

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Thiago Kenhiti Yoshida

Séries de Fourier e o problema da corda vibrante

CURITIBA

2021

Thiago Kenhiti Yoshida

Séries de Fourier e o problema da corda vibrante

Trabalho de conclusão apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática.  
Orientador: Prof. Cleber de Medeira

Curitiba

2021

# Agradecimentos

Agradeço a Deus pelas oportunidades que me foi oferecido para estar onde estou nesse momento.

Agradeço aos meus pais Roseli Hitomi Okayama Yoshida e Getúlio Akira Yoshida por todo apoio, amor e dedicação que sempre me dão, sou muito grato a eles.

Aos meus amigos e colegas que conheci durante a graduação que estiveram comigo nos momentos bons e ruins, que me ajudaram nas minhas dificuldades e nas matérias difíceis, trazendo alegria e fazendo todos esses anos mais agradáveis e menos difíceis.

Ao PET Matemática que me proporcionou aprender muito mais do que matemática, mas também diversas coisas que será de grande utilidade para mim, além de me proporcionar amizades incríveis e experiências muito boas.

Ao meu orientador Cleber de Medeira, pela amizade, pela paciência comigo durante nosso tempo de trabalho juntos e por acreditar no meu potencial.

A todos os professores do Departamento de Matemática da UFPR que tive a oportunidade de ter aula e que contribuíram com o meu desenvolvimento acadêmico.

E agradeço também a todos aqueles que me apoiaram e que torceram pelo meu sucesso.

# Resumo

Nesse trabalho iremos estudar como obter uma solução para o problema da equação da onda, de uma corda vibrante, utilizando o método de Fourier.

# Abstract

In this work, by using the Fourier method, we will study how to find a solution for the problem of the wave equation of a vibrating string.

# Sumário

<b>1 Séries de Fourier</b>	<b>10</b>
1.1 Sequências e séries de funções	10
1.2 Funções Periódicas	13
1.3 Coeficientes de Fourier	14
1.4 Série de Fourier	17
1.5 Séries de Fourier de funções pares e ímpares	19
1.6 Cálculo de algumas séries de Fourier	20
1.7 Integração da série de Fourier	24
1.8 Estimativas dos coeficientes de Fourier	29
1.9 Forma complexa da série de Fourier	31
1.10 Identidade de Parseval	32
<b>2 Convergência das séries de Fourier</b>	<b>34</b>
2.1 Classes das funções consideradas	34
2.2 Convergência pontual da série de Fourier	38
2.3 Desigualdade de Bessel	45
2.4 Desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Minkowski	49
2.5 Convergência uniforme da série de Fourier	52
2.6 Núcleo de Dirac	56
2.7 Teorema da aproximação de Weierstrass	61
2.8 Teorema de Fejér	63
2.9 Demonstração da identidade de Parseval	67
<b>3 Equação da onda</b>	<b>72</b>
3.1 Equação da corda vibrante	72

3.2	Resolução por séries de Fourier . . . . .	76
3.3	Energia da corda vibrante . . . . .	82
3.4	Harmônicos, frequência, amplitude . . . . .	84
3.5	Equação da onda não homogênea . . . . .	87

# Introdução

Uma das equações diferenciais parciais (EDP) mais antigas e com grande influência histórica é o modelo da equação da onda, que foi desenvolvida por Jean d'Alembert em 1746 para descrever o movimento de uma corda vibrante, que é dada pela seguinte fórmula

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

onde  $u(x, t)$  denota o deslocamento vertical da corda na posição  $x$ , no tempo  $t$  e  $c$  é uma constante física.

Tomando como base essa EDP, e mais algumas outras, como a equação do calor, o matemático Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768) desenvolveu um método para expressar uma solução para esse problema. Tal método consiste em duas etapas, a primeira é realizar uma separação de variáveis, de modo a obter problemas de autovalores em equações diferenciais ordinárias que está diretamente ligada à EDP e que satisfaçam todas as condições de fronteira.

Em outras palavras buscamos uma função  $u(x, t)$  que seria igual a produto de duas funções  $F(x)$  e  $G(t)$ , ou seja, queremos que  $u(x, t) = F(x)G(t)$ .

A segunda etapa consiste em utilizar a função encontrada para compor uma função que também satisfará as condições iniciais. Dessa forma conseguimos obter um candidato à solução que é uma série onde podemos notar elementos da série de Fourier nela, mas por obtermos um candidato à solução ainda surgem questionamentos sobre ela para que ela possa realmente ser uma solução, dentre esses questionamentos tem sobre a sua convergência.

Nesse ponto, fica claro a necessidade do estudo da série de Fourier representada por

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right). \quad (2)$$

Motivados por isso, nesse trabalho, iremos estudar séries de Fourier e suas principais propriedades

no Capítulo 1. Os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em livros que tratam de equações diferenciais como [1, 3, 4, 6] e resultados auxiliares de análise podem ser encontrados em [2] e [5].

Em seguida, no Capítulo 2, iremos analisar quais são as condições necessárias para garantir a convergência pontual e também quais condições asseguram a convergência uniforme dessa série, sendo a referência principal o livro [1].

Por fim, no Capítulo 3, vamos aplicar o método de Fourier para solucionar o problema da equação da onda utilizando os resultados apresentados nos capítulos anteriores, que darão mais consistência matemática na modelagem do problema e na sua demonstração.

# Capítulo 1

## Séries de Fourier

Antes de introduzirmos a série de Fourier iremos definir algumas ferramentas e propriedades importantes para a melhor compreensão do que ocorrerá ao longo do trabalho.

### 1.1 Sequências e séries de funções

**Definição 1** (Convergência pontual). *Uma sequência de funções  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge pontualmente para a função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , se para cada  $x \in X$  a sequência numérica  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$  converge para  $f(x)$ .*

*Ou seja,  $f_n \rightarrow f$  converge pontualmente se dado  $\varepsilon > 0$  e  $x \in X$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  (que depende de  $\varepsilon$  e de  $x$ ) tal que  $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .*

**Exemplo 1.** Seja a sequência de funções  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f_n(x) = \frac{x}{n}$ . Note que essa sequência converge para a função identicamente nula, pois para cada  $x \in \mathbb{R}$  fixado, dado  $\varepsilon > 0$  basta considerar  $n_0 > x/\varepsilon$  e assim teremos que  $|f_n(x)| < \varepsilon$ , para todo  $n > n_0$ , logo  $f_n \rightarrow 0$  pontualmente.

Uma convergência mais restrita do que a convergência pontual é a convergência uniforme, que definimos agora.

**Definição 2** (Convergência uniforme). *Uma sequência de funções  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge uniformemente para a função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , quando para todo  $\varepsilon > 0$ , existir um  $n_0 \in \mathbb{N}$  (que depende apenas do  $\varepsilon$ ) tal que  $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ , para qualquer  $x \in X$ .*

Um outro modo de pensar seria no plano  $\mathbb{R}^2$ , basta considerar  $\varepsilon > 0$ , logo a faixa de raio  $\varepsilon$

em torno do gráfico de  $f$  será o conjunto

$$F(f; \varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in X, f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon\}.$$

Logo, dizer que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $X$  significa que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que o gráfico de  $f_n$ , para todo  $n > n_0$ , está contido dentro da faixa  $F(f; \varepsilon)$ .

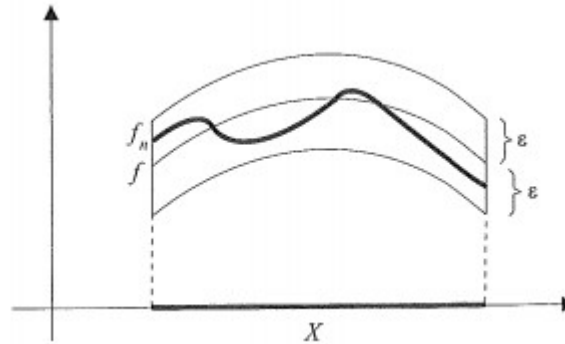


Figura 1.1: Gráfico de  $f_n$  dentro de  $F(f; \varepsilon)$

**Exemplo 2.** Seja a sequência de funções do Exemplo 1. Note que essa sequência não converge uniformemente para 0, pois não existe nenhuma faixa de raio  $\varepsilon$  em torno de  $f$  que contém o gráfico de  $f_n(x) = \frac{x}{n}$ . Por outro lado, se  $X \subset \mathbb{R}$  é um conjunto limitado e  $|x| < c$ , para todo  $x \in X$ , então  $f_n \rightarrow 0$  uniformemente em  $X$ , pois dado  $\varepsilon > 0$ , e tomarmos  $n_0 > \frac{c}{\varepsilon}$ , então  $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x)| = \frac{|x|}{n} < \frac{|x|}{n_0} < \varepsilon$ .

**Definição 3.** Podemos somar a sequência de função para cada  $n$  que tomarmos, mais ainda podemos escrever essa soma como

$$\sum_{n=1}^N f_n(x),$$

essa soma é chamada de soma parcial. Por exemplo, se  $N = 3$  teremos

$$\sum_{n=1}^3 f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x).$$

E ainda, podemos tomar a soma infinita e nesse caso teremos a série de sequências de funções, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

**Definição 4** (Convergências das séries). Uma série de funções  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ , onde  $u_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma sequência de funções reais, converge pontualmente se, dado  $\varepsilon > 0$  e  $x_0 \in X$  fixado, existe  $N \in \mathbb{N}$  que depende de  $\varepsilon$  e  $x$ , tal que  $\left| \sum_{j=n}^m u_j(x_0) \right| < \varepsilon$ , para todo  $m > n > N$ .

Já a convergência uniforme ocorre quando dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  que depende apenas de  $\varepsilon$ , tal que  $\left| \sum_{j=n}^m u_j(x) \right| < \varepsilon$ , para todo  $m > n > N$  e para todo  $x \in X$ .

Note que essa parte é bem semelhante às convergências das sequências de funções.

Agora enunciaremos uma importante ferramenta chamada de *Teste M de Weierstrass* que garante a convergência uniforme de séries de funções.

**Teorema 1** (Teste M de Weierstrass). Seja  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  uma série de funções definida  $X$ ; Agora suponha que existam constantes  $M_n \geq 0$ , tais que

$$|u_n(x)| \leq M_n,$$

para todo  $x \in X$ , e suponha também que a série numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  convirja. Logo a série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  converge uniformemente e absolutamente em  $X$ .

Segue agora algumas proposições sobre séries de funções as quais não serão demonstradas nesse texto. Essas podem ser encontradas no livro [2].

**Proposição 1.** Suponha que as funções  $u_n$  sejam contínuas e que a sua série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  convirja uniformemente. Então a soma da série  $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  também é uma função contínua.

**Proposição 2.** Suponha que as funções  $u_n$  sejam integráveis no intervalo  $I$  e que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  convirja uniformemente. Então podemos trocar de posição o somatório com a integral, ou seja,

$$\int_I \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I u_n(x) dx.$$

**Proposição 3.** Suponha que as funções  $u_n$  definidas no intervalo  $I$  sejam deriváveis e que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$  convirjam uniformemente. Suponha também que dado  $x_0 \in I$  a série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$  convirja. Então

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

## 1.2 Funções Periódicas

Iremos inicialmente relembrar a definição de função periódica.

**Definição 5.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita periódica se existe uma constante  $T > 0$  tal que  $f(x+T) = f(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Diremos nesse caso que  $f$  é  $T$ -periódica. O número positivo  $T$  é chamado de período da função  $f$  e o menor entre todos os períodos é chamado de período fundamental.

**Exemplo 3.** Dada a função  $f(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$ , podemos encontrar o período fundamental ao resolvermos  $\operatorname{sen} \frac{n\pi(x+T)}{L} = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$ .

Logo

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi T}{L} + \cos \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi T}{L} = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (1.1)$$

Assim, para  $x = \frac{L}{2n}$ , iremos obter

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cos \frac{n\pi T}{L} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}.$$

Ou seja

$$\cos \frac{n\pi T}{L} = 1. \quad (1.2)$$

Utilizando a identidade  $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ , teremos

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi T}{L} = 0. \quad (1.3)$$

Como queremos o menor  $T > 0$  que satisfaça (1.2) e (1.3), e que o período fundamental do seno e cosseno é  $2\pi$ , temos que

$$\frac{n\pi T}{L} = 2\pi.$$

Logo

$$T = \frac{2L}{n},$$

é o período fundamental tanto de  $\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$  quanto de  $\cos \frac{n\pi x}{L}$ .

### 1.3 Coeficientes de Fourier

Seja a função  $f(x)$  dada por uma série de senos e cossenos, expressa como

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right). \quad (1.4)$$

Para descobrirmos quais as relações os  $a_n$  e  $b_n$  possuem em relação à  $f$ , vamos supor que a igualdade em (1.4) é válida e que a série do segundo membro convirja uniformemente.

Logo pela Proposição 1, temos que  $f$  é contínua e portanto integrável, note também que essa função é  $2L$ -periódica. Logo integrando (1.4) obtemos

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right).$$

Então temos que

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L = 0,$$

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{-L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L = 0,$$

e

$$\int_{-L}^L dx = 2L.$$

Portanto

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)dx. \quad (1.5)$$

Pelo fato de

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0. \quad (1.6)$$

Para calcularmos os outros coeficientes utilizaremos as seguintes relações de ortogonalidade:

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0 \text{ se } n, m \geq 1; \quad (1.7)$$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L \text{ se } n = m \geq 1, \\ 0 \text{ se } n \neq m \text{ e } n, m \geq 1; \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L \text{ se } n = m \geq 1, \\ 0 \text{ se } n \neq m \text{ e } n, m \geq 1. \end{cases} \quad (1.9)$$

Para mostrar (1.7) usaremos a identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen}(a) \cos(b) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(a - b) + \operatorname{sen}(a + b)].$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{x\pi(m-n)}{L}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x\pi(m+n)}{L}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{x\pi(m-n)}{L}\right) dx + \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{x\pi(m+n)}{L}\right) dx \right). \end{aligned}$$

Chamando  $r = m - n$  e  $s = m + n$ , temos que vale (1.6), assim se verifica (1.7).

Mostremos agora (1.8). No caso  $n = m$  teremos a seguinte integral

$$\int_{-L}^L \cos^2 \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Assim, usando  $\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$ , teremos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos^2 \frac{n\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L 1 + \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_{-L}^L dx + \int_{-L}^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx \right). \end{aligned}$$

No lado direito, a primeira integral vale  $2L$  e a segunda é igual a zero por (1.6). Logo temos que para  $n = m$  a integral (1.8) vale  $L$ .

Agora vamos verificar o caso em que  $n \neq m$ . Para isso usaremos

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)].$$

O cálculo para demonstrar esse caso é semelhante ao utilizado na prova de (1.7), assim temos que (1.8) vale zero, o que conclui a demonstração.

De modo análogo ocorre a prova de (1.9). No caso em que  $n = m$  a integral fica da seguinte forma

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Assim, usando  $\operatorname{sen}^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$ , onde o cálculo é semelhante à (1.8) quando  $n = m$ , temos que essa integral vale  $L$ .

Agora quando  $n \neq m$  usamos

$$\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)].$$

E seu cálculo é obtido de modo análogo à (1.7).

Voltando aos coeficientes, se multiplicarmos a equação (1.4) por  $\cos \frac{m\pi x}{L}$  e integrando, iremos obter

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = a_m L. \quad (1.10)$$

E de modo análogo, obtemos

$$\int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = b_m L. \quad (1.11)$$

Portanto, temos que

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 0, \quad (1.12)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1. \quad (1.13)$$

**Observação 1.** O fato de ter  $\frac{1}{2}$  multiplicando o termo  $a_0$  nos garante uma única fórmula para  $a_n$  e  $b_n$ .

Logo se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  for uma função dada por (1.4), temos que os números  $a_n$  e  $b_n$ , dados em (1.12) e (1.13), são definidos como coeficientes de Fourier da função  $f$ .

## 1.4 Série de Fourier

Dada  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $2L$ -periódica, integrável e absolutamente integrável, com os coeficientes de Fourier dadas em (1.12) e (1.13), escrevemos

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right), \quad (1.14)$$

onde o lado direito é a série de Fourier de  $f$ .

Nessa seção iremos ver condições suficientes para que a função  $f$  seja igual à sua série de Fourier, além disso vamos considerar que a série convirja. Para isso precisaremos definir função seccionalmente contínua e função seccionalmente diferenciável.

**Definição 6.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é **seccionalmente contínua** se ela tiver um número finito de descontinuidades, todas de primeira espécie, em qualquer intervalo limitado, ou seja, dados  $a < b$ , existem  $a \leq a_1 < \dots < a_n \leq b$ , tal que  $f$  é contínua em cada intervalo aberto  $(a_j, a_{j+1})$ , para todo  $j = 1, \dots, n-1$  e existem os limites laterais

$$f(a_j^+) = \lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x) \quad e \quad f(a_j^-) = \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x).$$

**Observação 2.** Obviamente, toda função contínua é seccionalmente contínuas.

**Definição 7.** Uma função é dita **seccionalmente diferenciável**, se ela e a sua primeira derivada forem seccionalmente contínuas.

Perceba que  $f'$  pode não estar bem definida em toda a reta. Por exemplo,  $f'(x)$  pode não existir quando  $f$  é descontínua em  $x$ , ou ainda,  $f'(x)$  pode não existir mesmo nos pontos onde  $f$  é contínua.

**Exemplo 4.** Considere a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{se } |x| \leq 1; \\ \text{e periódica de período } 2. \end{cases}$$

Note que ela é contínua, mas ela não é seccionalmente diferenciável. Pois

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Logo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \infty.$$

Portanto temos que  $f'$  é descontínua, e a sua descontinuidade é de segunda espécie.

Enunciaremos agora o Teorema de Fourier.

**Teorema 2** (Fourier). *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente diferenciável de período  $2L$ . Então a série de Fourier da função  $f$ , dada em (1.14), converge em cada  $x$  para o valor  $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ , isto é,*

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right). \quad (1.15)$$

A demonstração do Teorema de Fourier, enunciado acima, requer vários resultados preliminares e será feita no Capítulo 2. Nesse momento vamos apenas usá-lo para apresentar alguns exemplos.

**Exemplo 5.** Calculemos a série de Fourier de  $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \pi; \\ 0, & -\pi \leq x < 0; \\ 2\pi \text{ periódica.} \end{cases}$

Primeiramente, calculamos os seus coeficientes. Começamos com  $n = 0$ , por (1.5) temos

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} 1 dx \right) = 1.$$

Agora com  $n \neq 0$ , usando (1.12) e (1.13), obtemos que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = \frac{1}{n\pi} \sin(nx) \Big|_0^{\pi} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{-1}{n\pi} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)).$$

Note que podemos reescrever  $b_n$  como  $b_{2k} = 0$  e  $b_{2k-1} = \frac{2}{(2k-1)\pi}$ . Portanto temos que a

sua série de Fourier será:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \operatorname{sen}[(2k-1)x].$$

**Observação 3.** Se considerarmos  $x = \frac{\pi}{2}$ , no exemplo anterior, teremos que, pelo Teorema de Fourier, a série será igual a 1. Logo

$$1 = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \operatorname{sen} \left[ (2k-1) \frac{\pi}{2} \right],$$

o que implica

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \operatorname{sen} \left[ (2k-1) \frac{\pi}{2} \right].$$

Sendo assim, segue que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}.$$

## 1.5 Séries de Fourier de funções pares e ímpares

Inicialmente relembremos a definição de uma função par e de uma função ímpar.

**Definição 8.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita par se  $f(x) = f(-x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ímpar se  $f(x) = -f(-x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Agora que sabemos o que são as funções pares e ímpares, segue alguns resultados sobre elas.

**Proposição 4.** As seguintes afirmações são válidas em relação às funções pares e ímpares:

- (i) A soma de duas funções pares é uma função par e a soma de duas funções ímpares é uma função ímpar;
- (ii) O produto de duas funções pares é par;
- (iii) O produto de duas funções ímpares é par;
- (iv) O produto de uma função par com uma função ímpar é ímpar.

**Proposição 5.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $2L$ -periódica e integrável no intervalo  $[-L, L]$ . Então:

(i) Se a função  $f$  for par, temos que

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \int_{-L}^0 f(x)dx + \int_0^L f(x)dx = \int_0^{-L} -f(x)dx + \int_0^L f(x)dx.$$

Fazendo uma mudança de variável, vamos ter

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \int_0^L f(-y)dy + \int_0^L f(y)dy.$$

E como  $f$  é par, teremos então que

$$\int_{-L}^L f(x)dx = 2 \int_0^L f(x)dx.$$

(ii) Se a função  $f$  for ímpar, usando uma ideia semelhante a anterior, teremos que

$$\int_{-L}^L f(x)dx = 0.$$

Agora usaremos as proposições acima junto com o cálculo da série de Fourier das funções pares e ímpares. Considerando  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $2L$ -periódica, integrável e absolutamente integrável teremos que:

a) Caso  $f$  for par, os coeficientes de Fourier serão

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \text{e} \quad b_n = 0.$$

b) Caso  $f$  for ímpar, os coeficientes de Fourier serão

$$a_n = 0 \quad \text{e} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

## 1.6 Cálculo de algumas séries de Fourier

Nessa seção iremos mostrar como calcular as séries de Fourier de algumas funções.

**Exemplo 6.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $2L$  periódica, definida como  $f(x) = x$  para  $-L \leq x < L$ . Como

essa função é ímpar, iremos ter uma série de senos e seus coeficientes serão

$$a_n = 0 \quad \text{e} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L x \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx.$$

Se realizarmos a mudança de variável  $y = \frac{n\pi x}{L}$ , dessa forma teremos  $dy = \frac{n\pi}{L} dx$ , logo

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^{n\pi} \frac{Ly}{n\pi} \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen} y \, dy.$$

Portanto

$$b_n = \frac{2L}{n^2\pi^2} \int_0^{n\pi} y \operatorname{sen} y \, dy.$$

Dessa forma podemos realizar a integração por partes e obtemos

$$\int_0^{n\pi} y \operatorname{sen} y \, dy = -y \cos y \Big|_0^{n\pi} + \int_0^{n\pi} \cos y \, dy.$$

Note que a integral do segundo membro é zero independente do valor de  $n$ , sendo assim

$$b_n = \frac{-2L}{n\pi} \cos(n\pi),$$

ou ainda

$$b_n = \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1}.$$

Portanto a série de Fourier da  $f$  será

$$f(x) \sim \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right).$$

**Exemplo 7.** Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $2L$ -periódica, definida como

$$g(x) = \begin{cases} L - x, & \text{se } 0 \leq x \leq L; \\ L + x, & \text{se } -L \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Note que a  $g$  é uma função par, logo teremos uma série de cossenos e a sua série de Fourier terá apenas o coeficiente  $a_n$ , com  $n \geq 0$ .

Para  $n = 0$  teremos

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L L - x \, dx$$

e é fácil de verificar que  $a_0 = L$ . Agora para  $n \neq 0$  teremos

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L (L-x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

realizando a mesma mudança de variável que no exemplo anterior, obteremos

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^{n\pi} \frac{L}{n\pi} \left(L - \frac{yL}{n\pi}\right) \cos y \, dy,$$

ou ainda

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \left( \int_0^{n\pi} L \cos y \, dy - \frac{L}{n\pi} \int_0^{n\pi} y \cos y \, dy \right).$$

Note que a primeira integral, do lado direito, é zero, logo basta calcular a segunda integral utilizando a integração por partes

$$\int_0^{n\pi} y \cos y \, dy = y \operatorname{sen} y \Big|_0^{n\pi} - \int_0^{n\pi} \operatorname{sen} y \, dy.$$

Note que a primeira parcela é nula para qualquer  $n \in \mathbb{Z}$  e calculando a integral da função seno, obtemos

$$a_n = \frac{2L}{n^2\pi^2} [1 - \cos(n\pi)],$$

ou

$$a_n = \frac{2L}{n^2\pi^2} [1 - (-1)^n].$$

Realizando uma mudança de variável, teremos que  $a_{2k} = 0$  e  $a_{2k-1} = \frac{4L}{(2k-1)^2\pi^2}$ , para  $k \geq 1$ . Sendo assim a série de Fourier da função  $g$  será

$$g(x) \sim \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos\left(\frac{(2k-1)n\pi}{L}\right).$$

**Observação 4.** Nas séries anteriores, as funções eram definidas na reta dentro do intervalo  $[-L, L]$  e sendo  $2L$ -periódica.

Caso tenhamos uma função  $f$  definida no intervalo  $[0, L]$ , podemos escolher um período qualquer  $T$ , com  $T > L$ , e redefinirmos a função da forma que for mais conveniente no intervalo  $(L, T)$  e depois periodiza-la.

**Exemplo 8.** Dada  $f(x) = x$ , em  $0 \leq x \leq \pi$ , vamos obter a sua série de Fourier em senos. Para isso precisamos redefinir a  $f$  para valores de  $x \in [-\pi, 0]$ , de modo que ela seja ímpar.

Tomando  $f(x) = x$  para  $-\pi \leq x \leq \pi$ , ela será  $2\pi$ -periódica e a sua série já foi calculada no exemplo 6, sendo assim, substituindo  $\pi$  no lugar de  $L$ , temos que

$$f(x) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx).$$

E pelo Teorema de Fourier temos que

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx), \quad \text{para } 0 \leq x \leq \pi.$$

**Exemplo 9.** No exemplo anterior poderíamos ter escolhido um período maior que  $2\pi$ . Por exemplo  $4\pi$ , desse modo é preciso definir  $f$  no intervalo  $(\pi, 2\pi]$ , de modo que essa ainda se mantenha ímpar. Considerando a função definida em  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$  pelo gráfico abaixo.

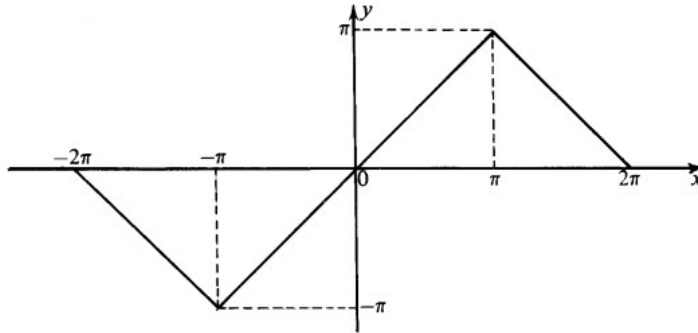


Figura 1.2: Gráfico do exemplo 9

Desse modo o coeficiente  $b_n$ , assumindo  $L = 2\pi$ , será dada por

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right) dx \\ &= \frac{2}{2\pi} \left[ \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right) dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-x + 2\pi) \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right) dx \right], \end{aligned}$$

onde  $-x + 2\pi$  é a equação da reta do gráfico acima no intervalo  $(\pi, 2\pi]$ . Logo se realizarmos

uma mudança de variável  $y = \frac{nx}{2}$ , assim  $dy = \frac{n}{2}dx$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi/2} \frac{2}{n} y \frac{2}{n} \operatorname{sen} y \, dy &= \frac{4}{n^2} \int_0^{n\pi/2} y \operatorname{sen} y \, dy \\ &= \frac{4}{n^2} \left[ (-y \cos y) \Big|_0^{n\pi/2} + \int_0^{n\pi/2} \cos y \, dy \right] \\ &= \frac{4}{n^2} \operatorname{sen} y \Big|_0^{n\pi/2} \\ &= \frac{4}{n^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{n\pi/2}^{n\pi} \left( \frac{-2}{n} y + 2\pi \right) \frac{2}{n} \operatorname{sen} y \, dy &= -\frac{4}{n^2} \int_{n\pi/2}^{n\pi} y \operatorname{sen} y \, dy + \frac{4\pi}{n} \int_{n\pi/2}^{n\pi} \operatorname{sen} y \, dy \\ &= -\frac{4}{n^2} \left[ (-y \cos y) \Big|_{n\pi/2}^{n\pi} + \operatorname{sen} y \Big|_{n\pi/2}^{n\pi} \right] - \frac{4\pi}{n} \cos y \Big|_{n\pi/2}^{n\pi} \\ &= \frac{-4}{n^2} \left( -n\pi \cos(n\pi) - \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} \right) \right) - \frac{4\pi}{n} \cos(n\pi) \\ &= \frac{4}{n^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Logo temos que  $b_n = \frac{8}{n^2\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$ . Portanto a sua série de Fourier será

$$\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{nx}{2} \right).$$

Pelo Teorema de Fourier, temos que vale a igualdade, pelo fato da  $f$  ser contínua e considerando que  $\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$  é alternada, podemos fazer a mudança de variável  $n = 2k - 1$ . Desse modo, temos que

$$x = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2} \operatorname{sen} \left( \frac{nx}{2} \right).$$

## 1.7 Integração da série de Fourier

Se uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  for igual a sua série de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right),$$

e supondo a convergência uniforme, então podemos usar a Proposição 2 e assim concluir que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_a^b a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_a^b b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right). \quad (1.16)$$

Nessa seção mostraremos que (1.16) é válida mesmo que a série de Fourier não convirja uniformemente para  $f$ , ou ainda mesmo que a série de Fourier não convirja para  $f$ . Isso mostra que a série de Fourier é um tipo muito especial de série e rica em propriedades interessantes.

Começamos com a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que seja  $2L$ -periódica e que seja seccionalmente contínua. Agora definimos a função  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$F(x) = \int_0^x f(t) - \frac{a_0}{2} dt, \quad (1.17)$$

a qual é contínua. Pelo *Teorema Fundamental do Cálculo*, temos que  $F'(x)$  existe em todos os pontos  $x$  onde  $f$  é contínua, além disso, nesses pontos temos que  $F'(x) = f(x)$ . Logo nesse caso temos que  $F$  é seccionalmente contínua.

Note que  $F(x)$  é  $2L$ -periódica, pois

$$F(x + 2L) - F(x) = \int_x^{x+2L} f(t) - \frac{a_0}{2} dt = \int_{-L}^L f(t) - \frac{a_0}{2} dt, \quad (1.18)$$

onde foi utilizado o fato de que  $f(t) - \frac{a_0}{2}$  ser  $2L$  periódica e de que

$$\int_{a-L}^{a+L} g = \int_{-L}^L g,$$

para toda função  $g$  que é  $2L$ -periódica e todo  $a \in \mathbb{R}$  fixado.

Perceba que, como

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt,$$

então temos que

$$\int_{-L}^L f(t) dt = a_0 L = \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dt,$$

e com isso concluimos que a expressão (1.18) é igual a zero.

Sendo assim temos que a função  $F$  definida em (1.17) é contínua e que a sua derivada  $F'$  é

contínua por partes e ainda  $2L$ -periódica. Logo, pelo Teorema de Fourier, temos que

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right), \quad (1.19)$$

onde os coeficientes de Fourier  $A_n$  e  $B_n$  são dadas por

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 0, \quad (1.20)$$

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1. \quad (1.21)$$

Note que podemos relacionar os coeficientes de Fourier da  $F$  com aqueles da  $f$ , basta utilizarmos integração por partes.

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{L} \left[ \left( F(x) \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L F'(x) \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[ \int_{-L}^L \left( f(x) - \frac{a_0}{2} \right) \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[ \int_{-L}^L \frac{a_0 L}{2n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx - \int_{-L}^L f(x) \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] \\ &= -\frac{L}{n\pi} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Logo

$$A_n = \frac{-L}{n\pi} b_n, \quad n \geq 1. \quad (1.22)$$

De modo análogo, concluímos que

$$B_n = \frac{L}{n\pi} a_n, \quad n \geq 1. \quad (1.23)$$

Para calcular o coeficiente  $A_0$ , fazemos  $x = 0$  em (1.19) (lembrando que  $F(0) = 0$ ).

$$0 = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \implies \frac{A_0}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi} b_n \implies A_0 = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}. \quad (1.24)$$

Dessa forma, se usarmos (1.17) e (1.19), juntamente com os coeficientes de Fourier obtidas em (1.22), (1.23) e (1.24), obtemos

$$\int_0^x f = \frac{a_0}{2} + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-b_n}{n} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{a_n}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right),$$

ou ainda

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^x a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dt + \int_0^x b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dt \right). \quad (1.25)$$

**Teorema 3** (Integração da série de Fourier). *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $2L$ -periódica e seccionalmente contínua. Seja também*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \quad (1.26)$$

a sua série de Fourier. Então:

- (i) A série pode ser integrada termo a termo e o valor da série integrada é a integral de  $f$ , ou seja

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_a^b \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_a^b \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right). \quad (1.27)$$

- (ii) A função  $F(x) = \int_0^x f(t) - \frac{a_0}{2} dt$  é  $2L$ -periódica, contínua, possui uma derivada  $F'$  seccionalmente contínua e é representada por sua série de Fourier

$$\int_0^x f(t) - \frac{a_0}{2} dt = \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{b_n}{n} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{a_n}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right), \quad (1.28)$$

onde

$$\frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L F(x)dx. \quad (1.29)$$

**Observação 5.** Para as aplicações, o teorema acima acaba tomando a forma prática seguinte:

se

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right),$$

então

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) - \frac{a_0}{2} dt \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L F(x) dx + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-b_n}{n} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{a_n}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right). \end{aligned}$$

*Aplicações.* Considerando as funções sendo  $2L$ -periódicas.

(i) Seja  $f(x) = x$  para  $-L \leq x < L$ . Como a série de Fourier já foi calculado anteriormente, temos que

$$b_n = \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

e

$$f(x) \sim \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Logo, usando  $F(x) = \int_0^x f(t) - \frac{a_0}{2}$ , temos

$$F(x) = \int_0^x t - \frac{0}{2} = \frac{x^2}{2}$$

e

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L F(x) dx = \frac{L^2}{6}.$$

Portanto

$$\frac{x^2}{2} = \frac{L^2}{6} + \frac{2L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad -L \leq x \leq L. \quad (1.30)$$

(ii) Aplicando novamente o teorema em (1.30), temos

$$F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{2} - \frac{L^2}{6} dt = \frac{x^3}{6} - \frac{L^2 x}{6}.$$

Como  $F(x)$  é ímpar, temos que  $\frac{1}{2L} \int_{-L}^L F(x) dx = 0$  e temos que  $\frac{2L^2}{\pi^2} \frac{(-1)^n}{n^2} = a_n$ . Logo

$$\frac{x^3}{6} - \frac{L^2 x}{6} = \frac{2L^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad -L \leq x \leq L. \quad (1.31)$$

(iii) Aplicando novamente o teorema em (1.31), teremos que

$$F(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{L^2 x^2}{12} + \frac{1}{2L} \int_{-L}^L F(x) dx = -\frac{7L^4}{360}.$$

Logo

$$\frac{x^4}{24} - \frac{L^2 x^2}{12} = -\frac{7L^4}{360} + \frac{2L^4}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad -L \leq x \leq L. \quad (1.32)$$

Fazendo  $x = L$  em (1.32), teremos

$$\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

## 1.8 Estimativas dos coeficientes de Fourier

Nessa seção mostraremos como obter certas estimativas sobre os coeficientes de Fourier da função dada a partir da hipótese sobre derivabilidade da mesma.

(i) Supondo que  $f$  seja  $2L$ -periódica, integrável e absolutamente integrável, podemos obter imediatamente as seguintes estimativas:

$$|a_n| = \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right| \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx, \quad (1.33)$$

$$|b_n| = \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right| \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx. \quad (1.34)$$

Logo, pela hipótese de integrabilidade de  $f$  e  $|f|$ , concluímos que existe a constante  $M = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx$ , satisfaz  $|a_n| \leq M$  e  $|b_n| \leq M$ , para todo  $n$ .

(ii) Suponhamos agora que  $f$  seja  $2L$ -periódica, derivável e tal que  $f'$  e  $|f'|$  sejam integráveis.

Desse modo se integrarmos por parte, obtemos, para  $n \geq 1$

$$La_n = \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{n\pi} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

ou seja,

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (1.35)$$

Logo

$$|a_n| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx.$$

De modo análogo, obtemos

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (1.36)$$

e assim

$$|b_n| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx.$$

Portanto, pelas hipóteses sobre a  $f$  e o fato dela ser contínua, concluímos que existe uma constante  $M$ , com  $M = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx$ , tal que

$$|a_n| \leq \frac{M}{n} \quad \text{e} \quad |b_n| \leq \frac{M}{n}, \quad (1.37)$$

Para todo  $n \geq 1$ .

(iii) Se supusermos que  $f$  seja  $2L$  periódica com primeira derivada contínua e a segunda derivada integrável e absolutamente integrável, podemos melhorar as estimativas (1.37), realizando mais uma integração por partes em (1.35) e (1.36). De fato, em (1.35), obtemos

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \left( -f'(x) \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f''(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right),$$

desse modo temos

$$|a_n| \leq \frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx.$$

E de modo análogo, em (1.36), obtemos

$$|b_n| \leq \frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx.$$

Portanto existe  $M = \frac{L}{\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx$  tal que

$$|a_n| \leq \frac{M}{n^2} \quad \text{e} \quad |b_n| \leq \frac{M}{n^2},$$

para todo  $n \geq 1$ .

## 1.9 Forma complexa da série de Fourier

Usando a fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$$

e as representações de cosseno e seno

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

podemos escrever

$$a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right) e^{in\pi x/L} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right) e^{-in\pi x/L}.$$

Logo o coeficiente  $c_n$  de  $e^{in\pi x/L}$  é dado por

$$c_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left( \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) dx,$$

ou seja,

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx.$$

Definimos também que

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx.$$

Resumindo, mostramos que se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  for  $2L$ -periódica, integrável e absolutamente integrável, então a série de Fourier de  $f$  pode ser escrita na forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L},$$

onde

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{in\pi x/L} dx,$$

para  $n \in \mathbb{Z}$ .

## 1.10 Identidade de Parseval

Dada uma função  $2L$ -periódica  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f$  e  $|f|$  são integráveis, vimos anteriormente que podemos calcular os coeficientes de Fourier  $a_n$  e  $b_n$ . Dessa forma é válida a identidade de Parseval dada por

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx. \quad (1.38)$$

Segue algumas aplicações dessa identidade.

*I. Cálculo de soma de séries.* Tomando como exemplo a expressão (1.31), temos que os coeficientes de Fourier da função  $f(x) = x^3 - L^2x$ ,  $2L$ -periódica, são

$$a_n = 0 \quad \text{e} \quad b_n = \frac{(-1)^n 12L^3}{n^3 \pi^3}.$$

Fazendo a aplicação direta da fórmula (1.38), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{144L^6}{n^6 \pi^6} &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L x^6 - 2L^2x^4 + L^4x^2 dx \\ &= \frac{1}{L} \left( \frac{x^7}{7} - \frac{2L^2x^5}{5} + \frac{L^4x^3}{3} \right) \Big|_{-L}^L \\ &= \frac{1}{L} \left( \frac{L^7}{7} - \frac{2L^7}{5} + \frac{L^7}{3} - \frac{(-L)^7}{7} + \frac{2(-L)^7}{5} - \frac{(-L)^7}{3} \right) \\ &= \frac{16L^6}{105}. \end{aligned}$$

Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

*II. Cálculo de algumas séries.* Seja  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função continuamente derivável, tal

que  $f(0) = f(L) = 0$ , e seja

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx.$$

Provaremos que  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$ , e para isso integraremos por parte o coeficiente  $b_n$ .

$$b_n = \frac{2}{L} \left[ \left( f(x) \frac{-L}{n\pi} \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right) \Big|_0^L + \int_0^L f'(x) \frac{L}{n\pi} \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \right].$$

Logo  $b_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^L f'(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx$ . Nesse caso, se  $f$  for ímpar,  $f'$  for par e ambas  $2L$ -periódica, concluímos que

$$b_n = \frac{L}{n\pi} a'_n, \tag{1.39}$$

onde  $b_n$  e  $a'_n$  são coeficientes de Fourier de  $f$  e  $f'$ , respectivamente. Se utilizarmos a desigualdade  $ab < \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$  em (1.39), obteremos

$$|b_n| \leq \frac{L^2}{2\pi^2} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} |a'_n|^2.$$

Portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \leq \frac{L^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |a'_n|^2,$$

onde a segunda série converge em virtude da identidade de Parseval.

## Capítulo 2

# Convergência das séries de Fourier

### 2.1 Classes das funções consideradas

Para definirmos os coeficientes de Fourier, e obtermos a série de Fourier da função  $f$ , as hipóteses mínimas que temos que exigir são periodicidade ( $2L$ ), integrabilidade e integrabilidade absoluta no intervalo  $[-L, L]$ .

A integral que usaremos nesse trabalho é a integral de Riemann, estudada nos cursos de cálculo. Consideramos funções  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definidas no intervalo limitado  $[a, b]$ . Assim temos dois casos a considerar.

- (i) *A função  $f$  é limitada.* Neste caso ela é integrável se o supremo das somas inferiores é igual ao ínfimo das somas superiores.
- (ii) *A função  $f$  não é limitada.* Neste caso ela é integrável (integral imprópria) se o intervalo  $[a, b]$  puder ser decomposto em um número finito de intervalos  $I_1, \dots, I_n$  com  $I_k = [a_k, b_k]$ , tais que, para todo  $\delta > 0$  e  $\delta' > 0$ , a função  $f$  é limitada e integrável em  $[a_k + \delta, b_k - \delta']$  e os limites abaixo existem

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x)dx = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta' \rightarrow 0}} \int_{a_k + \delta}^{b_k - \delta'} f(x)dx.$$

Neste caso a integral imprópria de  $f$  é

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} f(x)dx.$$

A função  $f$  será absolutamente integrável se o valor absoluto  $|f|$  for integrável no sentido (i) ou (ii) acima.

Funções contínuas e funções seccionalmente contínua no intervalo  $[a, b]$  são limitadas e integráveis no sentido (i) e (ii) acima.

**Observação 6.** 1) Se  $f$  for integrável e limitada, então,  $f$  será absolutamente integrável.

Porém a recíproca não é verdadeira.

2) Se  $f$  não for limitada, a sua integrabilidade não implica em sua integrabilidade absoluta.

3) Concluimos que existem funções  $f$  integráveis tais que  $|f|$  não é, e funções  $f$  que não é integrável mas  $|f|$  é.

**Definição 9.** Dizemos que  $f$  será uma função  $\mathcal{L}^1$  se, e somente se,  $f$  e  $|f|$  forem integráveis. Resumindo, se  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  for uma função de  $\mathcal{L}^1$ , então os coeficientes de Fourier de  $f$  estão bem definidos.

**Teorema 4.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de  $\mathcal{L}^1$ . Então, dado  $\varepsilon > 0$ , existe uma função contínua  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \varepsilon,$$

e  $\psi(a) = \psi(b) = 0$ .

*Demonstração.* (i) Suponha inicialmente que  $f$  seja limitada e integrável. Logo dado  $\varepsilon > 0$ , existe uma partição  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  tal que

$$\int_a^b f(x) dx - \sum_{j=1}^k m_j (x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.1)$$

onde  $m_j = \inf f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j$ . Agora designe  $\chi(x)$  a função assim definida por

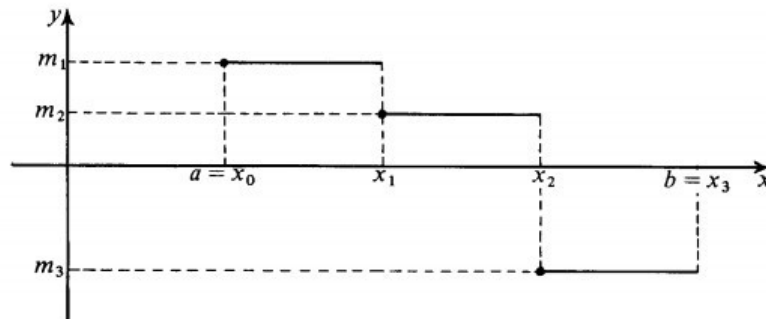
$$\chi(x) = m_j, \text{ para } x_{j-1} \leq x < x_j. \quad (2.2)$$

Então o somatório em (2.1) é a integral de  $\chi(x)$  em  $[a, b]$ , e assim podemos reescrever essa expressão como

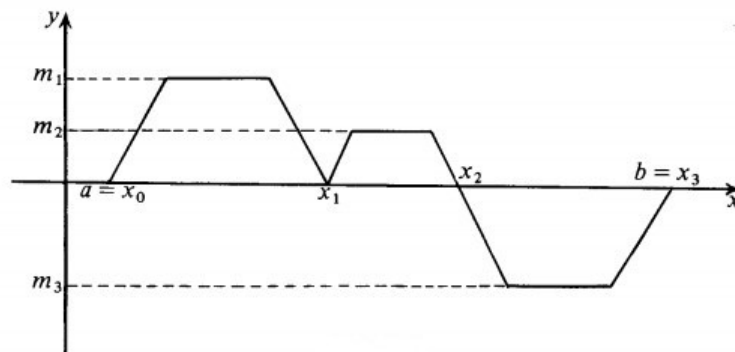
$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b \chi(x) dx = \int_a^b f(x) - \chi(x) dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.3)$$

Antes de prosseguirmos vamos ilustrar com uns gráficos simples a ideia que será explorada para concluir a demonstração.

Suponha que a partição tenha quatro pontos e o gráfico  $\chi(x)$  seja como a figura abaixo.



Suponha também que para cada  $n$  consideremos a função  $\psi_n$  obtida, e substituindo no gráfico acima os “retângulos” por trapézios, cujos lados inclinados possuem inclinação  $n$ .



Usando essa ideia para uma função  $\chi(x)$  qualquer, como definida em (2.3), temos

$$\int_a^b |\chi(x) - \psi_n(x)| dx = \sum_{j=1}^k \frac{m_j^2}{\operatorname{tg} n}. \quad (2.4)$$

Seja  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$ , para todo  $x \in [a, b]$ . Logo de (2.4) temos

$$\int_a^b |\chi(x) - \psi_n(x)| dx \leq \frac{kM^2}{\operatorname{tg} n}. \quad (2.5)$$

Portanto, como  $k$  é fixo, existe um  $n$  tal que

$$\int_a^b |\chi(x) - \psi_n(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.6)$$

de (2.3) e (2.6) obtemos que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe uma função contínua  $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$  tal que

$$\int_a^b |f(x) - \psi_n(x)| dx < \varepsilon.$$

Essa função  $\psi_n$  é a função  $\psi$  citado no teorema.

(ii) Suponha agora que  $f$  não seja limitada, mas que seja integrável e absolutamente integrável no sentido de integrais impróprias. Para facilitar, suponha também que  $f$  se torne ilimitada apenas nas vizinhanças de  $a$  e  $b$ . Portanto, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\left| \int_a^b |f(x)| dx - \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x)| dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.7)$$

Como  $f$  é limitada e integrável no intervalo  $[a + \delta, b - \delta]$ , então existe uma função contínua  $\psi : [a + \delta, b - \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\psi(a + \delta) = \psi(b - \delta) = 0$  tal que

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.8)$$

Considere a função  $\tilde{\psi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{para } a + \delta \leq x \leq b - \delta, \\ 0, & \text{para } a \leq x \leq a + \delta \text{ e } b - \delta \leq x \leq b. \end{cases}$$

Temos então

$$\int_a^b |f(x) - \tilde{\psi}(x)| dx = \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)| dx,$$

assim, usando (2.7) e (2.8), obtemos

$$\int_a^b |f(x) - \tilde{\psi}(x)| dx < \varepsilon.$$

□

**Observação 7.** 1) O teorema diz que, dada uma função de  $\mathcal{L}^1$   $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , existe uma sucessão de funções contínuas  $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$ , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)| dx = 0.$$

2) Suponha que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função  $2L$ -periódica e de  $\mathcal{L}^1$  em  $[-L, L]$ . Então existe uma sucessão de funções contínuas  $\psi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , também de período  $2L$ , basta tomar  $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$ , para todo  $n$ , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L |f(x) - \psi_n(x)| dx = 0.$$

3) Dada uma sucessão de funções contínuas  $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , dizemos que ela converge no sentido  $\mathbf{L}^1$ , se

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \int_a^b |\psi_n(x) - \psi_m(x)| dx = 0.$$

Nesse caso pode existir uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável e absolutamente integrável tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)| dx = 0, \tag{2.9}$$

e dizemos que  $f$  é o limite de  $\psi_n$  no sentido de  $\mathbf{L}^1$ . Em geral, não existe tal  $f$ . Entretanto se usarmos o conceito de integral de Lebesgue, então existirá uma função  $f$  integrável à Lebesgue tal que (2.9) seja verdade, entendendo a integral como a integral de Lebesgue. Logo as funções integráveis à Lebesgue em  $[a, b]$  são os limites no sentido do  $\mathbf{L}^1$  de sucessões de funções contínuas em  $[a, b]$ .

O espaço das funções integráveis à Lebesgue em  $[a, b]$  é designado por  $\mathbf{L}^1[a, b]$ . Isso se trata de um espaço vetorial e, a expressão

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx,$$

define uma norma. Desse modo  $\mathbf{L}^1[a, b]$  é um espaço normado, e esse item nos diz que as funções contínuas formam um conjunto denso nele.

## 2.2 Convergência pontual da série de Fourier

Nesta seção daremos condições suficientes sobre a função  $f$  que garantam para cada  $x$  a convergência da série de Fourier para  $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ . Além das hipóteses mínimas que são necessárias para que se possa definir os coeficientes de Fourier, faremos outra hipótese sobre o

comportamento da  $f$  nas vizinhanças do ponto  $x$ . Nosso objetivo é fazer estimativas do valor

$$e_n(x) = s_n(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2},$$

onde

$$s_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n \left( a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right).$$

Vamos inicialmente escrever a soma parcial  $s_n$  de modo mais conveniente com o propósito de obter majorações para  $e_n$ . Usando as expressões dos coeficientes de Fourier e a identidade trigonométrica  $\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \cos(a - b)$ , obtemos

$$s_n(x) = \int_{-L}^L \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi(x-y)}{L}\right) \right] f(y) dy. \quad (2.10)$$

A expressão abaixo é conhecida como núcleo de Dirichlet

$$D_n(x) = \frac{1}{L} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right), \quad (2.11)$$

que possui as seguintes propriedades:

(i)  $D_n(x)$  é uma função par;

(ii) Usando as relações de ortogonalidade  $\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0$  se  $n, m \geq 1$  e

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1 \\ 0, & \text{se } n \neq m \geq 1 \end{cases}, \text{ obtemos}$$

$$\int_{-L}^L D_n(x) dx = 1;$$

(iii)  $D_n(x)$  é uma função contínua;

(iv)  $D_n(x)$  é uma função  $2L$ -periódica;

$$(v) D_n(0) = \frac{n + \frac{1}{2}}{L};$$

(vi) Vale a seguinte expressão compacta de  $D_n(x)$  para  $x \neq \pm 2tL$ ,  $L \geq 0$

$$D_n(x) = \frac{1}{2L} \frac{\operatorname{sen} \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L}}{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2L}}. \quad (2.12)$$

Para provar (2.12) calcularemos a expressão

$$S_n(\theta) = 1 + \sum_{k=1}^n \cos(k\theta).$$

Observe que  $S_n(\theta) = \operatorname{Re} \left( 1 + \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right)$  e que  $1 + z + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ , para  $z \neq 1$ .

Logo

$$S_n(\theta) = \operatorname{Re} \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \operatorname{Re} \frac{e^{-i\theta/2} - e^{i(n+1/2)\theta}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}},$$

para  $\theta \neq \pm 2k\pi$  e  $k \geq 0$ , logo temos

$$S_n(\theta) = \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + \operatorname{sen} \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta}{2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}},$$

e usando isso em (2.11), obtemos de imediato (2.12).

Voltando a (2.10), usando (2.11) e (2.12), e utilizando a mudança de variável  $y = x - t$ , obtemos

$$s_n(x) = \int_{-L}^L D_n(t) f(x - t) dt. \quad (2.13)$$

Usando o fato de que  $D_n(t)$  é uma função par, podemos reescrever a integral de (2.13) como

$$\int_{-L}^0 D_n(t) f(x - t) dt + \int_0^L D_n(t) f(x - t) dt = \int_0^L D_n(t) [f(x + t) + f(x - t)] dt.$$

Logo

$$s_n(x) = \int_0^L D_n(t) [f(x + t) + f(x - t)] dt. \quad (2.14)$$

Sendo assim a expressão da estimativa fica da seguinte forma

$$e_n(x) = \int_0^L D_n(t)[f(x+t) - f(x^+)] + [f(x-t) - f(x^-)]dt. \quad (2.15)$$

Definindo a função

$$g(x, t) = [f(x+t) - f(x^+)] + [f(x-t) - f(x^-)],$$

podemos definir um resultado sobre a convergência da série de Fourier no ponto  $x$ .

**Teorema 5** (Teste de Dini). *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2L$  e de  $\mathcal{L}^1$  em  $[-L, L]$ . Fixando um  $x$ , em  $[-L, L]$ , suponha que  $f(x^-)$  e  $f(x^+)$  existam e que exista  $\eta > 0$  tal que*

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \infty. \quad (2.16)$$

*Então  $e_n(x)$  converge para 0, ou seja,  $s_n(x)$  converge para  $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$  quando  $n$  vai para o infinito.*

Para demonstrarmos o *Teste de Dini* precisaremos usar o *Lema de Riemann-Lebesgue*, que enunciaremos a seguir.

**Lema 1.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de  $\mathcal{L}^1$  em um intervalo  $[a, b]$ . Então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx = 0, \quad (2.17a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{cos}(tx) dx = 0. \quad (2.17b)$$

*Demonstração.* (a) Suponhamos inicialmente que  $f$  seja limitada, ou seja, que exista um  $M > 0$  tal que  $|f(x)| < M$  para todo  $x \in [a, b]$ .

Se essa função  $f$  for integrável, então dado um  $\varepsilon > 0$ , existe uma partição  $\pi$  no intervalo  $[a, b]$

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

tal que

$$S[f, \pi] - s[f, \pi] < \varepsilon,$$

onde

$$S[f, \pi] = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}); \quad M_j = \sup[f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j]$$

$$s[f, \pi] = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}); \quad m_j = \inf[f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j]$$

são as somas superiores e inferiores à partição  $\pi$ .

Vamos agora demonstrar (2.17a). Considere a partição do intervalo  $[a, b]$  determinada pelos pontos  $x_j = a + \frac{j}{n}(b - a)$ , para  $j = 0, 1, \dots, n$ . Então

$$\int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx = \sum_{j=1}^n f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(tx) dx + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x) - f(x_j)] \operatorname{sen}(tx) dx. \quad (2.18)$$

Observe que

$$\left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(tx) dx \right| = \left| -\frac{\cos(tx)}{t} \right| \leq \frac{2}{t} \quad (2.19)$$

e que

$$|f(x) - f(x_j)| \leq M_j - m_j, \quad \text{para } x_{j-1} \leq x \leq x_j. \quad (2.20)$$

Usando as estimativas (2.19) e (2.20) em (2.18), obteremos

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| \leq \frac{2nM}{t} + \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}), \quad (2.21)$$

note que a somatório acima é a seguinte diferença  $S[f, \pi] - s[f, \pi]$ .

Logo, dado  $\varepsilon > 0$ , tome um  $n$  tal que essa diferença seja menor que  $\frac{\varepsilon}{2}$ . Em seguida, com esse  $n$  fixado, tome  $t_0$  tal que  $\frac{2nM}{t_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Logo

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right|,$$

para todo  $t \geq t_0$ , o que conclui a demonstração para (2.17a). A demonstração de (2.17b) segue de modo análoga.

(b) Suponhamos que  $f$  seja uma função de  $\mathcal{L}^1$  qualquer. Então dado  $\varepsilon > 0$ , tome uma função

contínua  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.22)$$

Como toda função contínua num compacto é limitada e integrável, podemos aplicar a parte (a) da demonstração e concluir que existe um  $t_0$  tal que para  $t > t_0$ , temos

$$\left| \int_a^b \psi(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.23)$$

Como

$$\int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx = \int_a^b \psi(x) \operatorname{sen}(tx) dx + \int_a^b [f(x) - \psi(x)] \operatorname{sen}(tx) dx,$$

temos que

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| \leq \left| \int_a^b \psi(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| + \int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx.$$

Logo, utilizando as estimativas (2.22) e (2.23), concluimos que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $t_0$  tal que para todo  $t > t_0$ , se tem

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| < \varepsilon,$$

o que finaliza a demonstração do lema. □

Agora demonstraremos o *Teste de Dini*.

*Demonstração.* A ideia é decompor o termo  $e_n(x)$  em duas partes:

$$e_n(x) = \int_0^\delta t D_n(t) \frac{g(x, t)}{t} dt + \int_\delta^L \operatorname{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} dt.$$

A primeira integral será feita pequena ao tomarmos  $\delta$  convenientemente pequeno e usando (2.16). Quanto à segunda integral, usaremos o lema de Riemann-Lebesgue. Vamos aos detalhes, como

$$|t D_n(t)| \leq \frac{t}{2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} \quad (2.24)$$

e a função do segundo membro de (2.24) é contínua e crescente em  $[0, L]$ , obtemos a seguinte

estimativa

$$|t D_n(t)| \leq \frac{1}{2},$$

para  $t \in [0, L]$ .

Logo, dado  $\varepsilon > 0$ , tome  $\delta < \min(L, \eta)$ , tal que

$$\left| \int_0^\delta t D_n(t) \frac{g(x, t)}{t} dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^\delta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \frac{\varepsilon}{2},$$

que é possível graças ao *Teste de Dini*. Agora com  $\delta$  fixado, olhemos para a segunda integral. Para podermos aplicar o Lema de Riemann-Lebesgue, basta verificar se a função

$$h(t) = \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}}, \text{ para } t \in [\delta, L],$$

é integrável. Mas isso é imediato pelo fato do denominador nunca zerar para  $t \in [\delta, L]$  e  $g$  ser integrável. Logo, para  $n$  suficientemente grande, temos

$$\left| \int_\delta^L \operatorname{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} dt \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

e o teste de Dini fica provado. □

O teste de Dini pode ser utilizado para obter condições suficientes para convergência da série de Fourier, tais condições facilitam a verificação da convergência, por exemplo:

(A) Suponha que  $f$  seja Hölder contínua na vizinhança do ponto  $\alpha$ , isto é, que existam  $\alpha > 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $k > 0$  tais que

$$|f(t) - f(s)| \leq k|t - s|^\alpha, \tag{2.25}$$

para  $t, s \in [x - \delta, x + \delta]$ . A desigualdade acima implica que  $f$  seja contínua em  $x$ , e portanto  $f(x^+) = f(x^-) = f(x)$ . Isso juntamente com (2.25) implica em

$$|g(x, t)| \leq |f(x + t) - f(x)| + |f(x - t) - f(x)| \leq 2kt^\alpha.$$

Logo

$$\int_0^\delta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt \leq 2k \int_0^\delta t^{\alpha-1} dt < \infty,$$

e assim a condição (2.16) do teste de Dini se verifica.

(B) Suponha que  $f$  tenha derivada em  $x$ . Neste caso, se pode provar que a desigualdade como (2.25) se verifica em  $\alpha = 1$ . E o resultado segue de (A).

(C) Suponha que  $f$  seja seccionalmente contínua e que as razões incrementais

$$\frac{f(x+t) - f(x^+)}{2} \quad \text{e} \quad \frac{f(x-t) - f(x^-)}{2}$$

sejam limitadas para  $t > 0$  suficientemente pequeno. Em particular isso é verdade se as derivadas laterais em  $x$  existirem

$$f'_+(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} \quad \text{e} \quad f'_-(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x-t) - f(x^-)}{t}.$$

Nessas condições é fácil ver que a condição de Dini se verifica. Portanto isso estabelece a validade do Teorema de Fourier.

## 2.3 Desigualdade de Bessel

**Definição 10.** Uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de quadrado integrável se  $f$  e  $|f|^2$  forem integráveis. Usaremos a nomenclatura função de  $\mathcal{L}^2$  para designar tal função.

**Observação 8.** 1) Se  $f$  for limitada e integrável à Riemann, então  $f$  será de quadrado integrável e

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq M^2(b-a),$$

onde  $M = \sup |f(x)|$ ;  $x \in [a, b]$ .

2) No caso de  $f$  não ser limitada, pode acontecer que  $f$  seja de  $\mathcal{L}^1$ , mas não seja de  $\mathcal{L}^2$ . Por exemplo, seja  $f(x) = x^{-1/2}$ , para  $0 < x < 1$ . Assim

$$\int_0^1 x^{-1/2} dx = 2$$

mas

$$\int_0^1 |x^{-1/2}|^2 dx = \int_0^1 x^{-1} dx = \infty.$$

3) Seja  $f$  de  $\mathcal{L}^2$ , então  $f$  é necessariamente de  $\mathcal{L}^1$ . A demonstração desse fato é realizada pelo uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz para integrais, que diz:

Seja  $f$  e  $g$  funções de quadrado integráveis em um intervalo  $[a, b]$ . Então  $fg$  é absolutamente integrável e

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left[ \int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} \left[ \int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{1/2}. \quad (2.26)$$

Logo, considerando  $g(x) \equiv 1$ , teremos que

$$\int_a^b |f(x)|dx \leq (b-a) \left[ \int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{1/2},$$

o que demonstra a assertiva acima.

Uma sucessão  $(f_n)$  de funções de quadrado integráveis, em um intervalo  $[a, b]$ , converge, em média quadrática, para uma função  $f$  de quadrado integrável, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0.$$

A expressão  $\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx$  é chamada de *erro médio quadrático*, na aproximação de  $f$  por  $f_n$ .

Mostraremos agora que as reduzidas  $s_n(x)$  da série de Fourier de uma função  $f$  de  $\mathcal{L}^2$  são os polinômios trigonométricos que melhor aproximam  $f$  em média quadrática. Mais precisamente, considere o seguinte polinômio trigonométrico de ordem  $n$

$$t_n(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left( c_k \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) + d_k \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \right),$$

e designamos por

$$e_n = \int_{-L}^L |s_n(x) - f(x)|^2 dx$$

e

$$\hat{e}_n = \int_{-L}^L |t_n(x) - f(x)|^2 dx.$$

Então o que provaremos é que

$$e_n \leq \hat{e}_n. \quad (2.27)$$

Para demonstrar a desigualdade acima, calcularemos  $\hat{e}_n$  usando as relações de ortogonalidade

(1.9) e (1.10),

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L & \text{se } n = m \geq 1; \\ 0 & \text{se } n \neq m \text{ e } n, m \geq 1, \end{cases}$$

e

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = a_m L,$$

respectivamente, do capítulo anterior e as expressões dos coeficientes de Fourier. Desse modo obtemos

$$\hat{e}_n = \frac{L}{2} c_0^2 + L \sum_{k=1}^n (c_k^2 + d_k^2) + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - L a_0 c_0 - 2L \sum_{k=1}^n (a_k c_k + b_k d_k).$$

Assim, completando quadrados, temos

$$\hat{e}_n = \frac{L}{2} (c_0 - a_0)^2 + L \sum_{k=1}^n (c_k - a_k)^2 + L \sum_{k=1}^n (d_k - b_k)^2 + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \frac{L a_0^2}{2} - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).$$

Note que o menor valor de  $\hat{e}_n$  será quando  $c_0 = a_0$ ,  $c_k = a_k$  e  $d_k = b_k$ , para  $k = 1, \dots, n$ . Nesse caso temos que  $\hat{e}_n = e_n$ , e desse modo temos que, em geral,  $e_n \leq \hat{e}_n$ .

Para estabelecer a desigualdade Bessel, desigualdade (2.29) abaixo, observamos que  $\hat{e}_n \geq 0$ , para qualquer escolha dos coeficientes  $c_k$  e  $d_k$ . Portanto

$$0 \leq e_n = \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \frac{L a_0^2}{2} - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \quad (2.28)$$

e assim

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx.$$

Como essa desigualdade vale para todo  $n$ , podemos concluir que

**Teorema 6.** *Seja  $f(x)$  de  $\mathcal{L}^2$  e sua série de Fourier, teremos a validade da desigualdade de Bessel, ou seja, vale a seguinte desigualdade*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx. \quad (2.29)$$

**Observação 9.** Note que a Identidade de Parseval é um caso particular onde vale a igualdade.

Vamos considerar  $\mathcal{L}^2$  como o espaço das funções  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  que são de quadrado

integrável. Na próxima seção mostraremos que se  $f$  e  $g$  forem de quadrado integrável, então  $f + g$  também será. Além disso  $\alpha f$  será de quadrado integrável se  $f$  também for e  $\alpha$  for uma constante. Desse modo concluímos que  $\mathcal{L}^2$  é um espaço vetorial.

Note que as funções  $1, \cos \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{n\pi x}{L}$ , para  $n \geq 1$ , estão em  $\mathcal{L}^2$  e são linearmente independentes. Logo, para cada  $n$  fixado, o subespaço  $E_n$  de  $\mathcal{L}^2$  gerado por

$$\mathcal{B} = \left\{ 1, \cos \frac{j\pi x}{L}, \sin \frac{j\pi x}{L}; \quad j = 1, \dots, n \right\},$$

contém tanto  $s_n(x)$  quanto  $t_n(x)$ .

Podemos também definir uma norma no espaço  $\mathcal{L}^2$  por

$$\|f\|_2 = \left[ \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx \right]^{1/2},$$

que é demonstrada usando a desigualdade de Minkowski. Desse modo temos que  $\mathcal{L}^2$  é um espaço normado e assim nos permite de falar em distância entre duas funções  $f$  e  $g$  de  $\mathcal{L}^2$  dada por  $\|f - g\|_2$ . Portanto, o que foi provado anteriormente é que  $s_n$  é o elemento de  $E_n$  que está mais próximo de  $f$ . Podemos também usar a noção de ortogonalidade em  $\mathcal{L}^2$  de duas funções  $f$  e  $g$ , dado por

$$\int_{-L}^L f(x)g(x)dx = 0.$$

Assim podemos definir a projeção ortogonal de  $f$  sobre  $E_n$ , como sendo o elemento  $g \in E_n$  tal que  $f - g$  é ortogonal a todo  $h \in E_n$ . Logo, teremos que  $s_n$  é a projeção ortogonal de  $f$  sobre  $E_n$ . Para isso basta notar que

$$\int_{-L}^L (f(x) - s_n(x))\varphi(x)dx = 0,$$

para cada função de  $\mathcal{B}$ .

## 2.4 Desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Minkowski

Sejam  $a = (a_1, \dots, a_n)$  e  $b = (b_1, \dots, b_n)$  dois vetores em  $\mathbb{R}^n$ . A desigualdade de Cauchy-Schwarz para vetores do  $\mathbb{R}^n$  tem a seguinte forma

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j b_j \right| \leq \left( \sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{j=1}^n b_j^2 \right)^{1/2}. \quad (2.30)$$

Para demonstrar essa desigualdade, consideremos a expressão

$$\sum_{j=1}^n (a_j + t b_j)^2 = \sum_{j=1}^n a_j^2 + 2t \sum_{j=1}^n a_j b_j + t^2 \sum_{j=1}^n b_j^2. \quad (2.31)$$

Olhando a primeira parte de (2.31), vemos que esta é sempre  $\geq 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Já a segunda parte, reconhecemos um trinômio do segundo grau em  $t$ . Logo esta parcela é sempre  $\geq 0$ , e isso implica que seu discriminante deva ser  $\leq 0$ , isto é,

$$\left( 2 \sum_{j=1}^n a_j b_j \right)^2 - 4 \left( \sum_{j=1}^n a_j^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n b_j^2 \right) \leq 0.$$

O que implica na desigualdade (2.30).

Sejam agora  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções de quadrado integrável. Então a desigualdade de Cauchy-Schwarz para estas funções tem a forma

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left[ \int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} \left[ \int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{1/2}. \quad (2.32)$$

A demonstração é análoga ao caso anterior, basta considerar

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx.$$

Uma outra desigualdade, bastante útil é

$$\left[ \sum_{j=1}^n (a_j + b_j)^2 \right]^{1/2} \leq \left( \sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{j=1}^n b_j^2 \right)^{1/2},$$

que é conhecida como a desigualdade do triângulo ou desigualdade de Minkowski. Esse nome vem

do fato de que  $\left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)^{1/2}$  é o módulo do vetor  $a = (a_1, \dots, a_n)$  em  $\mathbb{R}^n$ , que representaremos como  $|a|$ . Logo essa desigualdade pode ser escrito como

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

A demonstração dessa desigualdade em  $\mathbb{R}^n$ , segue de

$$\sum_{j=1}^n (a_j + b_j)^2 = \sum_{j=1}^n a_j^2 + 2 \sum_{j=1}^n a_j b_j + \sum_{j=1}^n b_j^2,$$

onde usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$\sum_{j=1}^n (a_j + b_j)^2 \leq \sum_{j=1}^n a_j^2 + \left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right)^{1/2} + \sum_{j=1}^n b_j^2.$$

Note que a segunda parcela dessa desigualdade é o quadrado de  $|a| + |b|$ , logo, tomando a raiz quadrada, fica concluído a demonstração.

De modo análogo, podemos demonstrar a desigualdade de Minkowski para funções de quadrado integrável, que é

$$\left[\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx\right]^{1/2} \leq \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx\right]^{1/2} + \left[\int_a^b |g(x)|^2 dx\right]^{1/2}.$$

Basta utilizar a identidade

$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx + 2 \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b |g(x)|^2 dx,$$

e usar a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

**Proposição 6.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de quadrado integrável. Então existe uma sucessão de funções contínuas  $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$  tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)| dx = 0.$$

*Demonstração.* (i) Suponha inicialmente que  $f$  seja limitada. Como  $f$  é de quadrado integrável,

segue que  $f$  é absolutamente integrável pois

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a)^{1/2} \left[ \int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{1/2},$$

que é uma consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Usando o Teorema 4, temos que dado  $\varepsilon > 0$ , vai existir uma função contínua  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\psi(a) = \psi(b) = 0$  tal que

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \varepsilon.$$

Olhando a demonstração desse teorema deve ser o suficiente para observar que  $|\psi(x)| < M$ , onde  $M$  é constante, tal que

$$|f(x)| < M,$$

para todo  $x \in [a, b]$ .

Essas majorações de  $\psi$  e  $f$  nos permitem escrever

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)|^2 dx < 2M \int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < 2M\varepsilon,$$

logo se segue a conclusão da proposição neste caso.

(ii) Suponha agora que  $f$  não seja limitada. Para esse caso basta considerar que  $f$  não seja limitada apenas nas vizinhanças de  $a$  e  $b$ . Sendo assim, dado  $\varepsilon > 0$ , vamos ter um  $\delta > 0$  tal que

$$\int_a^{a+\delta} |f(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad \int_{b-\delta}^b |f(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Além disso, pelo caso anterior, podemos determinar uma função  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, com  $\psi(a) = \psi(b) = 0$  tal que

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Portanto se definirmos

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } a \leq x \leq a + \delta \\ \psi(x), & \text{se } a + \delta \leq x \leq b - \delta \\ 0, & \text{se } b - \delta \leq x \leq b, \end{cases}$$

obtemos

$$\int_a^b |f(x) - \tilde{\psi}(x)|^2 dx < \varepsilon,$$

o que conclui a demonstração. □

## 2.5 Convergência uniforme da série de Fourier

Nessa seção estudaremos as condições necessárias para que a série de Fourier de uma função  $2L$ -periódica  $f$ , convirja uniformemente. A ideia é utilizar o teste *M de Weierstrass*. Como

$$\left| a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| \leq |a_n| \quad \text{e} \quad \left| b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| \leq |b_n|,$$

devemos obter condições para que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|), \tag{2.33}$$

seja convergente.

**Teorema 7** (Primeiro teorema de convergência uniforme da série de Fourier). *Seja  $f$  uma função  $2L$ -periódica, contínua e com a primeira derivada integrável e absolutamente integrável. Então a série de Fourier da  $f$  converge uniformemente para  $f$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $f$  seja contínua e que a sua derivada primeira seja de  $\mathcal{L}^1$ . Então usando as relações já obtidas no capítulo anterior, temos que

$$a_n = -\frac{L}{n\pi} b'_n \quad \text{e} \quad b_n = \frac{L}{n\pi} a'_n, \tag{2.34}$$

onde  $a'_n$  e  $b'_n$  são os coeficientes de Fourier de  $f'$ . Logo a reduzida de ordem  $n$  de (2.33) é

$$\sum_{j=1}^n (|a_j| + |b_j|) = \frac{L}{\pi} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} (|a'_j| + |b'_j|), \tag{2.35}$$

que é majorada por

$$\frac{L}{\pi} \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right)^{1/2} \left[ \sum_{j=1}^n (|a'_j| + |b'_j|)^2 \right]^{1/2}, \tag{2.36}$$

pela desigualdade de Cauchy-Schwarz para vetores do  $\mathbb{R}^n$ . A seguir usaremos a desigualdade de Cauchy-Schwarz em  $\mathbb{R}^2$  que é  $(|a| + |b|)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ , em (2.36). Logo obtemos a seguinte

majoração de (2.35)

$$\frac{L\sqrt{2}}{\pi} \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right)^{1/2} \left[ \sum_{j=1}^n (|a'_j|^2 + |b'_j|^2) \right]^{1/2}.$$

Portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \leq \frac{L\sqrt{2}}{\pi} \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right)^{1/2} \left[ \sum_{j=1}^n (|a'_j|^2 + |b'_j|^2) \right]^{1/2},$$

onde ambas as séries, da direita, convergem, com a segunda convergindo pela desigualdade de Bessel.  $\square$

**Lema 2.** *Seja  $\psi$  a função  $2L$ -periódica definida como*

$$\psi = \begin{cases} -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{L}\right), & \text{se } -L \leq x < 0; \\ 0, & \text{se } x = 0; \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right), & \text{se } 0 < x \leq L. \end{cases} \quad (2.37)$$

*Então a série de Fourier da  $\psi$  converge uniformemente para  $\psi$  em qualquer intervalo que não contenha os pontos da forma  $2Ln$ , para  $n \in \mathbb{Z}$ .*

*Demonstração.* Vamos calcular a série de Fourier da  $\psi$  definida em (2.37). Note que a  $\psi$  é pímpar e desse modo teremos uma série de seno, e com um cálculo simples teremos

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{n\pi}.$$

Dessa forma teremos que a série de Fourier da  $\psi$  é

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (2.38)$$

Para demonstrar o lema, basta mostrar que para qualquer  $\delta > 0$ , a série acima converge uniformemente para  $0 < \delta \leq |x| \leq L$ . Para isso basta mostrar que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}, \quad (2.39)$$

converge uniformemente, para  $\theta \in [\varepsilon, \pi]$ , com  $\varepsilon > 0$  arbitrário, pois a série (2.38) é a parte

imaginária de (2.39) quando  $\theta = \frac{\pi x}{L}$ . Seja

$$E_n(\theta) = \sum_{k=1}^n e^{ik\theta}. \quad (2.40)$$

Logo

$$\sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} [E_k(\theta) - E_{k-1}(\theta)], \quad (2.41)$$

como

$$\sum_{k=m}^n \frac{1}{k} E_{k-1}(\theta) = \sum_{j=m-1}^{n-1} \frac{1}{j+1} E_j(\theta),$$

obtemos

$$\sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=m}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) E_k(\theta) + \frac{1}{n+1} E_n(\theta) - \frac{1}{m} E_{m-1}(\theta). \quad (2.42)$$

Por outro lado, usando um argumento semelhante ao da seção 2.2 para obter  $S_n(\theta)$ , temos, para  $0 < \theta < 2\pi$

$$E_n(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

e assim

$$|E_n(\theta)| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|} = \frac{2}{|e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}|} = \frac{1}{\text{sen}(\theta/2)}.$$

Logo, de (2.42)

$$\left| \sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \frac{1}{\text{sen}(\theta/2)} \left[ \sum_{k=m}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m} \right] = \frac{2}{m \text{sen}(\theta/2)},$$

e para  $0 < \varepsilon \leq \theta \leq \pi$ , temos que

$$\left| \sum_{k=n}^m \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \frac{2}{m \text{sen}(\varepsilon/2)},$$

e pelo critério de Cauchy, temos a convergência uniforme da (2.39) e a demonstração do lema está completa.  $\square$

**Observação 10.** A passagem de (2.41) para (2.42) é um artifício conhecido como fórmula de

Abel de adição por partes. De modo geral, se  $(a_n)$  e  $(b_n)$  são duas sucessões e  $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ , temos

$$\sum_{k=m}^n a_k(B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=m}^n (a_k - a_{k+1})B_k + \frac{1}{n+1}B_n - \frac{1}{m}B_{m-1}.$$

Note que no teorema acima se pede que  $f$  seja contínua em toda reta. Mas e se  $f$  for contínua no intervalo fechado  $[a, b]$ , será que a sua série de Fourier da  $f$  converge uniformemente para  $f$  nesse intervalo? A resposta é sim e vale o resultado a seguir.

**Teorema 8** (Segundo teorema de convergência uniforme da série de Fourier). *Seja  $f$  uma função  $2L$ -periódica, seccionalmente contínua e tal que a primeira derivada é integrável e absolutamente integrável. Então a série de Fourier da  $f$  converge uniformemente para  $f$  em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade de  $f$ .*

A demonstração segue do lema anterior.

*Demonstração.* Sejam  $x_1, \dots, x_k$  pontos do intervalo  $[-L, L]$ , onde  $f$  é descontínua, e sejam  $\omega_1, \dots, \omega_k$  os saltos da  $f$ , que são os pontos de descontinuidade, isto é,  $\omega_j = f(x_j + 0) - f(x_j - 0)$ . Logo a função  $\omega\psi(x - x_j)$  é descontínua nos pontos da forma  $x_j \pm 2Ln$ , com  $n = 0, 1, \dots$ , e o salto nesses pontos é  $\omega_j$ .

Então a função  $f(x) - \omega_j\psi(x - x_j)$  é contínua nesses e em todos os pontos onde  $f$  já é contínua. Desse modo, produzimos uma função com menos descontinuidades que a função original  $f$ . Para eliminar todas as descontinuidades, repetimos esse processo  $k$  vezes e assim teremos a função

$$g(x) = f(x) - \sum_{j=1}^k \omega_j\psi(x - x_j),$$

que é contínua para todo  $x \in [-L, L]$ . Portanto podemos aplicar o primeiro teorema sobre a convergência uniforme da série de Fourier, para verificar que a série de Fourier da  $g$  realmente converge para  $g$  em toda reta.

Pelo lema, temos que a série de Fourier da  $\psi(x - x_j)$  converge uniformemente em qualquer intervalo fechado que não contenha os pontos de descontinuidade, que são da forma  $x_j \pm 2Ln$  com  $n \geq 0$ .

Note que a série de Fourier da  $f$  é a soma das séries de Fourier da  $g$  e da  $\omega_j\psi(x - x_j)$ , para  $j = 1, \dots, k$ , logo ela converge uniformemente em qualquer intervalo fechado que não contenha

os pontos da forma  $x_j \pm 2Ln$  para  $j = 1, \dots, k$  e para  $n \geq 0$ , que são justamente os pontos de descontinuidade da  $f$ .  $\square$

## 2.6 Núcleo de Dirac

A função impulso unitário, conhecido também de “função”  $\delta$  de Dirac, é “definida” a partir das seguintes propriedades:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0; \\ +\infty, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (2.43)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (2.44)$$

Note que esse  $\delta$  não é uma função, pois  $\infty$  não é um número, e além disso, como  $\delta$  vale zero em toda a sua reta, exceto em um único ponto, então a sua integral devia ser zero ao invés de 1. Entretanto, por exemplo, essa definição funciona bem em mecânica ondulatória.

A propriedade importante do  $\delta$  é a seguinte: se  $\psi(x)$  for uma função real contínua que é nula fora do seu intervalo limitado, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\psi(x)dx = \psi(0). \quad (2.45)$$

Mas como  $\delta$  não é uma função, é preciso dar algum sentido matemático para essa integral. Um modo satisfatório para isso é usando a *teoria das distribuições*, criada por Laurent Schwartz, que também explica outras expressões formais como (2.45) envolvendo inclusive as derivadas de  $\delta$ . Mas nessa seção faremos algo menos ambicioso que será o suficiente para justificar a expressão (2.45).

A ideia é o seguinte: tomaremos uma sucessão de funções contínuas  $k_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , com as seguintes propriedades:

$$(D1) \quad k_n(x) \geq 0;$$

$$(D2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} k_n(x) dx = 1;$$

(D3) dados  $\varepsilon > 0$  e  $\eta > 0$ , existe  $n_0$  tal que para  $n \geq n_0$  se tem

$$\int_{|x|>\eta} k_n(x) dx < \varepsilon.$$

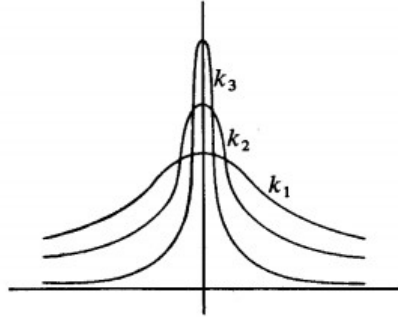


Figura 2.1: Representação gráfica das  $k_n$

Assim o primeiro membro de (2.45) pode ser definido como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\psi(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(x)\psi(x)dx. \quad (2.46)$$

Logo precisamos mostrar que a partir de (2.46), temos a validação da (2.45).

**Definição 11.** Uma sucessão de funções  $k_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seccionalmente contínuas e satisfazendo (D1), (D2) e (D3) acima é chamada uma sucessão de núcleos de Dirac.

**Exemplo 10.** Seja  $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente contínua, não-negativa e tal que  $0 < \int_{-\infty}^{\infty} k(x)dx < \infty$ . Em particular, essa integral será, de fato, finito se  $k(x)$  se anular fora de seu intervalo limitado.

Logo, tome  $\alpha$  tal que  $\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} k(x)dx$ , então as funções

$$k_n = \frac{n}{\alpha} k(nx),$$

formam uma sucessão de núcleos de Dirac.

De fato, (D1) e (D2) são conferidas facilmente. Para demonstrar (D3), veja que

$$\int_{|x|>\eta} k_n(x)dx = \frac{n}{\alpha} \int_{|x|>\eta} k(nx)dx = \frac{1}{\alpha} \int_{|s|>n\eta} k(s)ds.$$

Por outro lado, como  $\int_{-\infty}^{\infty} k(s)ds < \infty$  isso implica que existe um  $r > 0$  tal que

$$\int_{|s|>r} k(s)ds < \varepsilon\alpha.$$

E assim se verifica (D3), caso tomemos  $n_0 > \frac{r}{\eta}$ .

A propriedade básica do núcleo de Dirac está contido no resultado do seguinte enunciado

**Teorema 9.** *Sejam  $(k_n)$  uma sucessão de núcleos de Dirac e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente contínua e limitada. Então:*

(a) *As funções  $f_n$  abaixo estão bem definidas*

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k_n(x-s)f(s)ds. \quad (2.47)$$

(b) *Supondo que  $k_n$  seja par, então para cada  $x$  temos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

(c) *A sucessão  $(f_n)$  converge uniformemente para  $f$  em todo intervalo limitado e fechado  $I$  que não contenha pontos de descontinuidade da  $f$ .*

**Observação 11.** A função  $f_n$ , definida em (2.47), é chamada de produto de convolução de  $k_n$  e  $f$ , e usamos a notação  $f_n = k_n * f$ .

Obviamente esse produto pode ser definido para classes mais amplas de funções. Por exemplo, sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções absolutamente integráveis e uma delas limitada. Logo o produto  $f * g$  estará bem definido.

Uma propriedade do produto de convolução é que vale

$$f * g = g * f,$$

ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)g(x)ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x-s)ds, \quad (2.48)$$

que é facilmente demonstrada fazendo uma mudança de variável.

*Demonstração.* O item (a), do teorema, é imediata, pois o integrando de (2.47) é uma função seccionalmente contínua, para cada  $x$  fixado, e integrável. De fato, temos que

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} k_n(x-s)f(s)ds \right| \leq M \int_{-\infty}^{\infty} k_n(y)dy,$$

onde  $M \geq |f(x)|$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Para demonstrar o item (b), usaremos a notação  $\bar{f}(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$  para facilitar a escrita. Para isso precisamos de uma majoração de  $f_n(x) - \bar{f}(x)$ . Começemos escrevendo  $f_n$  em vista de (2.48),

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k_n(s)f(x-s)ds.$$

Usando isso e a condição (D2) do núcleo de Dirac, obtemos

$$f_n(x) - \bar{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k_n(s)[f(x-s) - \bar{f}(x)]ds. \quad (2.49)$$

A ideia para majorar (2.49) é quebrá-la em duas partes. Com um  $\delta > 0$  a ser escolhido mais adiante, temos

$$f_n(x) - \bar{f}(x) = \int_{|s|>\delta} k_n(s)[f(x-s) - \bar{f}(x)]ds + \int_{|s|\leq\delta} k_n(s)[f(x-s) - \bar{f}(x)]ds = I_1 + I_2.$$

Como  $k_n$  é par, então

$$I_2 = \int_0^\delta k_n(s)f(x+s)ds + \int_0^\delta k_n(s)f(x-s)ds - \int_0^\delta k_n(s)[f(x^+) + f(x^-)]ds.$$

Logo

$$|I_2| \leq \int_0^\delta k_n(s)|f(x+s) - f(x^+)|ds + \int_0^\delta k_n(s)|f(x-s) - f(x^-)|ds.$$

Usando o fato de  $f$  ser seccionalmente contínua, temos que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$|f(x+s) - f(x^+)| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |f(x-s) - f(x^-)| < \varepsilon,$$

para  $0 < s < \delta$ . Logo

$$|I_2| \leq 2\varepsilon \int_0^\delta k_n(s)ds \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} k_n(s)ds = \varepsilon.$$

Agora, com esse  $\delta$ , majoramos  $I_1$

$$|I_1| \leq 2M \int_{|s|>\delta} k_n(s) ds$$

e usando o (D3) do núcleo de Dirac, temos que vai existir um  $n_0$  tal que  $n \geq n_0$  implica em

$$|I_1| \leq 2M\varepsilon.$$

Portanto temos

$$|f_n(x) - \bar{f}(x)| \leq (1 + 2M)\varepsilon,$$

que prova o item (b).

Para mostrar o item (c), vamos decompor (2.49) em duas partes. Sejam  $a$  e  $b$  as extremidades do intervalo  $I$ , ou seja,  $I = [a, b]$ . Podemos tomar um ponto  $\eta > 0$ , tal que o intervalo fechado  $I' = [a - \eta, b + \eta]$  que também não conterà os pontos de descontinuidade da  $f$ . Logo dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $x_1, x_2 \in I'$  e  $|x_1 - x_2| < \delta$ , então  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ . Assim

$$f_n(x) - f(x) = \int_{|s|>\delta} k_n(s)[f(x-s) - f(x)]ds + \int_{|s|\leq\delta} k_n(s)[f(x-s) - f(x)]ds. \quad (2.50)$$

Logo

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 2M \int_{|s|>\delta} k_n(s)ds + \int_{|s|\leq\delta} k_n(s)|f(x-s) - f(x)|ds. \quad (2.51)$$

Tomando  $\delta < \eta$ , segue que  $x - s$  varia em  $I'$  se  $x$  percorrer em  $I$ . Logo, da segunda integral de (2.51), obtemos

$$\varepsilon \int_{|s|\leq\delta} k_n(s)ds \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} k_n(s)ds = \varepsilon.$$

Usando (D3) do núcleo de Dirac, temos que para a primeira integral de (2.51), com o  $\varepsilon > 0$  dado e o  $\delta > 0$  obtido, determinamos  $n_0$  tal que vale (D3). Portanto

$$|f_n(x) - f(x)| \leq (1 + 2M)\varepsilon,$$

para todo  $x \in I$  e todo  $n > n_0$ , que garante a convergência uniforme de  $(f_n)$  em  $I$ .  $\square$

Voltando a explicação de (2.45). Sendo  $\psi$  contínua e limitada, segue do teorema acima que

$$\psi(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(-s)\psi(s)ds.$$

Logo, se os núcleos também forem pares, obtemos (2.46).

## 2.7 Teorema da aproximação de Weierstrass

Vamos usar o Teorema 9 visto na seção anterior para provar o Teorema de aproximação de Weierstrass.

**Teorema 10.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real contínua, definida no intervalo  $[a, b]$ . Então existe uma sucessão de polinômios  $P_n$  que converge uniformemente para  $f$  em  $[a, b]$ .*

*Demonstração.* Vamos usar o Teorema 9, tomando um núcleo de Dirac específico, conhecido como núcleo de Landau

$$L_n(x) = \begin{cases} \frac{(1-x^2)^n}{c_n}, & \text{para } |x| \leq 1; \\ 0, & \text{para } |x| > 1, \end{cases} \quad (2.52)$$

onde  $c_n = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx$ .

É imediato que  $(L_n)$  satisfaz as propriedades (D1) e (D2) dos núcleos de Dirac.

Mostremos então que satisfaz (D3). Observe que

$$c_n = 2 \int_0^1 (1-x)^n (1+x)^n dx \geq 2 \int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{2}{n+1}. \quad (2.53)$$

Logo, como  $c_n$  é uma função par, temos, para  $0 < \delta < 1$

$$\int_{|x|>\delta} L_n(x) dx = 2 \int_{\delta}^1 \frac{(1-x^2)^n}{c_n} dx,$$

e como  $(1-x^2)^n$  é decrescente em  $x$ , temos que

$$\int_{|x|>\delta} L_n(x) dx \leq \frac{2}{c_n} (1-\delta^2)^n (1-\delta).$$

Assim, usando (2.53),

$$\int_{|x|>\delta} L_n(x)dx \leq (n+1)(1-\delta^2)^n(1-\delta). \quad (2.54)$$

Sendo  $\delta < 1$ , então dado  $\varepsilon > 0$ , temos que o segundo membro de (2.54) é  $< \varepsilon$ , para  $n \geq n_0$  de um certo  $n_0$ . E assim se verifica (D3).

Iniciaremos a demonstrar o teorema com  $[a, b] = [0, 1]$ , com  $f(0) = f(1) = 0$ . Definindo a função

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in [0, 1]; \\ 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 1, \end{cases}$$

que é contínua e limitada em toda reta. Definimos também as funções

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} L_n(x-s)F(s)ds.$$

Pelo Teorema 9, essas funções convergem uniformemente para  $f(x)$  no intervalo  $[0, 1]$ . Precisamos então mostrar que  $F_n(x)$  é um polinômio em  $x$ , quando  $x \in [0, 1]$ .

Note que

$$F_n(x) = \int_0^1 L_n(x-s)f(s)ds,$$

para  $x \in [0, 1]$ , temos que  $|x-s| \leq 1$ . Logo temos que

$$F_n(x) = \int_0^1 [1-(x-s)^2]^n f(s)ds.$$

Note que

$$[1-(x-s)^2]^n = \sum_{k=0}^n a_k 1^{n-k} [(x-s)^2]^k = \sum_{j=0}^{2n} a_j x^{n-j} s^j,$$

logo  $F_n(x)$  é uma soma de integrais da forma

$$a_j x^{n-j} \int_0^1 s^j f(s)ds$$

com  $j = 0, 1, \dots, 2n$ , o que faz de  $F_n$  um polinômio de grau  $2n$ .

Caso  $[a, b] \neq [0, 1]$ , consideramos a função

$$g(y) = f([b-a]y + a),$$

que é contínua para  $y = [0, 1]$ . Portanto, se tivermos uma sucessão de polinômios  $P_n(y)$  que converge uniformemente para  $g(y)$ , então os polinômios

$$Q_n(x) = P_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

convergirão uniformemente para  $f(x)$  em  $[a, b]$ . Agora se  $f(0)$  e/ou  $f(1)$  forem diferentes de zero, considere a seguinte função

$$h(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)]$$

que é contínua em  $[0, 1]$  e  $h(0) = h(1) = 0$ . Portanto, se tivermos uma sucessão de polinômios  $R_n(x)$  aproximando uniformemente à  $h(x)$ , então os polinômios

$$S_n(x) = R_n(x) + f(0) + x[f(1) - f(0)]$$

aproximarão uniformemente à função  $f$ . □

## 2.8 Teorema de Fejér

Em geral, apesar das séries convergentes serem mais utilizadas, iremos ver que as algumas vezes as séries divergentes também são úteis e podemos fazer bom uso delas.

Quando temos uma série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , sabemos que ela converge se a sua reduzida  $A_n = \sum_{j=1}^n a_j$  convergir. Fazemos desse modo pois o conceito resultante é útil, mas e se houver a necessidade de outro tipo de convergência de série, por quê não usá-lo?

Por exemplo, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$  diverge no conceito acima. Entretanto Euler e outros matemáticos observaram que a média aritmética de suas reduzidas convergem para  $\frac{1}{2}$ . De fato as suas reduzidas são  $A_1 = 1, A_2 = 0, A_3 = 1, A_4 = 0, \dots$ , e assim a sua média aritmética

$$\sigma_n = \frac{A_1 + \dots + A_n}{n}$$

são

$$\sigma_{2n-1} = \frac{n}{2n-1} \quad \text{e} \quad \sigma_{2n} = \frac{n}{2n},$$

que formam a sucessão  $(\sigma_n)$ , que convergem para  $\frac{1}{2}$ .

Quando uma série converge nesse sentido, dizemos que ela é *Cesàro-somável*, e a soma da série, no sentido comum, é igual ao limite da sucessão das médias aritméticas das reduzidas. E isso nos mostra que o conceito de somabilidade de Cesàro é bom, pois ela torna somável as séries divergentes, sem perturbar as que convergem.

Já vimos que uma função contínua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $2L$ -periódica, possui a sua série de Fourier, e que nem sempre converge no sentido comum, mas vem o seguinte questionamento, ela pode ser Cesàro-somável? Quem respondeu essa questão foi Fejér em 1904 e o seu teorema também diz algo sobre a convergência nos pontos de descontinuidade.

Consideremos uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seccionalmente contínua e  $2L$  periódica. Representamos por  $s_n(x)$  a reduzida de ordem  $n$

$$s_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n \left( a_k \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) + b_k \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \right)$$

e por  $\sigma_{n+1}$  a média aritmética de  $s_0, \dots, s_n$

$$\sigma_{n+1} = \frac{1}{n+1}(s_0 + \dots + s_n).$$

Como vimos na seção 2.2

$$s_n(x) = \int_{-L}^L D_n(x-y)f(y)dy,$$

onde  $D_n$  é o núcleo de Dirichlet que vale

$$D_n(x) = \frac{1}{L} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \right) = \frac{1}{2L} \frac{\operatorname{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L} \right]}{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2L}}, \quad (2.55)$$

para  $x \neq 2nL$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ . Logo, as médias aritméticas também possuem uma representação integral

$$\sigma_{n+1}(x) = \int_{-L}^L F_{n+1}(x-y)f(y)dy, \quad (2.56)$$

onde

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x), \quad (2.57)$$

que é o núcleo de Fejér.

**Lema 3.** *O núcleo  $F_{n+1}(x)$  de Fejér é uma função par, contínua e  $2L$ -periódica que podemos expressar como*

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{2L(n+1)} \left[ \frac{\operatorname{sen} \frac{(n+1)\pi x}{2L}}{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2L}} \right]^2, \quad (2.58)$$

para  $x \neq 2nL$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ , e tal que

$$F_{n+1}(0) = \frac{n+1}{2L}. \quad (2.59)$$

*Demonstração.* Segue da definição que  $F_{n+1}$  é contínua, par e  $2L$ -periódica, pois  $D_j$  possui essas mesmas propriedades. Assim de (2.55) e (2.57) segue que

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{2L(n+1)} \sum_{k=0}^n \frac{\operatorname{sen} \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L} \right]}{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2L}}.$$

Portanto devemos obter uma expressão para

$$A(\theta) = \sum_{k=0}^n \operatorname{sen} \left( k + \frac{1}{2} \right) \theta.$$

Note que  $A(\theta)$  é a parte imaginária de

$$\sum_{k=0}^n e^{i(k+1/2)\theta} = e^{i\theta/2} \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = e^{i\theta/2} \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}},$$

realizando um ajuste na fração  $\frac{e^{i\theta/2}}{1 - e^{i\theta}}$ , obtemos

$$\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{-2i \operatorname{sen}(\theta/2)}.$$

Logo, multiplicando a expressão acima por  $\frac{i}{i}$ ,

$$A(\theta) = \frac{1 - \cos[(n+1)\theta]}{2 \operatorname{sen}(\theta/2)} = \frac{\left[ \operatorname{sen} \frac{(n+1)\theta}{2} \right]^2}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}},$$

para  $\theta \neq n\pi$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ . Fazendo  $\theta = \frac{\pi x}{L}$  obtemos (2.58). Para (2.59), observamos que  $D_j(0) = \frac{j+1/2}{L}$  e o lema está demonstrado.  $\square$

O lema acima é essencial para demonstrarmos o seguinte teorema.

**Teorema 11** (Fejér). *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , uma função seccionalmente contínua e  $2L$ -periódica.*

*Então*

*i) Para cada  $x$ ,  $\lim \sigma_n(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ ;*

*ii) A sucessão de  $(\sigma_n)$  converge uniformemente para  $f$  em todo intervalo fechado  $I$  que não contenha pontos de descontinuidade da  $f$ .*

*Demonstração.* Começemos observando que, de (2.56), temos

$$\sigma_{n+1}(x) = \int_{-L}^L F_{n+1}(y) f(x-y) dy.$$

Logo, se definirmos as funções

$$\Phi_{n+1}(x) = \begin{cases} F_{n+1}(x), & \text{se } -L \leq x \leq L; \\ 0, & \text{se } |x| > L, \end{cases}$$

teremos que

$$\sigma_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{n+1}(y) f(x-y) dy. \quad (2.60)$$

Para aplicar o teorema 9, devemos mostrar que  $(\Phi_{n+1})$  é uma sucessão de núcleos de Dirac. A propriedade (D1) é imediata, já que  $(\Phi_{n+1}) \geq 0$ .

Vejamos então a propriedade (D2), queremos mostrar que a integral imprópria de  $(\Phi_{n+1})$  vale 1. De fato, note que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{n+1}(x) dx = \int_{-L}^L F_{n+1}(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \int_{-L}^L D_k(x) dx,$$

mas como

$$\int_{-L}^L D_k(x) dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^k \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx = 1,$$

portanto temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{n+1}(x) dx = 1$$

que era o que queríamos mostrar.

Para verificar a propriedade (D3), sejam dados  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$ . Teremos que

$$\int_{|x|>\delta} \Phi_{n+1}(x) dx = 2 \int_{\delta}^L F_{n+1}(x) dx \leq \frac{1}{L(n+1)} \frac{1}{\left(\text{sen} \frac{\pi\delta}{2L}\right)^2} \int_{\delta}^L dx,$$

onde usamos

$$\left[ \frac{\text{sen} \frac{(n+1)\pi x}{2L}}{\text{sen} \frac{\pi x}{2L}} \right]^2 \leq \frac{1}{\left(\text{sen} \frac{\pi\delta}{2L}\right)^2}$$

que é válida para  $x \in [\delta, L]$ . Logo

$$\int_{|x|>\delta} \Phi_{n+1}(x) dx \leq \frac{L - \delta}{L(n+1) \left(\text{sen} \frac{\pi\delta}{2L}\right)^2},$$

sendo assim, para um  $n$  suficientemente grande a condição (D3) do núcleo de Dirac é satisfeita.

Desse modo o teorema 9 se aplica de imediato, o que conclui a demonstração do teorema de Fejér.  $\square$

## 2.9 Demonstração da identidade de Parseval

Nesta última seção iremos provar a validade da identidade de Parseval e em seguida mostrar a unicidade da representação da série de Fourier.

Na Seção 2.3, estabelecemos a relação (2.28) que nos diz que

$$0 \leq e_n = \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \frac{L}{2} a_0^2 - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).$$

Sendo assim, dá para perceber que as duas assertivas abaixo são equivalentes

$$\lim e_n = 0 \tag{2.61}$$

e

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx. \tag{2.62}$$

Perceba que a relação dada em (2.62) é a identidade de Parseval. Mostraremos, a seguir, que a relação (2.61) ocorre, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L |s_n(x) - f(x)|^2 dx = 0, \tag{2.63}$$

para toda função de  $\mathcal{L}^2$ , em  $[-L, L]$ . Como consequência, irá seguir que a identidade de Parseval vale para tais funções  $f$ . A expressão (2.63) também pode ser escrita como

$$f(x) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left( a_k \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) + b_k \text{sen} \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \right) \right],$$

onde *l.i.m.* são as iniciais da expressão inglesa *limit in (the) mean*.

**Teorema 12.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $2L$ -periódica, e de  $\mathcal{L}^2$  em  $[-L, L]$ . Então a série de Fourier da  $f$  converge em média quadrada para  $f$ , ou seja, é válida a relação (2.63)*

*Demonstração.* (i) Caso  $f$  seja contínua.

Pelo teorema de Fejér, a sucessão  $(\sigma_n)$  das médias aritméticas das reduzida  $s_n$  convergem uniformemente para  $f$  em  $[-L, L]$ , isto é,

$$\max_{-L \leq x \leq L} |\sigma_n(x) - f(x)| \rightarrow 0,$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

Como

$$\int_{-L}^L |\sigma_n(x) - f(x)|^2 dx \leq 2L \left[ \max_{-L \leq x \leq L} |\sigma_n(x) - f(x)| \right]^2$$

temos que

$$\int_{-L}^L |\sigma_n(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0 \tag{2.64}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

Por outro lado, como  $\sigma_n(x)$  é um polinômio trigonométrico de ordem  $n$ , então temos que, pelo resultado da seção 2.3

$$\int_{-L}^L |s_n(x) - f(x)|^2 \leq \int_{-L}^L |\sigma_n(x) - f(x)|^2 dx$$

e usando (2.64) segue (2.63), sendo assim a assertiva do teorema é válida.

(ii) Caso geral.

Vimos na seção 2.3 que toda função  $f$  de  $\mathcal{L}^2$ , de quadrado integrável, pode ser aproximada em média quadrada por funções contínuas  $\psi$ . E além disso, se  $f$  for  $2L$ -periódica, então  $\psi$  também será. Sendo assim dado  $\varepsilon > 0$ , devemos mostrar que existe um  $n_0$  tal que

$$\int_{-L}^L |s_n(x) - f(x)|^2 dx < \varepsilon, \quad (2.65)$$

para  $n \geq n_0$ .

Logo, existe uma função  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e  $2L$ -periódica tal que

$$\int_{-L}^L |f(x) - \psi(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{4}. \quad (2.66)$$

Por outro lado, usando o caso anterior, temos que existe um  $n_0$ , tal que para  $n \geq n_0$ , temos

$$\int_{-L}^L |\psi(x) - \tilde{s}_n(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad (2.67)$$

onde  $\tilde{s}_n$  é a reduzida de ordem  $n$  da série de Fourier da  $\psi$ . Usando a desigualdade de Minkowski, temos

$$\left[ \int_{-L}^L |f(x) - \tilde{s}_n(x)|^2 dx \right]^{1/2} \leq \left[ \int_{-L}^L |f(x) - \psi_n(x)|^2 dx \right]^{1/2} + \left[ \int_{-L}^L |\psi_n(x) - \tilde{s}_n(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

Logo, usando (2.66) e (2.67), se tem

$$\int_{-L}^L |f(x) - \tilde{s}_n(x)|^2 dx \leq \varepsilon^2 < \varepsilon,$$

se  $\varepsilon < 1$ . Dos resultados da seção 2.3, como  $\tilde{s}_n$  é um polinômio trigonométrico de ordem  $n$ , então

$$\int_{-L}^L |f(x) - s_n(x)|^2 dx \leq \int_{-L}^L |f(x) - \tilde{s}_n(x)|^2 dx \leq \varepsilon,$$

para todo  $n \geq n_0$ , ou seja, vale (2.65), o que conclui a demonstração.  $\square$

Dado um conjunto  $\{\psi_n\}$  de funções quadrado integrável em  $[-L, L]$ , dizemos que esse conjunto é um sistema ortogonal se

$$\int_{-L}^L \psi_n(x)\psi_m(x)dx = 0, \text{ se } n \neq m$$

$$\int_{-L}^L \psi_n^2(x)dx = c_n \neq 0.$$

E recebe o nome de ortonormal se  $c_n = 1$ , para todo  $n$ . Já vimos que o sistema trigonométrico

$$1, \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right),$$

para todo  $k > 0$  é ortogonal. Decorre das relações de ortogonalidade que

$$\frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad (2.68)$$

para todo  $k > 0$ , é um sistema ortonormal.

**Definição 12.** *Um sistema ortonormal é dito completo se para uma função  $f$  de  $\mathcal{L}^2$  em  $[-L, L]$ , tivermos*

$$\int_{-L}^L f\psi_n = 0, \quad \forall n, \quad (2.69)$$

então  $f = 0$ , ou seja, significa que  $f(x) = 0$  em todos os pontos de continuidade.

**Teorema 13.** *O sistema trigonométrico (2.68) é completo.*

*Demonstração.* A demonstração decorre de imediato usando a identidade de Parseval, pois, neste caso, (2.69) diz que todos os coeficientes de Fourier de  $f$  se anulam. Portanto

$$\int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = 0$$

o que implica em  $f = 0$ . De fato, se  $x_0$  for ponto de continuidade da  $f$  e  $f(x_0) \neq 0$ , então existirá um intervalo  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  onde  $f(x) \neq 0$ . Logo

$$0 < \int_I \leq \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = 0$$

o que é absurdo. □

**Teorema 14** (Unicidade da série de Fourier). *Sejam  $f$  e  $g$  funções  $2L$ -periódicas e de  $\mathcal{L}^2$  em  $[-L, L]$ . Suponha que as suas séries de Fourier sejam as mesmas. Então  $f(x) = g(x)$  em todos os pontos de continuidade da  $f$  e da  $g$ .*

*Demonstração.* Seja  $h = f - g$ . Como os coeficientes de Fourier de  $f$  e  $g$  são os mesmos, então  $\int_{-L}^L h\psi_n = 0$ , para todas as  $\psi_n$  do sistema trigonométrico. Logo, pelo teorema anterior, temos que  $h = 0$ , sendo assim temos que  $f = g$ . □

## Capítulo 3

# Equação da onda

Neste capítulo iremos modelar o problema da corda finita vibrante, também utilizaremos o *Método de Fourier* para resolver o problema de valor inicial e de fronteira envolvendo a equação da onda tanto no caso homogêneo quanto em um caso não homogêneo. Também mostraremos que a solução encontrada por esse método é única.

### 3.1 Equação da corda vibrante

Nessa seção estudaremos o problema das pequenas vibrações transversais de uma corda perfeitamente flexível.

O fenômeno ocorre no plano  $(x, u)$  e se supõe que a corda vibre em torno da posição de repouso ao longo do eixo  $x$ . Tem-se como hipótese que as partículas da corda se deslocam apenas no eixo  $u$ . Iremos também considerar que a corda não ofereça resistência à flexão.

Para deduzir a equação diferencial que deve satisfazer a função  $u(x, t)$ , que representa a posição do ponto  $x$  da corda no instante  $t$ , utilizaremos a seguinte lei de Newton: "a derivada com relação ao tempo da quantidade de movimento do corpo é igual à soma das forças aplicadas". Como as grandezas envolvidas nessa lei são vetoriais, precisaremos ter um cuidado especial com direção e a orientação das forças, velocidades, acelerações, etc.

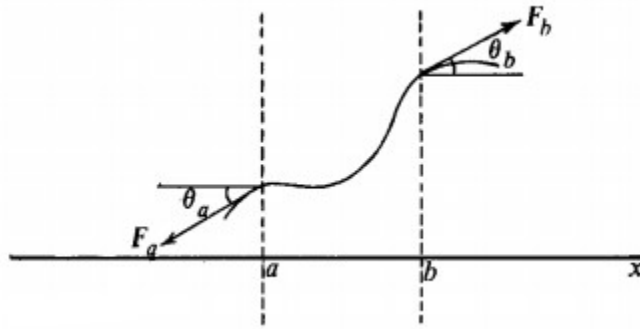
Aplicaremos essa lei em um sistema mecânico constituído por um trecho de corda entre dois pontos arbitrários,  $x \in [a, b]$ . Denotaremos por  $\rho(x, t)$  a densidade da corda e, pelo que vimos na hipótese, como a corda se desloca em uma direção normal a  $x$ , temos que a densidade independe de  $t$ , ou seja, podemos simplesmente denotar a densidade por  $\rho(x)$ . Desse modo a quantidade

de movimento da corda entre os pontos  $a$  e  $b$  é dada por

$$M(t) = \int_a^b \rho(x) u_t(x, t) dx, \quad (3.1)$$

onde  $u_t(x, t)$  é a velocidade do ponto  $x$  da corda no instante  $t$ .

Note que não há componentes da velocidade na direção  $x$ , pelo fato das vibrações serem transversais. Com isso existem duas forças a serem consideradas. Primeiro, a ação do resto da corda sobre o trecho entre  $a$  e  $b$ , que é representada por forças de tensão na direção tangente às forças  $F_a$  e  $F_b$ , indicadas na figura abaixo.



Representando por  $f(a, t)$  e  $f(b, t)$ , respectivamente, as intensidades dessas forças, e  $\theta_a$  e  $\theta_b$  os ângulos tangentes a corda com o eixo  $x$  nos pontos  $a$  e  $b$ , respectivamente. Usando a lei de Newton enunciada e usando o fato de que não há movimento em  $x$ , obtemos que

$$f(b, t) \cos \theta_b = f(a, t) \cos \theta_a,$$

onde concluímos que a componente horizontal da seção, independente do ponto  $x$ , é uma função que depende apenas do tempo, denotando assim por  $\tau(t)$ . Sendo assim, a resultante vertical das forças de tensão no trecho  $[a, b]$  é

$$\tau(t) \operatorname{tg} \theta_b - \tau(t) \operatorname{tg} \theta_a = \tau(t) u_x(x, t) \Big|_{x=a}^{x=b} = \int_a^b \tau(t) u_{xx}(x, t) dx. \quad (3.2)$$

Além das forças de tensão, o sistema pode estar sujeito à ação de forças externas como gravidade, resistência ao movimento, ou forças que tendem a restaurar a posição de equilíbrio da corda. Denotaremos por  $h_1(x, t, u)$  a densidade linear dessas forças e utilizando a lei de Newton,

junto com (3.1) e (3.2), temos

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x) u_t(x, t) dx = \int_a^b \tau(t) u_{xx}(x, t) dx + \int_a^b h_1(x, t, u) dx. \quad (3.3)$$

Supondo que  $u_{tt}(x, t)$  seja contínua, podemos comutar a derivada com a integral da equação acima. Além disso, como  $a$  e  $b$  são arbitrários, de (3.3) obtemos a equação da onda

$$\rho(x) u_{tt} = \tau(t) u_{xx} + h_1(x, t, u),$$

ou seja,

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x, t, u), \quad (3.4)$$

onde  $c^2(x, t) = \frac{\tau(t)}{\rho(x)}$  e  $h(x, t, u) = \frac{h_1(x, t, u)}{\rho(x)}$ .

Citaremos algumas equações da onda de acordo com o tipo das forças externas.

1) *Vibrações livres*: Suponha que as únicas forças atuantes sejam as de tensão, dessa forma temos

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (3.5)$$

onde podemos supor também  $c$  constante, caso a corda seja homogênea,  $\rho(x) = \text{constante}$ , e caso suas vibrações possuam amplitudes pequenas,  $\tau(t) = \text{constante}$ .

2) *Vibrações forçadas*: Suponha que nesse caso a corda esteja sujeita a uma força externa, que pode variar com  $x$  e  $t$ , dessa forma temos

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x, t). \quad (3.6)$$

3) *Vibrações amortecidas*: Suponha que a corda esteja imersa em um fluido, podendo ser o ar, em que exista uma resistência ao movimento. Nesse caso, existe uma força externa que depende da velocidade, que suporemos ser da forma  $h(x, t) = -bu_t(x, t)$ , com  $b > 0$ , dessa forma temos

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - bu_t. \quad (3.7)$$

4) *Vibrações sob ação de uma força restauradora*: Suponha que exista um dispositivo que

produza uma força que colocará a corda na posição  $u \equiv 0$ , dada por  $-au(x, t)$ , dessa forma temos

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - au. \quad (3.8)$$

Em resumo, provamos que uma corda, que vibra em torno da posição  $u = 0$ , tem a sua posição  $u(x, t)$  governada pela equação (3.4) das ondas. O que nos falta dizer é sobre a extensão da corda e sobre o tipo de articulação das extremidades. Consideremos alguns casos.

1) *Corda finita com extremidade fixa*: Suponha que a corda tenha comprimento  $L$ , e que, quando em posição de repouso ela ocupe a porção do eixo  $x$  entre 0 e  $L$ . Assim a hipótese das extremidades fixas implica que

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad (3.9)$$

para  $t \geq 0$ , essas condições são chamadas de condições de fronteira. Sob o ponto de vista matemático, o que nos interessa é o deslocamento inicial da corda,  $u(x, 0)$ , e o modo como a corda é solta nessa posição,  $u_t(x, 0)$ . Desse modo precisa ser fornecido

$$u(x, 0) = f(x), \text{ para } 0 \leq x \leq L, \quad (3.10)$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \text{ para } 0 \leq x \leq L, \quad (3.11)$$

que são as condições iniciais. Portanto o problema da corda vibrante finita, com extremidades fixas, consiste em determinar uma função  $u(x, t)$  para  $0 \leq x \leq L$  e  $t \geq 0$ , que satisfaça à equação (3.4) com as condições de fronteira (3.9) e que satisfaça as condições iniciais (3.10) e (3.11). Um problema desse tipo é conhecido como um problema de valores iniciais e de fronteira (PVIF).

2) *Corda finita com extremidades livres*: Considere uma corda de comprimento  $L$  e em suas extremidades forçadas a não se afastarem de trilhos colocados perpendicularmente à corda, no plano  $(x, u)$  de vibração. Isso implica em

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad (3.12)$$

que são as condições de fronteira desse problema. Supondo as mesmas condições iniciais do caso anterior, temos que o PVIF é determinada pela função  $u(x, t)$  que satisfaça (3.4) com as condições iniciais (3.10) e (3.11) e as de fronteira (3.12).

3) *Outras condições de fronteiras*: Podemos ter o caso de vibrações de uma corda cujas as

extremidades se movem transversalmente, de acordo com as leis conhecidas. Por exemplo

$$u(0, t) = a(t) \quad \text{e} \quad u(L, t) = b(t),$$

para  $t \geq 0$ .

Outra possibilidade seria aquela em que a extremidade,  $x = 0$  por exemplo, tenha uma conexão elástica, que implica na condição de fronteira  $u_x(0, t) + hu(0, t) = 0$ .

### 3.2 Resolução por séries de Fourier

Nessa seção veremos como o método de separação de variáveis e o estudo das séries de Fourier são utilizadas para resolver o seguinte problema da corda vibrante finita com extremidades fixas.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \text{ em } \mathcal{R}, \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \text{ para } t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \text{ para } 0 \leq x \leq L, \end{aligned} \tag{3.13}$$

onde supomos  $c$  constante e  $\mathcal{R}$  é a semi-faixa  $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < L \text{ e } t > 0\}$ .

*Resolução formal:* Utilizaremos o método de Fourier que consiste em usar a separação de variáveis para determinar funções do tipo  $u(x, t) = F(x)G(t)$  que satisfaçam a equação da onda e as condições de fronteira do problema (3.13). Feito isso, utilizaremos essas funções para compor uma função que também satisfará as condições iniciais.

Primeiramente, substitui-se a função  $u(x, t) = F(x)G(t)$  na equação da onda, obtendo-se seguinte relação

$$F(x) \frac{d^2 G(t)}{dt^2} = c^2 G(t) \frac{d^2 F(x)}{dx^2}.$$

Logo temos que  $F(x)G''(t) = c^2 G(t)F''(x)$ , ou ainda

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{c^2 G(t)}. \tag{3.14}$$

Note que o lado esquerdo de (3.14) depende apenas de  $x$ , e o lado direito depende apenas de  $t$ , portanto ambos os membros dessa equação independem de  $x$  e  $t$ . Sendo assim cada um dos lados pode ser igualado a um parâmetro  $\sigma$ , que independe de  $x$  e  $t$ , o qual será determinado de modo que as condições de fronteira sejam satisfeitas por  $u(x, t) = F(x)G(t)$ . Logo, de (3.14),

obtemos

$$F'' - \sigma F = 0, \quad (3.15)$$

$$G'' = \sigma c^2 G. \quad (3.16)$$

Das condições de fronteira, temos que  $0 = u(0, t) = F(0)G(t)$  e  $0 = u(L, t) = F(L)G(t)$ , o que implica em  $F(0) = F(L) = 0$ , pois caso  $G(t) = 0$ , teríamos que  $u(x, t) = 0$  para todo  $x$  e  $t$ , mas esse caso não nos interessa.

Logo chegamos ao seguinte problema de autovalores

$$\begin{cases} F'' - \sigma F = 0 \\ F(0) = F(L) = 0, \end{cases} \quad (3.17)$$

com  $F(x) \neq 0$ , onde  $\sigma$  é chamado de autovalor e  $F(x)$  é chamado de autofunção. Para isso precisamos considerar os possíveis casos para  $\sigma$

Caso *I*: Se  $\sigma > 0$  temos que a equação característica da equação diferencial ordinária (EDO)  $F'' - \sigma F = 0$ , será

$$x^2 - \sigma = 0,$$

e essa equação possui duas raízes reais distintas, sendo assim a sua solução geral é dada por

$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x}.$$

Logo o par  $(c_1, c_2)$  deve satisfazer as condições de fronteira, ou seja,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{\sigma}L} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}L} = 0, \end{cases}$$

que só possui solução trivial,  $c_1 = c_2 = 0$ , e nesse caso temos que  $F \equiv 0$  o que implica em  $u(x, t) = 0$ , para todo  $x$  e  $t$ , o que não nos interessa.

Caso *II*: Se  $\sigma = 0$  temos que a sua equação característica possui duas raízes reais idênticas, logo temos que a sua solução geral será

$$F(x) = c_1 x + c_2$$

e obtemos o seguinte sistema de equações, para satisfazer as condições de fronteira

$$\begin{cases} c_2 = 0; \\ c_1 L + c_2 = 0, \end{cases}$$

nesse caso nos deparamos novamente com a solução trivial.

Caso *III*: Se  $\sigma < 0$  a equação característica possuirá duas soluções imaginárias, e tomando  $\sigma = -\lambda^2$ , teremos que a solução geral será

$$F(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sen(\lambda x),$$

e o sistema de equações para as condições de fronteira será

$$\begin{cases} c_1 = 0; \\ c_2 \sen(\lambda L) = 0. \end{cases}$$

Como queremos que  $c_2 \neq 0$  teremos que  $\sen(\lambda L) = 0$ , ou seja,  $\lambda L = n\pi$ , com  $n \in \mathbb{Z}^*$ . Logo, como  $\sigma = -\lambda^2$ , temos

$$\sigma_n = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2},$$

com  $n \geq 1$ .

Portanto temos que

$$F_n(x) = \sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Utilizando o  $\sigma_n$  dado, conseguimos obter a seguinte solução para (3.16)

$$G_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sen\left(\frac{n\pi ct}{L}\right),$$

onde  $a_n$  e  $b_n$  são constantes arbitrárias.

Logo, para cada  $n$ , a função dada por

$$u_n(x, t) = a_n \sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sen\left(\frac{n\pi ct}{L}\right), \quad (3.18)$$

é solução da equação da onda e satisfaz as condições de fronteira do PVIF (3.13).

Pelo *Princípio da Superposição* temos que para cada  $N \in \mathbb{N}$  a expressão dada por

$$\sum_{n=1}^N \left[ a_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{n\pi ct}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi ct}{L} \right) \right],$$

ainda é uma solução para a equação da onda e também satisfaz as condições de fronteira do PVIF (3.13). Porém, de forma geral, a expressão acima não irá satisfazer as condições iniciais do PVIF (3.13), a menos que as funções  $f$  e  $g$  sejam dadas por uma combinação linear finita de senos.

Devido a esse problema, o próximo passo do método de Fourier é considerar

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{n\pi ct}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi ct}{L} \right) \right], \quad (3.19)$$

onde as constantes  $a_n$  e  $b_n$  precisam ser determinadas de modo a satisfazer as condições iniciais do PVIF (3.13).

Isso implica em

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (3.20)$$

e dessa forma é necessário que

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (3.21)$$

Para determinar  $b_n$ , iremos obter  $u_t(x, t)$  derivando, termo a termo, a série (3.19), obtendo assim

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (3.22)$$

Logo

$$\frac{n\pi c}{L} b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx,$$

onde obtemos

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (3.23)$$

Ou seja, a solução formal do PVIF (3.13) é dada por (3.19) onde os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  são calculados em (3.21) e (3.23), respectivamente.

O termo “solução formal” é usado no sentido de que se o problema tiver uma solução, e para tal se deve impor condições em  $f$  e  $g$ , então ela será dada pela expressão (3.19). Sendo assim, temos que (3.19) junto com (3.21) e (3.23) é um candidato à solução do PVIF (3.13), e com isso surgem algumas questões naturais:

- i)* A série (3.19) converge?
- ii)* Ela define uma função contínua em  $\overline{\mathcal{R}}$ ?
- iii)* Ela é uma função de classe  $C^2$  em  $\mathcal{R}$ , que é solução do PVIF (3.13)?
- iv)* Quais as condições sobre  $f$  para que (3.20) ocorra?
- v)* Quais as condições sobre  $g$  para que (3.22) ocorra?

Esses questionamentos são respondidas no resultado enunciado a seguir.

**Teorema 15.** *Suponha que  $f$  e  $g$  sejam funções dadas em  $[0, L]$  tais que  $f, f', f'', g, g'$  sejam contínuas e  $f''', g''$  sejam seccionalmente contínuas. Além disso, suponha que  $f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = g(0) = g(L) = 0$ . Então:*

- i)*  $a_n$  e  $b_n$  estão bem definidos em (3.21) e (3.23), respectivamente;
- ii)* as igualdades (3.20) e (3.22) ocorrem;
- iii)* a expressão (3.19) define uma função contínua em  $\overline{\mathcal{R}}$ , de classe  $C^2$  em  $\mathcal{R}$ , que satisfaz todas as condições do PVIF (3.13).

*Demonstração.* O item (i) segue de imediato pelo fato de  $f$  e  $g$  serem contínuas em  $[0, L]$ , o que implica que as integrais em (3.21) e (3.23) convergem.

O item (ii) segue da hipótese de  $f$  e  $g$  serem de classe  $C^1$  em  $[0, L]$  e que  $f(0) = f(L) = g(0) = g(L) = 0$ , então  $f$  e  $g$  podem ser estendidas continuamente a reta toda de modo a serem funções ímpares e  $2L$  periódicas.

Para mostrar que (3.19) define uma função contínua em  $\overline{\mathcal{R}}$ , pelo  $M$  Teste de Weierstrass basta mostrar a convergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ , pois ela majora a série (3.19).

Realizando a integração por partes em (3.21), três vezes, usando as hipóteses  $f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = 0$ , e utilizando a notação  $\frac{n}{L} = \alpha$  para facilitar a escrita, teremos que

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \alpha \pi x dx \\
&= \frac{2}{L} \left[ (-f(x)(\alpha\pi)^{-1} \cos \alpha \pi x) \Big|_0^L + \int_0^L f'(x)(\alpha\pi)^{-1} \cos \alpha \pi x dx \right] \\
&= \frac{2}{L} (\alpha\pi)^{-1} \left[ (f'(x)(\alpha\pi)^{-1} \operatorname{sen} \alpha \pi x) \Big|_0^L - \int_0^L f''(x)(\alpha\pi)^{-1} \operatorname{sen} \alpha \pi x dx \right] \\
&= -\frac{2}{L} (\alpha\pi)^{-2} \left[ (-f''(x)(\alpha\pi)^{-1} \cos \alpha \pi x) \Big|_0^L + \int_0^L f'''(x)(\alpha\pi)^{-1} \cos \alpha \pi x dx \right] \\
&= -\frac{2}{L} (\alpha\pi)^{-3} \int_0^L f'''(x) \cos \alpha \pi x dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$a_n = -\frac{2L^2}{n^3\pi^3} \int_0^L f'''(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (3.24)$$

De modo análogo, integrando por partes (3.23), duas vezes, obtemos

$$b_n = -\frac{2L^2}{n^3\pi^3 c} \int_0^L g''(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (3.25)$$

Logo de (3.24) e (3.25) obtemos a seguinte relação

$$|a_n| \leq \frac{k}{n^3} \quad \text{e} \quad |b_n| \leq \frac{k'}{n^3},$$

onde  $k$  e  $k'$  são constantes.

Sendo assim as séries  $\sum(|a_n| + |b_n|)$  e  $\sum(n|a_n| + n|b_n|)$  convergem, o que mostra que  $u$  é contínua em  $\overline{\mathcal{R}}$  e de classe  $C^1$  em  $\mathcal{R}$ . E mostra que as derivadas primeiras de  $u$  podem ser obtidas derivando-se (3.19) termo a termo, sendo elas

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \frac{n\pi}{L} \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{n\pi ct}{L} \right) + b_n \frac{n\pi}{L} \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi ct}{L} \right) \right), \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -a_n \frac{n\pi c}{L} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi ct}{L} \right) + b_n \frac{n\pi c}{L} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{n\pi ct}{L} \right) \right). \quad (3.27)$$

De (3.24) e (3.25), obtemos

$$|a_n| \leq \frac{k''}{n^3} |c_n| \quad \text{e} \quad |b_n| \leq \frac{k'''}{n^3} |d_n|, \quad (3.28)$$

onde  $c_n$  e  $d_n$  são os coeficientes de Fourier de  $f'''$  e  $g''$ , respectivamente. Logo, utilizando a desigualdade  $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$  em (3.28), temos que

$$n^2 |a_n| \leq \frac{k''}{2} \left( \frac{1}{n^2} + |c_n|^2 \right) \quad \text{e} \quad n^2 |b_n| \leq \frac{k'''}{2} \left( \frac{1}{n^2} + |d_n|^2 \right).$$

Portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 |a_n| + n^2 |b_n|) \leq \frac{k'' + k'''}{2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2 \right), \quad (3.29)$$

onde as duas últimas séries de (3.29) convergem em virtude da desigualdade de Bessel

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx,$$

vale ressaltar que  $f'''$  e  $g''$  são seccionalmente contínuas e portanto são funções de quadrado integrável. Logo a série da esquerda em (3.29) converge, o que implica que  $u$  é de classe  $C^2$  em  $\mathcal{R}$  e a segunda derivada de  $u$  pode ser obtida derivando (3.26) e (3.27) termo a termo. Com isso se verifica que  $u$  satisfaz a equação da onda, o que conclui a demonstração. □

### 3.3 Energia da corda vibrante

Nessa seção iremos estudar um pouco sobre a energia da corda vibrante e usaremos esse estudo para demonstrar a unicidade da solução encontrada pelo método de Fourier.

Seja  $u(x, t)$  uma solução da equação da onda,  $\rho(x)u_{tt} = \tau(t)u_{xx} + h_1(x, t, u)$ , com a hipótese adicional de  $\tau(t) = \tau$  não depender de  $t$ . Mais precisamente, suponhamos que  $u$  seja uma função de classe  $C^1$  em  $\overline{\mathcal{R}}$  e de classe  $C^2$  em  $\mathcal{R}$ , e que satisfaça a equação da onda em  $\mathcal{R}$ . Assim, se multiplicarmos essa equação por  $u_t$  e integrando com relação a  $x$  entre 0 e  $L$ , temos

$$\int_0^L \rho(x)u_{tt}u_t dx = \int_0^L \tau u_{xx}u_t dx + \int_0^L h_1(x, t, u)u_t dx. \quad (3.30)$$

Observe que  $u_{tt}u_t = \frac{1}{2}(u_t^2)_t$  e se realizarmos a integração por partes na segunda integral de (3.30), teremos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho(x) u_t^2 dx = (\tau u_x u_t) \Big|_0^L - \int_0^L \tau u_x u_{tx} dx + \int_0^L h_1(x, t, u) u_t dx,$$

que usando a relação  $u_{tt}u_t = \frac{1}{2}(u_t^2)_t$  pode ser escrito como

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \tau u_x^2 dx \right] = \tau u_x u_t \Big|_0^L + \int_0^L h_1(x, t, u) u_t dx. \quad (3.31)$$

A equação (3.31) é chamada de equação de energia e as expressões

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) u_t^2 dx \quad \text{e} \quad (3.32)$$

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \tau u_x^2 dx, \quad (3.33)$$

são a *energia cinética* e a *energia potencial* da corda, respectivamente. A expressão dada por  $E(t) = K(t) + V(t)$  é a energia total da corda.

Seja  $u$  a solução do PVIF (3.13), obtido na seção anterior, nesse caso temos que  $h_1 = 0$  e  $u_t(0, t) = u_t(L, t) = 0$ . Logo podemos reduzir (3.31) para

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \tau u_x^2 dx \right] = 0, \quad (3.34)$$

o que implica que a energia  $E(t)$  é constante em relação o tempo. Assim, temos um princípio de conservação de energia para o fenômeno de vibração da corda com extremidades fixas, e sem ação de forças externas, isto é,  $h = 0$ . Também se diz que o sistema é conservativo. A mesma conclusão temos para o caso de vibração da corda, sem ação de forças externas, e com condições de fronteira  $u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$ .

A energia da corda vibrante no instante inicial  $t = 0$  é dada por

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) g(x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \tau f'(x)^2 dx, \quad (3.35)$$

e o princípio de conservação de energia no PVIF (3.13) diz que essa energia é mantida. O resultado de unicidade de solução será demonstrado usando esse princípio.

**Teorema 16** (Unicidade). *A solução do PVIF abaixo, caso exista é única:*

$$\begin{aligned}\rho(x)u_{tt} &= \tau u_{xx} + k_1(x, t), \text{ em } \mathcal{R}, \\ u(0, t) &= h_1(t), \quad u(L, t) = h_2(t), \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x) \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L.\end{aligned}\tag{3.36}$$

*Demonstração.* Suponha que o PVIF (3.36) tenha duas soluções  $u_1$  e  $u_2$ . Por solução estamos entendendo uma função de classe  $C^2$  em  $\mathcal{R}$  e contínua em  $\overline{\mathcal{R}}$  que satisfaz todas as relações de (3.36). Observe que isso requer as seguintes relações de compatibilidade entre os dados iniciais e os de fronteira:  $h_1(0) = f(0)$ ,  $h_2(0) = g(L)$ . É fácil ver que a função  $u = u_1 - u_2$  é de classe  $C^2$  em  $\mathcal{R}$ , contínua em  $\overline{\mathcal{R}}$  e satisfaz ao seguinte PVIF, o qual é do tipo (3.13):

$$\begin{aligned}\rho(x)u_{tt} &= \tau u_{xx} \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0.\end{aligned}$$

É claro que nesse caso a energia inicial  $E(0)$  é zero. Logo, pelo princípio de conservação de energia concluímos que

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x)u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \tau u_x^2 dx = 0,$$

para todo  $t \geq 0$ , o que implica que  $u_t(x, t) = u_x(x, t) = 0$ , para todo  $(x, t)$  em  $\mathcal{R}$ , uma vez que  $\rho(x)$  e  $\tau$  são positivos. Logo  $u(x, t)$  é igual a uma constante em  $\mathcal{R}$ , e usando a continuidade de  $u$  em  $\overline{\mathcal{R}}$ , com as condições iniciais nulas no PVIF acima, concluímos que  $u = 0$  em  $\overline{\mathcal{R}}$ , ou seja,  $u_1 = u_2$ . Assim temos a unicidade de solução no PVIF (3.36). □

### 3.4 Harmônicos, frequência, amplitude

Pelo método de Fourier obtivemos funções

$$u_n(x, t) = a_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{n\pi ct}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi ct}{L} \right),$$

que são soluções da equação da onda  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ , e que satisfazem as condições de fronteira  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ . Essas funções são chamadas de ondas estacionárias, pois para  $x = \frac{kL}{n}$ , com  $0 \leq k \leq n$ , teremos que  $\sin \frac{n\pi x}{L} = 0$ . Portanto apenas esses pontos permanecem parados caso a vibração da onda é descrita pela função  $u_n$ . Esses pontos são chamados de nós da onda estacionária, os pontos médios de dois nós consecutivos são os antinós ou ventres e o dobro da distância de dois nós consecutivos é o comprimento de onda.

A função  $u_n$  recebe o nome de  $n$ -ésimo harmônico ou  $n$ -ésima tônica. A primeira tônica é conhecido como tônica principal ou harmônico fundamental, e os demais são as supertônicas.

Seja  $\alpha_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ . Considerando os valores

$$X_n = \frac{b_n}{\alpha_n} \quad \text{e} \quad Y_n = \frac{a_n}{\alpha_n},$$

temos que  $X_n^2 + Y_n^2 = 1$ , ou seja, o ponto  $(X_n, Y_n)$  está sobre a circunferência de raio 1 centrada na origem. Portanto, existe  $\theta_n \in [0, 2\pi]$ , chamado de fase, tal que

$$X_n = \cos \theta_n \quad \text{e} \quad Y_n = \sin \theta_n.$$

Segue então que  $a_n = \alpha_n \sin \theta_n$ ,  $b_n = \alpha_n \cos \theta_n$  e  $\operatorname{tg} \theta_n = \frac{a_n}{b_n}$ .

Substituindo essas relações em  $u_n$  obtemos

$$u_n(x, t) = \alpha_n \sin \left( \frac{n\pi ct}{L} + \theta_n \right) \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (3.37)$$

Note que o movimento da corda a cada ponto  $x$  obedece uma lei senoidal de amplitude  $\alpha_n \sin \frac{n\pi x}{L}$ , de período  $T_n = \frac{2L}{nc}$  e de frequência  $\omega_n = T_n^{-1} = \frac{nc}{2L}$ , desse modo a frequência de vibração é a mesma para cada  $x$ . Logo

$$\omega_n = \frac{nc}{2L} \quad \text{e} \quad \alpha_n \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$$

são, respectivamente, a frequência e a amplitude do  $n$ -ésimo harmônico. Observe que a frequência da supertônica é múltiplo da frequência da tônica principal.

*A energia do  $n$ -ésimo harmônico:* Considere o  $n$ -ésimo harmônico  $u_n$  gerado pela corda

vibrante com extremidades fixas e usando a expressão (3.37) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) &= \alpha_n \frac{n\pi c}{L} \cos\left(\frac{n\pi ct}{L} + \theta_n\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \\ \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, t) &= \alpha_n \frac{n\pi}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L} + \theta_n\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).\end{aligned}$$

Para calcular a energia de  $u_n$ , usamos as expressões (3.32) e (3.33) para obter

$$E_n = \frac{1}{2} \left[ \int_0^L \rho(x) \alpha_n^2 \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 \cos^2 \beta_n \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_0^L \tau \alpha_n^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \beta_n \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right]$$

onde  $\beta_n = \frac{n\pi ct}{L} + \theta_n$ . Supondo  $\rho$  e  $\tau$  constantes, temos

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2}{4L} \alpha_n^2 (\rho c^2 \cos^2 \beta_n + \tau \operatorname{sen}^2 \beta_n)$$

e como  $c^2 = \tau \rho^{-1}$ , ou ainda  $\tau = \rho c^2$ , segue que

$$E_n = \frac{n^2 c^2 L}{4L} \rho \pi^2 \alpha_n^2 = M \pi^2 \alpha_n^2 \omega_n^2 \quad (3.38)$$

onde  $M = L\rho$  é a massa da corda,  $\omega_n$  é a frequência do  $n$ -ésimo harmônico e  $\alpha_n$  é a amplitude máxima desse harmônico.

A energia da corda é a soma das energias dos vários harmônicos: De fato, basta calcular a energia com  $t = 0$ , já que a corda vibrante, com extremidade fixa, forma um sistema conservativo. Logo a energia da corda é

$$E = \frac{1}{2} \int_0^L \rho g(x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \tau f'(x)^2 dx.$$

Usando as expressões (3.20) e (3.22) e as relações de ortogonalidade, temos

$$E = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \rho \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 b_n^2 \frac{L}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \tau \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 a_n^2 \frac{L}{2},$$

ou seja,

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{4L} \rho c^2 \alpha_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n.$$

### 3.5 Equação da onda não homogênea

Vamos agora estudar o seguinte caso de PVIF envolvendo uma equação da onda não homogênea.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} + g(x), \quad \text{em } \mathcal{R}, \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad \text{para } t > 0, \\ u(x, 0) &= f_0(x) \text{ e } u_t(x, 0) = f_1(x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq L. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Note que se  $g \equiv 0$  e assumindo as mesmas hipóteses do Teorema 15 para  $f_0$  e  $f_1$ , vimos que a solução desse PVIF é dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Motivados por isso, vamos procurar uma solução na forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \tag{3.40}$$

Vamos supor que  $g$  seja uma função  $2L$ -periódica e contínua, com  $g'$  seccionalmente contínua no intervalo  $[0, L]$ , então temos que  $g'$  é de quadrado integrável e assim vale o teorema da convergência uniforme da série de Fourier, ou seja,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

converge uniformemente, sendo

$$g_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Substituindo (3.40) na equação do PVIF (3.39) obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n''(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} c_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Assim, para cada  $n \in \mathbb{N}$  temos

$$c_n''(t) + \frac{n^2\pi^2 c^2}{L^2} c_n(t) = g_n, \quad (3.41)$$

ou ainda, usando o fato da frequência do  $n$ -ésimo harmônico ser  $\omega_n = \frac{nc}{2L}$ , escrevemos

$$c_n''(t) + (2\pi\omega_n)^2 c_n(t) = g_n.$$

Note que obtemos uma EDO de segunda ordem, cuja solução geral é dada por

$$c_n(t) = a_n \cos(2\pi\omega_n t) + b_n \sen(2\pi\omega_n t) + \hat{c}_n(t),$$

sendo  $\cos(2\pi\omega_n t)$  e  $\sen(2\pi\omega_n t)$  duas soluções linearmente independentes da equação homogênea associada à (3.41). O termo  $\hat{c}_n(t)$  é uma solução particular de (3.41), que pode ser obtida usando o *Método de Variação dos Parâmetros* conforme a fórmula

$$\hat{c}_n(t) = -\cos(2\pi\omega_n t) \int \frac{\sen(2\pi\omega_n t) g_n}{W} dt + \sen(2\pi\omega_n t) \int \frac{\cos(2\pi\omega_n t) g_n}{W} dt,$$

onde  $W$  é Wronskiano entre as soluções  $\cos(2\pi\omega_n t)$  e  $\sen(2\pi\omega_n t)$ , isto é,

$$W = \det \begin{vmatrix} \cos(2\pi\omega_n) & \sen(2\pi\omega_n) \\ -2\pi\omega_n \sen(2\pi\omega_n) & 2\pi\omega_n \cos(2\pi\omega_n) \end{vmatrix} = 2\pi\omega_n.$$

Logo

$$\hat{c}_n(t) = \frac{g_n}{(2\pi\omega_n)^2} \cos^2(2\pi\omega_n t) + \frac{g_n}{(2\pi\omega_n)^2} \sen^2(2\pi\omega_n t) = \frac{g_n}{(2\pi\omega_n)^2}.$$

Assim

$$c_n(t) = a_n \cos(2\pi\omega_n t) + b_n \sen(2\pi\omega_n t) + \frac{g_n}{(2\pi\omega_n)^2}. \quad (3.42)$$

Usando a notação  $\tilde{a}_n$  e  $\tilde{b}_n$  para os coeficientes de Fourier de  $f_0$  e  $f_1$  respectivamente, pelas condições iniciais obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n &= c_n(0) = a_n + \frac{g_n}{(2\pi\omega_n)^2}, \\ \tilde{b}_n &= c_n'(0) = (2\pi\omega_n) b_n. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} a_n &= \tilde{a}_n - \frac{g_n}{(2\pi\omega_n)^2}, \\ b_n &= \frac{\tilde{b}_n}{(2\pi\omega_n)}. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Dessa forma, o candidato a solução do PVIF (3.39) é dada por (3.40), onde  $c_n(t)$  é dada por (3.42) e  $a_n, b_n$  em (3.43).

**Teorema 17.** *Sejam  $f_0, f_1$  e  $g$  funções definidas em  $[0, L]$  tais que  $f_0, f_0', f_0'', f_1, f_1', g$  sejam contínuas e  $f_0''', f_1''$  e  $g'$  são seccionalmente contínuas. Além disso, suponha que  $f_0(0) = f_0(L) = f_0''(0) = f_0''(L) = f_1(0) = f_1(L) = g(0) = g(L) = 0$ . Então a expressão dada por (3.40) onde  $c_n(t)$  é dada por (3.42),  $a_n$  e  $b_n$  em (3.43) define uma função em  $C(\overline{\mathcal{R}}) \cap C^2(\mathcal{R})$  que satisfaz o PVIF (3.39).*

*Demonstração.* Primeiramente mostraremos que  $u(x, t)$  é contínua em  $\overline{\mathcal{R}}$ .

De (3.40) e (3.42) temos

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos(2\pi\omega_n t) + b_n \sen(2\pi\omega_n t) + \frac{g_n}{(2\pi\omega_n)^2} \right] \sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \tilde{a}_n \cos(2\pi\omega_n t) + \tilde{b}_n \sen(2\pi\omega_n t) - \frac{g_n}{(2\pi\omega_n)^2} \cos(2\pi\omega_n t) + \frac{g_n}{(2\pi\omega_n)^2} \right] \sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \end{aligned}$$

Agora note que

$$u(x, t) \leq |u(x, t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left( |\tilde{a}_n| + |\tilde{b}_n| + 2\frac{|g_n|}{(2\pi\omega_n)^2} \right),$$

logo, pelo  $M$  teste de Weierstrass, basta mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( |\tilde{a}_n| + |\tilde{b}_n| + 2\frac{|g_n|}{(2\pi\omega_n)^2} \right) < \infty.$$

Note que, como  $\tilde{a}_n$  e  $\tilde{b}_n$  são os mesmos coeficientes que aparecem no Teorema 15, então temos que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (|\tilde{a}_n| + |\tilde{b}_n|)$  converge. Portanto, basta apenas mostrar que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g_n|}{(2\pi\omega_n)^2}$  converge.

Lembremos que  $\omega_n = \frac{nc}{2L}$ , logo temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g_n|}{(2\pi\omega_n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g_n|}{4\pi^2} \frac{4L^2}{n^2 c^2} = \frac{L^2}{\pi^2 c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g_n|}{n^2}.$$

Como  $|g_n|$  é limitado e a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge, temos que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g_n|}{n^2}$  também converge.

Sendo assim temos que a função  $u$  é contínua em  $\overline{\mathcal{R}}$ .

Agora vejamos que a função  $u$  é de classe  $C^1$  em  $\mathcal{R}$ , para tal mostraremos que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( n|\tilde{a}_n| + n|\tilde{b}_n| + n\frac{|g_n|}{(2\pi\omega_n)^2} \right)$  converge. E como vimos no Teorema 15, temos que  $\sum_{n=1}^{\infty} (n|\tilde{a}_n| + n|\tilde{b}_n|)$  converge e portanto precisamos mostrar que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{|g_n|}{(2\pi\omega_n)^2}$  converge.

Temos então que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{|g_n|}{(2\pi\omega_n)^2} = \frac{L^2}{\pi^2 c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g_n|}{n}.$$

Realizando a integração por partes obtemos

$$\begin{aligned} g_n &= \frac{2}{L} \left[ \left( -g(x) \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \Big|_0^L + \int_0^L g'(x) \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] \\ &= \frac{L}{n\pi} \frac{2}{L} \int_0^L g'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Logo segue que

$$|g_n| = \frac{L}{\pi} \frac{1}{n} |g'_n| \leq \frac{kL}{\pi} \frac{1}{n},$$

onde  $|g'_n|$  é o coeficiente de Fourier da derivada  $g'$  e  $k$  é uma constante.

Portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g_n|}{n} \leq \frac{kL}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \infty.$$

Assim temos que  $u$  é uma função de classe  $C^1$  em  $\mathcal{R}$  e que a suas derivadas primeiras podem ser obtidas derivando a  $u$  termo a termo.

Para mostrar que a  $u$  é de classe  $C^2$  em  $\mathcal{R}$  precisaremos mostrar a convergência de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( n^2|\tilde{a}_n| + n^2|\tilde{b}_n| + n^2\frac{|g_n|}{(2\pi\omega_n)^2} \right).$$

Novamente em virtude do que já foi mostrado no Teorema 15, temos que a série numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2|\tilde{a}_n| + n^2|\tilde{b}_n|)$  converge e, portanto, basta conferir apenas a convergência de  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\frac{|g_n|}{(2\pi\omega_n)^2}$ .

Nesse caso temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\frac{|g_n|}{(2\pi\omega_n)^2} = \frac{L^2}{\pi^2 c^2} \sum_{n=1}^{\infty} |g_n|.$$

De (3.44) temos que

$$|g_n| \leq \frac{k'}{n} |g'_n|,$$

com  $k'$  constante. Usando a desigualdade  $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ , temos

$$|g_n| \leq \frac{k'}{2} \left( \frac{1}{n^2} + |g'_n|^2 \right),$$

então

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g_n| \leq \frac{k'}{2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} |g'_n|^2 \right).$$

Lembrando que  $g'$  é seccionalmente contínua, então em particular  $g'$  é de quadrado integrável, então pela desigualdade de Bessel temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g'_n|^2 \leq \frac{2}{L} \int_0^L |g'(x)| dx < \infty.$$

Logo, temos que  $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|$  converge e portanto a função  $u$ , dada em (3.40) é de classe  $C^2$  em  $\mathcal{R}$ .

Temos também que  $u$  é solução do PVIF (3.39) e que ela respeita as condições de fronteira e as condições iniciais, que é facilmente verificado por causa de sua construção. Vale ressaltar também que pelo Teorema 16 a solução  $u$  dada em (3.40) é a única solução do PVIF (3.39).

□

# Conclusão

Conforme visto nesse trabalho, ao garantirmos a convergência da série de Fourier da função  $f$  que representa a vibração de uma corda, podemos encontrar uma solução para o problema da corda finita vibrante e além disso conseguimos garantir que ela é a única solução desse problema usando o método de energia.

Como vimos também, as séries de Fourier se relacionam com os harmônicos e com isso temos que tais séries podem ser utilizadas nos estudos da Análise Harmônica, além disso por causa de sua periodicidade, e podendo ser utilizada com propagação de ondas, ela pode ser utilizada em outros estudos que tenham relação com ondas.

A equação da onda é uma das mais importantes equações no estudo das EDP's. Nesse sentido, podemos considerar que este trabalho pode ser uma porta de entrada para o estudo de EDP's de uma forma mais aprofundada e também para o estudo de uma análise de Fourier mais avançada.

# Referências Bibliográficas

- [1] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.
- [2] LIMA, Elon Lages. **Análise Real**. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.
- [3] FOLLAND, Gerald Budge. **Fourier Analysis and its Applications**. California: Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, 1992.
- [4] IÓRIO JR, Rafael José; IÓRIO, Valéria de Magalhães. **Equações Diferenciais Parciais: uma Introdução**. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- [5] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equação Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2015.
- [6] BORTHWICK, David. **Introduction to Partial Differential Equations**. Switzerland: Springer, 2018.
- [7] IÓRIO, Valéria de Magalhães. **EDP: Um Curso de Graduação**. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.