

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
VINICIUS MEDEIROS PRANTL DOS SANTOS

EQUAÇÃO DO CALOR E SÉRIES DE FOURIER

Curitiba  
2020

VINICIUS MEDEIROS PRANTL DOS SANTOS

## EQUAÇÃO DO CALOR E SÉRIES DE FOURIER

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jurandir Ceccon.

Curitiba

2020

*Aos meus pais Aloisio Prantl dos Santos e Hozaide de Jesus Medeiros, por todo amor e cuidado que têm por mim, e também aos meus amigos e colegas.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me dar a oportunidade de realizar o sonho de cursar o ensino superior na área que mais gosto, por me sustentar e dar forças em momentos difíceis, além de me proporcionar momentos inesquecíveis durante esses cinco anos.

Agradeço aos meus pais Aloisio e Hozaide por toda dedicação, amor, carinho e apoio que sempre me dão. Agradeço também a minha irmã Franciele Aparecida Pereira Santos que além do incentivo, me serviu como inspiração para seguir a carreira de professor. Minha sincera gratidão aos meus avós Merom Kuczuvei (*in Memoriam*) que deixará eternas saudades e Eva Cordeiro Kuczuvei, que sempre me amaram e torceram por mim. Sei que esse momento traz alegria não somente para mim, mas também para todos eles.

Aos amigos e colegas de turma que conheci durante a graduação que compartilharam durante esses anos momentos bons e ruins, me ajudaram em matérias difíceis e nos momentos de desânimo, trazendo alegria e fazendo com que esses anos fossem menos difíceis do que poderiam ser. Deixo meu muito obrigado em especial a Letícia Ferreira Gomes, que sempre esteve ao meu lado me ajudando em praticamente todas as disciplinas, apoiando e incentivando a ir atrás dos meus sonhos.

Ao PET Matemática que me proporcionou aprender muito mais do que apenas matemática, mas também diversas outras coisas que levarei para o resto da vida, além de me proporcionar experiências incríveis e grandes amizades. Também agradeço ao tutor do PET Matemática José Carlos Corrêa Eidam, pela amizade e pelos conselhos que me ajudaram a amadurecer tanto academicamente quanto pessoalmente.

Ao meu orientador Jurandir Ceccon pela amizade, pela paciência que teve durante nossos os seminários ao longo da graduação e por acreditar no meu potencial me passando conteúdos para estudar em que eu mesmo me sentia incapaz de aprender, mas que com muito esforço consegui. É com certeza uma das grandes inspirações para mim como professor e pesquisador.

A todos os professores do Departamento de Matemática da UFPR que tive a oportunidade de ter aula e que contribuíram imensamente para meu desenvolvimento acadêmico.

A também a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente, apoiaram e torceram para a realização desse grande sonho.

*“A persistência é o caminho para o êxito” - Charles Chaplin*

# Resumo

Esse trabalho tem como objetivo apresentar uma solução para o problema da condução do calor em uma barra finita, composta de um material homogêneo, sujeita a condições de fronteira e inicial. Para isso, aplicaremos o Método de Separação de Variáveis que nos leva a necessidade do estudo das séries de Fourier. Feito isso, mostraremos a existência de solução e utilizaremos o Princípio de Máximo-Mínimo para mostrar a unicidade da solução para o problema da condução do calor.

Palavras-chave: Equação do Calor. Séries de Fourier. Separação de Variáveis. Equações Diferenciais Parciais.

# Abstract

This term paper aims to present a solution to the problem of heat conduction in a finite bar, composed of homogeneous material and submitted to boundary and initial conditions. For this, we will apply the Separation of Variables Method that leads us to the need of studying the Fourier series. After that, we will show the existence of solution and use the Maximum-Minimum Principle to show the unicity of solution of the problem of heat conduction.

Keywords: Heat Equation. Fourier Series. Separation of Variables. Partial Differential Equations.



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 A Equação do Calor</b>	<b>3</b>
1.1 Contexto histórico . . . . .	3
1.2 Dedução da Equação do Calor . . . . .	6
1.3 Um candidato a solução . . . . .	10
<b>2 Sequências e séries de funções</b>	<b>15</b>
2.1 Convergência simples e convergência uniforme . . . . .	15
2.2 Propriedades da convergência uniforme . . . . .	18
<b>3 Série de Fourier</b>	<b>22</b>
3.1 Funções Periódicas . . . . .	22
3.2 Ortogonalidade da função seno e cosseno . . . . .	24
3.3 Coeficientes de Fourier . . . . .	26
3.4 A Série de Fourier . . . . .	28
3.5 Séries de Fourier de funções pares e ímpares . . . . .	31
3.6 Integração em Séries de Fourier . . . . .	39
3.7 Estimativa dos coeficientes de Fourier . . . . .	43
<b>4 Convergência da Série de Fourier</b>	<b>46</b>
4.1 Classes de funções consideradas . . . . .	46
4.2 Lema de Riemann- Lebesgue . . . . .	49
4.3 Convergência Pontual . . . . .	52
4.4 Convergência Uniforme . . . . .	60
4.4.1 Desigualdade de Bessel . . . . .	60
4.4.2 Desigualdade de Cauchy-Schwarz . . . . .	63
4.4.3 Desigualdade de Minkowski . . . . .	64
<b>5 Solução da Equação do Calor</b>	<b>73</b>
5.1 Solução do caso homogêneo . . . . .	73

---

5.2	Unicidade da solução . . . . .	80
5.3	Solução não Homogênea . . . . .	86
5.3.1	Condições de fronteira não homogêneas . . . . .	86
5.3.2	Barra sujeita a outras condições laterais . . . . .	88
	<b>Conclusão</b>	<b>93</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>94</b>

# Introdução

O problema da condução do calor em uma barra finita, unidimensional, composta por um material homogêneo, cuja superfície lateral está isolada termicamente, pode ser descrito como um Problema de Valor Inicial e de Fronteira dado por

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

onde as condições de fronteira são homogêneas. Esse problema tem como objetivo encontrar uma função  $u(x, t)$  que satisfaça as condições acima, onde  $u(x, t)$  é a temperatura da barra no ponto  $x$  no instante  $t$  e  $\alpha^2$  é uma constante que depende do material da barra. Usando o Método de Separação de Variáveis na função  $u(x, t)$ , é possível chegar que a solução do problema é dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\alpha^2 n^2 \pi t / L^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Esse foi o método utilizado por Jean Baptiste Joseph Fourier para resolver esse problema no século XVIII. O método consiste em supor que a solução  $u(x, t)$  possa ser separada em duas funções  $X(x)$  e  $T(t)$ , que dependem de apenas uma variável, com o objetivo de reduzir a EDP em problemas de autovalores para EDO's. Feito isso, é possível encontrar uma família de soluções  $u_n(x, t)$  que satisfazem as condições de fronteira. Em seguida, tomando essas soluções, obtém-se um candidato a solução  $u(x, t)$  que será uma série de funções com coeficientes que dependem da condição inicial, ou seja, coeficientes  $c_n$  que devem satisfazer a seguinte igualdade

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Entretanto não é tão simples mostrar que vale a igualdade acima, isto é, que a série converge. Se for possível garantir a convergência dessa série, então o candidato  $u(x, t)$  será de fato solução do problema apresentado.

A discussão sobre a convergência dessa série, batizada de *série de Fourier*, e a

interpretação matemática da Equação do Calor, contribuiu para o desenvolvimento de diversas teorias, como por exemplo, a Teoria da Integral de Riemann, a Teoria de Conjuntos, Análise Funcional e a própria Teoria da Séries de Fourier, que é de grande importância para o estudo das Equações Diferenciais Parciais.

Portanto neste trabalho vamos estudar os conceitos matemáticos necessários para obter a solução da Equação do Calor sobre determinadas condições de fronteira. Inicialmente, no Capítulo 1, vamos apresentar o contexto histórico em que se originou o estudo da Equação do Calor através das séries de Fourier. Apresentaremos a dedução matemática da equação e a aplicação do Método de Separação de Variáveis para se chegar a um candidato a solução do problema de valor inicial e fronteira.

No capítulo 2 apresentaremos uma coletânea de resultados da Análise sobre convergência pontual e uniforme a fim de facilitar as demonstrações e cálculos durante o trabalho.

Já no Capítulo 3, iremos apresentar a série de Fourier e algumas de suas propriedades além de calcularmos as séries de Fourier de algumas funções.

No Capítulo 4 estabeleceremos as condições necessárias para garantir a convergência tanto pontual quanto uniforme da série de Fourier.

Por fim, no Capítulo 5, mostraremos que o candidato apresentado no Capítulo 1 é não somente solução do problema, mas também a única solução. Em seguida, vamos apresentar variações das condições de fronteira do problema.

# Capítulo 1

## A Equação do Calor

### 1.1 Contexto histórico

Durante o século XVIII, havia uma grande controvérsia sobre a possibilidade de se expandir funções reais em séries trigonométricas. Essa discussão surgiu durante investigações sobre a vibração das cordas e ondas estudado por muitos matemáticos famosos da época como Euler, d'Alambert, Daniel Bernoulli e Lagrange. Nas primeiras tentativas de solucionar a equação da onda dada por

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

Euler e d'Alambert chegaram a conclusão de que deveriam existir funções  $F$  e  $G$  de modo que a solução seria da forma

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct).$$

Enquanto Bernoulli, chegou que a solução deveria ser

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx) \cos(nct).$$

Em 1759, Lagrange ainda jovem e desconhecido como matemático, começou a estudar o problema e mostrou que a solução da equação das ondas é dada por

$$\begin{aligned} u(x, t) = & 2 \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{sen}(n\pi y) \cos(n\pi ct)) f(y) dy + \\ & + 2 \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{sen}(n\pi y) \operatorname{sen}(n\pi ct)) g(y) dy, \end{aligned}$$

onde a  $f$  é a posição inicial da corda (de comprimento 1) e  $g$  a velocidade inicial. Além

disso, Lagrange mostrou que a expressão acima se enquadra na solução encontrada por Euler e d'Alambert. Esse resultado levou alguns matemáticos a atribuírem à Lagrange a prioridade na prova do desenvolvimento de uma função arbitrária em uma série trigonométrica, negando a importância das descobertas feitas por Fourier.

Posteriormente, o desenvolvimento das séries trigonométricas se deu durante o estudo do problema da expansão recíproca da distância entre dois planetas. Em 1749 e 1754, d'Alambert e Euler publicaram respectivamente, discussões sobre esse tema, onde apresentava-se a ideia de utilizar expressões com integrais para definir os coeficientes das séries trigonométricas. Pouco tempo depois, Clairaut em 1757, em um artigo, chegou perto de provar o resultado utilizando as ideias de Euler e d'Alambert. Já em 1777, Euler novamente, escreve um artigo, que fora publicado somente em 1793, onde aplicou o método de multiplicar ambos os lados da igualdade  $f(x) = a_0 + 2a_1 \cos(x) + 2a_2 \cos(2x) + \dots + 2a_n \cos(nx)$  por  $\cos(nx)$ , e integrar no intervalo de 0 à  $\pi$ , para obter

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx.$$

Esse resultado porém, não surtiu efeito na discussão do problema das vibrações das cordas, que estava sendo estudado na mesma época. O que pode explicar isso é o fato de que esses resultados não foram bem aceitos e o método utilizado por Euler apresentava apenas os coeficientes de expansões cuja existência deveria ser demonstrada por outros meios.



Figura 1.1: Jean Baptiste Joseph Fourier

Coube a Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830) apresentar a teoria das séries trigonométricas de maneira mais fundamentada. Em 1807, na sua *Memoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides*, a partir do estudo problema da condução

do calor, Fourier explicita de fato os coeficientes das séries trigonométricas, que fora tentado anteriormente por Euler. Uma das afirmações contidas nesse trabalho é que toda função definida em um intervalo finito podia ser expressa em uma série trigonométrica. Essa afirmação causou muita polêmica, pois na época, já haviam trabalhos que afirmavam que algumas funções bem comportadas podiam ser expressas em séries trigonométricas, mas Fourier ousou em estendê-la para qualquer função definida em um intervalo finito. Essa ousadia lhe custou a recusa da publicação de seu trabalho pelo comitê de avaliação da Academia de Paris, composto por Laplace, Lagrange, Lacroix, Monge e outros. Não só a recusa do trabalho, mas também recebeu críticas duríssimas devido a falta de rigor em seus argumentos.

O problema da condução do calor chamava a atenção de muitos pesquisadores da época, e, em 1811, a Academia de Paris instituiu um concurso para escolher a melhor explicação sobre o tema. Fourier ganhou o prêmio, entretanto não teve o trabalho publicado. A partir de então, começou a escrever sua principal obra *Théorie Analytique de la Chaleur*, que fora publicada somente em 1822, pouco tempo antes de assumir a secretaria da Academia devido a morte de Delambre, que era até então o secretário. Somente após isso, Fourier finalmente obteve o devido reconhecimento por seus resultados e conseguiu publicar os trabalhos recusados anteriormente.

O trabalho de Fourier desencadeou varias discussões posteriores sobre os resultados apresentados em suas obras, principalmente sobre a questão da convergência das séries de Fourier. Poisson em 1820, também tentou mostrar a convergência dessas séries e utilizou argumentos a partir da série geométrica em vez de integrais para definir os coeficientes da série de Fourier. Apesar de ter contribuído para os estudos da época não obteve sucesso. Após Poisson, Cauchy em 1826, utilizou um argumento parecido com o de Poisson, porém no contexto das variáveis complexas onde usava o recém descoberto Teorema dos Resíduos.

Já em 1829, Dirichlet apresenta um artigo mostrando que a prova de Cauchy estava incompleta e apresenta uma boa demonstração, segundo seus critérios, da convergência da série de Fourier. Enquanto isso, a Análise ganhava uma fundamentação mais rigorosa devido aos trabalhos de Cauchy, Bolzano e outros matemáticos. Foi isso que proporcionou a Riemann buscar encontrar condições necessárias e suficientes para que uma função possa ser escrita por sua série de Fourier, e como para isso é necessário integração de funções, fez-se necessário a construção de uma base firme para o Cálculo Integral a qual ele mesmo criou. Além disso, para resolver o problema da unicidade da série de Fourier de uma função, contribuiu para que Cantor definisse os números reais como limites de sequências de números racionais e criando a chamada Teoria dos Conjuntos.

Por volta de 1880, o matemático du Bois-Reymond construiu uma função contínua

cuja série de Fourier divergia em um dado ponto, e, mais tarde construiu uma função contínua cuja série de Fourier divergia em um conjunto denso, o que contradizia o critério de Dirichlet. Outros exemplos mais simples foram dados por Fejér por volta de 1910. A partir disso, vários outros matemáticos buscaram novos critérios para a convergência da série de Fourier, dentre eles estão Dini, Jordan e Lipschitz.

Todas essas investigações conduziram a uma melhor compreensão das funções descontínuas deram origem aos trabalhos de Harnack, Hankel, Borel e Lebesgue, que culminaram com a introdução de um novo conceito de integral. E aí começou a teoria moderna das séries de Fourier.

## 1.2 Dedução da Equação do Calor

Inicialmente deduziremos a expressão da equação que governa a condução do calor em corpos sólidos. Esta equação é chamada de Equação do Calor e é uma representante clássica das EDP's parabólicas. Para deduzirmos então a Equação do Calor utilizaremos alguns conceitos da física como,

$$\begin{aligned} Q\Delta t = cm\Delta u &\longrightarrow \text{Calor durante um intervalo de tempo} \\ m = V\rho &\longrightarrow \text{Massa de um corpo} \end{aligned}$$

onde  $Q$  = quantidade de calor,  $\Delta t$  = variação do tempo,  $m$  = massa,  $c$  = calor específico,  $\Delta u$  = variação de temperatura,  $V$  = volume do material,  $\rho$  = densidade do material.

Consideremos uma barra finita de comprimento  $L$ , cuja seção transversal tem área  $A$ , composta de um material homogêneo. Suponhamos que a superfície lateral da barra esteja isolada termicamente de maneira a não permitir transferências de calor com o meio ambiente. Suponhamos também que a barra seja extremamente fina, de modo que a transferência de calor se dê apenas nas extremidades da barra.

Devido a homogeneidade do material e o isolamento térmico lateral, o fluxo do calor se dá somente na direção longitudinal, temos assim um problema de condução do calor unidimensional.

**Lei do Resfriamento de Fourier:** *Sejam  $P_1$  e  $P_2$  duas placas com áreas iguais a  $A$ , mantidas constantemente às temperaturas  $T_1$  e  $T_2$  respectivamente. Se tais placas forem colocadas paralelamente a uma distância  $d$ , haverá uma transferência de calor da placa mais quente para a mais fria, e a quantidade de calor, por unidade de tempo,*



transferida de uma placa para outra é dada por

$$Q = \frac{kA|T_2 - T_1|}{d}, \quad (1.1)$$

onde  $k$  é a condutibilidade térmica do material entre as placas.

A equação diferencial que calcula a variação da temperatura ao longo do tempo, nada mais é do que um equilíbrio físico fundamental: a taxa do fluxo do calor em uma determinada parte da barra é igual a taxa de absorção de calor nesta mesma parte. Para mostrar esse equilíbrio, vamos calcular as duas taxas separadamente e mostrar sua igualdade.

Para a taxa do fluxo do calor vamos considerar um elemento da barra que está entre a seção reta em  $x$  e  $x + d$ , onde  $x$  é um ponto qualquer no eixo da barra e  $d$  é pequeno.

As temperaturas neste elemento da barra variam com o tempo, ou seja, não são constantes como requer a Lei do Resfriamento de Fourier. Para superarmos esse obstáculo, fixaremos a variável  $t$  na equação (1.1), fazendo  $T_1 = u(x, t)$ ,  $T_2 = u(x + d, t)$  e tomando o limite quando  $d \rightarrow 0$  obtemos

$$\lim_{d \rightarrow 0} Q = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{kA|u(x, t) - u(x + d, t)|}{d} = kA \lim_{d \rightarrow 0} \frac{|u(x, t) - u(x + d, t)|}{d} = kA|u_x(x, t)|.$$

Definimos o fluxo do calor na direção positiva do eixo  $x$  pela função  $q(x, t)$  dada por

$$q(x, t) = -kA|u_x(x, t)|.$$

A taxa de variação do calor no segmento da barra entre  $x$  e  $x + d$  é dado por  $Q = q(x, t) - q(x + d, t)$ . Logo,

$$Q = q(x, t) - q(x + d, t) = kA[|u_x(x + d, t)| - |u_x(x, t)|].$$

A quantidade de calor que entra neste elemento de volume da barra em um intervalo de tempo  $\Delta t$  é dado por

$$Q\Delta t = [q(x, t) - q(x + d, t)] \Delta t = kA[|u_x(x + d, t)| - |u_x(x, t)|]\Delta t. \quad (1.2)$$

Calcularemos agora a taxa de absorção de calor. Retomando as equações da física citadas anteriormente, podemos reescrever as fórmula da massa como  $m = dA\rho$ , onde apenas usamos o fato de que  $V = dA$ , onde  $d$  é a distância e  $A$  é a área do elemento da barra em questão. Sendo assim, pela fórmula do calor em um determinado intervalo

de tempo  $\Delta t$ , devemos ter

$$Q\Delta t = cm\Delta u \Rightarrow \Delta u = \frac{Q\Delta t}{cm} = \frac{Q\Delta t}{cAd\rho}.$$

A variação média de temperatura  $\Delta u$  no trecho da barra em consideração é a variação real num ponto intermediário  $(x + \theta d)$ , onde  $0 < \theta < 1$ . Assim,

$$u(x + \theta d, t + \Delta t) - u(x + \theta d, t) = \Delta u = \frac{Q\Delta t}{cAd\rho},$$

ou ainda,

$$Q\Delta t = [u(x + \theta d, t + \Delta t) - u(x + \theta d, t)]cAd\rho. \quad (1.3)$$

Juntando as expressões (1.2) e (1.3) obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} q(x, t) - q(x + d, t) &= kA[u_x(x + d, t) - u_x(x, t)]\Delta t \\ &= u(x + \theta d, t + \Delta t) - u(x + \theta d, t)cAd\rho. \end{aligned}$$

Dividindo a expressão acima por  $d\Delta t$  e fazendo  $d \rightarrow 0$  e  $\Delta t \rightarrow 0$  obtemos

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad (1.4)$$

onde  $\alpha^2 = k/\rho c$  é a *difusibilidade térmica* do material da barra. Esta é a *Equação do Calor* de uma barra de um material homogêneo em uma dimensão.

A temperatura  $u(x, t)$  da barra deve necessariamente obedecer a Equação do Calor (1.4). Esta equação possui uma infinidade de soluções, sendo a mais simples o caso em que  $u(x, t) = c$ , onde  $c$  é uma constante, ou ainda, o caso em que  $u(x, t) = cx$ .

É intuitivo que a distribuição de temperatura da barra dependa de uma distribuição inicial de temperatura a qual matematicamente denotaremos  $u(x, 0) = f(x)$  e chamaremos de *condição inicial*, onde a função  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  descreve a temperatura de todos os pontos da barra no instante  $t = 0$ .

Além da condição inicial, precisamos também das informações a respeito das extremidades da barra, as quais não estão isoladas termicamente, dessa forma podemos ter saída ou entrada de calor. Isso influenciará diretamente na distribuição de temperatura  $u(x, t)$ . Tais informações serão chamadas *condições de fronteira* e veremos que a equação (1.4) juntamente com a condição inicial e a condição de fronteira terá uma única solução. Iremos considerar 4 tipos de condição de fronteira:

**TIPO 1 (Condição de Dirichlet):** Suponhamos que nas extremidades da barra, a temperatura  $u(x, t)$  seja conhecida, ou seja, quando a variação de temperatura nas

extremidades é conhecida e da forma

$$u(0, t) = g(t) \quad \text{e} \quad u(L, t) = h(t),$$

onde  $g(t)$  e  $h(t)$  são temperaturas de cada uma das extremidades da barra e  $t \geq 0$ . Por exemplo, se as temperaturas forem constantes em cada extremidade,

$$u(0, t) = T_1 \quad \text{e} \quad u(L, t) = T_2,$$

onde  $T_1$  e  $T_2$  são conhecidas.

**TIPO 2 (Condições de Neumann):** Suponhamos que nas extremidades da barra, a função  $u_x(x, t)$  seja conhecida, ou seja, o fluxo do calor que passa pelas extremidades é conhecido. Por exemplo, se as extremidades da barra estão isoladas termicamente, isto é, não há fluxo de calor, então

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0.$$

**TIPO 3 (Condições Mistas):** Suponhamos que o meio ambiente possua uma temperatura  $u_0$  e que haja transferência de calor entre a barra e o meio ambiente, regidas pela lei

$$\begin{aligned} ku_x(0, t) &= e\{u(0, t) - u_0\}, \\ -ku_x(L, t) &= e\{u(L, t) - u_0\}, \end{aligned}$$

onde  $e$  é uma constante chamada de *emissividade*, que depende do meio ambiente e do material da barra.

**TIPO 4:** Uma combinação de duas condições anteriores, como, por exemplo

$$u(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad u_x(L, t) = 0.$$

Juntando a equação diferencial parcial (1.4), a condição inicial e uma das condições de fronteira temos um problema para o qual precisamos nos atentar a algumas questões:

- i) Existência de solução;
- ii) Unicidade de solução;
- iii) Dependência da solução nos dados iniciais e de contorno;

Nosso objetivo neste trabalho será responder cada uma dessas questões.

### 1.3 Um candidato a solução

O problema da condução do calor consiste em determinar uma função real  $u(x, t)$  definida em um retângulo fechado  $\overline{\mathcal{R}}$  que satisfaça a equação do calor

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad \text{em } \mathcal{R}.$$

Além disso, tal função  $u(x, t)$  está sujeita a condições de fronteira em cada extremidade e a uma condição inicial de temperatura  $u(x, 0) = f(x)$ , em que  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função dada. Temos então um *Problema de Valor Inicial e de Fronteira*, ou também conhecido como *Problema Misto*.

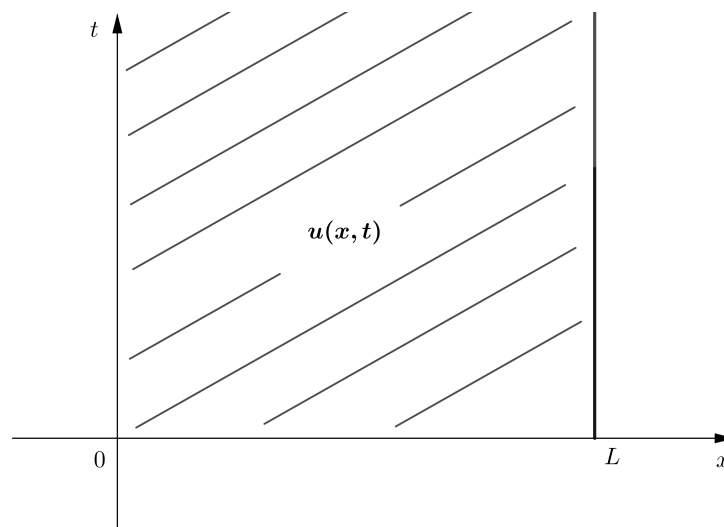


Figura 1.2: Retângulo  $\overline{\mathcal{R}}$

Inicialmente, iremos considerar as condições de fronteira de Dirichlet onde as temperaturas nas extremidades são nulas, ou seja, vamos resolver a equação do calor no caso em que  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ . Nosso objetivo é então resolver o problema da condução do calor numa barra homogênea dado por

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

A Figura (1.3) abaixo representa o problema homogêneo da condução do calor numa barra enunciado acima. Após resolvermos este problema, iremos generalizá-lo para as demais condições de fronteira.

Vamos aplicar em (1.5) o *Método de Fourier*, ou mais comumente chamado *Método de Separação de Variáveis*, que consiste basicamente em supor que existe uma solução e podemos escrevê-la como produto de duas outras funções que dependem apenas de uma

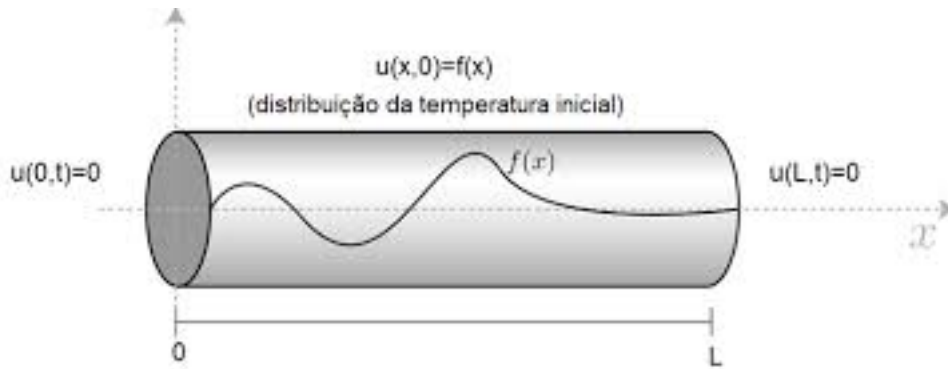


Figura 1.3: Barra  
Fonte: Wikipedia

variável, em outras palavras, vamos supor que  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . Com isso, espera-se que encontremos um candidato a solução e, em seguida, mostrar que tal candidato é, de fato, solução do problema.

Substituindo então  $u(x, t) = X(x)T(t)$  em  $\alpha^2 u_{xx} = u_t$ , obtemos:

$$X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t) \iff \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)}, \quad \text{onde } X(x), T(t) \neq 0.$$

Como o lado direito depende apenas da variável  $t$  e o lado esquerdo apenas da variável  $x$ , tanto o lado direito como o lado esquerdo devem independender de  $x$  e  $t$  respectivamente. Disso, segue que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda, \quad (1.6)$$

onde  $\lambda$  é uma constante de proporcionalidade.

A primeira equação acima nos diz que a função  $X$  deve satisfazer  $X''(x) - \lambda X(x) = 0$  e pelas condições de contorno  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ , temos que  $X(x)$  deve satisfazer também  $X(0) = X(L) = 0$ , pois, caso contrário, teríamos  $u(0, t) = X(0)T(t) = 0$ , para todo  $t > 0$  onde  $X(0) \neq 0$ , o que implicaria em  $T \equiv 0$  e conseqüentemente  $u \equiv 0$ , que é a solução trivial, a qual não nos interessa, pois obrigaria  $f \equiv 0$  em (1.5). Iremos procurar valores para  $\lambda$  que conduzem às soluções  $X(x)$  do problema dado. Além disso, perceba que não nos interessa soluções nulas para  $X(x)$ , senão teríamos  $u(x, t) = X(x)T(t) = 0$ .

Precisamos então encontrar  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que o problema de valor de contorno

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(L) = 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

admita ao menos uma solução não trivial. Há três possibilidades para valores de  $\lambda$ :

i) Se  $\lambda > 0$ , então podemos escrevê-lo como  $\lambda = \mu^2$  e assim, chegamos que

$X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$ . Logo, sua equação característica será da forma  $r^2 - \mu^2 = 0 \Rightarrow r = \pm\mu$ , e, por consequência disso, a solução geral da equação será dada por

$$X(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}.$$

Pelas condições de contorno tem-se que

$$X(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2,$$

$$X(L) = c_1 e^{\mu L} - c_1 e^{-\mu L} = c_1 (e^{\mu L} - e^{-\mu L}) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

Portanto quando  $\lambda > 0$ , a única solução possível será apenas a trivial.

- ii) Se  $\lambda = 0$ , então da equação diferencial de (1.7) teremos  $X''(x) = 0$ , e, portanto, a solução geral será da forma

$$X(x) = c_1 x + c_2.$$

Pelas condições de contorno,

$$X(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \quad \text{e} \quad X(L) = c_1 L + c_2 = c_1 L = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$$

Disso, segue que a solução de (1.7) quando  $\lambda = 0$  será apenas a trivial, o que não nos interessa.

- iii) Se  $\lambda < 0$ , então podemos reescrevê-lo como  $\lambda = -\mu^2$ , assim a equação diferencial de (1.7) ficará da forma  $X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$  e, desse modo, a equação característica será  $r^2 + \mu^2 = 0$  admitindo apenas soluções complexas. Disso, teremos que

$$X(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x),$$

será solução de (1.7). Aplicando as condições de contorno,

$$X(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0,$$

$$X(L) = c_2 \sin(\mu L) = 0.$$

Para que a última condição de contorno seja satisfeita,  $c_2$  deve ser não nulo, pois buscamos soluções não triviais. Logo, queremos que  $\sin \mu L = 0$ , e portanto  $\mu L = n\pi, n \in \mathbb{N}$ . Lembremos que  $\lambda = -\mu^2$ , então para cada  $n$  teremos  $\lambda_n = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}$  que são chamados os *autovalores* do problema (1.7) e suas soluções não triviais

serão

$$X_n(x) = c_2 \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (1.8)$$

Tomando por simplicidade  $c_2 = 1$  obteremos  $X_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x/L)$  que são as *autofunções* do problema (1.7).

Resta-nos analisar a segunda equação de (1.6), ou seja,

$$T'(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0. \quad (1.9)$$

Utilizando a expressão dos autovalores  $\lambda_n$  encontrados anteriormente, chegamos que a equação diferencial em (1.9) ficará

$$T'(t) + \alpha^2 \frac{n^2 \pi^2}{L^2} T(t) = 0.$$

A equação diferencial acima é uma Equação Diferencial Ordinária homogênea de primeira ordem e sua solução geral será

$$T(t) = c e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2}. \quad (1.10)$$

Voltando ao Método de Fourier, substituiremos as soluções de  $X''(x) - \lambda X(x) = 0$  e  $T'(t) + \lambda \alpha^2 T(t) = 0$  encontradas em  $u(x, t) = X(x)T(t)$  obtendo:

$$u_n(x, t) = X(x)T(t) = c_2 \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) c e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2},$$

ou ainda, desprezando as constantes de proporcionalidade

$$u_n(x, t) = e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Desse modo, as funções  $u_n(x, t) = e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ , chamadas *soluções fundamentais* e satisfazem tanto a equação diferencial quanto as condições de contorno do problema (1.5). Por fim, falta mostrar ainda que as funções  $u_n(x, t)$  satisfazem a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$  onde  $x \in [0, L]$ .

O *Princípio da Superposição de Soluções* nos diz que qualquer combinação linear de soluções de uma equação diferencial linear também satisfaz a equação diferencial e as condições de contorno. Por isso, vamos admitir que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^m c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^m c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (1.11)$$

onde  $c_n$  são coeficientes indeterminados e  $m$  é um inteiro positivo. Temos então que  $u(x, t)$  satisfaz a equação diferencial e as condições de contorno dadas em (1.5), porém

para que seja solução devemos investigar quais devem ser os coeficientes  $c_n$  para que a condição inicial seja satisfeita. Desse modo, aplicando a condição inicial em (1.11) teremos que

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^m c_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) = f(x). \quad (1.12)$$

A menos que a função  $f$  seja uma combinação linear de senos, não será possível cumprir a condição inicial, entretanto estaremos restringindo muito a nossa função  $f$ . Estenderemos então o Princípio da Superposição de Soluções para somas infinitas para corrigir este impasse. Vamos supor então que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (1.13)$$

é uma solução do nosso problema (1.5). Perceba que cada parcela individual da expressão acima satisfaz a equação do calor e também as condições de contorno em (1.5). Vamos admitir que esta série seja convergente, logo precisamos apenas verificar que a função satisfaça a condição inicial, ou seja,

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) = f(x). \quad (1.14)$$

Assim, precisaremos determinar as constantes  $c_n$  para que a série acima seja convergente. Precisamos então garantir a seguinte igualdade

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (1.15)$$

Esta série é conhecida como *série de Fourier em senos*. Se conseguirmos garantir esta igualdade então o candidato (1.13) será de fato uma solução.

É com essa motivação que estudaremos as Séries de Fourier, isto é, vamos estabelecer condições para que a função  $f$  possa ser escrita da forma (1.15) acima.



# Capítulo 2

## Sequências e séries de funções

Para estudarmos a convergência das Série de Fourier precisamos de algumas ferramentas e resultados clássicos da Análise. Destinaremos este capítulo para apresentar essas ferramentas e resultados, afim de facilitar a leitura dos capítulos seguintes.

### 2.1 Convergência simples e convergência uniforme

Consideremos  $X \subset \mathbb{R}$ , definimos uma sequência de funções  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  como sendo uma correspondência que associa a cada  $n \in \mathbb{N}$  uma função  $f_n$ , definida em  $X$  e tomando valores reais.

Iremos considerar duas formas de convergência para uma sequência de funções  $(f_n)$ : a *convergência simples* e *convergência uniforme*.

**Definição 2.1.1.** Uma sequência de funções  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  converge *simplesmente* ou *pontualmente* para uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , quando fixado  $x \in X$  a sequência de números  $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots)$  converge para  $f(x)$ . Ou seja, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  (que depende de  $\varepsilon$  e de  $x$ ) tal que para todo  $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

**Definição 2.1.2.** Uma sequência de funções  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  converge *uniformemente* para uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , quando para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  (que depende apenas de  $\varepsilon$ ) tal que para todo  $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ , para todo  $x \in X$ .

Para sequências numéricas temos um tipo especial de sequências que são as sequências de Cauchy das quais temos o seguinte resultado.

**Teorema 2.1.1.** *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

*Observação 2.1.1.* A recíproca desse teorema para sequências numéricas é verdade somente em  $\mathbb{R}$ , mas não é verdade para, por exemplo, o conjunto dos números racionais

$\mathbb{Q}$ . De fato, consideremos a sequência de números racionais  $x_n$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , com  $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ . (Por exemplo, a sequência  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{Q}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e \notin \mathbb{Q}$ ). Como a sequência converge em  $\mathbb{R}$ , então ela é de Cauchy em  $\mathbb{R}$  e conseqüentemente é de Cauchy em  $\mathbb{Q}$ . Porém, não é convergente em  $\mathbb{Q}$ .

De modo análogo as sequências numéricas, podemos definir as sequências de Cauchy para as sequências de funções.

**Definição 2.1.3.** Uma sequência de funções  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se uma *sequência de Cauchy* quando, para qualquer  $\varepsilon > 0$  dado arbitrariamente, for possível obter  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in X$ .

**Teorema 2.1.2.** *Uma sequência de funções  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  é uniformemente convergente se, e somente se, é uma sequência de Cauchy.*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $f_n$  converge uniformemente para a função  $f$  em  $X$ , ou seja,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  para todo  $x \in X$ . Então dado  $\varepsilon > 0$ , existe um  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ , para todo  $x \in X$ . De igual modo se  $m > n_0$ , então  $|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ , para todo  $x \in X$ . Disso segue que para  $n, m > n_0$  teremos

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &= |f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \\ &\leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo  $f_n$  é uma sequência de Cauchy.

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que  $f_n$  seja uma sequência de Cauchy, então para todo  $x \in X$ ,  $f_n(x)$  é convergente. Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  para todo  $x \in X$ . Como  $f_n$  é uma sequência de Cauchy, por definição segue que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$  para todo  $x \in X$ . Fixando  $n$  e  $x$  e aplicando o limite com  $m \rightarrow \infty$  teremos que  $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$  para  $n > n_0$  e para todo  $x \in X$ . Portanto  $f_n$  converge uniformemente para  $f$ . ■

O Teorema (2.1.2) enunciado acima, é dito *critério de Cauchy* para convergência uniforme. Segue desse critério o teste M de Weierstrass para a convergência uniforme e absoluta de séries de funções. Mas antes, precisamos definir o que é a convergência de séries de funções.

Considerando  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma sequência de funções, a soma  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  é um caso particular de um limite da sequência  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$ , onde  $s_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$  é a sequência das *reduzidas* ou *soma parcial*. Portanto,

faz sentido dizer que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge pontual ou uniformemente no conjunto  $X$ .

**Definição 2.1.4.** Sendo  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma sequência de funções definidas em  $X \subset \mathbb{R}$ , a série  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge *pontualmente* ou *simplesmente* se a sequência  $s_n(x)$  convergir pontualmente. A convergência será *uniforme* se a sequência  $s_n(x)$  convergir uniformemente.

**Definição 2.1.5.** Dizemos que uma série de funções  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge *absolutamente* se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$  for convergente.

**Teorema 2.1.3** (Teste M de Weierstrass). *Seja  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  uma série de funções  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Suponha que existam constantes  $M_n \geq 0$  tais que*

$$|f_n(x)| \leq M_n, \forall x \in X,$$

e que a série numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  convirja. Então, a série de funções  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge uniformemente e absolutamente em  $X$ .

*Demonstração.* Consideremos as somas parciais  $s_k(x) = \sum_{n=1}^k f_n(x)$  e  $t_k(x) = \sum_{n=1}^k |f_n(x)|$ . Então  $\forall N \geq k$  e  $\forall x \in X$  temos

$$\left| \sum_{n=k}^N f_n(x) \right| \leq \sum_{n=k}^N |f_n(x)| \leq \sum_{n=k}^N M_n,$$

ou seja,

$$|s_N(x) - s_k(x)| \leq |t_N(x) - t_k(x)| \leq \sum_{n=k+1}^N M_n.$$

Por hipótese do teorema, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  é convergente, ou seja, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall N \geq k \geq k_0$ , tem-se

$$\sum_{n=k}^N M_n < \varepsilon,$$

de onde segue que

$$|s_N(x) - s_k(x)| \leq |t_N(x) - t_k(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall N \geq k \geq k_0. \quad \forall x \in X.$$

Portanto, ambas sequências convergem pelo Teorema (2.1.2). ■

Perceba que o teorema é muito útil, pois ela reduz o problema de verificar a convergência de uma série de funções em verificar a convergência de uma série numérica.

## 2.2 Propriedades da convergência uniforme

Vejamos agora algumas propriedades decorrentes da convergência uniforme de sequências de funções.

**Teorema 2.2.1.** *Se uma sequência de funções  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  converge uniformemente para uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e cada  $f_n$  é contínua em  $[a, b]$  então  $f$  é contínua em  $[a, b]$ .*

*Demonstração.* Pela definição de convergência uniforme temos que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n > n_0, \forall x \in [a, b].$$

Fixemos agora  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_1 > n_0$ . Seja  $x_0 \in [a, b]$ , como  $f_{n_1}$  é contínua em  $[a, b]$ , então dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $|h| < \delta$  temos

$$|f_{n_1}(x_0 + h) - f_{n_1}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Logo, se  $|h| < \delta$ ,

$$\begin{aligned} |f(x_0 + h) - f(x_0)| &= |f(x_0 + h) - f_{n_1}(x_0 + h) + f_{n_1}(x_0 + h) - f_{n_1}(x_0) + f_{n_1}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x_0 + h) - f_{n_1}(x_0 + h)| + |f_{n_1}(x_0 + h) - f_{n_1}(x_0)| + |f_{n_1}(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, segue que a função  $f$  é contínua em  $[a, b]$ . ■

**Teorema 2.2.2.** *Seja  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma sequência de funções integráveis que converge uniformemente para a função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $f$  é integrável e*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.1)$$

*Demonstração.* Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)}, \quad \forall n > n_0, \forall x \in [a, b].$$

Portanto

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \\ &< \int_a^b \frac{\varepsilon}{(b-a)} dx = \frac{\varepsilon}{(b-a)} \cdot (b-a) = \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo  $n > n_0$ . Logo, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

■

**Teorema 2.2.3.** *Seja  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma sequência de funções de classe  $C^1$ , ou seja,  $f_n$  e  $f'_n$  são contínuas em  $[a, b]$ , tal que  $f_n(x_0)$  converge para algum  $x_0 \in [a, b]$ . Se  $f'_n$  converge uniformemente para uma função  $g$  em  $[a, b]$ , então  $f_n$  converge uniformemente para uma função  $f$  de classe  $C^1$  em  $[a, b]$  com  $f'(x) = g(x), \forall x \in [a, b]$ . Isso significa que*

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

*Demonstração.* Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, para cada  $n \in \mathbb{N}$  e todo  $x \in [a, b]$  temos

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt.$$

Como  $f'_n$  converge uniformemente para  $g$  e  $f_n(x_0)$  é convergente, aplicando o limite com  $n \rightarrow \infty$  juntamente com o teorema anterior, teremos que para cada  $x \in [a, b]$ , existe o limite  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , logo

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt.$$

Sendo assim,  $f'(x) = g(x)$ . Mostramos então a convergência pontual de  $f_n(x)$  para  $f(x)$ , falta ainda verificar a uniformidade da convergência. Então

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x_0) - f(x_0)| + \left| \int_{x_0}^x f'_n(t) dt - \int_{x_0}^x g(t) dt \right| \\ &\leq |f_n(x_0) - f(x_0)| + \int_a^b |f'_n(t) - g(t)| dt. \end{aligned}$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , tomamos  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n > n_0 \Rightarrow |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$  e

$|f'_n(t) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ , para todo  $t \in [a, b]$ . Então

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dt = \varepsilon, \quad \forall n > n_0, \forall x \in [a, b].$$

■

**Proposição 2.2.1.** *Suponhamos que as funções  $f_n$  sejam contínuas e que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  convirja uniformemente. Então a soma da série  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  é também uma função contínua.*

*Demonstração.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f_n$  é contínua, logo

$$s_k(x) = \sum_{n=1}^k f_n(x)$$

é uma função contínua. Mas, se definirmos  $f(x)$  como  $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x)$ , teremos que  $f(x)$  será o limite uniforme da sequência  $s_k(x)$ . Segue pelo Teorema (2.2.1) que  $f(x)$  é contínua. ■

**Proposição 2.2.2.** *Suponhamos que as funções  $f_n$  sejam integráveis em um intervalo  $[a, b]$  e que série  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  convirja uniformemente. Então*

$$\int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

*Demonstração.* Seja  $s_k(x) = \sum_{n=1}^k f_n(x)$  e  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ , então  $S(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x)$ , ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x).$$

Da linearidade da integral de Riemann obtemos

$$\int_a^b s_k(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^k f_n(x) dx = \sum_{n=1}^k \int_a^b f_n(x) dx.$$

Observe que  $s_k(x)$  converge uniformemente para  $S(x)$ , logo segue do Teorema (2.2.2) que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b s_k(x) dx = \int_a^b \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) dx.$$

Disso, tem-se

$$\int_a^b S(x) = \int_a^b \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b s_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \int_a^b f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Por consequência disso, teremos

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

■

**Proposição 2.2.3.** *Suponhamos que as funções  $f_n$  definidas em um intervalo  $[a, b]$  sejam continuamente deriváveis e que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$  das derivadas convirja uniformemente. Suponhamos ainda que, para um dado  $x_0 \in [a, b]$ , a série  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$  convirja. Então*

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

*Demonstração.* Seja  $s_k(x) = \sum_{n=1}^k f_n(x)$ . Como a sequência  $s'_k(x) = \sum_{n=1}^k f'_n(x)$  converge uniformemente em  $[a, b]$  para  $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$  e para um  $x_0 \in [a, b]$  fixado  $s_k(x_0) = \sum_{n=1}^k f_n(x_0)$  converge para  $S(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ , então pelo Teorema (2.2.3) a sequência  $s_k(x)$  converge uniformemente no intervalo  $[a, b]$  e

$$\left( \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) \right)' = \lim_{k \rightarrow \infty} s'_k(x), \quad \text{ou seja,} \quad \frac{d}{dx} \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

■

# Capítulo 3

## Série de Fourier

### 3.1 Funções Periódicas

O estudo das séries de Fourier está inteiramente relacionado com as funções periódicas, pois tal série é composta por uma combinação de senos e cossenos que são funções periódicas.

**Definição 3.1.1.** Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é dita *periódica*, com período  $T > 0$ , se para todo  $x \in X$  tivermos  $x + T \in X$  e

$$f(x + T) = f(x). \quad (3.1)$$

O menor valor de  $T$  para o qual vale a equação (3.1) é dito *período fundamental* de  $f$ .

*Observação 3.1.1.* Se  $T$  é um período de uma função  $f$ , então qualquer múltiplo  $kT$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  é também um período de  $f$  desde que  $x + kT \in X$ .

**Proposição 3.1.1.** *Sejam  $f$  e  $g$  funções periódicas de mesmo período  $T$ , então seu produto  $fg$  e qualquer combinação linear  $c_1f + c_2g$  também são periódicas de mesmo período  $T$ , onde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .*

*Demonstração.* Seja  $h_1(x) = f(x)g(x)$ , então temos que

$$h_1(x + T) = f(x + T)g(x + T) = f(x)g(x) = h_1(x).$$

Logo,  $h_1$  é periódica de período  $T$ .

Dados  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , defina agora a função  $h_2(x) = c_1f(x) + c_2g(x)$ . De modo inteiramente análogo, temos

$$h_2(x + T) = c_1f(x + T) + c_2g(x + T) = c_1f(x) + c_2g(x) = h_2(x).$$

Portanto,  $h_2$  é também periódica de período  $T$ . ■



**Teorema 3.1.1.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $T$  e integrável em qualquer intervalo. Então fixado  $a \in \mathbb{R}$ , tem-se*

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

*Demonstração.* Suponha que para algum  $n \in \mathbb{N}$  tenhamos  $nT \leq a \leq (n+1)T$ . Logo, teremos  $nT \leq a \leq (n+1)T \leq a+T \leq (n+2)T$ , e, disso, segue que

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^{(n+1)T} f(x)dx + \int_{(n+1)T}^{a+T} f(x)dx.$$

Além disso,

$$\int_a^{(n+1)T} f(x)dx = \int_{nT}^{(n+1)T} f(x)dx - \int_{nT}^a f(x)dx.$$

Substituindo agora na primeira igualdade obtemos

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \left[ \int_{nT}^{(n+1)T} f(x)dx - \int_{nT}^a f(x)dx \right] + \int_{(n+1)T}^{a+T} f(x)dx.$$

Segue da periodicidade da função  $f$  que  $f(x) = f(x+2T)$ . Fazendo a mudança de variável  $t = x - T$  devemos ter

$$\int_{(n+1)T}^{a+T} f(x)dx = \int_{nT}^a f(t+T)dt = \int_{nT}^a f(t)dt.$$

Logo,

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \left[ \int_{nT}^{(n+1)T} f(x)dx - \int_{nT}^a f(x)dx \right] + \int_{nT}^a f(x)dx = \int_{nT}^{(n+1)T} f(x)dx.$$

Por outro lado, usando o mesmo argumento acima, qualquer que seja  $n$  temos

$$\int_{nT}^{(n+1)T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Por fim

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

■

## 3.2 Ortogonalidade da função seno e cosseno

A fim de descrever uma segunda propriedade das funções  $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  e  $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ , generalizamos o conceito de ortogonalidade de vetores. Sejam  $u$  e  $v$  duas funções no espaço  $C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é contínua}\}$ , então

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x)v(x)dx,$$

define um produto interno no espaço  $C([a, b])$ .

As funções  $u$  e  $v$  serão *ortogonais* em  $[a, b]$  se o produto interno entre elas for nulo, ou seja, se

$$\int_a^b u(x)v(x)dx = 0.$$

**Definição 3.2.1.** Um conjunto  $X \subset C([a, b])$  de funções é dito *mutuamente ortogonal* se qualquer par de funções do conjunto  $X$  for ortogonal.

Em particular, o conjunto formado pelas funções  $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  e  $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  é mutuamente ortogonal no intervalo  $[-L, L]$ . Além disso, tais funções satisfazem as seguintes relações de ortogonalidade:

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ L, & \text{se } m = n; \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad \text{para quaisquer } m, n; \quad (3.3)$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ L, & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (3.4)$$

Para demonstrar essas relações, vamos utilizar algumas identidades trigonométricas, integração por partes e o fato de que

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{n\pi}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L = \frac{n\pi}{L} \sin(n\pi) - \frac{n\pi}{L} \sin(-n\pi) = 0 \quad (3.5)$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = -\frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L = \frac{n\pi}{L} \cos(n\pi) - \frac{n\pi}{L} \cos(n\pi) = 0. \quad (3.6)$$

1. Para verificar (3.2) utilizaremos as seguintes identidades trigonométricas:

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)] \quad \text{e} \quad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

- Para  $m \neq n$ :

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_{-L}^L \cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-L}^L \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) dx \right] = 0; \end{aligned}$$

- Para  $m = n$ :

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \int_{-L}^L \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L 1 + \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_{-L}^L dx + \int_{-L}^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx \right] \\ &= \frac{1}{2} [L - (-L) + 0] = L. \end{aligned}$$

2. Para verificar (3.3) utilizaremos as seguintes identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(x) \cos(y) = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x+y)] \quad \text{e} \quad \cos(x) \operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x).$$

- Para  $m \neq n$ :

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[ \operatorname{sen}\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right) dx \right] = 0; \end{aligned}$$

- Para  $m = n$ :

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \operatorname{sen}(2x) dx = 0.$$

3. Por fim, para (3.4) utilizaremos as seguintes identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y) = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)] \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

- Para  $m \neq n$ :

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[ \cos \left( \frac{(n-m)\pi x}{L} \right) - \cos \left( \frac{(n+m)\pi x}{L} \right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_{-L}^L \cos \left( \frac{(n-m)\pi x}{L} \right) dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{-L}^L \cos \left( \frac{(n+m)\pi x}{L} \right) dx \right] = 0; \end{aligned}$$

- Para  $m = n$ :

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx &= \int_{-L}^L \cos^2 \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L 1 - \cos \left( \frac{2n\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_{-L}^L dx - \int_{-L}^L \cos \left( \frac{2n\pi x}{L} \right) dx \right] \\ &= \frac{1}{2} [L - (-L) - 0] = L. \end{aligned}$$

### 3.3 Coeficientes de Fourier

Se pudermos expressar uma função  $f$  como

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right), \quad (3.7)$$

é de se esperar que  $a_n$  e  $b_n$  estejam de alguma forma relacionados com a função  $f$ . Para encontrar essa relação, vamos supor que a série acima convirja uniformemente. Como  $f$  é combinação de função periódicas (seno e cosseno) e tais funções são contínuas, da Proposição (2.2.1), segue que  $f$  é contínua e, além disso,  $f$  deve ser também periódica de período  $2L$ . Pela Proposição (2.2.2) temos que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{2}a_0 dx + \int_{-L}^L \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx + \int_{-L}^L \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^L \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^L \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx \\ &= a_0 L. \end{aligned}$$

Agora, multiplicando a expressão (3.7) por  $\cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$  e integrando no intervalo

$[-L, L]$  ambos os lados da igualdade, obtemos

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Utilizando as relações de ortogonalidade (3.2) e (3.3), chegamos que

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = a_n L, \quad n \geq 1.$$

Note que se  $n = 0$  teremos a expressão de  $a_0$  que será dada por

$$a_0 L = \int_{-L}^L f(x) dx.$$

De modo análogo, multiplicando (3.7) por  $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  e integrando no intervalo  $[-L, L]$  ambos os lados da igualdade, teremos

$$\int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Utilizando as relações de ortogonalidade (3.3) e (3.4), chegamos que

$$\int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = b_n L, \quad n \geq 1.$$

Resumindo, obtemos as seguintes expressões para os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$ :

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 0, \quad (3.8)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1. \quad (3.9)$$

Esses coeficientes são chamados de *coeficientes de Fourier* e são dados expressões acima que são as *Fórmulas de Euler-Fourier*.

### 3.4 A Série de Fourier

**Definição 3.4.1.** Uma função  $f$  é *integrável e absolutamente integrável* se tanto  $f$  quanto  $|f|$  forem integráveis. Denotaremos

$$f \in \mathbf{L}^1([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ e } |f| \text{ são integráveis em } [a, b]\}.$$

**Definição 3.4.2.** Dada uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  no espaço  $\mathbf{L}^1([-L, L])$  e periódica de período  $2L$ , definimos a *Série de Fourier de  $f$*  como

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

onde os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  são dados pelas expressões (3.8) e (3.9) respectivamente.

**Definição 3.4.3.** Uma função  $f$  é dita *seccionalmente contínua* em um intervalo  $[a, b]$  se ela possui um número finito de descontinuidades, ou seja, existe uma partição  $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$ , a função  $f$  é contínua em cada intervalo  $(x_{j-1}, x_j)$  e existem os limites  $f(x_j + 0) = \lim_{x \rightarrow x_j^+} f(x)$  e  $f(x_j - 0) = \lim_{x \rightarrow x_j^-} f(x)$ .

**Definição 3.4.4.** Uma função  $f$  será *seccionalmente diferenciável* se ela for seccionalmente contínua e sua derivada  $f'$  também for seccionalmente contínua.

Enunciaremos agora um resultado que nos fornece condições suficientes para a convergência da série de Fourier de uma função  $f$ . A demonstração deste teorema necessita de vários outros resultados que deixaremos para o próximo capítulo.

**Teorema 3.4.1** (Teorema de Fourier). *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente diferenciável e periódica de período  $2L$ . Então a Série de Fourier da função  $f$ , converge em cada ponto  $x$ , para  $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ , ou seja,*

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right).$$

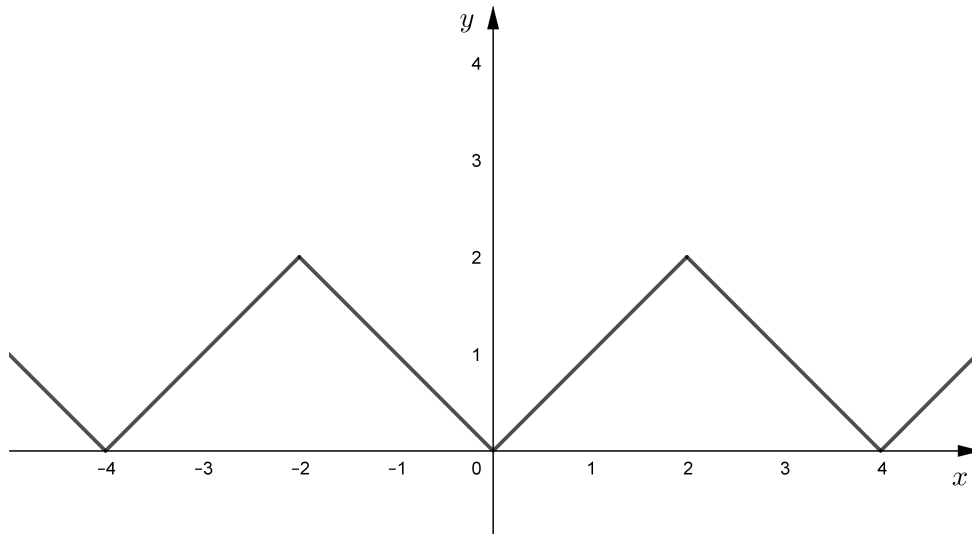
Com esse teorema podemos agora calcular a série de Fourier de algumas funções:

**Exemplo 3.4.1.** Consideremos a função  $f$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } -2 \leq x < 0, \\ x, & \text{se } 0 \leq x < 2, \end{cases}$$

cujo gráfico é dado pela figura (3.1) abaixo.

Perceba que  $f$  é periódica de período 4, ou seja,  $f(x+4) = f(x)$ . Neste caso teremos que  $L = 2$ . Vamos admitir que exista uma série de Fourier que converge para

Figura 3.1:  $f(x)$  Exemplo 3.4.1

a função  $f$  e, a partir disso, iremos determinar os coeficientes de Fourier de  $f$  utilizando as expressões (3.8) e (3.9). Então

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (-x) dx + \frac{1}{2} \int_0^2 x dx = 1 + 1 = 2,$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (-x) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \frac{1}{2} \int_0^2 x \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx.$$

Integrando por parte as integrais acima

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) - \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right]_{-2}^0 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{n\pi} x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \cos(n\pi) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \cos(n\pi) - \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \right] \\ &= \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 (\cos(n\pi) - 1), \quad n = 1, 2, \dots \\ &= \begin{cases} \frac{-8}{(n\pi)^2}, & n \text{ ímpar} \\ 0, & n \text{ par.} \end{cases} \end{aligned}$$

Para os coeficientes  $b_n$  teremos

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (-x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{2} \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^2 x \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 x \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{2} \right) dx - \frac{1}{2} \int_0^2 x \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{2} \right) dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos pelo Teorema de Fourier que a série de Fourier da função  $f$  é dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \left( \frac{n\pi x}{2} \right) \\ &= 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \cos \left( \frac{(2m-1)\pi x}{2} \right). \end{aligned}$$

**Exemplo 3.4.2.** Seja  $f$  uma função periódica de período  $2L$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -L < x < 0, \\ L, & \text{se } 0 < x < L. \end{cases}$$

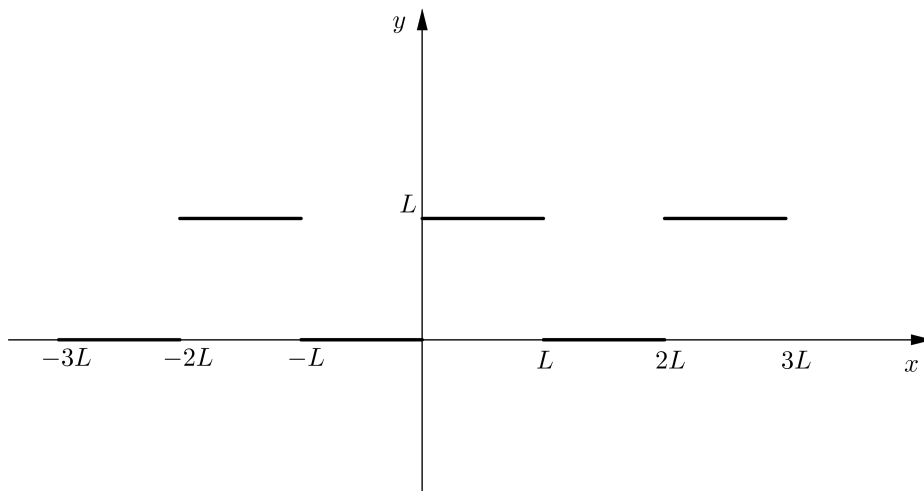


Figura 3.2:  $f(x)$  Exemplo 3.4.2

Calculando os coeficientes da série temos

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \int_0^L dx = L.$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx = \int_0^L \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx = 0.$$



$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \\
&= \int_0^L \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \\
&= \frac{L}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] \\
&= \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par,} \\ \frac{2L}{n\pi}, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Fourier segue então que

$$f(x) \sim \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \operatorname{sen} \left( \frac{(2k-1)\pi x}{L} \right).$$

*Observação 3.4.1.* Perceba que na função do exemplo anterior colocamos o símbolo “ $\sim$ ” ao invés de igualdade entre a função  $f$  e sua respectiva série de Fourier. Isso foi feito pois a função possui descontinuidades nos pontos  $x = kL$ , onde  $k \in \mathbb{Z}$  e, pelo Teorema de Fourier, a série deverá convergir para a média dos limites laterais de  $f$  aplicada nesses pontos. Já nos pontos em que a função é contínua, mais especificamente nos subintervalos  $(kL, (k+1)L)$  em que  $k \in \mathbb{Z}$ , a série de Fourier converge para os valores  $f(x)$ .

## 3.5 Séries de Fourier de funções pares e ímpares

### Proposição 3.5.1.

- i) A soma de duas funções pares é uma função par. A soma de duas funções ímpares é uma função ímpar.*
- ii) O produto de funções pares é uma função par.*
- iii) O produto de funções ímpares é uma função par.*
- iv) O produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar.*

*Demonstração.*

- i) Se  $f$  e  $g$  são duas funções pares e  $h = f + g$ , então

$$h(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f + g)(-x) = h(-x).$$

Portanto,  $h$  é uma função par. Agora, se  $f$  e  $g$  são duas funções ímpares, então sendo  $h = f + g$ , teremos

$$h(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = -f(-x) - g(-x) = -(f + g)(-x) = -h(-x).$$

Logo,  $h$  é uma função ímpar.

ii) Se  $f$  e  $g$  são funções pares e  $h = f \cdot g$ , então

$$h(x) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = f(-x) \cdot g(-x) = (f \cdot g)(-x) = h(-x).$$

Portanto,  $h$  é uma função par.

iii) Se  $f$  e  $g$  são funções ímpares e  $h = f \cdot g$ , então

$$\begin{aligned} h(x) &= (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (-f(-x)) \cdot (-g(-x)) \\ &= f(-x) \cdot g(-x) = (f \cdot g)(-x) = h(-x). \end{aligned}$$

Portanto,  $h$  é uma função par.

iv) Se  $f$  é uma função par,  $g$  é uma função ímpar e  $h = f \cdot g$ , então

$$\begin{aligned} h(x) &= (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = f(-x) \cdot (-g(-x)) \\ &= -(f(-x) \cdot g(-x)) = -(f \cdot g)(-x) = -h(-x). \end{aligned}$$

Portanto,  $h$  é uma função ímpar. ■

### Proposição 3.5.2.

i) Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função par e integrável em qualquer intervalo limitado.

Então

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx.$$

ii) Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função ímpar e integrável em qualquer intervalo limitado.

Então

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0.$$

*Demonstração.*

i) Como  $f$  é uma função integrável e par, ou seja,  $f(x) = f(-x)$ , então

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \int_{-L}^0 f(x)dx + \int_0^L f(x)dx = - \int_0^{-L} f(x)dx + \int_0^L f(x)dx.$$

Fazendo uma mudança de variáveis para  $-x$  na primeira integral obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x)dx &= - \left( \int_0^L f(-x)(-dx) \right) + \int_0^L f(x)dx \\ &= \int_0^L f(-x)dx + \int_0^L f(x)dx \\ &= \int_0^L f(x)dx + \int_0^L f(x)dx = 2 \int_0^L f(x)dx. \end{aligned}$$

ii) Como  $f$  é uma função integrável e ímpar, ou seja,  $f(x) = -f(-x)$ , então

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \int_{-L}^0 f(x)dx + \int_0^L f(x)dx = - \int_0^{-L} f(x)dx + \int_0^L f(x)dx.$$

Fazendo uma mudança de variáveis para  $-x$  na primeira integral obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x)dx &= - \left( \int_0^L f(-x)(-dx) \right) + \int_0^L f(x)dx \\ &= \int_0^L f(-x)dx + \int_0^L f(x)dx \\ &= - \int_0^L f(x)dx + \int_0^L f(x)dx = 0. \end{aligned}$$

■

A partir dessas duas proposições, ao calcularmos a série de Fourier de funções pares e ímpares obtemos:

- Seja  $f \in \mathbf{L}^1([-L, L])$  uma função par, periódica de período  $2L$ . Segue da Proposição (3.5.1), que  $f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  é uma função par e  $f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  é uma função ímpar. Da Proposição (3.5.2) devemos ter que

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \text{e} \quad b_n = 0.$$

Portanto, a série de Fourier da função  $f$  será da forma

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

isto é, uma *série de cossenos*.

- Seja  $f \in \mathbf{L}^1([-L, L])$  uma função ímpar, periódica de período  $2L$ , de modo análogo ao anterior, pelas Proposições (3.5.1) e (3.5.2) obtemos

$$a_n = 0 \quad \text{e} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right),$$

e, dessa maneira, a série de Fourier de função  $f$  será da forma

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right),$$

isto é, uma *série em senos*.

**Exemplo 3.5.1.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2L$  dada por  $f(x) = x$ , para  $-L \leq x \leq L$ . Calcularemos a série de Fourier da  $f$ . Observe que  $f$  é uma função ímpar, pois  $f(-x) = -x = -f(x)$ , e, por consequência disso, sua série de Fourier será uma série de senos e seus coeficientes serão da forma

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L x \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx.$$

Para calcular a integral fazemos primeiramente uma mudança de variáveis  $y = \frac{n\pi x}{L}$ .

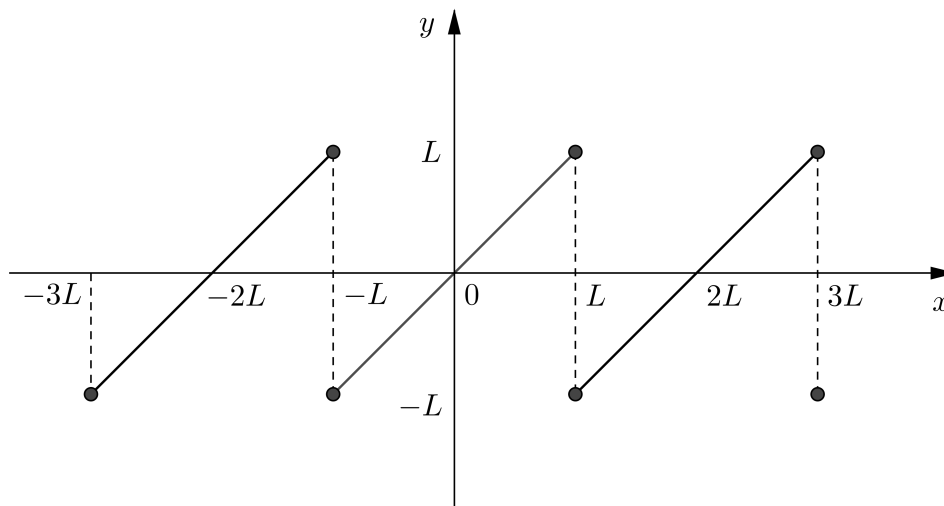


Figura 3.3: Exemplo 3.5.1

Teremos então que

$$b_n = \frac{2L}{(n\pi)^2} \int_0^{n\pi} y \operatorname{sen}(y) dy.$$

Feito isso, vamos integrar por partes

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2L}{n^2\pi^2} \left[ y \cos(y) \Big|_0^{n\pi} + \int_0^{n\pi} \cos(y) dx \right] \\
 &= \frac{2L}{n^2\pi^2} \left[ -n\pi \cos(n\pi) + \operatorname{sen}(y) \Big|_0^{n\pi} \right] \\
 &= \frac{2L}{(n\pi)^2} [-n\pi \cos(n\pi)] \\
 &= \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Portanto, a série de Fourier de  $f$  será

$$f(x) \sim \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right).$$

**Exemplo 3.5.2.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica de período  $2L$  dada por  $f(x) = x^2$  para  $-L \leq x \leq L$ , cujo gráfico é dado pela figura (3.4) abaixo. Note que  $f$  é par e, portanto, teremos uma série em cossenos cujos coeficientes serão

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{2L^2}{3} \quad \text{e} \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx.$$

Sendo  $y = \frac{n\pi x}{L}$ , fazendo a mudança de variáveis obtemos

$$a_n = \frac{2L^2}{n^3\pi^3} \int_0^{n\pi} y^2 \cos(y) dy.$$

Integrando por partes,

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2L^2}{n^3\pi^3} \left[ y^2 \operatorname{sen} y \Big|_0^{n\pi} - \int_0^{n\pi} 2y \operatorname{sen}(y) dy \right] \\
 &= -\frac{4L^2}{n^3\pi^3} \int_0^{n\pi} y \operatorname{sen}(y) dy \\
 &= -\frac{4L^2}{n^3\pi^3} \left[ -y \cos(y) \Big|_0^{n\pi} - \int_0^{n\pi} -\cos(y) dy \right] \\
 &= -\frac{4L^2}{n^3\pi^3} [-n\pi \cos(n\pi)] \\
 &= -\frac{4L^2}{n^2\pi^2} (-1)^n.
 \end{aligned}$$

Dessa forma, a série de Fourier da função  $f$  é dada por

$$f(x) \sim \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Como consequência do Teorema de Fourier, podemos estabelecer a igualdade na expressão acima, ou seja,

$$f(x) = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

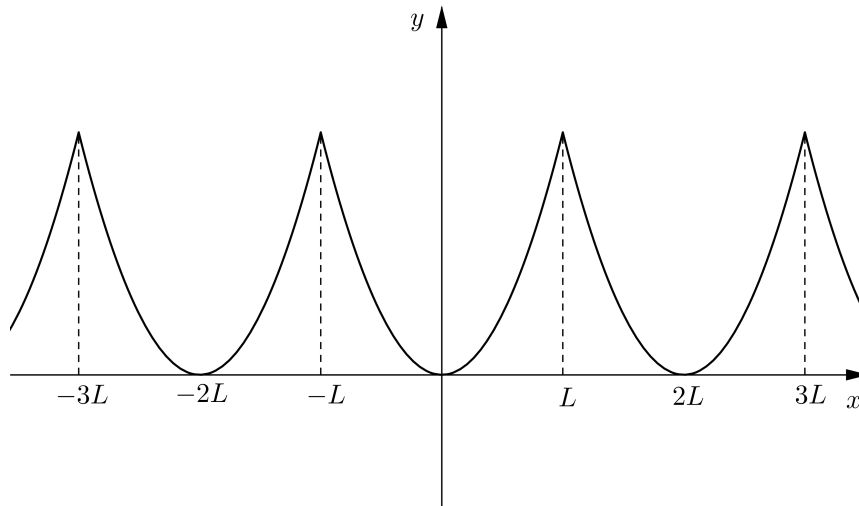


Figura 3.4: Exemplo 3.5.2

Nos exemplos apresentados acima, todas as funções estavam definidas em todo  $\mathbb{R}$ . Porém, se tivermos uma função de modo que esteja definida em um intervalo  $[0, L]$  podemos estendê-la para toda a reta de modo que ela seja periódica de período  $T > L$ , e a definimos convenientemente no intervalo  $(L, T)$ .

**Exemplo 3.5.3.** Consideremos a função  $f(x) = x$ , para  $0 \leq x \leq \pi$ . Calcularemos sua série de Fourier em senos. Precisamos então estender essa função de modo que seja ímpar. Tomemos então  $f(x) = x$ , para  $-\pi < x \leq \pi$  e que seja periódica de período  $2\pi$ . Dessa forma, os coeficientes serão

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \operatorname{sen}(nx) dx \\ &= \frac{2}{n^2\pi} \int_0^{n\pi} y \operatorname{sen}(y) dy \\ &= \frac{2}{n^2\pi} \left[ -y \cos(y) \Big|_0^{n\pi} + \int_0^{n\pi} \cos(y) dy \right] \\ &= \frac{2}{n^2\pi} [-n\pi \cos(n\pi)] \\ &= \frac{2}{n} (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Logo, segue do Teorema de Fourier que

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx), \quad \text{para } 0 \leq x < \pi.$$

*Observação 3.5.1.* Para funções definidas num intervalo  $[0, L]$ , é possível obter uma outra série de Fourier apenas mudando o período escolhido para a função. Vejamos o exemplo a seguir.

**Exemplo 3.5.4.** Tomemos agora a mesma função do exemplo anterior com período  $4\pi$ , então precisamos defini-la no intervalo  $(\pi, 2\pi]$  e garantir que ainda seja ímpar. Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ -x + 2\pi, & \text{se } \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Calculando os coeficientes  $b_n$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} \left( \frac{nx}{2} \right) + \int_{\pi}^{2\pi} (-x + 2\pi) \operatorname{sen} \left( \frac{nx}{2} \right) dx \right].$$

Utilizando integração por partes podemos chegar que

$$b_n = \frac{8}{n^2\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} \right).$$

Sendo assim, pelo Teorema de Fourier obtemos

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{nx}{2} \right), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Observe que para valores onde  $n$  é par a série se anula, pois  $\operatorname{sen}(2k\pi) = 0$ . Podemos assim reescrever a série de Fourier da função  $f$  como

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2} \operatorname{sen} \left( \frac{(2k-1)x}{2} \right), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

**Exemplo 3.5.5.** Dada a função  $f(x) = x$ , para  $0 \leq x \leq \pi$  vamos calcular sua série de Fourier em cossenos. Definimos então a função  $f$  de modo que seja uma função par. Dessa forma, seja  $f(x) = |x|$  para  $-\pi \leq x \leq \pi$  uma função periódica de período  $2\pi$  (se tomarmos outro período vamos obter uma outra série, como ocorreu no exemplo anterior). Como a função é par, calculando os coeficientes teremos que

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi,$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(nx) dx \\
&= \frac{2}{n^2\pi} \left[ y \operatorname{sen}(y) \Big|_0^{n\pi} + \int_0^{n\pi} \operatorname{sen}(y) dy \right] \\
&= \frac{2}{n^2\pi} [\cos(n\pi) - 1] \\
&= \frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1].
\end{aligned}$$

Segue do Teorema de Foruier que

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^n - 1]}{n^2} \cos(nx), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Porém, note que para  $n$  par, os coeficientes  $a_n$  se anulam, e, com isso, podemos reescrever a série da seguinte maneira

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)x), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

**Exemplo 3.5.6.** Dada a função  $f(x) = x$ , para  $0 \leq x \leq \pi$ , podemos definir  $f$  para outros valores de  $x$  de modo que  $f$  seja periódica de período  $2\pi$  e  $f(x) = 0$  para  $-\pi < x \leq 0$ .

Calculando os coeficientes teremos

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\
&= \frac{1}{n^2\pi} \int_0^{n\pi} y \cos(y) dy \\
&= \frac{1}{n^2\pi} \left[ y \operatorname{sen}(y) \Big|_0^{n\pi} + \int_0^{n\pi} \operatorname{sen}(y) dy \right] \\
&= \frac{1}{n^2\pi} [\cos(n\pi) - 1].
\end{aligned}$$

Note que os coeficientes  $a_n$  se anulam para  $n$  par, e, para  $n$  ímpar,  $a_n = -\frac{2}{n^2\pi}$ . Para



os coeficientes  $b_n$  temos

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx \\
 &= \frac{1}{n^2\pi} \int_0^{n\pi} y \operatorname{sen}(y) dy \\
 &= \frac{1}{n^2\pi} \left[ -y \cos(y) \Big|_0^{n\pi} + \int_0^{n\pi} \cos(y) dy \right] \\
 &= \frac{1}{n^2\pi} - n\pi \cos(n\pi) \\
 &= \frac{1}{n} (-1)^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Fourier segue que,

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx), \quad 0 \leq x < \pi.$$

Observe que podemos obter essa série apenas somando as séries dos exemplos (3.5.3) e (3.5.5) e dividindo por 2.

### 3.6 Integração em Séries de Fourier

Suponha que a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  admita representação em série de Fourier para todo ponto em seu domínio, ou seja, a série de Fourier da função  $f$  converge uniformemente para  $f$  e dessa forma podemos escrever

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right).$$

Como a convergência é uniforme, vale então a Proposição (2.2.2) e assim

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \right] dx \\
 &= \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) dx \\
 &= \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) dx. \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

Porém, a igualdade acima é válida mesmo se não houver a convergência uniforme. Para isso mostraremos o seguinte teorema.

**Teorema 3.6.1.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2L$  e seccionalmente*

contínua e seja

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right)$$

sua série de Fourier.

i) A série pode ser integrada termo a termo e o valor da série integrada é a integral da  $f$ ; mais precisamente

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_a^b \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx + b_n \int_a^b \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \right).$$

ii) A função  $F(x) = \int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt$  é periódica de período  $2L$ , contínua, tem derivada seccionalmente contínua e é representada por sua série de Fourier

$$\int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{b_n}{n} \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + \frac{a_n}{n} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right)$$

e

$$\frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L F(x) dx.$$

*Demonstração.* Definamos uma função  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua dada pela expressão

$$F(x) = \int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, existe  $F'(x)$  para todo  $x$  em que a função  $f$  seja contínua e, além disso,  $F'(x) = f(x)$  em tais pontos. Como, por hipótese,  $f$  é seccionalmente contínua, então  $F'$  é também seccionalmente contínua.

Perceba que a função  $F$  é periódica de período  $2L$ , pois

$$\begin{aligned} F(x+2L) - F(x) &= \int_0^{x+2L} \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt - \int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt \\ &= \int_x^{x+2L} \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt \\ &= \int_{-L}^L \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt \\ &= \int_{-L}^L f(t) dt - \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dt = a_0 L - a_0 L = 0, \end{aligned}$$

onde usamos o Teorema (3.1.1) em  $*$ .

Portanto, temos que a função  $F$  é contínua, possui derivada  $f$  seccionalmente contínua e é periódica de período  $2L$ . Como toda função contínua é também seccionalmente contínua, então  $F$  satisfaz as condições do Teorema de Fourier o que implica

que

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + B_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right),$$

onde

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n \geq 0$$

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n \geq 1.$$

Podemos relacionar os coeficientes de Fourier da  $F$  com os coeficientes de Fourier da  $f$  utilizando a integração por partes da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{1}{L} \left[ F(x) \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \Big|_{-L}^L - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L F'(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[ -\frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \right] \\ &= -\frac{1}{n\pi} L b_n, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Para encontrarmos  $A_0$  fazemos  $x = 0$ , logo

$$F(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \quad \Rightarrow \quad A_0 = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}.$$

De modo análogo, utilizando o fato de que  $F(L) = F(-L)$  obtemos

$$\begin{aligned} B_n &= \int_{-L}^L F(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{1}{L} \left[ -F(x) \frac{L}{n\pi} \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \Big|_{-L}^L + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L F'(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[ \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} L a_n, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Juntando as igualdades encontradas, chegamos na seguinte expressão

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{b_n}{n} \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + \frac{a_n}{n} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right),$$

que pode ser reescrita da seguinte forma

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^x a_n \cos \left( \frac{n\pi t}{L} \right) dt + \int_0^x b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi t}{L} \right) dt \right).$$

Tomando a expressão acima quando  $x = a$  e quando  $x = b$ , subtraindo as expressões obtidas chegamos em

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) dx,$$

o que conclui a demonstração. ■

*Observação 3.6.1.* Para as aplicações, o teorema anterior toma a forma prática seguinte: Se

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right),$$

então

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \left( f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L F(x)dx + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{b_n}{n} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{a_n}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right). \end{aligned}$$

### Aplicações:

- i) Consideremos a função  $f$  do Exemplo (3.5.1) dadas por  $f(x) = x$ , para  $-L \leq x < L$ . Temos que

$$f(x) \sim \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Logo,

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2L} \int_{-L}^L F(x)dx = \frac{L^2}{6}$$

e, portanto,

$$\frac{x^2}{2} = \frac{L^2}{6} + \frac{2L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad -L \leq x \leq L. \quad (3.11)$$

- ii) Aplicando novamente o Teorema em (3.11), e sendo

$$F(x) = \int_0^x \left( \frac{t^2}{2} - \frac{L^2}{6} \right) dt = \frac{x^3}{6} - \frac{L^2 x}{6}, \quad \frac{1}{2L} \int_{-L}^L F(x)dx = 0,$$

então,

$$\frac{x^3}{6} - \frac{L^2 x}{6} = \frac{2L^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad -L \leq x \leq L. \quad (3.12)$$

iii) Aplicando mais uma vez o Teorema em (3.12), e como

$$F(x) = \int_0^x \left( \frac{t^3}{6} - \frac{L^2 t}{6} \right) dt = \frac{x^4}{24} - \frac{L^2 x^2}{12}, \quad \frac{1}{2L} \int_{-L}^L F(x) dx = \frac{7L^4}{360},$$

obtemos que

$$\frac{x^4}{24} - \frac{L^2 x^2}{12} = -\frac{7L^4}{360} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad -L \leq x \leq L. \quad (3.13)$$

Fazendo  $x = L$ , teremos o seguinte resultado

$$\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

### 3.7 Estimativa dos coeficientes de Fourier

Vamos utilizar essa seção para estabelecer estimativas para os coeficientes de Fourier para uma classe de funções.

Inicialmente vamos considerar uma função  $f \in \mathbf{L}^1([-L, L])$  estendida de modo a ser periódica de período  $2L$  em  $\mathbb{R}$ . Com tais hipóteses sobre nossa função, podemos ver que imediatamente valem as seguintes estimativas

$$|a_n| = \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right| \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx,$$

$$|b_n| = \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right| \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx,$$

lembrando que as funções seno e cosseno são limitadas, em valor absoluto, por 1. Sendo  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $M = \int_{-L}^L |f(x)| dx$ , o simples fato de  $f$  e  $|f|$  serem integráveis implica em

$$|a_n| \leq M \quad \text{e} \quad |b_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Suponhamos agora que a função  $f$  seja, diferenciável e tal que sua derivada  $f' \in \mathbf{L}^1([-L, L])$  com  $f$  estendida de modo a ser periódica de período  $2L$  em  $\mathbb{R}$ . Logo, integrando por partes para  $n \geq 1$  obtemos que

$$\begin{aligned} La_n &= \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{L}{n\pi} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx = -\frac{L}{n\pi} b'_n. \quad (3.14)$$

Tomando os valores absolutos,

$$|a_n| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} Lb_n &= \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \\ &= -\frac{L}{n\pi} f(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \Big|_{-L}^L + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx = \frac{L}{n\pi} a'_n. \quad (3.15)$$

Tomando os valores absolutos obtemos

$$|b_n| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx.$$

Sendo  $M' = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx$  e com a hipótese de que a função  $f$  é contínua e  $f'$  e  $|f'|$  são ambas integráveis, obtemos as seguintes estimativas

$$|a_n| \leq \frac{M'}{n}, \quad \text{e} \quad |b_n| \leq \frac{M'}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Observe que acrescentando a hipótese da derivada melhoramos nossa estimativa.

Agora, vamos supor que a função  $f$  possua derivada contínua e a segunda derivada  $f'' \in \mathbf{L}^1([-L, L])$ , com  $f$  estendida de modo a ser periódica de período  $2L$  em  $\mathbb{R}$ . Com essas hipóteses, podemos melhorar as estimativas de  $a_n$  e  $b_n$  dadas anteriormente fazendo mais uma integração por partes. Então para  $a_n$  temos

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \left[ -f'(x) \frac{L}{n\pi} \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \Big|_{-L}^L + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f''(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \right].$$

Por consequência disso segue que

$$|a_n| \leq \frac{1}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx.$$

Analogamente para  $b_n$  temos

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \left[ f'(x) \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \Big|_{-L}^L + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f''(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \right],$$

logo,

$$|b_n| \leq \frac{1}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx.$$

Portanto, se  $M'' = \frac{1}{\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)|$ , a função  $f'$  for contínua e tanto  $f''$  quanto  $|f''|$  forem ambas integráveis teremos as seguintes estimativas para os coeficientes de Fourier:

$$|a_n| \leq \frac{M''}{n^2} \quad \text{e} \quad |b_n| \leq \frac{M''}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

# Capítulo 4

## Convergência da Série de Fourier

### 4.1 Classes de funções consideradas

No capítulo anterior vimos que para definirmos os coeficientes de Fourier, e consequentemente, termos a série de Fourier de uma determinada função  $f$ , necessitamos minimamente que essa função seja periódica de período  $2L$ , integrável e absolutamente integrável no intervalo  $[-L, L]$ .

Para entendermos melhor as especificações para que uma função  $f$  possua uma série de Fourier, consideremos uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e uma partição

$$P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Logo,

i) Se  $f$  é limitada, então ela será integrável se

$$\sup \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}) = \inf \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}),$$

onde  $m_j = \inf\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\}$  e  $M_j = \sup\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\}$ .

ii) Se  $f$  não é limitada, então  $f$  será integrável se o intervalo  $[a, b]$  puder ser decomposto em um número finito de intervalos  $I_1, I_2, \dots, I_n$  com  $I_k = [a_k, b_k]$ , tais que, para todos  $\delta, \delta' > 0$ , a função  $f$  seja limitada e integrável em  $[a_k + \delta, b_k - \delta']$  e existirem os limites

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x)dx = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta' \rightarrow 0}} \int_{a_k + \delta}^{b_k - \delta'} f(x)dx.$$

Esse tipo de integral é chamado de *integral imprópria*. Então a integral imprópria



de  $f$  é

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} f(x)dx.$$

Funções contínuas, e, mais geralmente, funções seccionalmente contínuas no intervalo  $[a, b]$  são limitadas e integráveis no sentido (i) ou (ii) acima. Vale observar também que

- (1) Se  $f$  for integrável e limitada, então  $f$  será absolutamente integrável. Porém a recíproca não é verdadeira.
- (2) Se  $f$  não for limitada então sua integrabilidade não implica na integrabilidade de  $|f|$ .

**Teorema 4.1.1.** *Seja  $f \in \mathbf{L}^1([a, b])$ . Então, dado  $\varepsilon > 0$ , existe uma função contínua  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)|dx < \varepsilon \quad e \quad \psi(a) = \psi(b) = 0.$$

*Demonstração.*

1. Suponha que  $f$  seja limitada e integrável. Logo dado  $\varepsilon > 0$ , existe uma partição  $P$  do intervalo  $[a, b]$

$$P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$$

tal que

$$\int_a^b f(x)dx - \sum_{j=1}^k m_j(x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

onde  $m_j = \inf\{f(x) : x_{j-1} < x < x_j\}$ . Tome a função  $\chi(x)$  definida como  $\chi(x) = m_j$ , para  $x_{j-1} < x < x_j$ . Então podemos dizer o seguinte

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \chi(x)dx = \int_a^b [f(x) - \chi(x)]dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.1)$$

Vamos ilustrar com alguns gráficos as ideias que usaremos para concluir a demonstração. Suponhamos que a partição  $P$  possua quatro pontos e o gráfico de  $\chi(x)$  seja dado pela figura (4.1)

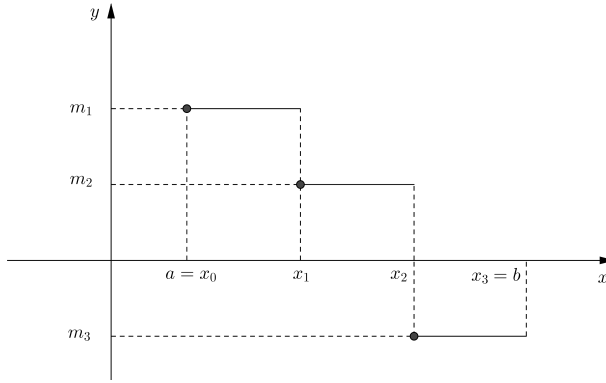


Figura 4.1

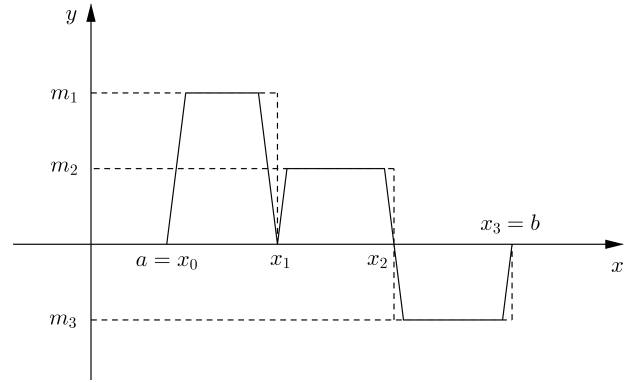


Figura 4.2

e, para cada  $n$ , consideramos a função  $\psi_n$  obtida substituindo no gráfico acima os “retângulos” por trapézios como na figura (4.2). Assim, vamos definir  $\psi_n$  como sendo

$$\psi_n(x) = \begin{cases} nm_j(x - x_{j-1}), & \text{se } x \in [x_{j-1}, x_{j-1} + \frac{1}{n}], \\ m_j, & \text{se } x \in [x_{j-1} + \frac{1}{n}, x_j - \frac{1}{n}], \\ -nm_j(x - x_j), & \text{se } x \in [x_j - \frac{1}{n}, x_j], \end{cases}$$

onde  $j = 1, \dots, n$ . Dessa forma, sendo  $M > 0$  uma constante tal que  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ , teremos que

$$\int_a^b |\chi(x) - \psi_n(x)| dx = \sum_{j=1}^k \frac{m_j}{n} \leq \frac{kM}{n} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (4.2)$$

para algum  $n$  suficientemente grande.

De (4.1) e (4.2) temos que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe uma função contínua  $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$  tal que

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)| dx &= \int_a^b |f(x) - \chi(x)| dx + \int_a^b |\chi(x) - \psi_n(x)| dx \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Essa função  $\psi_n$  é a função  $\psi$  do enunciado do teorema.

- Suponha que  $f$  não seja limitada, mas esteja em  $\mathbf{L}^1([a, b])$  no sentido das integrais impróprias. Por simplicidade, vamos supor  $f$  ilimitada nas vizinhanças dos extremos do intervalo  $[a, b]$ . Portanto, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\left| \int_a^b |f(x)| dx - \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x)| dx \right| = \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.3)$$

Como  $f$  é limitada e integrável no intervalo  $[a + \delta, b - \delta]$ , existe uma função

contínua  $\psi : [a + \delta, b - \delta] \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\psi(a + \delta) = \psi(b - \delta) = 0$  tal que

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.4)$$

Consideremos a função  $\tilde{\psi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\tilde{\psi} = \begin{cases} \psi(x), & \text{para } a + \delta \leq x \leq b - \delta, \\ 0, & \text{para } a \leq x \leq a + \delta, \text{ e } b - \delta \leq x \leq b. \end{cases}$$

Logo,

$$\int_a^b |f(x) - \tilde{\psi}(x)| dx = \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx.$$

Utilizando (4.3) e (4.4), chegamos que dado  $\varepsilon > 0$ , existe uma função contínua  $\tilde{\psi}$  tal que

$$\int_a^b |f(x) - \tilde{\psi}(x)| dx < \varepsilon.$$

■

*Observação 4.1.1.* O teorema acima nos diz que dada  $f \in \mathbf{L}^1([a, b])$ , existe uma sequência de funções contínuas  $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)| dx = 0.$$

## 4.2 Lema de Riemann- Lebesgue

**Lema 4.2.1** (Riemann- Lebesgue). *Seja  $f$  uma função no espaço  $\mathbf{L}^1([a, b])$ . Então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx = 0, \quad (4.5)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(tx) dx = 0. \quad (4.6)$$

*Demonstração.* Vamos dividir essa demonstração em duas etapas. Inicialmente vamos supor que  $f$  seja limitada e no segundo momento, vamos supor  $f$  uma função qualquer sobre as hipóteses do Lema.

a) Suponhamos então  $f$  limitada, ou seja, existe uma constante  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$ , para todo  $x \in [a, b]$ . Como  $f$  está em  $\mathbf{L}^1([a, b])$ , por definição,  $f$  será integrável, isto é, dado  $\varepsilon > 0$ , existe uma partição  $P$  do intervalo  $[a, b]$

$$P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

tal que

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon,$$

onde

$$S(f, P) = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}), \quad M_j = \sup\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\}$$

$$s(f, P) = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}), \quad m_j = \inf\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\}$$

são as somas superior e inferior associadas à partição  $P$ . Vamos mostrar que a expressão (4.5) é válida. Para isso, consideremos a partição do intervalo  $[a, b]$  determinada pelos pontos  $x_j = a + \frac{j}{n(b-a)}$ , para  $j = 0, 1, \dots, n$ . Então,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx &= \sum_{j=1}^n f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(tx) dx \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x) - f(x_j)] \operatorname{sen}(tx) dx. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Note que

$$\left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(tx) dx \right| = \left| \frac{-\cos(tx)}{t} \Big|_{x_{j-1}}^{x_j} \right| \leq \frac{2}{t}, \quad (4.8)$$

e também

$$|f(x) - f(x_j)| \leq M_j - m_j, \quad \text{para } x_{j-1} \leq x \leq x_j. \quad (4.9)$$

Juntando as expressões de (4.7), (4.8) e (4.9) obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| &\leq \left| \sum_{j=1}^n f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(tx) dx \right| + \left| \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x) - f(x_j)] \operatorname{sen}(tx) dx \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left| f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(tx) dx \right| + \sum_{j=1}^n \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x) - f(x_j)] \operatorname{sen}(tx) dx \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |f(x_j)| \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(tx) dx \right| + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} |f(x) - f(x_j)| dx \\ &\leq \frac{2nM}{t} + \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &= \frac{2nM}{t} + S(f, P) - s(f, P). \end{aligned}$$

Dessa forma, dado  $\varepsilon > 0$ , tome  $n$  tal que  $S(f, P) - s(f, P) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Para esse mesmo  $n$ ,

tome  $t_0$  de modo que  $\frac{2nM}{t_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Logo, dado  $\varepsilon > 0$ , teremos que

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0, \quad (4.10)$$

e, isso, prova que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_b^a f(x) \operatorname{sen}(tx) dx = 0.$$

De modo inteiramente análogo prova-se que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_b^a f(x) \operatorname{cos}(tx) dx = 0.$$

b) Suponhamos que agora que a função  $f$  seja uma função em  $\mathbf{L}^1([a, b])$  qualquer. Pelo Teorema (4.1.1), dado  $\varepsilon > 0$ , podemos tomar uma função contínua  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de modo que

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.11)$$

Como o intervalo  $[a, b]$  é compacto, da continuidade da função  $\psi$ , segue que  $\psi$  é função limitada e integrável. Sendo assim, podemos aplicar a parte a) da demonstração feita anteriormente para a função  $\psi$ . Devemos ter então que existe um  $t_0$ , tal que, para  $t \geq t_0$ , tem-se

$$\left| \int_a^b \psi(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.12)$$

Perceba que

$$\int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx = \int_a^b \psi(x) \operatorname{sen}(tx) dx + \int_a^b [f(x) - \psi(x)] \operatorname{sen}(tx) dx,$$

e, disso, segue que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| &\leq \left| \int_a^b \psi(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| + \left| \int_a^b [f(x) - \psi(x)] \operatorname{sen}(tx) dx \right| \\ &\leq \left| \int_a^b \psi(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| + \int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx. \end{aligned}$$

Utilizando as estimativas (4.11) e (4.12) teremos que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $t_0$ , tal que, para  $t \geq t_0$  devemos ter

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ou seja, mostramos que vale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_b^a f(x) \operatorname{sen}(tx) dx = 0$$

para toda função  $f$  em  $\mathbf{L}^1([a, b])$ . De modo inteiramente análogo prova-se que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_b^a f(x) \operatorname{cos}(tx) dx = 0.$$

■

### 4.3 Convergência Pontual

Nesta seção estabeleceremos condições necessárias para que a série de Fourier de uma função convirja pontualmente. Para isso, faremos estimativas do valor

$$e_n(x) := s_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \quad (4.13)$$

onde  $s_n(x)$  é a soma parcial da série de Fourier da função  $f$  no ponto  $x$ , dada pela seguinte expressão

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left( a_k \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi x}{L} \right) + b_k \operatorname{cos} \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \right). \quad (4.14)$$

Inicialmente escreveremos a soma parcial  $s_n(x)$  de maneira conveniente para conseguirmos obter majorações de  $e_n(x)$ . Ao substituirmos os coeficientes  $a_k$  e  $b_k$  por suas respectivas expressões dadas em (3.8) e (3.9), obtemos

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) dy + \sum_{k=1}^n \left[ \left( \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \operatorname{cos} \left( \frac{k\pi y}{L} \right) dy \right) \operatorname{cos} \left( \frac{k\pi x}{L} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi y}{L} \right) dy \right) \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) dy + \sum_{k=1}^n \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \left[ \operatorname{cos} \left( \frac{k\pi y}{L} \right) \operatorname{cos} \left( \frac{k\pi x}{L} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi y}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \right] dy. \end{aligned}$$

Aplicando a identidade trigonométrica  $\operatorname{cos}(a-b) = \operatorname{cos}(a)\operatorname{cos}(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$ , tere-

mos a seguinte expressão

$$s_n(x) = \int_{-L}^L \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left( \frac{k\pi(x-y)}{L} \right) \right] f(y) dy. \quad (4.15)$$

Essa expressão é conveniente, pois dela podemos tirar algumas propriedades que serão cruciais para garantirmos a convergência pontual da série. Tais propriedades decorrem do *Núcleo de Dirichlet* que é dado pela seguinte expressão

$$D_n(x) = \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \right]. \quad (4.16)$$

**Proposição 4.3.1.**

- i)  $D_n(x)$  é uma função par;
- ii)  $\int_{-L}^L D_n(x) dx = 1$ ;
- iii)  $D_n(x)$  é uma função contínua;
- iv)  $D_n(x)$  é uma função periódica de período  $2L$ ;
- v)  $D_n(0) = \frac{n + \frac{1}{2}}{L}$ ;
- vi) Para  $x = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$ , temos

$$D_n(x) = \frac{1}{2L} \frac{\text{sen} \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L} \right)}{\text{sen} \left( \frac{\pi x}{2L} \right)}.$$

*Demonstração.*

- i) Como a função cosseno é par, ou seja,  $\cos(x) = \cos(-x)$ , temos que

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left( \frac{-k\pi x}{L} \right) \right] = D_n(-x). \end{aligned}$$

Portanto,  $D_n(x)$  é uma função par;

ii) Integrando o Núcleo de Dirichlet (4.16) no intervalo  $[-L, L]$ , obtemos

$$\begin{aligned}\int_{-L}^L D_n(x) dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right] dx \\ &= \frac{1}{L} \left[ \int_{-L}^L \frac{1}{2} dx + \sum_{k=1}^n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \right].\end{aligned}$$

De (3.5) temos que

$$\int_{-L}^L D_n(x) dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2L} [L - (-L)] = 1.$$

iii) Tanto a soma como o produto de função contínuas é também uma função contínua.

Sabemos que a função constante e a função  $\cos(x)$  são contínuas, logo  $\sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$  é contínua. Logo,

$$D_n(x) = \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right]$$

é uma função contínua.

iv) Lembre que a função cosseno é periódica de período  $2\pi$  e conseqüentemente  $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ , então

$$\begin{aligned}D_n(x + 2L) &= \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{L}(x + 2L)\right) \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right] = D_n(x).\end{aligned}$$

Logo,  $D_n(x)$  é uma função periódica de período  $2L$ .

v) Para  $x = 0$  temos

$$D_n(0) = \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(0) \right] = \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n 1 \right] = \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} + n \right].$$

Sendo assim, temos que

$$D_n(x) = \frac{n + \frac{1}{2}}{L}.$$

vi) Vamos calcular

$$S_n(\theta) = 1 + \sum_{k=1}^n \cos(k\theta).$$



Perceba que

$$S_n(\theta) = \operatorname{Re} \left( 1 + \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right).$$

Além disso, lembre que se  $z \neq 1$  então

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Por isso,

$$\begin{aligned} S_n(\theta) &= \operatorname{Re} \left( \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \cdot \frac{e^{-i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{e^{-i\theta/2} - e^{i[n+(1/2)\theta]}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{[\cos(\frac{\theta}{2}) - i \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})] - [\cos((n + \frac{1}{2})\theta) + i \operatorname{sen}((n + \frac{1}{2})\theta)]}{[\cos(\frac{\theta}{2}) - i \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})] - [\cos(\frac{\theta}{2}) + i \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})]} \right). \end{aligned}$$

para  $\theta \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 8\pi, \dots$ . Daí, segue que

$$S_n(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}) + \operatorname{sen}((n + \frac{1}{2})\theta)}{2 \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})}. \quad (4.17)$$

Do núcleo de Dirichlet temos

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[ \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \sum_{k=1}^n \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[ -\frac{1}{2} + \left( 1 + \sum_{k=1}^n \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Utilizando a expressão encontrada para  $S_n(\theta)$  onde  $\theta = \frac{\pi x}{L}$ , obtemos

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \frac{1}{L} \left[ -\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right) + \operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right)} \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[ -\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right)} + \frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\frac{\pi x}{L}\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right)} \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[ \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\frac{\pi x}{L}\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right)} \right] \\ &= \frac{1}{2L} \frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\frac{\pi x}{L}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}. \end{aligned}$$

■

Feito isso, podemos reescrever a soma parcial da série de Fourier (4.14) utilizando (4.16) da seguinte forma

$$s_n(x) = \int_{-L}^L D_n(x-y)f(y)dy = \int_{-L+x}^{L+x} D_n(t)f(x-t)dt,$$

onde na última igualdade fizemos a mudança de variáveis  $y = x - t$ . Do fato de  $D_n$  e  $f$  serem ambas periódicas de período  $2L$ , e  $D_n$  ser uma função par, segue que

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \int_{-L}^L D_n(t)f(x-t)dt \\ &= \int_{-L}^0 D_n(t)f(x-t)dt + \int_0^L D_n(t)f(x-t)dt \\ &= \int_0^L D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]dt. \end{aligned}$$

Finalmente, substituindo a última igualdade na estimativa (4.13) teremos

$$e_n(x) = \int_0^L D_n(t)\{[f(x+t) - f(x+0)] + [f(x-t) - f(x-0)]\}dt. \quad (4.18)$$

Definamos a função  $g(x, t)$  dada por

$$g(x, t) = [f(x+t) - f(x+0)] + [f(x-t) - f(x-0)].$$

Podemos então demonstrar o seguinte lema, o qual é fundamental para garantir a convergência pontual da série de Fourier.

**Lema 4.3.1** (Teste de Dini). *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente contínua, periódica de período  $2L$  e tal que  $f \in \mathbf{L}^1([-L, L])$ . Fixado  $x$ , em  $[-L, L]$ , suponha que*

exista  $\eta > 0$  tal que

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \infty. \quad (4.19)$$

Então  $e_n(x) \rightarrow 0$ , ou seja,  $s_n(x) \rightarrow \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Precisamos mostrar que  $e_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  e, para isso, vamos decompor  $e_n(x) = \int_0^L D_n(t)g(x, t)dt$  em duas partes, onde vamos usar o item *vi*) da Proposição (4.3.1), obtendo

$$e_n(x) = \underbrace{\int_0^\delta tD_n(t) \frac{g(x, t)}{t} dt}_{(I)} + \underbrace{\int_\delta^L \operatorname{sen} \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L} \right) \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{2L} \right)} dt}_{(II)}.$$

Vamos estimar valores para ambas integrais separadamente. Para a integral (I), tomemos  $\delta$  convenientemente pequeno e utilizemos a hipótese (4.19) donde devemos ter

$$\begin{aligned} |tD_n(t)| &= \left| t \frac{\operatorname{sen} \left( n + \frac{1}{2} \frac{\pi x}{L} \right)}{2L \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{2L} \right)} \right| \\ &\leq \left| \frac{t}{2L \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2L} \right)} \right| \\ &\leq \frac{t}{2L \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2L} \right)}, \quad t \in [0, L]. \end{aligned}$$

Observe que a função  $|tD_n(t)|$  é contínua e crescente em  $[0, L]$  e disso, obtemos

$$|tD_n(t)| \leq \frac{1}{2}, \quad t \in [0, L].$$

Logo, dado  $\varepsilon > 0$ , tome  $\delta = \min\{\eta, L\}$  tal que

$$\left| \int_0^\delta tD_n(t) \frac{g(x, t)}{t} dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^\delta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

que é válido por (4.19).

Para a integral (II), vamos utilizar o Lema de Riemann-Lebesgue. Para esse  $\delta$  fixado, perceba que a função  $h(t)$  dada por

$$h(t) = \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2L} \right)}, \quad t \in [\delta, L]$$

é integrável, pois a função  $g(x, t)$  é integrável e o denominador nunca se anula no

intervalo  $[\delta, L]$ . Então para algum  $n$  suficientemente grande temos

$$\left| \int_{\delta}^L \operatorname{sen} \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right) \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2L} \right)} dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Das integrais (I), (II) e da expressão (4.13), obtemos que

$$\begin{aligned} e_n(x) &= s_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \\ &= \int_{-L}^L D_n(t) f(x-t) dt - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \\ &= \int_0^L D_n(t) \{ [f(x+t) - f(x+0)] + [f(x-t) - f(x-0)] \} dt \\ &= \int_0^L D_n(t) g(x, t) dt \\ &= \int_0^{\delta} t D_n(t) \frac{g(x, t)}{t} dt + \int_{\delta}^L \operatorname{sen} \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L} \right) \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{2L} \right)} dt \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto,  $e_n(x) < \varepsilon$  para  $n$  suficientemente grande, ou seja, quando  $n \rightarrow \infty$  então  $e_n(x) \rightarrow 0$ . Logo,  $s_n(x) \rightarrow \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$  quando  $n \rightarrow \infty$ . ■

A partir dos resultados encontrados, podemos enfim demonstrar o Teorema de Fourier enunciado no capítulo 3, que estabelece condições necessárias para a convergência pontual da série de Fourier.

**Teorema 4.3.1** (Teorema de Fourier). *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente diferenciável de período  $2L$ . Então a Série de Fourier da função  $f$ , converge em cada ponto  $x$ , para  $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ , ou seja,*

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) + b_k \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \right).$$

*Demonstração.* Suponhamos que a função  $f$  seja seccionalmente diferenciável, então, por definição, sua derivada  $f'$  é uma função seccionalmente contínua e, consequentemente, as derivadas laterais

$$f'_+(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \quad \text{e} \quad f'_-(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t}$$

existem em cada ponto  $x$ . Logo, as razões

$$\frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \quad \text{e} \quad \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t}$$

são limitadas para  $t > 0$  suficientemente pequeno. Mostraremos agora que a condição de Dini (4.19) se verifica, ou seja, se fixado  $x$ , exista  $\eta > 0$  tal que

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x,t)}{t} \right| dt < \infty.$$

onde  $g(x,t) = [f(x+t) - f(x+0)] + [f(x-t) - f(x-0)]$ . Sendo  $t > 0$ , temos

$$\int_0^\eta \left| \frac{[f(x+t) - f(x+0)] + [f(x-t) - f(x-0)]}{t} \right| dt \leq \int_0^\eta \frac{|f(x+t) - f(x+0)|}{t} dt + \int_0^\eta \frac{|f(x-t) - f(x-0)|}{t} dt.$$

Basta então verificar que

$$\int_0^\eta \frac{|f(x+t) - f(x+0)|}{t} dt \quad \text{e} \quad \int_0^\eta \frac{|f(x-t) - f(x-0)|}{t} dt$$

são integráveis. Definamos as funções

$$h_1(x,t) = \frac{|f(x+t) - f(x+0)|}{t} \quad \text{e} \quad h_2(x,t) = \frac{|f(x-t) - f(x-0)|}{t}.$$

Suponhamos que em uma vizinhança de um ponto  $x$  fixado, a função  $f'$  seja contínua. Isso implica que a função  $h_1(x,t)$  é contínua no intervalo  $(0, \eta]$  para  $\eta$  suficientemente pequeno. Por hipótese temos que

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \right]$$

existe, e, disso, segue que  $h_1(x,t)$  é contínua em  $[0, \eta]$ . Logo, a função  $h_1(x,t)$  é integrável.

Suponhamos agora que no ponto  $x$ , a função  $f'$  possua descontinuidade de primeira espécie. De modo semelhante,  $h_1(x,t)$  é contínua no intervalo  $(0, \eta]$  para  $\eta$  suficientemente pequeno. Porém temos que

$$f'_+(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t}$$

existe e, portanto, a função  $h_1(x,t)$  é contínua em  $[0, \eta]$ . Então a função  $h_1(x,t)$  é integrável.

Portanto, qualquer que seja o ponto  $x$  fixado, sendo  $f'(x)$  contínua ou possuindo descontinuidade de primeira espécie, a função  $h_1(x, t)$  é integrável. De modo inteiramente análogo, mostra-se que a função  $h_2(x, t)$  é integrável.

Logo, é possível aplicar o Teste de Dini e, então, segue que

$$e_n(x) = s_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

ou seja,

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right).$$

■

## 4.4 Convergência Uniforme

Na seção anterior provamos que dada uma função  $f$  seccionalmente diferenciável, periódica de período  $2L$ , a série de Fourier de  $f$  converge pontualmente e, nos pontos de descontinuidade da função, a série converge para a média dos limites laterais da  $f$  no ponto. Porém, precisamos garantir a convergência uniforme da série de Fourier para que possamos utilizar a Proposição (2.2.3) na função (1.13), a fim de mostrar que tal candidato é realmente solução do nosso problema (1.5).

O objetivo desta seção é mostrar que a série de Fourier converge uniformemente sobre algumas hipótese da função  $f$ . Obviamente as exigências para a convergência uniforme são maiores do que a convergência pontual da série, porém são relativamente razoáveis para nosso objetivo.

Iremos majorar a série de Fourier e utilizar o Teste M de Weierstrass, garantindo assim a convergência uniforme. Entretanto, precisaremos de algumas desigualdades importantes como a *Desigualdade de Bessel*, *Desigualdade de Cauchy-Shwarz* e *Desigualdade de Minkowski*.

### 4.4.1 Desigualdade de Bessel

**Definição 4.4.1.** Dizemos que uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é *quadrado integrável* se  $f$  e  $|f|^2$  forem integráveis. Denotaremos como  $\mathbf{L}^2([a, b])$  o espaço dessas funções.

*Observação 4.4.1.*

1. Se  $f$  for limitada e integrável, então  $f$  estará em  $\mathbf{L}^2([a, b])$ , e

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq M^2(a-b),$$

onde  $M = \sup\{|f(x)|; x \in [a, b]\}$ ;

2. Caso  $f$  não seja limitada,  $f$  pode ser  $\mathbf{L}^1([a, b])$ , mas não  $\mathbf{L}^2([a, b])$ . Por exemplo, a função  $f(x) = x^{-1/2}$  para  $0 < x < 1$ .

$$\int_0^1 x^{-1/2} dx = 2, \quad \text{porém} \quad \int_0^1 |x^{-1/2}|^2 dx = \int_0^1 x^{-1} dx = \infty.$$

3. Se  $f \in \mathbf{L}^2([a, b])$ , então necessariamente  $f \in \mathbf{L}^1([a, b])$ .

**Definição 4.4.2.** Dizemos que uma sequência  $f_n$  de funções em  $\mathbf{L}^2([a, b])$  converge em média quadrática para uma função  $f$  quadrado integrável se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0.$$

A expressão

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx$$

é chamada *erro médio quadrático*, na aproximação de  $f$  por  $f_n$ .

Vamos mostrar que a soma parcial  $s_n(x)$  da série de Fourier de uma determinada função  $f \in \mathbf{L}^2([-L, L])$ , são polinômios trigonométricos que melhor se aproximam da função  $f$ .

**Proposição 4.4.1.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2L$  e tal que  $f \in \mathbf{L}^2([-L, L])$ . Se  $s_n(x)$  é a soma parcial da série de Fourier da  $f$  e  $t_n(x)$  é um polinômio trigonométrico dado por*

$$t_n(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left( c_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + d_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right),$$

então para  $e_n = \int_{-L}^L |s_n(x) - f(x)|^2 dx$  e  $\widehat{e}_n = \int_{-L}^L |t_n(x) - f(x)|^2 dx$ , temos que  $e_n \leq \widehat{e}_n$ .

*Demonstração.* Calcularemos  $\widehat{e}_n$  utilizando as relações de ortogonalidade (3.2), (3.3), e também as expressões dos coeficientes de Fourier (3.8) e (3.9) vistas anteriormente. Então,

$$\begin{aligned} \widehat{e}_n &= \int_{-L}^L |t_n(x) - f(x)|^2 dx \\ &= \int_{-L}^L \left| \left[ \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left( c_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + d_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right) \right] - f(x) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

e, abrindo o produto notável obtemos

$$\begin{aligned} \widehat{e}_n = & \int_{-L}^L \left\{ \frac{c_0^2}{4} + c_0 \sum_{k=1}^n \left( c_k \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) + d_k \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \right) - c_0 f(x) + f(x)^2 + \right. \\ & + \sum_{k=1}^n \left( c_k^2 \cos^2 \left( \frac{k\pi x}{L} \right) + d_k^2 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \right) - 2 \sum_{k=1}^n \left[ c_k \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \right] f(x) - \\ & \left. - 2 \sum_{k=1}^n \left[ d_k \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \right] f(x) + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left[ c_k d_l \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{l\pi x}{L} \right) \right] \right\} dx. \end{aligned}$$

Pela linearidade da integral segue que

$$\begin{aligned} \widehat{e}_n = & \frac{1}{4} \int_{-L}^L c_0^2 dx + \sum_{k=1}^n c_k^2 \int_{-L}^L \cos^2 \left( \frac{k\pi x}{L} \right) dx + \sum_{k=1}^n d_k^2 \int_{-L}^L \operatorname{sen}^2 \left( \frac{k\pi x}{L} \right) dx - \\ & - \int_{-L}^L c_0 f(x) dx + \int_{-L}^L f(x)^2 dx + \sum_{k=1}^n c_0 c_k \int_{-L}^L \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) dx + \\ & + \sum_{k=1}^n c_0 d_k \int_{-L}^L \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi x}{L} \right) dx - 2 \sum_{k=1}^n c_k \int_{-L}^L \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) f(x) dx - \\ & - 2 \sum_{k=1}^n d_k \int_{-L}^L \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi x}{L} \right) f(x) dx + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c_k d_l \int_{-L}^L \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{l\pi x}{L} \right) dx. \end{aligned}$$

Das relações de ortogonalidade (3.2), (3.3) (3.4) e pelas expressões dos coeficientes de Fourier dados por (3.8) e (3.9) teremos

$$\begin{aligned} \widehat{e}_n = & \frac{L}{2} c_0^2 + \sum_{k=1}^n c_k^2 L + \sum_{k=1}^n d_k^2 L + \int_{-L}^L f(x)^2 dx - c_0 \int_{-L}^L f(x) dx - 2 \sum_{k=1}^n c_k L a_k - 2 \sum_{k=1}^n d_k L b_k \\ = & \frac{L}{2} c_0^2 + L \sum_{k=1}^n (c_k^2 + d_k^2) + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - c_0 L a_0 - 2L \sum_{k=1}^n (c_k a_k + d_k b_k). \end{aligned}$$

E, disso, completando quadrados, chegamos que

$$\widehat{e}_n = \frac{L}{2} (c_0 - a_0)^2 + L \sum_{k=1}^n (c_k - a_k)^2 + L \sum_{k=1}^n (d_k - b_k)^2 + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \frac{L}{2} a_0^2 - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).$$

Com um cálculo inteiramente análogo chegamos que

$$\begin{aligned} e_n = & \int_a^b |s_n(x) - f(x)|^2 dx \\ = & \frac{L}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 L + \sum_{k=1}^n b_k^2 L + \int_{-L}^L f(x)^2 dx - a_0 \int_{-L}^L f(x) dx - 2 \sum_{k=1}^n L a_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n L b_k^2 \\ = & \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \frac{L}{2} a_0^2 - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2). \end{aligned}$$

Note que o menor valor de  $\widehat{e}_n$  será quando  $c_0 = a_0$ ,  $c_k = a_k$  e  $d_k = b_k$  para  $k = 1, 2, \dots, n$ .



Neste caso,  $\widehat{e}_n$  coincidirá com  $e_n$  e como vale a igualdade, em geral, vale  $e_n \leq \widehat{e}_n$  como queríamos provar. ■

Para estabelecermos a *desigualdade de Bessel* basta observar que  $\widehat{e}_n \geq 0$  para qualquer que seja a escolha dos coeficientes  $c_k$  e  $d_k$ . Então, para  $c_0 = a_0, c_k = a_k$  e  $d_k = b_k$  onde  $k = 1, 2, \dots, n$ , teremos

$$0 \leq e_n = \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \frac{L}{2} a_0^2 - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$$

e, com isso, chegamos que

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx.$$

Aplicando o limite para  $n \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx \quad (4.20)$$

que é a *Desigualdade de Bessel*.

#### 4.4.2 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Tomemos dois vetores  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$  com  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  e  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ . O produto escalar entre  $\alpha$  e  $\beta$  é definido por

$$\alpha \cdot \beta = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2. \quad (4.21)$$

Definimos por  $|\alpha| = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{1/2}$  a norma do vetor  $\alpha$ , sendo  $\theta$  o ângulo entre o semieixo positivo  $x$  e o vetor  $\alpha$ . Logo,

$$\alpha = |\alpha|(\cos(\theta), \text{sen}(\theta)).$$

De modo semelhante,

$$\beta = |\beta|(\cos(\phi), \text{sen}(\phi)),$$

onde  $|\beta| = (\beta_1^2 + \beta_2^2)^{1/2}$  é a norma de  $\beta$  e  $\phi$  é o ângulo entre o semieixo positivo  $x$  e o vetor  $\beta$ . Assim, podemos escrever (4.21) da seguinte forma

$$\alpha \cdot \beta = |\alpha||\beta|(\cos(\theta)\cos(\phi) + \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi)) = |\alpha||\beta|\cos(\theta - \phi). \quad (4.22)$$

De (4.21) e (4.22) temos

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 \leq |\alpha||\beta| \Leftrightarrow \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 \leq (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{1/2} (\beta_1^2 + \beta_2^2)^{1/2}$$

que é a *Desigualdade de Cauchy-Schwarz* em  $\mathbb{R}^2$ .

Consideremos agora dois vetores  $a, b \in \mathbb{R}^n$ , com  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  e  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ . Então,

$$\sum_{i=1}^n (a_i + tb_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a_i^2 + 2ta_i b_i + t^2 b_i^2) = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2t \sum_{i=1}^n a_i b_i + t^2 \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Observe que o primeiro membro da igualdade acima é não negativo para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Note ainda que o último membro da igualdade é um polinômio do segundo grau em  $t$  e, calculando o discriminante, devemos ter que ele será menor ou igual a zero, ou seja,

$$\Delta = \left( 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - 4 \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \leq 0.$$

Daí, obtemos a *Desigualdade de Cauchy-Schwarz* em  $\mathbb{R}^n$

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.23)$$

Agora, vamos tomar duas funções  $f$  e  $g$  em  $\mathbf{L}^2([a, b])$ . Com um cálculo totalmente análogo ao feito anteriormente, apenas substituindo  $a_i$  por  $f(x)$ ,  $b_i$  por  $g(x)$  e a soma usual pela integral de Riemann no intervalo  $[a, b]$ , obtemos a *desigualdade de Cauchy-Schwarz para funções de quadrado integrável* dada por

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

### 4.4.3 Desigualdade de Minkowski

Uma outra desigualdade que também utilizaremos é a *Desigualdade de Minkowski*, ou também chamada *Desigualdade Triangular*. Consideremos dois vetores  $a, b \in \mathbb{R}^n$  arbitrários com  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  e  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ . Sejam  $|a|$  e  $|b|$  suas respectivas normas. Então a desigualdade triangular é dada por

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Visualmente em  $\mathbb{R}^2$  temos o seguinte



Figura 4.3

Consideremos o seguinte produto notável

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a_i^2 + 2a_i b_i + b_i^2) = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2t \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^n b_i^2 \\ &= \left[ \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2, \end{aligned}$$

e, daí, segue-se que

$$\left[ \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Isso é equivalente a dizer que  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .

Sejam  $f, g \in \mathbf{L}^2([a, b])$ . Analogamente, é possível mostrar a desigualdade de Minkowski para funções de quadrado integrável. Para tanto, basta apenas utilizar a desigualdade de Cauchy-Schwarz em  $\mathbb{R}^n$  na seguinte expressão

$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx + 2 \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b |g(x)|^2 dx,$$

obtendo

$$\left[ \int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[ \int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ \int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}},$$

que é a *Desigualdade de Minkowski* para funções de quadrado integráveis.

**Proposição 4.4.2.** *Seja  $f$  uma função em  $\mathbf{L}^2([a, b])$ . Então existe uma sequência de funções contínuas  $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$ , tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)|^2 dx = 0.$$

*Demonstração.*

1. Suponhamos inicialmente que  $f$  seja limitada. Como por hipótese  $f \in \mathbf{L}^2([a, b])$  então temos que  $f \in \mathbf{L}^1([a, b])$ . Isso deve-se a seguinte expressão

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq (b - a)^{1/2} \left[ \int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}},$$

onde utilizamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para integrais tomando  $g(x) = 1$ . Pelo Teorema (4.1.1), temos que para  $n \in \mathbb{N}$  existe uma sequência de funções contínuas  $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$  tal que

$$\int_a^b |f(x) - \psi_n(x)| dx < \frac{1}{2Mn},$$

onde  $M > 0$  é uma constante tal que  $|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$ , e, além disso, como  $\psi_n$  aproximam  $f$  então temos  $|\psi_n(x)| \leq M$ . Disso, segue que

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)|^2 dx &= \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)| |f(x) - \psi_n(x)| dx \\ &\leq \int_a^b (|f(x)| + |\psi_n(x)|) |f(x) - \psi_n(x)| dx \\ &\leq 2M \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)| dx < 2M \frac{1}{2Mn} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)|^2 dx = 0.$$

2. Suponhamos que  $f$  não seja limitada. Por simplicidade vamos considerar o caso em que  $f$  seja ilimitada apenas nas vizinhanças de  $a$  e  $b$ . Então dado  $\varepsilon > 0$ ,

tomemos  $\delta > 0$ , de tal modo que

$$\int_a^{a+\delta} |f(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad \int_{b-\delta}^b |f(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como acabamos de mostrar, existe uma função  $\psi : [a + \delta, b - \delta] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, com  $\psi(a + \delta) = \psi(b - \delta) = 0$  tal que

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sendo assim, tomando  $\delta = \frac{1}{n}$  com  $n \in \mathbb{N}$  e definindo

$$\psi_n = \begin{cases} 0, & \text{se } a \leq x \leq a + \frac{1}{n}, \\ \psi(x), & \text{se } a + \frac{1}{n} \leq x \leq b - \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{se } b - \frac{1}{n} \leq x \leq b, \end{cases}$$

obtem-se

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)|^2 dx &= \int_a^{a+\frac{1}{n}} |f(x) - \psi_n(x)|^2 dx + \int_{a+\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n}} |f(x) - \psi_n(x)|^2 dx + \\ &\quad + \int_{b-\frac{1}{n}}^b |f(x) - \psi_n(x)|^2 dx \\ &= \int_a^{a+\frac{1}{n}} |f(x)|^2 dx + \int_{a+\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n}} |f(x) - \psi(x)|^2 dx + \int_{b-\frac{1}{n}}^b |f(x)|^2 dx \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

para algum  $n$  suficientemente grande. Portanto temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)|^2 dx = 0.$$

■

A partir desses resultados obtidos podemos finalmente demonstrar o seguinte teorema que estabelece condições que garantem convergência uniforme da série de Fourier

**Teorema 4.4.1** (Primeiro Teorema sobre a Convergência Uniforme da Série de Fourier). *Seja  $f$  uma função periódica de período  $2L$ , contínua e com derivada primeira de quadrado integrável, ou seja,  $f' \in \mathbf{L}^2([-L, L])$ . Então, a série de Fourier da  $f$  converge uniformemente para  $f$ .*

*Demonstração.* Vamos considerar as séries de Fourier da  $f$  dada por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right)$$

e da  $f'$  dada por

$$\frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a'_n \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + b'_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right).$$

Lembremo-nos das expressões que relacionam os coeficientes  $a_n$  com  $b'_n$  e  $b_n$  com  $a'_n$  dadas por (3.14) e (3.15) respectivamente. Perceba que

$$\left| a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right| \leq |a_n| \quad \text{e} \quad \left| b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right| \leq |b_n|$$

desde que  $\left| \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right| \leq 1$  e  $\left| \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right| \leq 1$ .

Mostraremos agora que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$  converge. Das expressões (3.14) e (3.15) teremos

$$\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|) = \sum_{k=1}^n \left( \left| \frac{L}{k\pi} a'_k \right| + \left| \frac{L}{k\pi} b'_k \right| \right) = \frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (|a'_k| + |b'_k|).$$

Segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz em  $\mathbb{R}^n$  que

$$\frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (|a'_k| + |b'_k|) \leq \frac{L}{\pi} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{k=1}^n (|a'_k| + |b'_k|)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Usando agora o fato de que  $(|a| + |b|)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{L}{\pi} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{k=1}^n (|a'_k| + |b'_k|)^2 \right]^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{L}{\pi} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{k=1}^n 2(|a'_k|^2 + |b'_k|^2) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\sqrt{2}L}{\pi} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{k=1}^n (|a'_k|^2 + |b'_k|^2) \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Sendo assim, chegamos na seguinte majoração

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \leq \frac{\sqrt{2}L}{\pi} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} (|a'_k|^2 + |b'_k|^2) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Porém, o segundo membro da desigualdade acima converge devido a desigualdade de

Bessel dada em (4.20). De fato, da desigualdade de Bessel temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \frac{a_0^2}{2}.$$

Lembre que  $a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$ , logo

$$\frac{a_0^2}{2} = \frac{1}{2L^2} \int_{-L}^L f(x)^2 dx = \frac{1}{2L^2} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx.$$

Substituindo na desigualdade de Bessel obtemos a seguinte majoração

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{2L-1}{2L^2} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx.$$

Como a função  $f'$ , por hipótese, é uma função que pertence ao espaço  $\mathbf{L}^2([-L, L])$  e a série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  é convergente, devemos ter que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \leq \frac{\sqrt{2}L}{\pi} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{2L-1}{2L^2} \int_{-L}^L |f'(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Por fim,

$$\left| \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right) \right| \leq \frac{|a_0|}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty.$$

Concluimos então que pelo Teste M de Weierstrass, a série de Fourier da função  $f$  converge uniforme e absolutamente. ■

Há também um Segundo Teorema da Convergência uniforme da Série de Fourier. Porém para demonstrá-lo, utilizaremos o seguinte lema.

**Lema 4.4.1.** *Seja  $\psi$  uma função periódica de período  $2L$  dada por*

$$\psi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{L}\right), & -L \leq x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{L}\right), & 0 < x \leq L. \end{cases} \quad (4.24)$$

*Então a série de Fourier de  $\psi$  converge uniformemente para  $\psi$  em qualquer intervalo que não possua pontos da forma  $2Ln$ , onde  $n \in \mathbb{Z}$ .*

*Demonstração.* Calcularemos a série de Fourier da função  $\psi$ . Note que a função  $\psi$  é ímpar, pois  $\psi(-x) = -\psi(x)$ , e, em razão disso, a série de Fourier de  $\psi$  deve ser uma

série em senos. Calculando então os coeficientes  $b_n$  teremos

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \psi(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{1}{n\pi}. \end{aligned}$$

Dessa forma, a série de Fourier da função  $\psi$  será

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (4.25)$$

Precisamos provar que essa série converge uniformemente para qualquer  $\delta > 0$  tal que  $0 < \delta \leq |x| \leq L$ . Para isso, mostraremos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} \quad (4.26)$$

converge uniformemente, onde  $\theta \in [\varepsilon, \pi]$ , para algum  $\varepsilon > 0$  qualquer, visto que a série (4.25) é obtida da parte imaginária da série (4.26) quando tomamos  $\theta = \frac{\pi x}{L}$ . Consideremos então a função  $E_n(\theta)$  dada por

$$E_n(\theta) = \sum_{k=1}^n e^{ik\theta}.$$

Logo

$$\sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} [E_k(\theta) - E_{k-1}(\theta)], \quad (4.27)$$

e, fazendo uma mudança de índices teremos

$$\sum_{k=m}^n \frac{1}{k} E_{k-1}(\theta) = \sum_{j=m-1}^{n-1} \frac{1}{j+1} E_j(\theta).$$

A partir disso, podemos chegar facilmente na seguinte expressão

$$\sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=m}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) E_k(\theta) + \frac{1}{n+1} E_n(\theta) - \frac{1}{m} E_{m-1}(\theta). \quad (4.28)$$

Para tanto, utilizamos a *fórmula de Abel de adição por partes* que é dada por

$$\sum_{k=m}^n a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=m}^n (a_k - a_{k+1}) B_k + \frac{1}{n+1} B_n - \frac{1}{m} B_{m-1},$$



onde  $(a_n)$  e  $(b_n)$  são duas sequências e  $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ . Substituindo  $a_n = \frac{1}{n}$  e  $B_n = E_n(\theta)$  obtemos diretamente a expressão (4.28).

Procedendo com um argumento semelhante ao usado para obter o valor de  $S_n(\theta)$  em (4.17), teremos que para  $0 < \theta < 2\pi$ ,

$$E_n(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

e, tomando os valores absolutos, devemos ter

$$|E_n(\theta)| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|} = \frac{2}{|e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}|} = \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Portanto, segue de (4.28) que

$$\left| \sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left[ \sum_{k=m}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m} \right] = \frac{2}{m \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Logo, para  $0 < \varepsilon \leq \theta \leq \pi$ , temos

$$\left| \sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \frac{2}{m \text{sen}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)},$$

e daí, pelo critério de Cauchy, a série em (4.26) converge uniformemente, o que por consequência, implica que a série em (4.25) converge uniformemente para  $\delta > 0$  onde  $\delta \leq |x| \leq L$ . ■

A partir desse lema podemos provar o seguinte teorema.

**Teorema 4.4.2** (Segundo Teorema sobre a Convergência Uniforme da Série de Fourier). *Seja  $f$  uma função periódica de período  $2L$ , seccionalmente contínua e tal que  $f' \in \mathbf{L}^2([-L, L])$ . Então, a série de Fourier da  $f$  converge uniformemente para  $f$  em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade da  $f$ .*

*Demonstração.* Sejam  $x_1, \dots, x_k$  os pontos de descontinuidade da função  $f$  no intervalo  $[-L, L]$ . Definamos  $\omega_1, \dots, \omega_k$  os saltos da  $f$  nesses pontos, ou seja,  $\omega_i = f(x_i + 0) - f(x_i - 0)$ . A partir disso, temos que a função  $\omega_i \psi(x - x_i)$  é descontínua em todos os pontos da forma  $x_i + 2Ln$ , onde  $n \in \mathbb{Z}$  e os saltos nesses pontos é  $\omega_i$  e a função  $\psi$ , é a mesma função do enunciado do lema anterior dada por (4.24). Observe que a função  $g_i(x) = f(x) - \omega_i \psi(x - x_i)$  é contínua em todos os pontos em que  $f$  é contínua e em todos os pontos da forma  $x_i + 2Ln$ , onde  $n \in \mathbb{Z}$ . Criamos então uma função com menos descontinuidades que a função original  $f$ . Repetindo esse mesmo

processo  $k$  vezes, podemos definir a seguinte função

$$h(x) = f(x) - \sum_{i=1}^k \omega_i \psi(x - x_i)$$

que é contínua.

Aplicando agora o Primeiro Teorema sobre a Convergência Uniforme da Série de Fourier, teremos que a série de Fourier da função  $h$  deve convergir uniformemente para  $h$  em toda a reta. Do lema anterior, temos que a série de Fourier da função  $\psi(x - x_i)$  converge uniformemente em qualquer intervalo fechado que não possua pontos da forma  $x_i + 2Ln$ . Como temos

$$f(x) = h(x) + \sum_{i=1}^k \omega_i \psi(x - x_i),$$

então a série de Fourier da  $f$  deve necessariamente ser a série de Fourier das funções  $h(x)$  e  $\omega_i \psi(x - x_i)$ , onde  $i = 1, \dots, k$ , e, portanto, ela converge uniformemente em todo intervalo fechado que não possua pontos da forma  $x_i + 2Ln$ , onde  $i = 1, \dots, k$  e  $n \in \mathbb{Z}$ , que são os mesmos pontos de descontinuidade da função  $f$  e isso conclui a demonstração. ■

# Capítulo 5

## Solução da Equação do Calor

No Capítulo 1 quando deduzimos o problema da condução do calor em uma barra homogênea cujas extremidades são mantidas à temperatura de zero grau, vimos a necessidade de estudar a teoria das séries de Fourier. Agora vamos usar essa teoria desenvolvida para o problema da condução do calor.

### 5.1 Solução do caso homogêneo

Lembre que nosso objetivo é encontrar uma função  $u(x, t)$  definida para  $t \geq 0$  e  $0 \leq x \leq L$  tal que

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

onde a constante  $\alpha^2$  e a função  $f$  são dadas. Esse tipo de problema é chamado de *Problema de Valores Inicial e de Fronteira*, para o qual usamos a sigla PVIF. No Capítulo 1 utilizamos o Método de Separação de Variáveis e chegamos ao seguinte candidato a solução:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi x}{L} \right), \quad (5.2)$$

onde os coeficientes  $c_n$  são escolhidos de modo que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi x}{L} \right). \quad (5.3)$$

Entretanto, vimos que necessariamente os coeficientes  $c_n$  devem ser os coeficientes de Fourier da função  $f$  que está definida no intervalo  $[0, L]$  e é estendida para toda a reta

real de modo que seja uma função ímpar e periódica de período  $2L$ . Dessa maneira

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (5.4)$$

Além disso, é importante lembrar que a igualdade não é satisfeita para qualquer função  $f$ , é necessário algumas hipóteses sobre essa função. Pelo Teorema de Fourier, a igualdade (5.3) se verifica para todo  $x \in [0, L]$  se  $f$  for contínua no intervalo  $[0, L]$ ,  $f(0) = f(L) = 0$  e  $f'$  for seccionalmente contínua.

Perceba que os valores da função  $u(x, t)$  na região  $\mathcal{R} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < L, t > 0\}$  estão diretamente relacionados com as condições iniciais e de contorno. Lembre também que  $\overline{\mathcal{R}} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq L, t \geq 0\}$  é o fecho de  $\mathcal{R}$ .

**Definição 5.1.1** (Definição (I) de Solução de PVIF). Uma função  $u : \overline{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma *solução do PVIF* (5.1) se ela for contínua em  $\overline{\mathcal{R}}$ , tiver derivadas parciais  $u_t$  e  $u_{xx}$  em  $\mathcal{R}$ , e satisfazer as três relações em (5.1).

Essa definição de solução é bem natural e exige que a condição inicial  $f(x)$  seja uma função contínua e  $f(0) = f(L) = 0$ . Contudo, a distribuição inicial pode não ser uma função contínua. Por exemplo, se a barra inicialmente estiver a uma temperatura contante de  $f(x) = 30^\circ\text{C}$ . Ou ainda, se duas barras de mesmo material (homogêneo), onde uma está à uma temperatura inicial de  $30^\circ\text{C}$  e a outra à  $100^\circ\text{C}$ , postas em contato em uma de suas extremidades, formando assim, um único sistema constituído de uma barra.

Precisamos estabelecer uma definição de solução para nosso PVIF que atenda esse tipo de situação inicial. Definamos então a região  $\widehat{\mathcal{R}} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq L, t > 0\}$ . Note que para contornarmos esse problema da continuidade da função  $f$ , precisaremos abrir mão da igualdade (5.3), pois não poderemos utilizar o Teorema de Fourier. Porém, ainda é possível calcular os coeficientes  $c_n$  para uma grande classe de funções  $f$ , por exemplo, se  $f$  e  $|f|$  forem integráveis, e, em particular,  $f$  seccionalmente contínua. Temos portanto que o candidato (5.2) ainda pode ser solução do nosso problema (5.1).

**Definição 5.1.2** (Definição (II) de Solução do PVIF). Uma função contínua  $u : \widehat{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma *solução do PVIF* (5.1), se

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t) \varphi(x) dx = \int_0^L f(x) \varphi(x) dx, \end{cases} \quad (5.5)$$

para toda função  $\varphi$  seccionalmente contínua no intervalo  $[0, L]$ .

Perceba que a Definição (II) é uma extensão da Definição (I), ou seja, se o PVIF (5.1) possui solução no sentido da definição (I) então possui solução no sentido de (II).

Precisamos ver que se verifica o seguinte limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t) \varphi(x) dx = \int_0^L f(x) \varphi(x) dx.$$

Seja  $\varphi$  uma função seccionalmente contínua no intervalo  $[0, L]$  e sejam  $[x_{j-1}, x_j]$ , para  $j = 1, \dots, k$ , intervalos disjuntos que formam uma partição do intervalo  $[0, L]$  e tais que a função  $\varphi$  seja contínua em cada um desses intervalos. Observe que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(x, t) \varphi(x) dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \varphi(x) dx,$$

para cada intervalo  $[x_{j-1}, x_j]$  e isso decorre do fato de que a função  $u(x, t) \varphi(x)$  é uniformemente contínua no conjunto  $\{(x, t); x_{j-1} \leq x \leq x_j, 0 \leq t \leq 1\}$ .

**Teorema 5.1.1.** *Se  $f$  for de quadrado integrável em  $[0, L]$ , então a expressão (5.2) define uma função em  $\widehat{\mathcal{R}}$  que é solução do PVIF (5.1) no sentido (II).*

*Demonstração.* Queremos mostrar que a função

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi x}{L} \right),$$

define uma solução no sentido (II) para o PVIF (5.1) no conjunto  $\widehat{\mathcal{R}}$ .

Inicialmente mostraremos que  $u(x, t)$  é contínua em  $\widehat{\mathcal{R}}$  e, para isso, será suficiente mostrar que a série acima converge uniformemente em qualquer sub-retângulo  $\overline{\mathcal{R}}_{12} = \{(x, t) : 0 \leq x_1 \leq x \leq x_2 \leq L, 0 < t_1 \leq t \leq t_2 < \infty\}$  de  $\widehat{\mathcal{R}}$ . Note que podemos majorar a série dada em  $u(x, t)$  pela série  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda n^2}$  que converge pelo critério da razão, onde  $\lambda = \frac{\pi^2 \alpha^2 t_1}{L^2}$ . Segue do Teste M de Weierstrass que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi x}{L} \right),$$

converge uniformemente no retângulo  $\overline{\mathcal{R}}_{12}$  o que, pela Proposição (2.2.1), implica que a função  $u(x, t)$  define uma função contínua no retângulo  $\widehat{\mathcal{R}}$ . Como a convergência é uniforme, pela Proposição (2.2.3), podemos derivar a série termo a termo, chegando em

$$u_t = -\frac{\pi^2 \alpha^2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^2 e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi x}{L} \right)$$

e também,

$$u_x = \frac{\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} c_n n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \cos \left( \frac{n \pi x}{L} \right).$$

Para essa última série, podemos usar o mesmo raciocínio feito anteriormente, utilizando a série  $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-\lambda n^2}$ . Do Teste M de Weierstrass segue que a série acima converge uniformemente. Logo, podemos novamente derivar em relação variável  $x$ , obtendo

$$u_{xx} = -\frac{\pi^2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^2 e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Temos que as séries em  $u_t$  e  $u_{xx}$  convergem uniformemente, pois podem ser majoradas pela série  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\lambda n^2}$ , que converge pelo teste da razão onde  $\lambda = \frac{\pi^2 \alpha^2 t_1}{L^2}$ . Da uniformidade da convergência, segue que  $u_t$  e  $u_{xx}$  são contínuas em  $\widehat{\mathcal{R}}$ .

Precisamos ainda verificar que a função  $u(x, t)$  satisfaz as condições de fronteira do problema (5.1). De fato,

$$u(0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \operatorname{sen}(0) = 0,$$

$$u(L, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \operatorname{sen}(n\pi) = 0.$$

Logo  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ .

Por fim, mostraremos que para qualquer função  $\varphi$  seccionalmente contínua no intervalo  $[0, L]$ , a função  $u(x, t)$  satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t) \varphi(x) dx = \int_0^L f(x) \varphi(x) dx.$$

Sejam então  $b_n$  os coeficientes da série de Fourier em senos da função  $\varphi$ , estendida como função ímpar e periódica de período  $2L$ . Logo a série de Fourier de  $\varphi$  será dada por  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$ , onde

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx.$$

Como  $\varphi$  é uma função seccionalmente contínua, então segue que ela é limitada em cada subintervalo de  $[0, L]$  em que ela é contínua, além disso, os limites laterais existem para todo ponto do intervalo  $[0, L]$  e, por isso, segue que  $\varphi$  é de quadrado integrável. Sendo assim, como por hipótese  $f$  é de quadrado integrável, segue da desigualdade de Bessel (4.20) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |\varphi(x)|^2 dx < \infty \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx < \infty. \quad (5.6)$$

Por consequência disso teremos

$$\int_{-L}^L \varphi(x)f(x)dx = \int_{-L}^L \left[ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right] \left[ \sum_{m=1}^{\infty} c_m \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] dx.$$

Tomando

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n(x) = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right] \left[ \sum_{m=1}^{\infty} c_m \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right]$$

onde

$$d_n(x) = \sum_{k=1}^n b_k \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi x}{L} \right) c_{n+1-k} \operatorname{sen} \left( \frac{(n+1-k)\pi x}{L} \right)$$

e utilizando o fato de que  $(|b_n| - |c_n|)^2 \geq 0$ , ou seja,  $|b_n||c_n| \leq \frac{1}{2}(|b_n|^2 + |c_n|^2)$ , devemos ter que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} d_n(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |d_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n||c_n| \leq \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \right).$$

Entretanto, vimos que essas duas últimas séries convergem pela desigualdade de Bessel em (5.6) e, pelo Teste M de Weierstrass, segue que  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n(x)$  converge uniformemente. Logo devemos ter pela Proposição (2.2.2) e pela linearidade da integral que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \sum_{n=1}^{\infty} d_n(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L \left[ \sum_{k=1}^n b_k \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi x}{L} \right) c_{n+1-k} \operatorname{sen} \left( \frac{(n+1-k)\pi x}{L} \right) \right] dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n b_k c_{n+1-k} \left[ \int_{-L}^L \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{(n+1-k)\pi x}{L} \right) dx \right]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Pela relação de ortogonalidade em (3.4) segue que

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{(n+1-k)\pi x}{L} \right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par,} \\ L, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Sendo assim, reindexando de modo conveniente a série em (5.7) tem-se

$$\int_{-L}^L \sum_{n=1}^{\infty} d_n(x) dx = L \sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n.$$

Como ambas funções  $\varphi$  e  $f$  são ímpares segue da Proposição (3.5.1) que  $\varphi(x)f(x)$  é

uma função par e, pela Proposição (3.5.2), teremos

$$\int_{-L}^L \varphi(x)f(x)dx = 2 \int_0^L \varphi(x)f(x)dx.$$

Segue portanto que

$$\int_0^L \varphi(x)f(x)dx = \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n.$$

Por outro lado, pela Proposição (2.2.2)

$$\begin{aligned} \int_0^L u(x,t)\varphi(x)dx &= \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \varphi(x)dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \varphi(x)dx. \end{aligned}$$

Pela expressão dos coeficientes de Fourier  $b_n$  da função  $\varphi$  temos

$$\begin{aligned} \int_0^L u(x,t)\varphi(x)dx &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \int_0^L \varphi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \left[ \frac{1}{2} \int_{-L}^L \varphi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \frac{L}{2} \left[ \frac{1}{L} \int_{-L}^L \varphi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] \\ &= \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} b_n. \end{aligned}$$

Observe que pela desigualdade  $|b_n||c_n| \leq \frac{1}{2}|b_n^2 + c_n^2|$ , devemos ter

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n||c_n| \leq \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 + c_n^2 \right] = \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \right].$$

As duas últimas séries na desigualdade acima convergem devido a desigualdade de Bessel e isso implica pelo Teste M de Weierstrass que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2}$



converge uniformemente para  $t \geq 0$ . Logo, aplicando o limite com  $t \rightarrow 0$  obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t) \varphi(x) dx &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \\ &= \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n \lim_{t \rightarrow 0} (e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2}) \\ &= \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n \\ &= \int_0^L f(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t) \varphi(x) dx = \int_0^L f(x) \varphi(x) dx.$$

Concluimos então que a função  $u(x, t)$  define uma solução do PVIF (5.1) no sentido (II). ■

*Observação 5.1.1.* Como as séries da forma  $\sum_{n=1}^{\infty} n^j c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$  para  $j = 0, 1, 2, \dots$ , convergem uniformemente em um sub-retângulo  $\overline{\mathcal{R}}_{12}$ , então segue que a função  $u(x, t)$  dada por (5.2) define uma função infinitamente diferenciável em  $\widehat{\mathcal{R}}$ .

**Teorema 5.1.2.** *Seja  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua com  $f(0) = f(L) = 0$  e tal que a derivada  $f'$  exista em  $[0, L]$  e esteja em  $\mathbf{L}^2([0, L])$ . Então a expressão (5.2) define uma função contínua em  $\overline{\mathcal{R}}$ , que é solução do PVIF (5.1).*

*Demonstração.* Como  $f$  é contínua, então  $f$  é integrável e, além disso,  $f \in \mathbf{L}^2([0, L])$ . Consequentemente pode-se aplicar o Teorema (5.1.1) e concluir que a expressão (5.2) define uma solução no sentido (II) para o PVIF (5.1). Então, para provar esse teorema basta mostrarmos que a função  $u(x, t)$  definida por (5.2) é contínua em  $t \geq 0$ .

Observe que podemos majorar a série em (5.2) da seguinte forma

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|, \quad \forall (x, t) \in \overline{\mathcal{R}}.$$

Vejamos que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$  converge em  $\overline{\mathcal{R}}$ . Seja  $d_n$  o coeficiente de Fourier da função  $f'$  estendida para uma função par, periódica de período  $2L$  e cuja série de Fourier é

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Lembremos da relação (3.15) da Seção 6 do Capítulo 3. A partir dessa relação, chega-

mos que

$$c_n = \frac{L}{n\pi} d_n.$$

Da desigualdade  $|a||b| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ , segue que  $|c_n| \leq \frac{1}{2} \left( \frac{L^2}{n^2\pi^2} + d_n^2 \right)$ , e, daí, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \leq \frac{L^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2.$$

Note que a primeira série no segundo membro da desigualdade acima é convergente. Já a segunda série, temos da desigualdade de Bessel, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \leq \int_0^L |f'(x)|^2 dx$$

e como, por hipótese,  $f'$  é de quadrado integrável segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty, \quad \forall (x, t) \in \overline{\mathcal{R}}.$$

Concluimos então que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$  converge uniformemente em  $\overline{\mathcal{R}}$ , e, portanto, define uma função contínua em  $\overline{\mathcal{R}}$  que é solução do PVIF (5.1). ■

Com esse último teorema mostramos que o candidato a solução (5.2) é de fato solução do nosso problema (5.1), o qual abordamos no Capítulo 1. No entanto, vamos mostrar ainda que a solução é única e, além disso, podemos generalizar as condições de fronteira do problema.

## 5.2 Unicidade da solução

Suponhamos que  $u_1(x, t)$  e  $u_2(x, t)$  sejam duas soluções do PVIF (5.1) no sentido (I). Então, a função  $u = u_1 - u_2$  é contínua em  $\overline{\mathcal{R}}$  e satisfaz

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, & 0 < x < L \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t), & t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq L. \end{cases} \quad (5.8)$$

A unicidade de solução do PVIF (5.1) no sentido (I) estará provada se conseguirmos mostrar que as relações (5.8) implica  $u \equiv 0$ . Contudo, isso é consequência do seguinte teorema.

**Teorema 5.2.1** (Princípio de Máximo-Mínimo). *Seja  $u(x, t)$  uma função contínua no retângulo  $\overline{\mathcal{R}}_{12} = \{(x, t) : x_1 \leq x \leq x_2, t_1 \leq t \leq t_2\}$  e tal que satisfaça  $u_t = \alpha^2 u_{xx}$  para*

$x_1 < x < x_2$  e  $t_1 < t < t_2$ . Então o máximo de  $u$  é assumido em um dos seguintes lados de  $\overline{\mathcal{R}}_{12}$ :

$$\begin{aligned} l_1 &= \{x = x_1, t_1 \leq t \leq t_2\}, & l_2 &= \{x_1 \leq x \leq x_2, t = t_1\}, \\ l_3 &= \{x = x_2, t_1 \leq t \leq t_2\}. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Sejam  $M$  o máximo da função  $u(x, t)$  no retângulo  $\overline{\mathcal{R}}_{12}$  e  $m$  o máximo da função  $u(x, t)$  em  $l_1 \cup l_2 \cup l_3$ . Mostraremos que  $M = m$ . Suponhamos então, por absurdo, que  $M > m$  e considere  $(x_0, t_0) \in \overline{\mathcal{R}}_{12} \setminus (l_1 \cup l_2 \cup l_3)$  tal que  $u(x_0, t_0)$  é um ponto de máximo. Definamos a função  $v$  dada por

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{M - m}{4L^2}(x - x_0)^2, \quad (5.9)$$

onde  $L = x_2 - x_1$ . Como em  $l_1 \cup l_2 \cup l_3$  temos

$$v(x, t) \leq m + \frac{M - m}{4L^2}L^2 < M,$$

e, além disso,  $v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M$ , então o máximo de  $v$  é assumido em um ponto  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \overline{\mathcal{R}}_{12} \setminus (l_1 \cup l_2 \cup l_3)$ .

Seja  $l_4 = \{x_1 \leq x \leq x_2, t = t_2\}$ , então se  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \overline{\mathcal{R}}_{12} \setminus (l_1 \cup l_2 \cup l_3 \cup l_4)$ , ou seja, no retângulo  $\overline{\mathcal{R}}_{12}$  sem as fronteiras, teremos pela definição de ponto de máximo que  $\nabla v(\bar{x}, \bar{t}) = (v_x(\bar{x}, \bar{t}), v_t(\bar{x}, \bar{t})) = (0, 0)$ , em particular  $v_t(\bar{x}, \bar{t}) = 0$ . Além disso, sendo  $\gamma_1(x) = v(x, \bar{t})$  definida no intervalo  $(x_1, x_2)$  devemos ter que  $\gamma_1$  terá valor máximo local em  $x = \bar{x}$ , e portanto segue que  $v_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) \leq 0$ . Por outro lado, se  $(\bar{x}, \bar{t}) \in l_4$  então definamos  $\gamma(t) = (\bar{x}, \bar{t} + t)$  onde  $t \in (-\delta, 0]$ . Perceba que a função  $v(\gamma(t))$  é não decrescente e assume valor máximo quando  $t = 0$ . Por consequência disso, segue da regra da cadeia que

$$0 \leq \frac{d}{dt}v(\gamma(t)) = v_x(\gamma(t)) \cdot 0 + v_t(\gamma(t)) \cdot 1 = v_t(\bar{x}, \bar{t} + t), \quad \forall t \in (-\delta, 0].$$

Portanto teremos para  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \overline{\mathcal{R}}_{12} \setminus (l_1 \cup l_2 \cup l_3)$  que

$$v_t(\bar{x}, \bar{t}) \geq 0, \quad \text{e} \quad v_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) \leq 0. \quad (5.10)$$

Por outro lado, da expressão (5.9) teremos que

$$v_t(\bar{x}, \bar{t}) = u_t(\bar{x}, \bar{t}),$$

$$v_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) = u_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) + \frac{M - n}{L^2}.$$

Como a função  $u$  satisfaz a equação do calor, então

$$v_t(\bar{x}, \bar{t}) = \alpha^2 v_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) - \alpha^2 \frac{M - m}{L^2} < \alpha^2 v_{xx}(\bar{x}, \bar{t}),$$

o que contradiz as desigualdades em (5.10). Portanto a função  $u$  assume máximo em  $l_1 \cup l_2 \cup l_3$ , o que conclui a demonstração. ■

*Observação 5.2.1.* É possível provar que o mínimo da função  $u(x, t)$  também é atingido em  $l_1 \cup l_2 \cup l_3$  apenas observando que  $-u$  também satisfaz a Equação do Calor e tomando  $\min(u) = -\max(-u)$ , onde  $\min(u)$  é o mínimo e  $\max(u)$  é o máximo de  $u$ .

A partir do Princípio de Máximo-Mínimo acima, vamos demonstrar alguns resultados sobre a unicidade de solução do problema (5.1).

**Teorema 5.2.2.** *Seja  $f$  uma função de quadrado integrável em  $[0, L]$ . Então a solução do PVFI (5.1) no sentido (I), caso exista, é única.*

*Demonstração.* Sejam  $u_1(x, t)$  e  $u_2(x, t)$  soluções do PVIF (5.1) no sentido (I). Seja  $u = u_1 - u_2$ , então da continuidade  $u_1$  e  $u_2$  então  $u$  é contínua e satisfaz a equação do calor, pois como  $(u_i)_t = \alpha^2 (u_i)_{xx}$  para  $i = 1, 2$ , então

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= (u_1(x, t) - u_2(x, t))_t \\ &= (u_1)_t(x, t) - (u_2)_t(x, t) \\ &= \alpha^2 (u_1)_{xx}(x, t) - \alpha^2 (u_2)_{xx}(x, t) \\ &= \alpha^2 (u_1(x, t) - u_2(x, t))_{xx} \\ &= \alpha^2 u_{xx}(x, t). \end{aligned}$$

Além disso,  $u$  também satisfaz as condições de fronteira, pois como  $u_i(0, t) = u_i(L, t) = 0$  para  $i = 1, 2$ , então

$$u(0, t) = u_1(0, t) - u_2(0, t) = 0, \quad \text{e} \quad u(L, t) = u_1(L, t) - u_2(L, t) = 0.$$

Assim,  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ . Temos também que  $u_i(x, 0) = f(x)$  para  $i = 1, 2$ , logo

$$u(x, 0) = u_1(x, 0) - u_2(x, 0) = f(x) - f(x) = 0.$$

Do Teorema (5.2.1), segue que  $u \equiv 0$  e portanto  $u_1 = u_2$ . ■

Para a unicidade da solução no sentido (II) enunciamos o seguinte teorema.

**Teorema 5.2.3.** *Seja  $f$  uma função de quadrado integrável em  $[0, L]$ . Então a solução do PVIF (5.1) no sentido (II) é única.*

*Demonstração.* Já mostramos que  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi x}{L} \right)$  é solução do PVIF (5.1) e  $c_n$  é conforme (5.4). Mostraremos agora que se uma função  $u$  for solução do PVIF (5.1) no sentido (II), então  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi x}{L} \right)$ .

Temos que a função  $u(x, t)$  é contínua para  $t > 0$  e diferenciável para  $x \in [0, L]$ , então

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi x}{L} \right), \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

onde  $b_n(t)$  é coeficiente de Fourier de uma série de senos, logo

$$b_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L u(x, t) \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi x}{L} \right) dx,$$

e, conseqüentemente

$$b'_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L u_t(x, t) \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi x}{L} \right) dx,$$

pois a função  $u_t$  é contínua para  $t > 0$ . Pelo fato de  $u$  ser solução do PVIF (5.1) segue que

$$b'_n(t) = \frac{2\alpha^2}{L} \int_0^L u_{xx}(x, t) \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi x}{L} \right) dx = -\frac{2\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^3} \int_0^L u(x, t) \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi x}{L} \right) dx,$$

logo,

$$b'_n(t) = -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} b_n(t).$$

Perceba que a expressão acima é uma EDO de primeira ordem homogênea e cuja solução é

$$b_n(t) = \beta_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2}, \quad t > 0.$$

Dessa forma, teremos que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi x}{L} \right), \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

Precisamos mostrar então que  $\beta_n = c_n$ . Para isso, considere  $\varphi(x) = \operatorname{sen} \left( \frac{m \pi x}{L} \right)$ , então

pela relação de ortogonalidade (3.4)

$$\begin{aligned} \int_0^L u(x, t)\varphi(x)dx &= \int_0^L u(x, t) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx \\ &= \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx \\ &= \int_0^L \beta_m e^{-m^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{L}{2} \beta_m e^{-m^2\pi^2\alpha^2 t/L^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t)\varphi(x)dx = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L}{2} \beta_m e^{-m^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} = \frac{L}{2} \beta_m.$$

Como  $f$  está definida em  $[0, L]$  podemos estendê-la de modo a ser ímpar e periódica de período  $2L$ . Além disso, temos que  $\varphi(x) = \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{L} \right)$  e sendo  $c_m$  os coeficientes de Fourier da  $f$  teremos

$$c_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\varphi(x)dx.$$

Logo, chegamos que

$$\frac{L}{2} c_m = \int_0^L f(x)\varphi(x)dx.$$

Porém, como  $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t)\varphi(x)dx = \int_0^L f(x)\varphi(x)dx$ , então segue que  $\beta_m = c_m$ .

Concluimos então que  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$  é solução do PVIF (5.1) no sentido (II) e, além disso, é a única solução. ■

**Teorema 5.2.4** (Continuidade da solução com os dados iniciais). *Sejam  $f_1$  e  $f_2$  funções contínuas em  $[0, L]$ , para as quais os PVIF*

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & 0 < x < L \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f_i(x), & 0 < x < L, \end{cases}$$

com  $i = 1, 2$ , têm soluções  $u_1$  e  $u_2$  no sentido (I). Então,

$$\max_{(x,t) \in \mathcal{R}} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \max_{x \in [0, L]} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

A demonstração do teorema acima decorre diretamente do Princípio de Máximo-

Mínimo em (5.2.1). Vamos utilizar esse resultado na demonstração do seguinte teorema.

**Teorema 5.2.5.** *Seja  $f$  uma função contínua em  $[0, L]$  com  $f(0) = f(L) = 0$ , então existe uma e somente uma solução do PVIF (5.1) no sentido (I).*

*Demonstração.* Pelo Teorema (5.2.2), garantimos que caso exista uma solução para o PVIF (5.1) no sentido (I), ela é única. Mostraremos então que tal solução de fato existe.

Do Teorema (5.1.1), segue que o PVIF (5.1) tem solução  $u(x, t)$  no sentido (II), onde  $u(x, t)$  está definida no retângulo  $\widehat{\mathcal{R}}$  e é dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi x}{L} \right),$$

com  $c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi y}{L} \right) dy$ . Como a série é uniformemente convergente para  $y$  fixado desde que  $(y, t) \in \widehat{\mathcal{R}}$ , podemos reescrever  $u(x, t)$  da seguinte forma

$$u(x, t) = \int_0^L \left[ \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi y}{L} \right) \right] f(y) dy, \quad (5.11)$$

onde  $(x, t) \in \widehat{\mathcal{R}}$ . Definamos agora a função

$$K(x, y, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi y}{L} \right).$$

Perceba que  $K(x, y, t)$  é uma função contínua nas três variáveis para  $t > 0$ . Logo, devemos ter que

$$u(x, t) = \int_0^L K(x, y, t) f(y) dy. \quad (5.12)$$

A ideia principal da demonstração é aproximar a função  $f$  por uma sequência de funções continuamente diferenciáveis  $f_k$ , tais que  $f_k(0) = f_k(L) = 0$ . Tal aproximação deve ser uniforme, ou seja, precisamos mostrar que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq L} |f_k(x) - f(x)| = 0$ <sup>1</sup>. Para cada  $k$  o PVIF

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & 0 < x < L \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f_k(x), & 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

tem uma solução  $u_k(x, t)$  que é contínua no retângulo  $\overline{\mathcal{R}}$  pelo Teorema (5.1.2). De (5.12) teremos que tal solução pode ser expressa como

$$u_k(x, t) = \int_0^L K(x, y, t) f_k(y) dy. \quad (5.13)$$

<sup>1</sup>Esse resultado é semelhante ao Teorema 7 demonstrado no Apêndice C do livro [4].

Aplicando agora o Teorema (5.2.4), temos

$$\max_{\overline{\mathcal{R}}} |u_k(x, t) - u_l(x, t)| \leq \max_{0 \leq x \leq L} |f_k(x) - f_l(x)|, \quad k, l \in \mathbb{Z},$$

e isso implica que existe uma função contínua  $v(x, t)$  em  $\overline{\mathcal{R}}$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x, t) = v(x, t),$$

onde o limite é uniforme. Como as funções  $f_k$  se aproximam de  $f$  de maneira uniforme então temos de (5.13) e (5.2) que

$$v(x, t) = \int_0^L K(x, y, t) f(y) dy, \quad \text{em } \widehat{\mathcal{R}}.$$

Assim, as expressões (5.12) e (5.2) implicam que  $u(x, t) = v(x, t)$  em  $\widehat{\mathcal{R}}$ . Segue diretamente de (5.2) que  $v(x, 0) = f(x)$ . Logo, a função  $v(x, t)$ , contínua em  $\overline{\mathcal{R}}$  é a solução do PVIF (5.1) no sentido (I), o que conclui a demonstração. ■

Os teoremas (5.2.2) e (5.2.3) nos garantem que se a função  $f$  for de quadrado integrável, então as soluções do PVFI (5.1) é única tanto no sentido (I) quanto no sentido (II). Já o Teorema (5.2.5), nos garante a unicidade da solução no sentido (I) apenas exigindo que a função  $f$  seja contínua no intervalo  $[0, L]$  e  $f(0) = f(L) = 0$ .

## 5.3 Solução não Homogênea

Até agora mostramos a existência e unicidade de solução do nosso PVIF (5.1). Vamos estabelecer agora outras condições de fronteira para o problema e utilizar a mesma técnica utilizada para condição de Dirichlet.

### 5.3.1 Condições de fronteira não homogêneas

Vamos considerar o problema da condução do calor em uma barra composta de um material homogêneo, cujas extremidades estão submetidas a temperaturas não nulas. Nosso problema é então determinar uma função  $u(x, t)$  tal que

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & 0 < x < L \quad t > 0, \\ u(0, t) = h_0(t), \quad u(L, t) = h_1(t), & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < L. \end{cases} \quad (5.14)$$

onde as funções  $f, h_0$  e  $h_1$  são dadas.



Para resolver esse problema vamos transformá-lo em um problema com condições de fronteira homogênea, através de uma mudança de variável que depende da função  $u$ . Suponhamos então que é possível encontrar uma função  $v(x, t)$  que possua segunda derivada contínua em  $\overline{\mathcal{R}}$  tal que  $v(0, t) = h_0(t)$  e  $v(L, t) = h_1(t)$ .

Sendo  $u$  a solução do PVIF (5.14), então a função  $w = u - v$  satisfaz o seguinte problema

$$\begin{cases} w_t = \alpha^2 w_{xx} + g(x, t), & 0 < x < L \quad t > 0, \\ w(0, t) = w(L, t) = 0, & t > 0, \\ w(x, 0) = f(x) - v(x, 0), & 0 < x < L, \end{cases} \quad (5.15)$$

onde  $g(x, t) = \alpha^2 v_{xx} - v_t$ . Se  $v$  for determinada de modo a ser solução da Equação do Calor, então teremos que  $g \equiv 0$ , e, assim, a função  $w$  será solução de um problema do tipo do PVIF (5.1).

**Exemplo 5.3.1.** Suponhamos que  $h_0(t) = T_1$  e  $h_1(t) = T_2$ , onde  $T_1$  e  $T_2$  são constantes. Se tomarmos a função  $v$  como  $v(x, t) = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)}{L}x$ , então ela satisfaz a Equação do Calor e, portanto, a função  $w$  é solução do problema

$$\begin{cases} w_t = \alpha^2 w_{xx} + g(x, t), & 0 < x < L \quad t > 0, \\ w(0, t) = w(L, t) = 0, & t > 0, \\ w(x, 0) = f(x) - T_1 - \frac{(T_2 - T_1)}{L}x, & 0 < x < L. \end{cases}$$

Como já vimos, a solução deve ser então

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi x}{L} \right),$$

onde  $c_n$  são os coeficiente de Fourier da função  $f(x) - T_1 - \frac{(T_2 - T_1)}{L}x$ . Logo, a solução do PVIF (5.14) para  $h_0(t) = T_1$  e  $h_1(t) = T_2$  é

$$u(x, t) = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)}{L}x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi x}{L} \right)$$

desde que a condição inicial seja  $f(x) - v(x, t)$ .

**Exemplo 5.3.2.** Suponhamos agora que  $h_0(t) = a_1 + a_2 t$  e  $h_1(t) = b_1 + b_2 t$ . Note que não podemos tomar  $v$  como no exemplo anterior, pois caso contrário teríamos

$$v(x, t) = h_0(t) + \frac{[h_0(t) - h_1(t)]}{L}x \implies v_{xx} = 0, \quad \text{e} \quad v_t = a_2 + \frac{(b_2 - a_2)}{L}x,$$

logo,  $v$  satisfaz as condições de fronteira mas não a Equação do Calor.

Consideremos então uma função  $\gamma(x)$  tal que  $\alpha^2 \gamma_{xx} = a_2 + \frac{x}{L(b_2 - a_2)}$  e  $\gamma(0) =$

$\gamma(L) = 0$ . A partir disso, definimos a função  $v$  dada por

$$v(x, t) = h_0(t) + \frac{x}{L}[h_1(t) - h_0(t)] + \gamma(x),$$

onde

$$\gamma(x) = \frac{a_2}{2\alpha^2}x(x - L) + \frac{b_2 - a_2}{6L\alpha^2}x(x^2 - L^2),$$

que é obtida ao integrarmos duas vezes a expressão  $\alpha^2\gamma_{xx} = a_2 + \frac{x}{L(b_2 - a_2)}$ . Assim, a função  $v$  satisfaz a Equação do Calor e as condições de fronteira  $v(0, t) = h_0(t)$  e  $v(L, t) = h_1(t)$ . Logo a função  $w = u - v$  é solução de um problema do tipo do PVIF (5.1).

De modo geral, é difícil encontrar tal função  $v$  que satisfaça essas propriedades. Se tomarmos uma função  $v$  que satisfaça as condições de fronteira  $v(0, t) = h_0(t)$  e  $v(L, t) = h_1(t)$ , então a resolução do PVIF (5.14) será reduzida à encontrar a solução do PVIF (5.15), pois,  $u = v + w$ . Contudo, o PVIF (5.15) possui condições de fronteira homogêneas, mas a equação já não é homogênea pois possuirá um termo  $g(x, t)$  a mais.

### 5.3.2 Barra sujeita a outras condições laterais

Veremos agora outros tipos de condições de fronteira envolvendo o fluxo de calor dado por  $u_x$  em uma ou em ambas extremidades da barra. Utilizaremos a mesma técnica de resolução feita no Capítulo 1.

**Exemplo 5.3.3.** Consideremos o caso em que a barra está isolada termicamente também nas extremidades, ou seja, sujeita as condições de Neumann. Precisamos então determinar a função  $u(x, t)$  em  $\overline{\mathcal{R}}$  tal que

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & 0 < x < L \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases} \quad (5.16)$$

Utilizando o Método de Separação de Variáveis, fazendo  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , obtemos

$$X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t) \iff \frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda,$$

onde  $\lambda$  é uma constante de proporcionalidade. Logo, temos as seguintes equações

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (5.17)$$

$$T'(t) - \lambda\alpha^2 T(t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (5.18)$$

Precisamos determinar  $\lambda$  de modo que as soluções da equação (5.17) satisfaçam as condições de fronteira  $X'(0) = X'(L) = 0$ , ou seja, procuramos os autovalores  $\lambda$  que satisfaçam o seguinte problema de autovalores

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \\ X'(0) = X'(L) = 0. \end{cases} \quad (5.19)$$

Temos três possibilidades para valores de  $\lambda$ :

- i) Se  $\lambda > 0$ , então podemos reescrevê-lo como  $\lambda = \mu^2$ , onde  $\mu$  é um número real positivo. Então a equação diferencial (5.19) fica da forma  $X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$ . Logo, a equação característica será  $r^2 - \mu^2 = 0$ , cuja solução é  $r = \pm\mu$ , e, portanto, a solução geral  $X(x)$  será dada por

$$X(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}.$$

Aplicando as condições de contorno teremos que  $c_1 = c_2 = 0$ , e, conseqüentemente,  $u \equiv 0$ .

- ii) Se  $\lambda = 0$ , então a equação diferencial em (5.19) fica  $X''(x) = 0$ , e, isso, implica que  $X(x) = c_1 x + c_2$  é a solução geral. Porém, aplicando as condições de contorno teremos que  $c_1 = 0$ , contudo não podemos determinar a constante  $c_2$ .

Na equação (5.18) teremos que  $T(t) = k_1$  é solução e juntando  $X(x)$  teremos que  $u(x, t) = C$ , onde  $C$  é uma contante

- iii) Se  $\lambda < 0$ , então podemos escrevê-lo como  $\lambda = -\mu^2$ , onde  $\mu$  é um número real positivo. Então a equação diferencial em (5.19) fica da forma  $X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$ . Logo, a equação característica é  $r^2 + \mu^2 = 0$ , cujas soluções são complexa o que implica que a solução geral  $X(x)$  da equação diferencial é da forma

$$X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\mu x) + c_2 \operatorname{cos}(\mu x).$$

Pelas condições de contorno chegamos que  $c_1 = 0$  e  $\mu = \frac{n\pi}{L}$ . Logo, os autovalores são  $\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$  e as autofunções associadas são  $X_n(x) = \operatorname{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ .

Já as soluções  $T(t)$  da equação (5.18) serão  $T_n(t) = e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2}$  para esses autovalores  $\lambda_n$ .

Disso, segue que as soluções fundamentais do PVIF (5.16) são

$$u_n(x, t) = e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \operatorname{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 0, 1, \dots$$

Semelhantemente ao PVIF (5.1), precisamos obter os coeficientes  $c_n$  tais que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (5.20)$$

Certamente esses coeficientes serão os coeficientes de Fourier da função  $f$  definida em  $[0, L]$  e estendida de modo a ser uma função par e periódica de período  $2L$ , ou seja,

$$c_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad e \quad c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Sendo  $c_n$  os coeficientes de Fourier e se  $f$  satisfizer as condições para a convergência uniforme da série de Fourier, então, a solução para o PVIF (5.16) será

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (5.21)$$

**Exemplo 5.3.4.** Consideremos a barra com uma de suas extremidades isolada e a outra mantida a  $0^\circ\text{C}$ . O problema agora é encontrar uma função  $u(x, t)$  definida em  $\overline{\mathcal{R}}$  tal que

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & 0 < x < L \quad t > 0, \\ u(0, t) = u_x(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases} \quad (5.22)$$

Pelo Método de Separação de Variáveis fazemos  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , e daí, chegamos no seguinte problema de autovalores

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X'(L) = 0. \end{cases} \quad (5.23)$$

Semelhantemente ao exemplo anterior, temos três possibilidades para os valores de  $\lambda$ :

- i) Se  $\lambda > 0$ , então podemos escrevê-lo como  $\lambda = \mu^2$  onde  $\mu$  é um real positivo. Logo, a equação característica da equação diferencial em (5.23) será  $r^2 - \mu^2 = 0$  e isso implica que

$$X(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}.$$

Aplicando as condições de contorno teremos que  $c_1 = c_2 = 0$ , e, portanto,  $u \equiv 0$ .

- ii) Se  $\lambda = 0$ , então a solução da equação diferencial em (5.23) será  $X(x) = c_1 x + c_2$ . Aplicando as condições de contorno teremos que  $c_1 = c_2 = 0$ , e, portanto,  $u \equiv 0$ .

- iii) Se  $\lambda < 0$ , então podemos escrevê-lo como  $\lambda = -\mu^2$  com  $\mu$  um número real positivo. A equação característica da equação diferencial em (5.23) será  $r^2 + \mu^2 =$

0 e isso implica que

$$X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\mu x) + c_2 \operatorname{cos}(\mu x).$$

Das condições de contorno teremos que  $X(0) = 0$ , ou seja,  $c_2 = 0$ . Por outro lado,  $X'(L) = c_1 \operatorname{cos}(\mu L) = 0$  e, por consequência disso  $\mu = \frac{(2n-1)\pi}{2L}$ . Logo, os autovalores  $\lambda_n$  serão  $\lambda_n = -\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , enquanto que as autofunções serão

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right).$$

Para esses valores de  $\lambda_n$  teremos que

$$T_n(t) = e^{-(2n-1)^2\pi^2\alpha^2 t/(4L^2)}.$$

Devemos ter então que as soluções fundamentais do PIVF (5.22) serão

$$u_n(x, t) = e^{-(2n-1)^2\pi^2\alpha^2 t/(4L^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right),$$

e, utilizando o Princípio de Superposição de Soluções e estendendo para soma infinita, tem-se que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(2n-1)^2\pi^2\alpha^2 t/(4L^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) \quad (5.24)$$

deve ser a solução desde que os coeficientes  $c_n$  satisfaçam

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right). \quad (5.25)$$

Então, os coeficientes  $c_n$  devem ser os coeficientes de Fourier da função  $f$  que deve ser estendida de modo a ser ímpar e periódica. Perceba que neste caso  $2L$  representa  $L$  dos exemplos anteriores. Mas, se seguirmos o mesmo raciocínio dos outros exemplos,  $f$  deveria ter período  $4L$ , porém, se isso acontecer,  $f$  não estará definida em toda reta, pois no intervalo  $[L, 2L]$  a série de  $f$  conteria todos os senos da forma  $\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ ,  $k = 1, 2$ . Como não desejamos senos com  $k$  par, definimos então  $f(x) = f(2L - x)$ , para  $x \in [L, 2L]$ , e, assim, para  $k = 2m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^{2L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{2L}\right) dx &= \int_0^{2L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{2L}\right) dx \\ &= - \int_{2L}^0 f(2L - x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi(2L - x)}{L}\right) dx \\ &= \int_0^{2L} f(x) \operatorname{sen}\left(2m\pi - \frac{m\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Utilizando a identidade trigonométrica  $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$  obtemos

$$\int_0^{2L} f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{2L}\right) dx = - \int_0^{2L} f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

e, dessa forma,

$$\int_0^{2L} f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{2L}\right) dx = 0, \quad k = 2m, \quad m = 1, 2, \dots$$

Então, a expressão (5.25) se verifica quando  $f$  for uma função contínua em  $[0, L]$  com  $f'$  seccionalmente contínua,  $f(0) = 0$ , ímpar e periódica com  $f(x) = f(2L - x)$ . Por consequência disso, segue que os coeficientes  $c_n$  serão dados por

$$c_n = \frac{2}{2L} \int_0^{2L} f(x) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) dx.$$

Portanto a função  $u(x, t)$  dada em (5.24) é solução do PVIF (5.22).

*Observação 5.3.1.* Nos dois exemplos anteriores também é possível mostrar a convergência uniforme e a unicidade das soluções de modo inteiramente análogo ao feito no problema (5.1).

# Conclusão

Conforme visto neste trabalho, dado o problema da condução do calor em uma barra unidimensional, se garantirmos a convergência uniforme da série de Fourier da função  $f$  que representa a distribuição inicial de temperatura do problema, então a solução do problema existe e é única. Vimos também que podemos tomar outras condições de fronteira e que ainda assim vale a existência e unicidade de solução.

O estudo das séries de Fourier é de grande importância para o desenvolvimento de técnicas de resolução de EDP's, visto que estão diretamente relacionadas a um dos métodos mais importantes e clássicos de resolução o qual aplicamos nesse trabalho, o *Método de Separação de Variáveis* ou *Método de Fourier*. Esse método apesar de limitado, possui uma característica muito importante que é a apresentação da expressão analítica da solução da EDP. Do ponto de vista numérico, saber a expressão analítica da solução é de grande importância para saber o quanto um método numérico se aproxima da solução original.

As séries de Fourier possuem aplicações não somente no estudo das EDP's, mas também em outras áreas como, por exemplo, a Análise Harmônica e Análise Funcional, além de diversas aplicações como previsão de eventos climáticos, acústica, propagação de ondas de rádio, compressão de arquivos MP3, JPG, AVI e muito mais. A grosso modo, tudo que possui algum tipo de periodicidade ou se propaga por meio de algum tipo de onda como é o caso do calor, luz, som, pode ter alguma relação com a série de Fourier.

A Equação do Calor é uma das equações mais importantes no estudo das EDP's lineares sendo uma representante das equações parabólicas, ou equações de difusão, que são estudadas nos cursos de EDP's.

Nesse sentido, este trabalho pode ser considerado uma introdução a resolução de Equações Diferenciais Parciais, ou ainda, uma motivação ao estudo das séries de Fourier a partir da Equação do Calor.

# Referências Bibliográficas

- [1] BARONI, Rosa Lúcia S.; OTERO-GARCIA, Sílvio Cesar. **Aspétos da História da Análise Matemática de Cauchy a Lebesgue**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014.
- [2] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 1998.
- [3] CARSLAW, Horatio S. **An Introduction to the Theory of Fourier Series an Integrals**. London: Macmillan and co.,limited, 1906.
- [4] EVANS, Lawrence C. **Partial Differential Equations**. Rhode Island: American Mathematical Society, 2010.
- [5] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise I**. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- [6] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.
- [7] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo vol. 4**. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
- [8] LIMA, Elon Lages. **Análise na Reta**. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.
- [9] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise: vol. 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.
- [10] IÓRIO JR, Rafael José; IÓRIO, Valéria de Magalhães. **Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução**. Rio de Janeiro: IMPA, 1988.
- [11] ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.