

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

THAIS KELLEN NASCIMENTO TAPARELO

**DIFERENTES METODOLOGIAS E SUAS REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS PARA
O ENSINO DE POLIEDROS**

CURITIBA

2019

THAIS KELLEN NASCIMENTO TAPARELO

**DIFERENTES METODOLOGIAS E SUAS REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS PARA
O ENSINO DE POLIEDROS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná como requisito à obtenção do título do grau de Licenciada em Matemática.

Orientadora: PhD Simone da Silva Soria Medina

CURITIBA
2019

Dedico este trabalho, primeiramente, à Deus, que me deu todo o fôlego e sustento necessários para chegar até o fim e concluir esse trabalho.

Aos meus pais Valdinar e Nilso, grandes apoiadores e incentivadores durante o tempo de faculdade.

AGRADECIMENTOS

A minha orientadora Profa. Simone Soria da Silva Medina por todo suporte no desenvolvimento desse trabalho.

Aos meus pais que participaram de todos os anos que estive na Universidade.

Ao Ministério Universidades Renovadas e meus grandes amigos que o compõe por ser um divisor de águas e sustento nesse tempo de graduação.

Enfim, a todas as pessoas que fizeram parte dessa etapa tão intensa em minha vida.

Até aqui nos socorreu o Senhor.

1 Samuel 7, 12.

RESUMO

O presente trabalho se propõe a apresentar e analisar diferentes metodologias e representações gráficas no ensino de poliedros em aulas de matemática para educandos do ensino básico regular. Busca-se oferecer instrumentos para alcançar um aprendizado mais efetivo dos sólidos de Platão, conteúdo obrigatório de acordo com as diretrizes de ensino do Estado do Paraná. Para isso, além da análise em si, são apontadas algumas das metodologias mais utilizadas em sala de aula, como lousa e giz com apoio de livros didáticos, em contraponto com algumas ainda pouco exploradas, como projeção em realidade virtual e realidade aumentada. Representações gráficas, encontradas facilmente nos livros didáticos, como os anaglifos, e materiais simples como palitos e jujubas, que estão ao alcance do professor, também são indicados como instrumentos potencializadores de ensino, por cativar a atenção do aluno.

Palavras-Chave: Metodologias, Representações Gráficas, Poliedros.

ABSTRACT

This paper presents and presents different methods and graphical representations in the teaching of mathematics in mathematics classes for regular elementary school students. We seek to offer tools to achieve a more effective learning of the Platoes, mandatory content according to the teaching guidelines of the State of Paraná. For this, in addition to the analysis itself, some of the most used methodologies in the classroom are indicated, such as blackboard and device with support for textbooks, in contrast to some still little explored, such as projection in virtual reality and augmented reality. Graphic representations, easily displayed in textbooks such as anaglyphs, and simple materials such as toothpicks and jelly beans, which are within the reach of the teacher, are also indicated as potential teaching tools, for example, student participation.

Keywords: Methodologies, Graphic Representations, Polyhedra.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - POLIEDRO.....	15
FIGURA 2 – POLIEDRO CONVEXO.....	16
FIGURA 3 – POLIEDRO NÃO CONVEXO.....	16
FIGURA 4 – PEQUENO DODECAEDRO ESTRELADO.....	17
FIGURA 5 – GRANDE DODECAEDRO ESTRELADO.....	17
FIGURA 6 – PLATÃO.....	18
FIGURA 7 – TETRAEDRO.....	19
FIGURA 8 – PLANIFICAÇÃO TETRAEDRO.....	19
FIGURA 9 – HEXAEDRO.....	20
FIGURA 10 – PLANIFICAÇÃO HEXAEDRO.....	20
FIGURA 11 – OCTAEDRO.....	21
FIGURA 12 – PLANIFICAÇÃO OCTAEDRO.....	21
FIGURA 13 – DODECAEDRO.....	21
FIGURA 14 – PLANIFICAÇÃO DODECAEDRO.....	22
FIGURA 15 – ICOSAEDRO.....	22
FIGURA 16 – PLANIFICAÇÃO ICOSAEDRO.....	23
FIGURA 17 – POLIEDROS DE PLATÃO.....	26
FIGURA 18 – ESQUELETO DODECAEDRO CONSTRUÍDO COM JUBAS.....	27
FIGURA 19 – ESQUELETO OCTAEDRO CONSTRUÍDO COM JUBAS.....	27

FIGURA 20 – ESQUELETO ICOSAEDRO CONSTRUÍDO COM JUJUBAS.....	28
FIGURA 21 - BALÃO FESTA JUNINA.....	28
FIGURA 22 – DADO.....	29
FIGURA 23 – TERRÁRIO DE VIDRO.....	29
FIGURA 24 – PLANIFICAÇÃO ICOSAEDRO - APLICATIVO GEOGEBRA 3D.....	30
FIGURA 25 – ICOSAEDRO CRIADO NO APLICATIVO GEOGEBRA 3D.....	30
FIGURA 26 – DESENHO ESQUEMÁTICO.....	31
FIGURA 27 – DESENHO EM PERSPECTIVA.....	32
FIGURA 28 – RENÉ DESCARTES.....	33
FIGURA 29 – MUSEU DE ARTE DE SÃO PAULO.....	33
FIGURA 30 – PIRÂMIDE DO MUSEU DO LOUVRE.....	33
FIGURA 31 – ANAGLIFO.....	34
FIGURA 32 – ANAGLIFO NA MATEMÁTICA.....	34
FIGURA 33 – ICOSAEDRO GERADO NO APLICATIVO GEOGEBRA 3D.....	36
FIGURA 34 – OBJETOS VISUALIZADOS NO APLICATIVO GEOGEBRA RA.....	36

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	11
1.1 OBJETIVO E JUSTIFICATIVA.....	12
1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO.....	12
1.3 HIPÓTESE E METODOLOGIA.....	13
2 GEOMETRIA ESPACIAL.....	14
2.1 A GEOMETRIA ESPACIAL NO CONTEXTO DAS DIRETRIZES CURRICULARES DA EDUCAÇÃO BÁSICA DO ESTADO DO PARANÁ.....	14
2.2 SÓLIDOS GEOMÉTRICOS.....	15
2.3 POLIEDROS DE PLATÃO.....	16
2.3.1 TETRAEDRO REGULAR.....	19
2.3.2 HEXAEDRO REGULAR.....	20
2.3.3 OCTAEDRO REGULAR.....	20
2.3.4 DODECAEDRO REGULAR.....	21
2.3.5 ICOSAEDRO REGULAR.....	22
3 O ESTUDO DOS POLIEDROS EM SALA DE AULA.....	23
3.1 METODOLOGIAS USADAS PARA O ENSINO DOS POLIEDROS EM SALA DE AULA.....	24
4 REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS NO ENSINO.....	31
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	38
REFERÊNCIAS.....	41

1.

INTRODUÇÃO

Minha motivação para a escolha da Graduação em Licenciatura em Matemática, vem do gosto que sempre tive pela disciplina e especificamente por um período de aulas com um professor no Ensino Médio. Ele era muito dinâmico e particularmente julgo como o melhor professor de Matemática que tive em todo o meu colegial. Como era muito automático para mim o mecanismo da Matemática ensinada, eu auxiliava os meus colegas quase sempre, isso despertou aos poucos o desejo de ser professora na área. Ao concluir o Ensino Médio não entrei de primeira na universidade, pois ainda não tinha certeza do curso. Fiz vestibular para outros cursos, porém nunca efetuei a matrícula. Optei pela formação técnica e entrei no mercado de trabalho. Já trabalhando, decidi prestar vestibular novamente e dessa vez foi pra valer. Atualmente ministro aulas particulares para alunos do Ensino Fundamental ao Ensino Médio.

Dentro do curso de Matemática, sempre fui inclinada ao estudo da Geometria, cursando tanto as disciplinas obrigatórias como Desenho Geométrico, Geometria no Ensino, Desenho, bem como as optativas. Em sua maioria, foram direcionadas para a mesma área da Matemática, que ao meu ponto de vista, os conteúdos são extremamente interessantes e motivadores.

Ter aprendido diversificadas formas de fazer Matemática com os alunos nessas disciplinas ampliou meu campo de visão sobre o ensino dos conteúdos de Geometria, sendo esse um dos fatores determinantes na escolha desse tema, que aborda Geometria Espacial direcionada aos poliedros. Ainda na graduação, existe a oportunidade de acompanhar diversos professores da rede pública no programa PIBID (Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência) e nos estágios supervisionados. Foi possível observar, nesse programa, que ao usar material concreto muitos alunos se engajaram nas atividades propostas e conseguiram dar significado ao que era ensinado. Já durante o estágio, a ausência de diferentes metodologias e/ou pouco uso das representações gráficas que não sejam desenhos, mostrou ser menos efetivo para o processo de ensino aprendizagem.

É notável perceber que a geometria está presente no cotidiano das pessoas porém, dificilmente as pessoas observam o fenômeno da Matemática através dos seus olhos. Esse trabalho busca trazer um novo olhar para a Matemática, principalmente a partir da geometria espacial, para uma maior interação e compreensão da disciplina.

Segundo a Professora Ana Luisa Castro, Mestre em Educação, trabalhando com essa vertente matemática, é possível desenvolver a criatividade, o raciocínio e a percepção espacial, além de também influenciar no desenvolvimento cognitivo das operações concretas para as abstratas auxiliando diretamente no desenvolvimento do ser humano. Apesar da Matemática estar presente na vida escolar em todos os níveis de ensino, quando essa é aplicada na rotina estudantil, leia-se em salas de aula ou até mesmo fora, é possível identificar dificuldade de alunos e até mesmo profissionais, pessoas no geral, com a aprendizagem do conteúdo, principalmente quando se fala da geometria espacial.

1.1 OBJETIVOS

Na busca de proporcionar um melhor aprendizado sobre geometria espacial, este trabalho buscou identificar e analisar diferentes metodologias para o ensino dos poliedros em sala de aula, assim como as formas de representação gráfica encontradas em tais metodologias.

As metodologias encontradas vão desde as tradicionais, utilizando a lousa e o livro didático até as metodologias com o uso de softwares gráficos ou ainda a partir de aplicativos de realidade virtual (RV) e/ou aumentada (RA).

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

Para atender aos objetivos do trabalho, o texto foi organizado em cinco capítulos. No primeiro capítulo, é apresentado a motivação que me levou a escolher o tema, bem como os objetivos e justificativa. No segundo capítulo é abordado sobre geometria espacial de acordo com as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná e apresentado algumas considerações sobre os sólidos geométricos e os

poliedros regulares. Na sequência, o terceiro capítulo refere-se à algumas metodologias para o estudo de poliedros em sala de aula, abordando um pouco sobre as formas habituais que os poliedros são tomados em sala de aula pelos professores e diante disso possíveis metodologias que podem auxiliar no ensino do mesmo. Por fim, o quarto capítulo demonstra algumas formas de representações gráficas utilizadas no ensino. Nesse último capítulo são redigidas algumas considerações sobre as metodologias de ensino voltadas ao estudo de poliedros e sobre as representações gráficas que nelas aparecem.

Para o desenvolvimento desse trabalho foi utilizada uma variedade de pesquisas em livros e textos, trazendo-nos conhecimentos que ampliarão nossa visão e que serão úteis na realização de atividades didáticas subsequentes.

1.3 HIPÓTESE E METODOLOGIA

Partiu-se da hipótese que as ferramentas de ensino que incluam experiências sensoriais podem melhorar a fixação dos conceitos de Poliedros para os alunos do ensino básico regular, esse trabalho. Foi realizada, então, uma pesquisa descritiva, com abordagem qualitativa por meio de procedimento de pesquisa bibliográfica e documental.

2. GEOMETRIA ESPACIAL

2.1 A GEOMETRIA ESPACIAL NO CONTEXTO DAS DIRETRIZES CURRICULARES DA EDUCAÇÃO BÁSICA DO ESTADO DO PARANÁ

As Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná constituem propostas que norteiam e organizam o conhecimento escolar e o trabalho educativo nas diversas disciplinas da Educação Básica. Os conteúdos estruturantes das Diretrizes Curriculares de Matemática se desdobram em: Números e Álgebra; Grandezas e Medidas; Geometrias; Funções e Tratamento da Informação. Já o conteúdo Geometrias, tanto para o Ensino Fundamental, como para o Ensino Médio, se desdobra em:

- Geometria plana;
- Geometria espacial;
- Geometria analítica;
- Noções básicas de geometrias não-euclidianas.

De acordo com Schirlo e Silva (2009), a geometria ocupa um lugar de destaque na composição das formas existentes, pois é um ramo da Matemática que apresenta situações do mundo real. Desta forma, atividades que envolvem Geometria podem proporcionar o desenvolvimento de um pensamento crítico e autônomo, já que favorece a análise de fatos e relações, o estabelecimento de ligações entre eles e a dedução.

As Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná afirmam que, no Ensino Fundamental, o conteúdo estruturante Geometrias tem o espaço como referência, de modo que o aluno consiga analisá-lo e perceber seus objetos

para, então, representá-los. Neste nível de ensino, o aluno deve ter algumas compreensões de geometria e o estudo da geometria espacial deve abordar os seguintes temas:

- Nomenclatura: nomes dados a cada elemento;
- Estrutura e dimensões dos sólidos geométricos: altura, largura e comprimento e sua forma;
- Cálculos de medida de arestas, áreas das faces, área total, volumes de prismas retangulares e de pirâmides de base triangular.
- Conversões: expressar a mesma medida em uma outra escala de unidade, sem perda.

No Ensino Médio, as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná colocam que deve ser garantido ao aluno o aprofundamento dos conceitos de geometria plana e espacial em um nível de abstração mais complexo.

2.2. SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Os sólidos geométricos são figuras geométricas que possuem três dimensões, sendo assim definidas apenas num espaço tridimensional. Tais figuras são classificadas em poliedros, corpos redondos e outros. (SILVA, sem data).

Por sua vez, os poliedros são sólidos formados pela junção de polígonos onde seus principais elementos são: faces, vértices e arestas. As faces são os lados do poliedro, os vértices são os pontos de encontro das arestas e as arestas são definidas por linhas resultantes do encontro de duas faces (Figura 1).

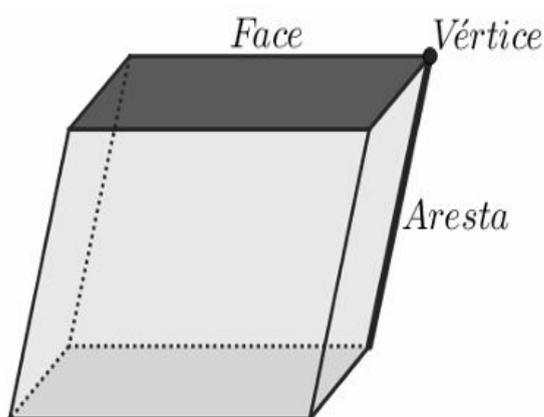


FIGURA 1 – POLIEDRO.

FONTE: <https://brasilecola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-poliedro.htm>

Podemos classificar os poliedros por convexos e não convexos. Poliedros convexos não possuem nenhuma cavidade, ou seja, se pegarmos dois pontos em duas faces diferentes o segmento que os liga estará dentro do poliedro. Poliedros não convexos possuem alguma cavidade e é possível ligar dois pontos em faces diferentes e uma parte do segmento sair do poliedro. É possível observar nas figuras a seguir um exemplo de poliedro convexo e de um poliedro não convexo (Figuras 2 e 3).

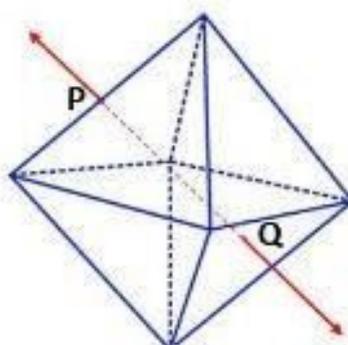


FIGURA 2 – POLIEDRO CONVEXO

FONTE: <https://www.todamateria.com.br/poliedro/>

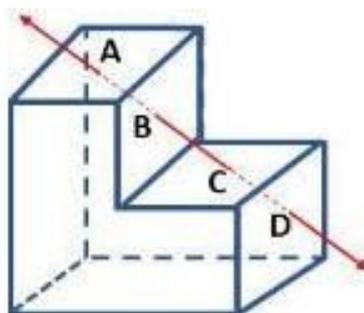


FIGURA 3 – POLIEDRO NÃO CONVEXO

FONTE: <https://www.todamateria.com.br/poliedro/>

2.3. POLIEDROS DE PLATÃO

Um poliedro é chamado de regular se as suas faces são polígonos regulares, todos com o mesmo número de lados, e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas (LIMA et al., 2016). Podemos classificá-los em:

- Convexos: tetraedro (quatro faces), hexaedro (seis faces), octaedro (oito faces), dodecaedro (doze faces) e icosaedro (vinte faces);
- Estrelados ou Côncavos: pequeno dodecaedro estrelado, grande dodecaedro estrelado, grande do dodecaedro e icosaedro estrelado.

Alguns exemplos de estrelados, como o Pequeno Dodecaedro Estrelado onde suas faces são pentagramas, se prolongarmos as faces de um dodecaedro, e considerarmos as suas intercessões o obtemos.

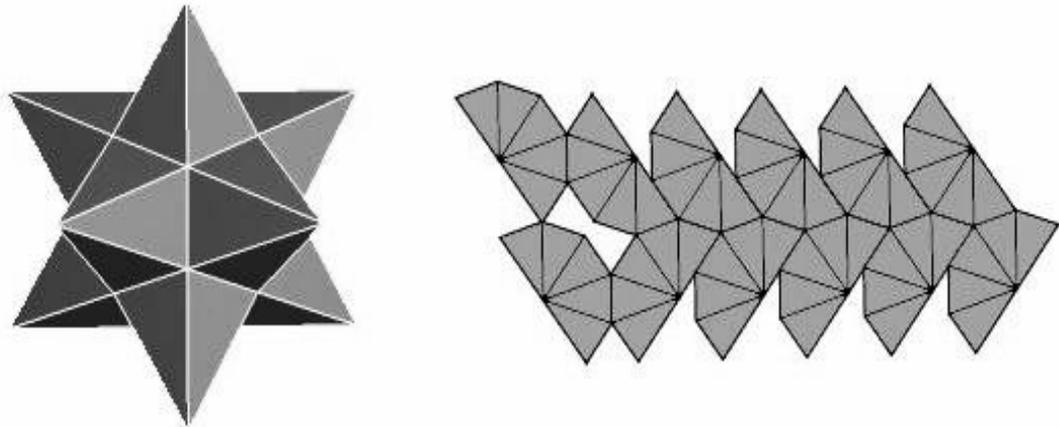


FIGURA 4: PEQUENO DODECAEDRO ESTRELADO

FONTE: http://www.es.iff.edu.br/poliedros/planifi_kepler.html

Ou o Grande Dodecaedro Estrelado que possui doze faces em forma de pentágonos, doze vértices e trinta arestas.

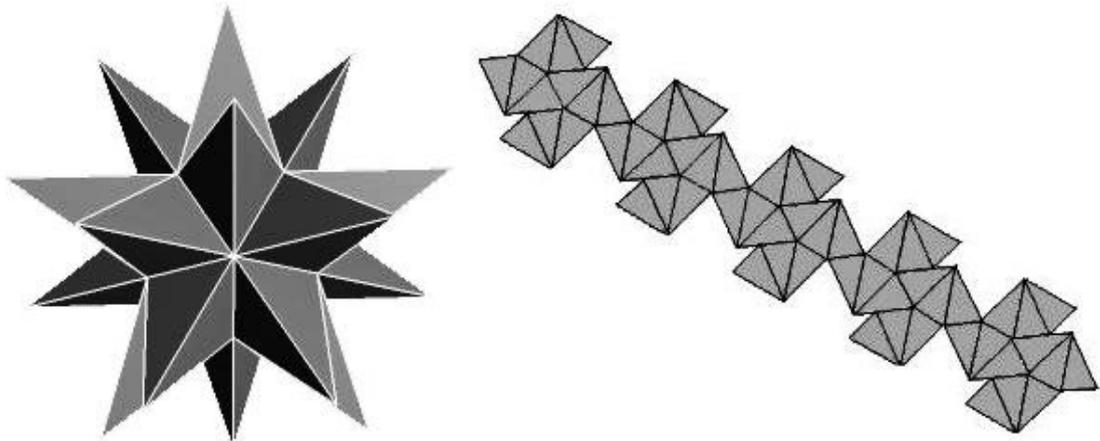


FIGURA 5: GRANDE DODECAEDRO ESTRELADO

FONTE: http://www.es.iff.edu.br/poliedros/planifi_kepler.html

Já os poliedros regulares convexos são conhecidos por Poliedros de Platão pois acredita-se que este filósofo tenha estudado estes poliedros por volta do século IV a.C relacionando-os com os elementos da natureza: tetraedro (fogo), hexaedro (terra), octaedro (ar), icosaedro (água) e dodecaedro (universo) (BOYER, 2010).

Platão nasceu em Atenas no ano de 429 a.C., viveu durante o período da Grécia antiga como filósofo e matemático e fundador da Academia de Atenas (a primeira instituição de ensino superior do mundo ocidental). Ele era um homem muito influente no seu tempo, se preocupava com a educação, abriu sua primeira escola e acolheu a todos os públicos que tinham interesse em aprender. A Figura 4 corresponde a imagem da estátua dedicada a Platão, localizada na entrada da Academia de Atenas.

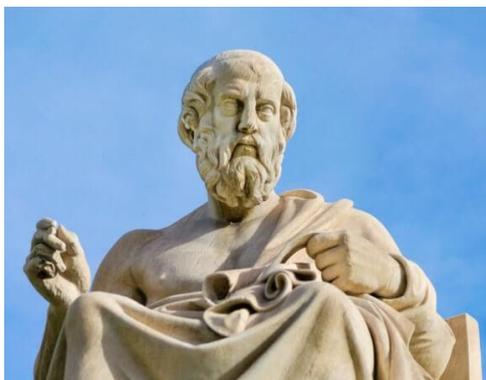


FIGURA 6: PLATÃO.

FONTE: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/filosofia/platao.htm>

Um poliedro de Platão é identificado como tal se tem as seguintes características:

- Todas as faces possuem o mesmo número de lados, ou seja, se o poliedro é de base triangular todas as suas faces devem ser triângulos equiláteros;
- De cada vértice parte o mesmo número de arestas, por exemplo, se de um vértice partem quatro arestas de todos os vértices devem partir quatro arestas;

É válida a relação de Euler¹: $V + F = A + 2$, por exemplo, se tomarmos o Tetraedro que é um poliedro de Platão, ele possui 4 vértices, 4 faces e 6 arestas. Se supormos que não sabemos o número de vértices, usando a relação de Euler vamos encontrar. Assim: $V + F = A + 2$

$$V + 4 = 6 + 2$$

$$V + 4 = 8$$

$$V = 8 - 4$$

$$V = 4.$$

2.3.1 Tetraedro Regular

Considerado um caso especial de pirâmide regular de base triangular, o tetraedro regular possui 4 vértices, 4 faces e 6 arestas. Também é definido como um tipo de pirâmide com uma base de polígono plano (triângulo equilátero) e faces triangulares que conectam a base a um ponto comum. As figuras 7 e 8 representam, respectivamente, um tetraedro regular e sua planificação².

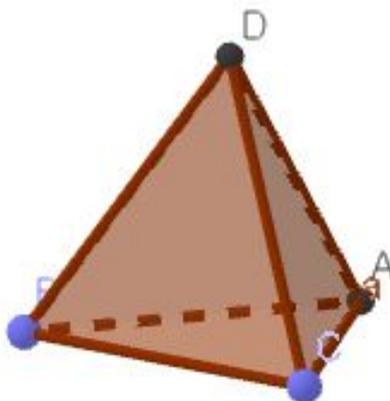


FIGURA 7 – TETRAEDRO.
FONTE: Autora (2019).

¹ A relação de Euler relaciona o número de faces, vértices e arestas de um poliedro convexo.

² A planificação de sólidos geométricos é uma figura geométrica bidimensional formada pela junção das diversas faces que compõem um sólido geométrico.

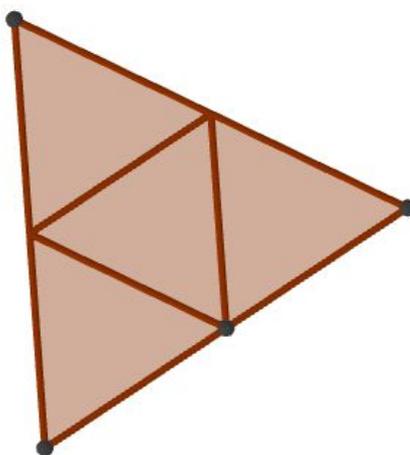


FIGURA 8 – PLANIFICAÇÃO DO TETRAEDRO.
FONTE: Autora (2019).

2.3.2 Hexaedro Regular

É denominado de hexaedro o poliedro que contém 6 faces, 8 vértices e 12 arestas. Pode ser considerado um prisma quadrangular regular, pois possui duas bases paralelas e congruentes. Hexaedros regulares possuem bases quadradas e as arestas laterais formam ângulos retos (90°) com as arestas das bases. A Figura 9 representa um hexaedro regular e a Figura 10a sua planificação.

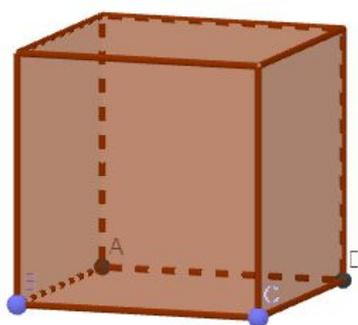


FIGURA 9– HEXAEDRO.
FONTE: Autora (2019).

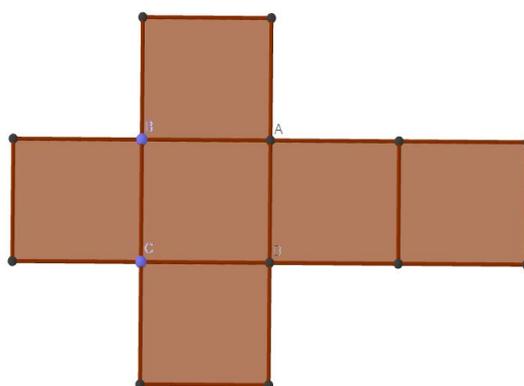


FIGURA 10– PLANIFICAÇÃO DO HEXAEDRO.
 FONTE: Autora (2019).

2.3.3 Octaedro Regular

O octaedro regular é o poliedro que possui 8 faces (triângulos equiláteros), 12 arestas e 6 vértices. A Figura 11 representa um octaedro regular e a figura 10 a sua planificação

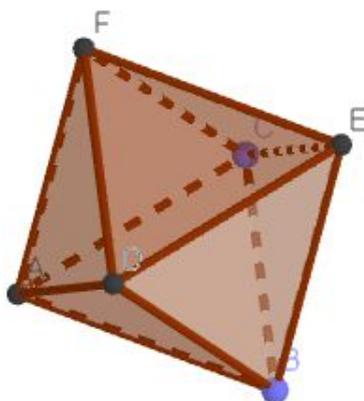


FIGURA 11– OCTAEDRO.
 FONTE: Autora (2019).

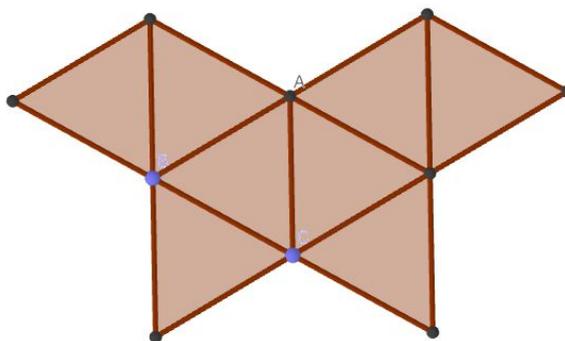


FIGURA 12 – PLANIFICAÇÃO DO OCTAEDRO.
 FONTE: Autora (2019).

2.3.4 Dodecaedro Regular

O poliedro composto por 12 faces pentagonais (regulares) é denominado de dodecaedro regular. Possui ainda 12 vértices e 20 arestas. As figuras 13 e 14 representam, respectivamente, um dodecaedro regular e sua planificação.

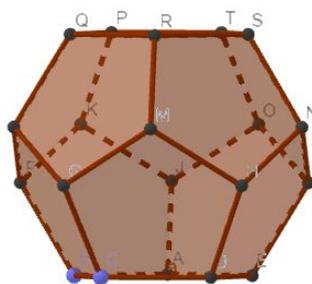


FIGURA 13– DODECAEDRO.
 FONTE: Autora (2019).

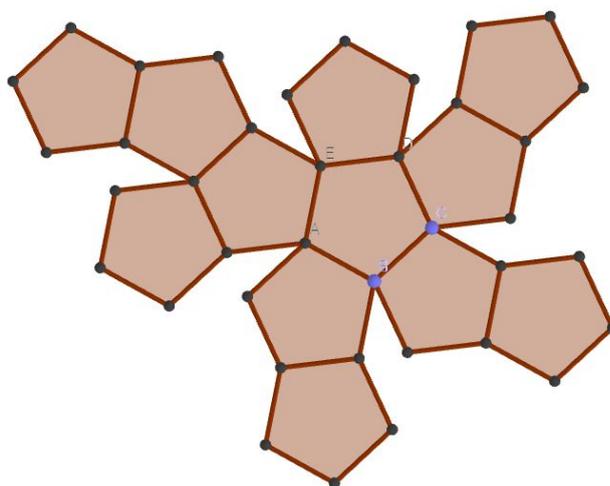


FIGURA 14– PLANIFICAÇÃO DODECAEDRO.
 FONTE: Autora (2019).

2.3.5 Icosaedro Regular

Icosaedro regular é o poliedro convexo que possui 20 faces em forma de triângulos equiláteros, possui 12 vértices e 30 arestas. As Figuras 15 e 16 representam um icosaedro regular e sua planificação respectivamente.

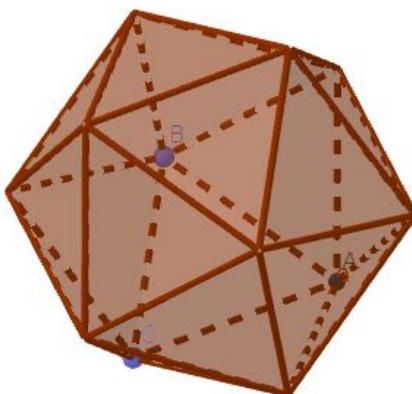
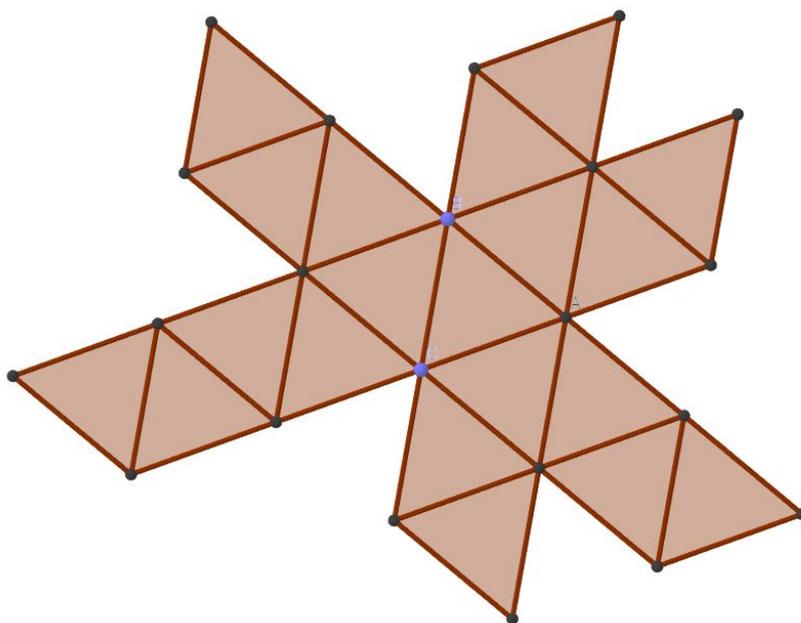


FIGURA 15– ICOSAEDRO.
FONTE: Autora (2019).



PLANIFICAÇÃO DO ICOSAEDRO.
FONTE: Autora (2019).

FIGURA 16–

3. ESTUDO DE POLIEDROS EM SALA DE AULA

De acordo com Santos et al. no estudo da geometria, há uma certa dificuldade por parte dos alunos de entender conceitos e aplicações. Sendo assim, no estudo dos sólidos geométricos, desde o princípio, os professores tentam trabalhar com o uso de imagens e objetos que possam relacioná-los, porém, ainda assim estes conceitos ficam abstratos para os alunos. Normalmente, para ensinar a geometria, os docentes partem da geometria plana e de representações gráficas bidimensionais encontradas nos livros didáticos, não dando abertura a tridimensionalidade que permitiria aos alunos fazer relações como a representação da forma real do sólido. Contudo, o trabalho dos mesmos se torna mecânico através da dedução de fórmulas e resolução de exercícios. Os alunos apresentam dificuldades de assimilar os conteúdos com a visualização do objeto em si ou associar com o que tem ao seu redor fazendo com que a geometria não tenha uma metodização para o conhecimento espacial.

Vergnaud (1990) faz uma análise sobre o ensino da matemática:

... um dos maiores problemas na educação decorre do fato que muitos professores consideram os conceitos matemáticos como objetos prontos, não percebendo que estes conceitos devem ser construídos pelos alunos... de alguma maneira os alunos devem vivenciar as mesmas dificuldades conceituais e superar os mesmos obstáculos epistemológicos encontrados pelos matemáticos... solucionando problemas, discutindo conjeturas e métodos, tornando-se conscientes de suas concepções e dificuldades, os alunos sofrem importantes mudanças em suas idéias(VERGNAUD, 1990).

São muitas as experiências e metodologias desenvolvidas para o ensino da matemática, em especial para o ensino da geometria. A seguir mostraremos algumas metodologias utilizadas no ensino de poliedros em sala de aula.

3.1. METODOLOGIAS USADAS PARA O ENSINO DOS POLIEDROS EM SALA DE AULA

É comum que professores de matemática concentrem suas aulas no uso do livro didático limitando-se a usar apenas a lousa como recurso didático promovedor de aprendizagem, conhecido como ensino convencional ou ensino tradicional.

De acordo com Libâneo (1994), “é que o professor ‘passa’ a matéria, os alunos escutam, respondem o ‘interrogatório’ do professor para reproduzir o que está no livro didático, praticam o que foi transmitido em exercícios de classe ou

tarefas de casa e decoram tudo para a prova. Esse tipo de ensino é o que se costuma chamar de ensino tradicional.”

Outro recurso também utilizado pelo professor em sala de aula, em especial no estudo da geometria, é o material concreto. A matemática para muitos é vista como separada da realidade, logo o material concreto é visto como uma boa ferramenta pelo educador. O uso do material concreto em sala de aula interfere diretamente na aprendizagem do aluno, favorecendo a construção de conexões necessárias e mudando a concepção de que a matemática é muito difícil. Porém, o uso do mesmo exige certos cuidados, tanto na utilização da metodologia que precisa ser dirigida para que a turma consiga construir conhecimento quanto na motivação a ser dada para que eles queiram construir.

É muito difícil, ou provavelmente impossível, para qualquer ser humano caracterizar espelho, telefone, bicicleta ou escada rolante sem ter visto, tocado ou utilizado esses objetos. Para as pessoas que já conceituaram esses objetos, quando ouvem o nome do objeto, sem precisarem dos apoios iniciais que tiveram dos atributos, tamanho, cor, movimento, forma e peso. Os conceitos evoluem com o processo de abstração; a abstração ocorre pela separação. (LORENZATO, 2006, p.22).

Assim, a manipulação de objetos concretos ajuda o estudante a aprender a matemática de forma palpável e mais fácil. A analogia com objetos do cotidiano dos alunos também pode e deve ser considerada no processo de ensino/aprendizagem.

As autoras Marli Ramos e Neusa Ciriaco Coppola comentam que estamos vivendo atualmente uma grande mudança no ensino devido à popularização da tecnologia, principalmente pelo maior acesso a computadores e celulares, contudo essa mudança traz junto a necessidade dos professores se especializarem com estas tecnologias e das escolas fornecerem recursos necessários para sua utilização em sala de aula.

Primeiramente, segundo a pós-graduanda Sirley Diniz, a escola precisa ser equipada com computadores, internet acessível, projetores multimídia e em seguida o professor precisa entender essas novas tecnologias e saber como usar e dinamizar o ensino/aprendizagem dos alunos a partir delas. Juntamente com a tecnologia vêm os softwares e aplicativos matemáticos que, se usados de forma

coerente, podem alcançar um bom resultado na efetividade da aprendizagem dos alunos.

É possível observar que a inserção da tecnologia na escola mediada por uma proposta metodológica, impulsiona o aluno e aperfeiçoa o professor como profissional. É possível numa aula convencional fazer com que os alunos compreendam e absorvam os conceitos básicos, por exemplo, dos poliedros. Usando o livro didático, por exemplo, o professor é capaz de motivar o aluno a ser um investigador e ele mesmo reconhecer as propriedades e relações dos sólidos geométricos. Se propuser um problema da seguinte forma: de acordo com as figuras do livro, como você caracterizaria e descreveria cada uma delas? Assim sozinhos ou em pequenos grupos, através da associação de figuras espaciais e suas planificações, os alunos podem identificar os elementos que compõem um poliedro; relacionar seus vértices, faces e arestas; desenvolver estratégias e criar hipóteses para o desenvolvimento e construção dos poliedros. Após questionamento e discussão, o professor pode ajudá-los a determinar o nome dos poliedros estudados através da contagem do número de faces, arestas e vértices que os compõem. Relacionando os números e informações levantadas pelos estudantes para completar uma tabela. Um exemplo de questão proposta seria:

Na figura abaixo estão representados alguns poliedros, descreva cada um deles de acordo com o número de vértices, arestas, faces e ainda qual a relação matemática entre o número de vértices, arestas e faces podemos determinar.

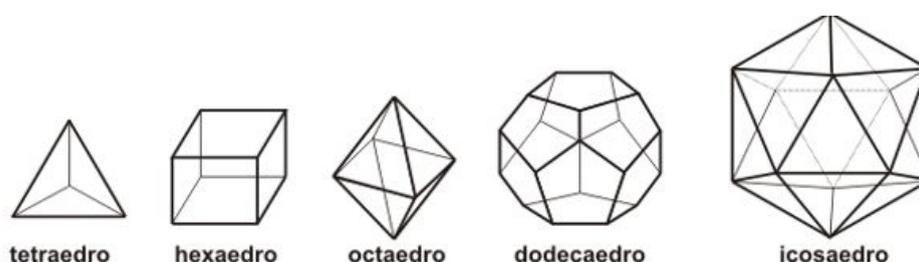


FIGURA 17– POLIEDROS DE PLATÃO.
FONTE: <https://dex.descomplica.com.br/>

Contudo, conforme já mostrado, temos outras metodologias ao nosso alcance, como por exemplo, a utilização de material concreto para trabalhar o conteúdo de forma mais lúdica. Há a possibilidade de fazer com que o aluno reconheça os principais poliedros, faça a identificação dos vértices, arestas e faces e até usar a relação de Euler para resolver problemas.

Usando por exemplo, palitos de dente e jujubas, que são materiais de baixo custo e fácil acesso, podemos construir os esqueletos dos poliedros (Figuras 18 a 20). Numa turma com 30 alunos, é possível separá-los em 6 grupos de 5 integrantes para participar da atividade. Após a construção dos poliedros pede-se aos alunos, assim como na aula convencional, que eles caracterizem os poliedros, identificando o número de faces, vértices e arestas e a relação matemática existente entre estes elementos. Um breve relato de experiência, participando do projeto PIBID no Colégio Estadual Polivalente, foi aplicado em uma turma de alunos do último ano do Ensino Fundamental II essa atividade citada acima, na aula anterior os alunos foram convidados a levar uma caixa de palitos de dente e um pacote pequeno de jujubas, ao chegar a próxima aula a grande maioria trouxe o material pedido de forma que ao se unirem em grupos de 5 a 6 estudantes foi possível todos manipularem e participarem. Eles iniciaram a construção dos poliedros e ao decorrer da atividade algumas dúvidas foram sanadas e as características dos sólidos puderam ser esclarecidas na mente dos mesmos, de forma que os estudantes tiveram facilidade em conversar sobre os sólidos, responder as questões e avaliação feita pela professora regente da turma.

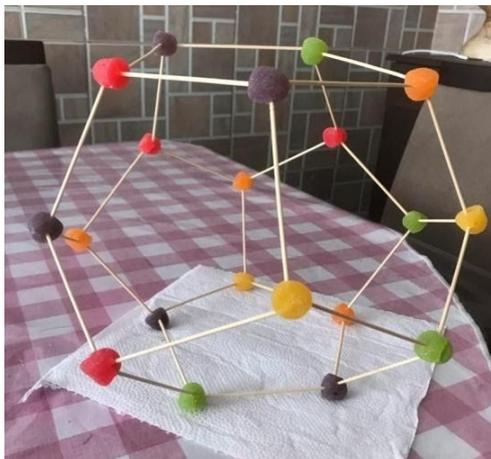


FIGURA 18– ESQUELETO DE UM DODECAEDRO CONSTRUÍDO COM JUJUBAS.
FONTE: Autora (2019).



FIGURA 19– ESQUELETO DE UM OCTAEDRO DE CONSTRUÍDO COM JUJUBAS.
FONTE: Autora (2019).

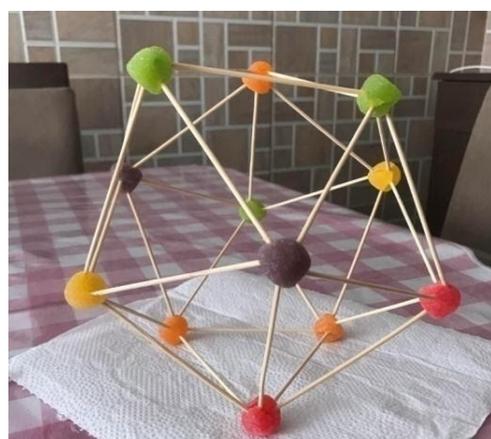


FIGURA 20– ESQUELETO DE UM ICOSAEDRO CONSTRUÍDO COM JUJUBAS.
FONTE: Autora (2019).

Assim, vemos que há formas simples de estarmos ensinando sobre os poliedros nas salas de aula, usando diferentes metodologias que nos são disponibilizadas. Portanto, com um planejamento adequado, é possível alcançar com êxito os objetivos desejados.

Para finalizar essa sequência simples, adicionando a tecnologia, que também é um recurso poderoso ao nosso alcance. Com o auxílio de um retroprojeter, é plausível que o professor projete os poliedros estudados relacionando-os, por exemplo, com objetos do cotidiano conforme pode ser observado nas Figuras 21a 23. É importante que o professor ajude o aluno a interpretar as imagens projetadas contextualizando com o conteúdo que está sendo trabalhado.



FIGURA 21 – BALÃO FESTA JUNINA.

FONTE: <https://www.alterosaparracho.com.br/produto/kaixote-losango-balao-xadrez/>



FIGURA 22– DADO.

FONTE: <https://www.bravojogos.com.br>



FIGURA 23 – TERRÁRIO DE VIDRO.

FONTE: <https://www.hometeka.com.br/loja/terrario-de-vidro-icosaedro.html>

Outra forma de apresentar o mesmo conteúdo é com o uso de softwares ou aplicativos. O uso do software GeoGebra 3D, por exemplo, permite que o aluno possa construir os seus poliedros no computador (ou mesmo em tablets ou celulares) e manuseá-los digitalmente. É um software gráfico que proporciona de forma prática e visual o resultado de uma equação matemática. A partir dele é possível modelar figuras, manipulá-las e também visualizá-las a partir de Realidade Aumentada e Realidade Virtual. Atualmente o software permite que os objetos criados possam ser visualizados e manipulados a partir de realidade virtual e a realidade aumentada³. As Figuras 24 e 25 mostram exemplos de figuras desenvolvidas no aplicativo do Geogebra 3D.

³ Realidade Virtual pode ser definida como a tecnologia de interface capaz de criar um ambiente virtual a partir de um sistema computacional. A Realidade Aumentada permite a integração de elementos ou informações virtuais no mundo real.

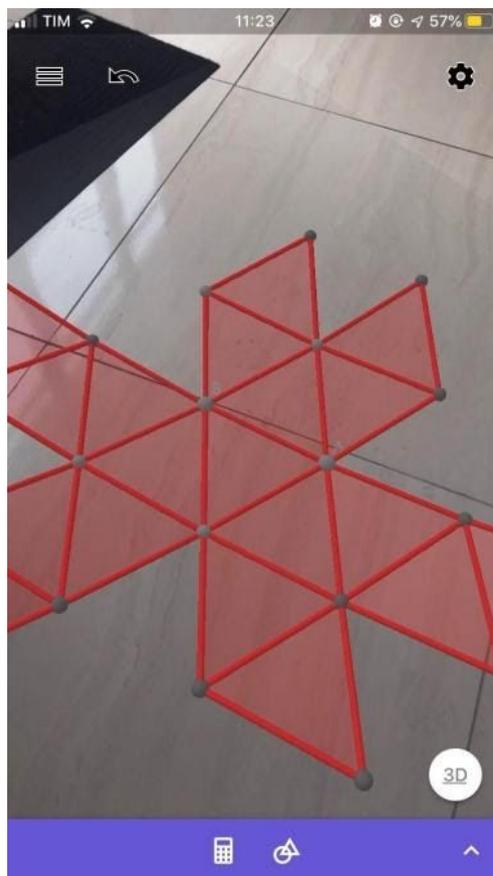


FIGURA 24– PLANIFICAÇÃO ICOSAEDRO A PARTIR DO APLICATIVO GEOGEBRA 3D.
FONTE: Autora (2019).

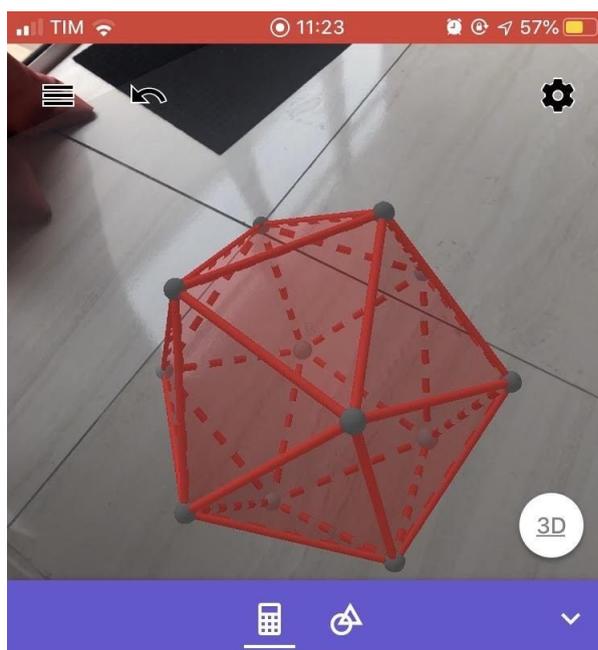


FIGURA 25 – ICOSAEDRO CRIADO NO APLICATIVO GEOGEBRA 3D.
FONTE: Autora (2019).

4. REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS NO ENSINO

Neste capítulo serão mostradas diferentes formas de representações gráficas (ou imagens) utilizadas no processo de ensino/aprendizagem. Para Peralez (2006) existem diferentes formas de representar o conhecimento: verbal, escrita, matemática, pedagógica e gráfica. Exceto da representação verbal, as demais fazem uso de algum tipo de representação gráfica para transmitir o conhecimento. Uma representação gráfica nos proporciona a vantagem de facilmente compreendermos o que está sendo estudado, sejam fenômenos físicos e o comportamento das suas grandezas, econômicos com juros e análises, sociais e seus estudos sobre a população ou outros.

De acordo com Medina et al. (2011) as imagens utilizadas no ensino são, em sua maioria bidimensionais, mesmo quando a representação é realizada em perspectiva, com artifícios de sombras, cores ou texturas. Segundo as autoras o uso de imagens tridimensionais no ensino ainda é bastante reduzido. Uma das formas de representação gráfica bastante utilizado no ensino corresponde ao desenho. Um desenho é uma representação que mantém certa relação com a realidade, através de critérios de similaridade e forma. Pode representar objetos (acontecimentos ou fenômenos) que vemos ou ainda que não vemos. Os desenhos podem ser técnicos, representativos ou esquemáticos e também podem ser perspectiva (representação gráfica em que a profundidade dos objetos é considerada, criando uma ilusão de tridimensionalidade). A Figura 26 mostra um desenho esquemático bidimensional encontrado em livro didático e a Figura 27 um desenho em perspectiva.



FIGURA 26: DESENHO ESQUEMÁTICO.
FONTE: Leonardo (2010).

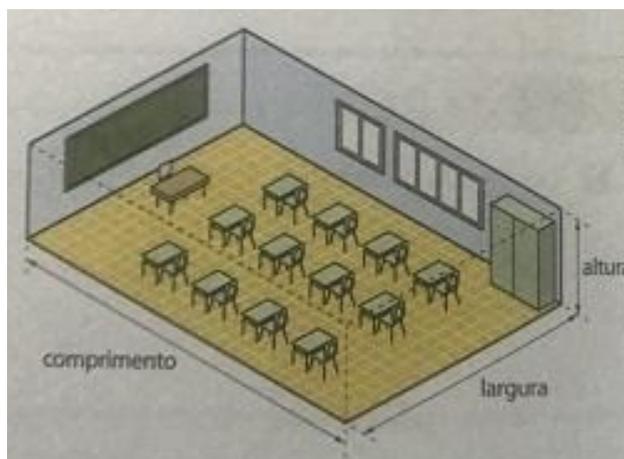


FIGURA 27: DESENHO EM PERSPECTIVA.
FONTE: Leonardo (2010).

Os desenhos são bastante utilizados pelo professor de matemática, quando este utiliza a lousa, mas também aparece com frequência nos livros didáticos. Outra forma de representação gráfica que aparece com frequência nos livros didáticos é a fotografia. Ela possui uma relação direta entre a realidade e sua representação, tanto no que diz respeito à forma, posição relativa e cor. No ensino de matemática, a fotografia é utilizada, geralmente com o propósito de ilustração, mostrando a imagem de algum matemático ilustre ou de aplicações da Matemática com outras áreas do conhecimento.

A fotografia consiste de um processo que permite registrar e reproduzir, através de reações químicas e em superfícies preparadas as imagens obtidas de

uma câmera responsável por projetar a imagem que é captada, reduzindo o tamanho da mesma e aumentando a nitidez.

A Figura 28 mostra uma imagem do matemático francês René Descartes contida em livros didáticos com o intuito de relacionar a Matemática à História, mostrando ao aluno que o conhecimento matemático foi sendo desenvolvido ao longo de anos. Já as Figuras 27 e 28 representam ícones da Arquitetura que podem ser trabalhados no ensino de sólidos geométricos.



FIGURA 28: RENÉ DESCARTES
FONTE: Leonardo (2010).



FIGURA 29: MUSEU DE ARTE DE SÃO PAULO.
FONTE: Leonardo (2010).



FIGURA 30: PIRÂMIDE DO MUSEU DO LOUVRE
FONTE: Leonardo (2010).

Ainda que pouco utilizadas no ensino formal, as representações tridimensionais também aparecem como recurso didático promissor. As representações tridimensionais possuem profundidade, propiciam uma visualização ampla do objeto sobre vários ângulos dando um certo realismo e contribuindo no entendimento do que de fato é este objeto. Uma das formas mais antigas de representação tridimensional utilizada no processo de ensino aprendizagem é o anaglifo. Para produzir um anaglifo são necessárias duas imagens do objeto, obtidas de pontos de vista diferentes. A imagem anaglifo é impressa em duas cores contrastantes, que produzem, mediante o uso de óculos especiais, a ilusão de profundidade. As imagens 31 e 32 mostram exemplos de imagens anaglifo.

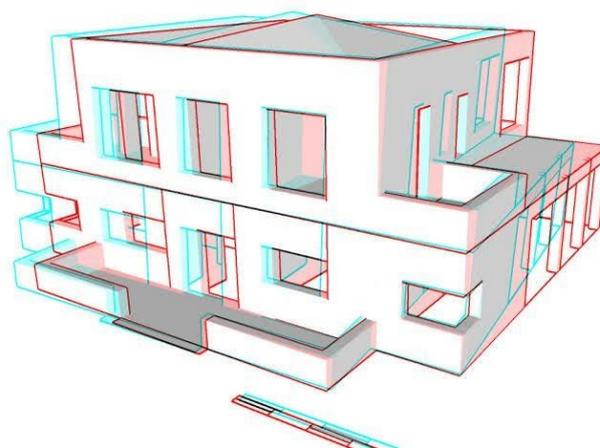


FIGURA 31: ANAGLIFO.
FONTE: <https://kikipedia.wordpress.com/2008/08/02/anaglifo/>

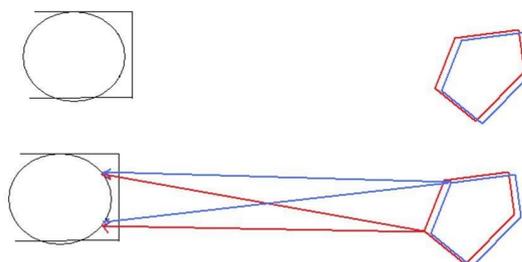


FIGURA 32: ANAGLIFO NA MATEMÁTICA.
FONTE: <https://slideplayer.com.br/slide/1359021/>

Outras formas de representação gráfica tridimensional que tem sido estudadas e trabalhadas em sala de aula na atualidade são as imagens em realidade virtual (RV) e realidade aumentada (RA).

A tecnologia de criar objetos em RA e RV tem sido discutida em diversos centros acadêmicos do mundo e tem levado professores a redefinições de suas práticas de ensino vinculando à novas concepções educacionais. Ela é tão presente que começou a ser vista como uma alternativa de ensino que promove uma melhor aprendizagem aos alunos.

Os alunos estão inseridos na realidade de utilizarem diariamente uma infinidade de programas, aplicativos e softwares por dia, seja por computador ou smartphones, e estes podem servir como reforço escolar para realização de atividades e compreensão de conteúdos, envolvendo-os com a matéria à medida que fazem o uso dessa tecnologia para desenvolver suas próprias teorias.

Pensando nisso, softwares e aplicativos educacionais são desenvolvidos exclusivamente para serem empregados em locais acadêmicos se tornando uma potente ferramenta no processo de ensino-aprendizagem de forma dinâmica e incentivadora.

De acordo com as ideias de Aguiar (2008, p.63), "o uso das novas tecnologias propicia trabalhar em sala de aula com investigação e experimentação na Matemática, considerando que permite ao aprendiz vivenciar experiências, interferir, fomentar e construir o próprio conhecimento".

A utilização e a exploração de softwares para o ensino de Matemática, de acordo com Aguiar (2008, p. 64), "pode desafiar o aluno a pensar sobre o que está sendo feito e, ao mesmo tempo, levá-lo a articular os significados e as conjecturas sobre os meios utilizados e os resultados obtidos".

O ensino de geometria aliado ao uso de tecnologias, de acordo com Notare e Basso (2016), pode possibilitar a "concretização" dos objetos matemáticos na tela do computador e proporcionar a sensação de realismo e existência material do objeto pela possibilidade de manipular a alterar as suas propriedades. Assim, os ambientes oferecidos por estes recursos de geometria em 3D contribuem para o desenvolvimento do raciocínio espacial dos estudantes.

Um software muito utilizado no ensino de matemática é o Geogebra, que aborda os conceitos de geometria, estatística, cálculo e álgebra por intermédio de elementos gráficos, podendo ser usado da escola primária ao ensino superior. Muito utilizado no estudo de geometria plana porém hoje conta com a versão 3D, na qual podemos desenhar superfícies e objetos em três dimensões e visualizá-las em RA ou RV. A Figura 33 mostra a representação de um icosaedro regular criado no Geogebra 3D e visualizado em RA. A Figura 34 mostra outros exemplos de figuras geradas no Geogebra 3D e visualizadas pelo aplicativo de RA. O aplicativo de realidade aumentada do Geogebra permite criar gráficos matemáticos em 3D em qualquer superfície ou ambiente e visualizá-los a partir de qualquer ângulo no ambiente a nossa volta.



FIGURA 33 - ICOSAEDRO GERADO NO GEOGEBRA 3D

FONTE: <https://appadvice.com/app/geogebra-3d-calculator/1445871976>



FIGURA 34: OBJETOS VISUALIZADOS NO APLICATIVO GEOGEBRA RA.
 FONTE: <https://shifter.sapo.pt/2018/04/geogebra-realidade-aumentada/>

Dentre diferentes representações gráficas e a diversidade de softwares e aplicativos utilizados na geometria, trabalhar com a realidade virtual e realidade aumentada é um dos caminhos possíveis, a questão é, no que a representação através do uso dessa tecnologia pode ajudar no ensino de sólidos geométricos?

Para os autores Nasser e Tinoco (2006) a geometria deve ser ensinada de forma dinâmica, “na era da imagem e do conhecimento, a geometria não pode continuar a ser ensinada de forma estática, seguindo o estilo introduzido por Euclides”. Ou seja, quanto mais o aluno tiver acesso a uma imagem completa da geometria, tudo ficará mais palpável pois entra a manipulação dos objetos geométricos, que por sua vez vem tornando possível para o mesmo uma visualização de determinados conceitos sendo crucial no papel de dar significado ao que foi estudado. Os autores constataram também em uma observação de uma atividade aplicada, que os alunos podem se confundir na visualização das figuras geométricas devido a possibilidade de mexer como aprouver podendo girá-los, trocando de lado e lugar, mas como são os alunos que constroem o sólido eles mesmos são capazes de identificar possíveis erros e arrumar se localizando novamente.

Por intermédio de softwares e aplicativos é possível despertar nos alunos uma motivação diferente e fazer com que entendam a partir dessa abordagem

características sobre os sólidos que seriam difíceis de serem verificadas a curto prazo. É um recurso desafiador que busca através do novo complementar o ensino e que exige do professor preparo e planejamento.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em virtude das metodologias abordadas, foi possível detectar que o ensinar matemática engloba aspectos muito mais amplos que simplesmente ensinar sobre os poliedros ou suas propriedades. São necessários outros caminhos que nos direcionem como profissionais através das ferramentas que essas metodologias nos oferecem para que sejam capazes de ampliar a visão do aluno.

Nos dias de hoje, a metodologia mais encontrada em salas de aulas é a tradicional: quadro, giz e o bom livro didático que, mesmo com o avanço e estudo de diferentes métodos de ensino, está enraizado no processo de ensino-aprendizagem sendo o meio mais utilizado nas escolas. Muitas vezes esta metodologia é colocada

numa posição principal como única fonte de saber, totalmente tradicional, que detém o livro como exclusivo objeto de estudo e o quadro negro como o principal mediador do conteúdo, o que não é de todo o mal, mas possivelmente limita o crescimento e criatividade dos alunos.

A partir disso podemos observar a importância do uso de outras metodologias durante a execução das aulas de Poliedros para um novo rumo no processo de ensino aprendizagem. Através do material concreto os estudantes conseguem produzir e ver com suas mãos o seu próprio Poliedro “tocando” em suas características, assim é notável que o conhecimento se torna diferente podendo ser prazeroso e criativo ou um passatempo que não tem como foco uma atividade dirigida significativa. Para que de fato seja uma metodologia frutífera é necessário que o profissional se preocupe em possibilitar o conhecimento efetivo para o aluno através de tarefas direcionadas que sejam capazes de envolvê-los e motivá-los. Esse método, apesar de não com muita frequência, é usado em sala de aula para o ensino de diferentes conteúdos, deste conteúdo em questão um dos materiais mais conhecidos são os sólidos de acrílico que por sua vez poucos momentos podem ser manuseados pelos alunos por conta da preservação.

Porém, não é somente a partir destes materiais que eles produzem seu Poliedro, no século presente, há um desafio para os profissionais em sala de aula chamado tecnologia que vem com força e intuito de aprimorar o processo de ensino dos alunos. É de conhecimento de todos que a tecnologia tem causado transformações em nosso meio e ganhado uma intensa presença em tudo, principalmente pelos smartphones e computadores, e a escola não pode ficar alheia a essa mudança. Partindo desse princípio o professor necessita ser ainda mais eficaz nas salas de aula tendo como objetivo estabelecer a conexão entre a teoria e a tecnologia, sabendo também que nossos alunos aprendem de diferentes modos e em sua grande maioria são ligados em seus celulares. Assim, essa metodologia surge como um recurso que atinge a todos os educandos dando a eles possibilidade de construir os seus próprios poliedros e “brincar” usando seus próprios aparelhos celulares ou o laboratório de informática da escola, não esquecendo que tudo depende das condições, pode ser que nem todos os alunos tenham celular, que não possuam internet para mexer no aplicativo, que tenham tido dificuldade para baixar o

app, dentre outros erros que podem acontecer na internet da instituição ou seus computadores.

Tendo em vista essas metodologias, algumas delas nos oferecem representações gráficas, que são responsáveis por nos dar a contextualização que necessitamos para entender o que está sendo estudado, tendo como uma de suas principais vertentes o desenho que mantém uma relação muito próxima com a realidade e é facilmente encontrado nos livros didáticos e reproduzido pelos professores. Há as fotografias que também são outra forma de representar graficamente de modo que seja possível relacionar com o que se quer mostrar como por exemplo uma pirâmide com um triângulo, na matemática aparece muito relacionando a foto a alguma figura geométrica, ou para mostrar algum matemático que já viveu a muito tempo ou que é muito conhecido.

Essas representações podem ser tridimensionais nos proporcionando uma visão ampla do objeto dando a ele uma vida, como o anaglifo que com uso de óculos especiais nos dá a sensação de profundidade, ou as realidades virtual e aumentada que traz um ensino com novas direções. Os aplicativos que trabalham com essas realidades nos permitem ter acesso a muitos recursos eficientes que possibilitam de várias formas o processo de ensino-aprendizagem. Quando usados tornam a aula completamente expositiva, então auxilia o professor a construir conceitos e evoluir na aula partilhando conhecimento com os alunos de forma mais visível e dinâmica, envolvendo-os. A realidade virtual e aumentada multiplica o nível de interação dos discentes ocasionando o engajamento de forma que o aprendizado do mesmo é aprimorado, também amplia o campo de trabalho para dentro ou fora da sala de aula deixando que eles explorem os ambientes trabalhando para resolver os seus problemas mas vale ressaltar que há um grau de dificuldade de acordo com o que se é proposto e que se for difícil para o aluno ele pode facilmente se desestimular e dispersar.

É importante lembrar que o uso de diferenciadas metodologias é de opção do professor, só elas não garantem que o aprendizado está concreto, que a aula foi boa e o objetivo foi alcançado, é preciso que os alunos estejam motivados a participar e vivenciar o que a metodologia propõe. Logo, o desenvolvimento deste trabalho permitiu observar que há diferentes estratégias utilizadas nas práticas pedagógicas

que podem proporcionar um êxito no resultado final com os alunos e que há diferentes representações capacitadas disponibilizadas ao professor como ferramenta do ensino de Poliedros nas investigações de ensino. É necessário, contudo, preparar, programar, planejar, desenvolver e aplicar.

REFERÊNCIAS:

AGUIAR, E. V. B. As novas tecnologias e o ensino-aprendizagem. *Vértices, Campos dos Goytacazes (RJ)*, v.10, n.1, p. 63-72, jan./dez. 2008.

BOYER, C. B. História da matemática / Carl B. Boyer; prefácio de Isaac Asimov; revista por Uta C. Merzbach: tradução de Elza F. Gomide. – 3. ed. – São Paulo: Blucher, 2010. BRASIL. Ministério da Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

COPPOLA, Neusa Ciriaco; RAMOS, Marli. O uso do computador e da internet como ferramentas pedagógicas. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2551-8.pdf>. Acesso em 22 de dezembro de 2019.

DINIZ, Sirley Nogueira de Faria. O uso das tecnologias em sala de aula. Disponível em: http://www.pucrs.br/ciencias/viali/doutorado/ptic/aulas/aula_2/187071.pdf. Acesso em 23 de novembro de 2019.

“Geometria Espacial” em Só Matemática. Virtuosa Tecnologia da Informação, 1998-2019. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/emedio/espacial/espacial8.php>. Acesso em 17 de outubro de 2019.

LIBÂNIO, J. C. A matemática do ensino médio - Coleção do professor de matemática, vol.2. SBM. Didática. São Paulo: Cortez, 1994.

LIMA, Elon; CARVALO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. A matemática do ensino médio. v.2. 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LOPES, Luana Monique Delgado; VIDOTTO, Kajiana Nuernberg Sartor; POZZEBON, Eliane; FERENHOF, Helio Aisenberg. Inovações Educacionais com o uso da realidade aumentada: uma revisão sistemática. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-46982019000100403. Acesso em 07 de novembro de 2019.

MEDINA, S.S.S.; LIBLIK, A.M.P.; MEDEIROS, Z. F. Imagens no Ensino de Matemática. In: Actas del 3er Congreso Uruguayo de Educación Matemática. Montevideo: Semur, 2011

NASSER, L. e TINOCO, L.. Curso Básico de Geometria. Rio de Janeiro: Projeto Fundação – UFRJ, 2006.

NOTARE, M.; BASSO, M. Geometria Dinâmica 3D – novas perspectivas para o pensamento espacial. RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação, CINTED-UFRGS, Porto Alegre (RS), v. 14, n.2, dez. 2016.

O que é o Geogebra? Disponível em: <https://www.geogebra.org/?lang=pt>. Acesso em 05 de outubro de 2019.

PACHECO, José Adson D.; BARROS, Janaina V. O uso de softwares Educativos no Ensino da Matemática. Disponível em: http://www.revistadiálogos.com.br/dialogos_8/adson_janaina.pdf. Acesso em 22 de novembro de 2019.

SANTOS, Josiel Almeida; SANTOS, Lúcia Silveira Brum; FRANÇA, Kleber Vieira. Dificuldades na Aprendizagem da Matemática. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_Santos.pdf. Acesso em 19 de dezembro de 2019.

SCHIRLO, A. C.; SILVA, S. de C. R. da. O ensino da geometria auxiliando a fabricação de embalagens. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, vol 2, num 1, jan./abril.2009. SILVA, Luiz Paulo Moreira. "Sólidos geométricos"; Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/solidos-geometricos.htm>. Acesso em 20 de outubro de 2019.

VERGNAUD. G. (1990). La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques, 10 (23): 133-170.