|(m_j, n_j)\|^N}, \quad \forall j \geq N. \quad (4.6)$$

Além disso, para cada $j < N$, podemos encontrar uma constante C_j que satisfaça

$$\frac{1}{\|(m_j, n_j)\|} \leq \frac{C_j}{\|(m_j, n_j)\|^N}. \quad (4.7)$$

Tomando $K = \max\{C_1, C_2, \dots, C_{N-1}, 1\}$, teremos de (4.6) e (4.7) que

$$|\hat{f}(m_j, n_j)| = |m_j - \alpha n_j| < \frac{K}{\|(m_j, n_j)\|^N}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Como para $(m, n) \neq (m_j, n_j)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, então

$$|\hat{f}(m, n)| = 0 < \frac{K}{\|(m, n)\|^N}.$$

Daqui segue que

$$|\hat{f}(m, n)| < \frac{K}{\|(m, n)\|^N}, \quad \forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2 - (0, 0).$$

Pelo Teorema 3.9 segue que $f \in C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Como $u \notin C^\infty$ segue que L não é globalmente hipoelítico, o que contradiz a hipótese.

(\Leftarrow) Seja $u = u(x, y)$ solução de $Lu = f$, com $f \in C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Segue das expressões

(4.4) e (4.5) e da unicidade de representação em série de Fourier que

$$(m - \alpha n)\hat{u}(m, n) = \hat{f}(m, n) \Rightarrow |\hat{u}(m, n)| = \frac{\hat{f}(m, n)}{|(m - \alpha n)|}. \quad (4.8)$$

Por hipótese, existem $A, B > 0$ tais que, para todo $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ com $\|(m, n)\| \neq 0$.

$$|m - \alpha n| \geq \frac{A}{\|(m, n)\|^B} \Rightarrow \frac{1}{|m - \alpha n|} \leq \frac{\|(m, n)\|^B}{A}. \quad (4.9)$$

Finalmente, pelo Teorema 3.9 e Definição 3.6, existe $C_{B+N} > 0$ tal que

$$|\hat{f}(m, n)| \leq \frac{C_{B+N}}{\|(m, n)\|^{N+B}}, \quad (4.10)$$

para todo $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ com $\|(m, n)\| \neq 0$.

Finalmente, combinando as informações acima temos

$$\begin{aligned} |\hat{u}(m, n)| &\stackrel{(4.8)}{=} |\hat{f}(m, n)| \frac{1}{|(m - \alpha n)|} \\ &\stackrel{(4.9)}{\leq} |\hat{f}(m, n)| \frac{\|(m, n)\|^B}{A} \\ &\stackrel{(4.10)}{\leq} \frac{C_{B+N}}{\|(m, n)\|^{N+B}} \frac{\|(m, n)\|^B}{A} \\ &= \frac{C_{B+N} A^{-1}}{\|(m, n)\|^N} \\ &= \frac{C'}{\|(m, n)\|^N}, \end{aligned}$$

para todo $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ com $\|(m, n)\| \neq 0$.

Isso prova que a sequência $\{\hat{u}(m, n)\}$ é rapidamente decrescente, e portanto $u \in C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^2)$ e L é globalmente hipoelítico. \square

4.2 Hipoeliticidade Global para $\partial_x + \alpha\partial_y$

A condição de Greenfield-Wallach, provada no Teorema 4.2, fornece uma caracterização algébrica da hipoeliticidade global do operador $\partial_x + \alpha\partial_y$. O problema

é que essa caracterização em termos de aproximação não revela, a primeira vista, toda a beleza desse resultado. Nessa seção pretendemos analisar mais a fundo essa condição e obter uma caracterização mais elegante.

A ideia é escrever $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, e analisar a hipoeliticidade global do ponto de vista das partes real e imaginária de α . O primeiro resultado analisa o caso em que $b \neq 0$.

Teorema 4.4. *Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, então $L = \frac{\partial}{\partial x} - (a + ib)\frac{\partial}{\partial y}$ é globalmente hipoelítico.*

Demonstração

Para $n \neq 0$, temos $|n| \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\|(m, n)\|} \leq 1$. Assim

$$|m - (a + bi)n| = \sqrt{(m - an)^2 + (-bn)^2} \geq \sqrt{(b)^2} \geq \frac{|b|}{\|(m, n)\|}.$$

E para $n = 0$ e $m \neq 0$, temos

$$|m - (a + bi)n| = |m - (a + bi)0| = |m| \geq \frac{1}{\|(m, 0)\|}.$$

Tomando $A = \min\{|b|, 1\}$ teremos

$$|m - (a + bi)n| \geq \frac{A}{\|(m, n)\|}, \forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0, 0)\}.$$

Segue do Teorema 4.3 de Greenfield e Wallach que L é globalmente hipoelítico. □

Logo o fato da parte imaginária ser não nula garante a hipoeliticidade global de L . Vamos então analisar o caso em que $b = 0$. Nesta situação teremos respostas diferentes.

Teorema 4.5. *Se $\alpha \in \mathbb{Q}$, então $L = \frac{\partial}{\partial x} - \alpha \frac{\partial}{\partial y}$ não é globalmente hipoelítico.*

Demonstração

Tomando $m = p$ e $n = q$ teremos $\|(m, n)\| = \|(p, q)\| > 0$, pois $q \neq 0$, e

$$m - \frac{p}{q}n = \frac{1}{q}(qm - pn) = \frac{1}{q}(qp - pq) = 0.$$

Logo, dados quaisquer $A, B > 0$, tomando $(m, n) = (p, q)$ teremos

$$\left| m - \frac{p}{q}n \right| = 0 < \frac{A}{\|(m_0, n_0)\|^B}.$$

Portanto, a condição do Teorema 4.3 de Greenfield e Wallach é violada, o que implica que L não é globalmente hipoeĺítico.

□

Falta apenas analisar o caso $b = 0$ e a irracional.

Teorema 4.6. *Se a é um número irracional então o operador $L = \frac{\partial}{\partial x} - a \frac{\partial}{\partial y}$ é globalmente hipoeĺítico se, e somente se, o número a é um irracional não-Liouville.*

Demonstração

(\Rightarrow) Pela definição de número irracional de Liouville, dado $N \in \mathbb{N}$, existe uma constante $C > 0$ e uma sequência de racionais $\{p_j/q_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tais que

$$\left| a - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{C}{q_j^N}, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$|p_j - aq_j| = q_j \left| \frac{p_j}{q_j} - a \right| < \frac{C}{q_j^{N-1}}. \quad (4.11)$$

Como $\lim_{j \rightarrow \infty} q_j = +\infty$, então existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{C}{q_j^N} < 1, \quad j \geq j_0. \quad (4.12)$$

Logo, para todo $j \geq j_0$ temos

$$|p_j| - |\alpha|q_j \leq |p_j - \alpha q_j| \stackrel{(4.11)}{\leq} \frac{C}{q_j^{N-1}} \stackrel{(4.12)}{<} q_j,$$

logo $|p_j| < q_j(1 + |\alpha|)$.

De

$$\begin{aligned} \|(p_j, q_j)\| &= \sqrt{p_j^2 + q_j^2} < \sqrt{[(1 + |\alpha|)q_j]^2 + q_j^2} \\ &= q_j \sqrt{[(1 + |\alpha|)]^2 + 1} = q_j D \end{aligned}$$

temos que

$$\frac{1}{q_j} < \frac{D}{\|(p_j, q_j)\|}. \quad (4.13)$$

Voltando em (4.11),

$$|p_j - \alpha q_j| < C \frac{1}{q_j^{N-1}} \stackrel{(4.13)}{<} \frac{C \cdot D^{N-1}}{\|(p_j, q_j)\|^{N-1}}. \quad (4.14)$$

Tomando $B = N - 3$ e j suficientemente grande tal que

$$\frac{C}{A} \frac{D^{N-1}}{\|(p_j, q_j)\|^2} < 1,$$

teremos

$$|p_j - \alpha q_j| \stackrel{(4.14)}{<} \frac{C \cdot D^{N-1}}{\|(p_j, q_j)\|^{N-1}} = \frac{C}{A} \frac{D^{N-1}}{\|(p_j, q_j)\|^2} \frac{A}{\|(p_j, q_j)\|^{N-3}}$$

e portanto

$$|p_j - \alpha q_j| < \frac{A}{\|(p_j, q_j)\|^B}.$$

Isso contraria a condição do Teorema 4.3 de Greenfield-Wallach, e portanto L não é globalmente hipoelítico.

(\Leftarrow) Se α é não-Liouville, então $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall C > 0$ e $\forall p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ temos

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{|q|^N}.$$

Em particular, para $C = 1$, segue:

$$|p - \alpha q| = |q| \left| \frac{p}{q} - \alpha \right| \geq |q| \frac{1}{|q|^N} \geq \frac{1}{\|(p, q)\|^{N-1}}, \forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \text{ com } q \neq 0.$$

No caso em que $q = 0$ e $p \neq 0$, teremos:

$$|p - \alpha q| = |p| \geq \frac{1}{\|(p, 0)\|^{N-1}}.$$

Tomando $A = 1$ e $B = N - 1$ temos

$$|p - \alpha q| \geq \frac{A}{\|(p, q)\|^B}, \forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2 - (0, 0).$$

Segue do Teorema 4.3 de Greenfield e Wallach que L é globalmente hipoelítico.

□

Para concluir esse capítulo, vamos reunir todos os resultados dessa seção em um único resultado geral.

Teorema 4.7. *O operador diferencial $L = \frac{\partial}{\partial x} - \alpha \frac{\partial}{\partial y}$ é globalmente hipoelítico se e somente se*

1. $Im(\alpha) \neq 0$ ou
2. $Re(\alpha) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é não-Liouville.

Conclusão

No percurso deste trabalho tivemos a oportunidade de estudar mais a fundo o problema de aproximação de números reais de dois pontos de vista diferentes: primeiro usando apenas as definições de análise e na sequência de posse das frações contínuas. Nos aprofundamos nesse estudo e aprendemos resultados realmente interessantes e belos dessa teoria.

Na sequência, estudamos a transformada discreta de Fourier e através dos artigos *Global hypoellipticity and Liouville numbers* de S. Greenfield e N. Wallach, ver [4], e *Hipoeliticidade Global no Toro Bidimensional* de N. Bobko, ver [2], conseguimos entender um pouco da profunda relação que existe entre aproximação de números reais e regularidade de soluções de equações diferenciais.

Infelizmente, para nos adequar aos prazos estabelecidos, decidimos interromper o trabalho prematuramente e não contemplar um último assunto que constava no projeto que propusemos há um ano. A proposta original previa um capítulo adicional no qual iríamos explorar a relação entre a representação de números irracionais por frações contínuas e a hipoeliticidade global de operadores com coeficientes constantes, conforme proposto no artigo *Hypoelliptic vector fields and continuous fractions* de S. Greenfield e N. Wallach, ver [3].

Pretendemos continuar estudando nessa direção para no futuro entender melhor essa relação e poder assim cumprir essa etapa do projeto original.

Referências Bibliográficas

- [1] ANDRADE, Eliana Xavier Linhares de; BRACCIALI, Cleonice Fátima. *Frações Contínuas: Propriedades e Aplicações*. 2 ed.. Presidente Prudente: UNESP, 2012.
- [2] BOBKO, Nara. Hipoeliticidade Global no Toro Bidimensional. *Cadernos PET*, UFPR, N.1, p. 07-31. Curitiba, 2007.
- [3] GREENFIELD, Stephen J. Hypoelliptic vector fields and continuous fractions. In: *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 31, n. 01, p. 115-118, jan. 1972.
- [4] GREENFIELD, Stephen J; WALLACH, Nolan R.. Global hypoellipticity and Liouville numbers. In: *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 31, n. 01, p. 112-114, jan. 1972.
- [5] IÓRIO, Valéria. *EDP: um curso de graduação*. Rio de Janeiro: Lua Nova, 1989.
- [6] LEQUAIN, Yves. Aproximação de um número real por números racionais, 19º Colóquio Brasileiro de Matemática (1993).
- [7] LIMA, Elon Lages de. *Análise Real*. Vol. 1, Rio de Janeiro, IMPA. Coleção Matemática Universitária, 1999.
- [8] MOREIRA, Carlos G. T. A. Frações Contínuas, Representações de Números e Aproximações Diofantinas, 1º Colóquio da Região Sudeste (2011).
- [9] NIVEN, Ivan. *Números: Irracionais e Racionais*. (Traduzido por Renate Watanabe.) Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.
- [10] NIVEN, Ivan; ZUCKERMAN, Herbert S.; MONTGOMERY, Hugh L.. *An Introduction to Theory of Numbers*. 5. ed. New York: John Wiley & Sons, 1991.