

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

THIAGO PAULICHEN



2-GRUPOIDES DE LIE, G -EXTENSÕES DE GRUPOIDES E
FIBRADOS PRINCIPAIS DE 2-GRUPOS

CURITIBA
2023

THIAGO PAULICHEN

2-GRUPOIDES DE LIE, G -EXTENSÕES DE GRUPOIDES E
FIBRADOS PRINCIPAIS DE 2-GRUPOS

Dissertação apresentada como requisito parcial
à obtenção do grau de Mestre em Matemática,
no Curso de Pós-Graduação em Matemática, Se-
tor de Ciências Exatas, da Universidade Federal
do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Olivier Brahic.

CURITIBA
2023

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Paulichen, Thiago

2-grupoides de Lie, G-extensões de grupoides e fibrados principais de 2-grupos / Thiago Paulichen. – Curitiba, 2023.

1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Orientador: Olivier Brahic

1. Grupóides. 2. Teoria dos grupos. 3. Fibrados (Matemática). I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Brahic, Olivier. IV. Título.

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **THIAGO PAULICHEN** intitulada: **2-grupoides de Lie, G-extensões de grupoides e fibrados principais de 2-grupos**, sob orientação do Prof. Dr. OLIVIER BRAHIC, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa. A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 26 de Setembro de 2023.

Assinatura Eletrônica

28/09/2023 11:44:48.0

OLIVIER BRAHIC

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

28/09/2023 12:16:49.0

ALEJANDRO CABRERA

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO)

Assinatura Eletrônica

28/09/2023 12:34:49.0

CRISTIAN ANDRÉS ORTIZ GONZÁLES

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO)

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer, primeiramente, ao meu orientador Professor Olivier pela sua paciência, orientação, pelas conversas e conselhos mesmo que via Teams. Sou grato mais ainda por todas as aulas ministradas que definitivamente não foram poucas. Obrigado por introduzir a Geometria da maneira mais "suave" possível.

Desejo agradecer ao meu orientador da graduação, Professor Dion por servir de inspiração e favorecer tanto a entrada quanto a conclusão do Mestrado por meio do TCC. Obrigado por mostrar o que é ser um matemático.

Agradeço aos professores e colegas do PPGM por proporcionar um bom ambiente de aprendizagem mesmo durante o período pandêmico. Ao departamento de matemática da UFPR por tornar este trabalho possível, também, à CAPES pelo apoio financeiro.

Adicionalmente, aos meus pais, Maria e Darci pela compreensão, ajuda e motivação nos momentos difíceis. À minha família e amigos, obrigado pelo suporte Ari, Emili, Jaqueline, Jean, Lucas e, especialmente, Francieli.

Finalmente, agradeço aos professores Alejandro e Cristian pelas sugestões que certamente acrescentaram muito a esta dissertação.

RESUMO

Nesta dissertação relembramos a noção de um grupoide de Lie e introduzimos G -fibrados principais por meio de morfismos generalizados de grupoides. Posteriormente, estendemos o estudo para o caso 2-categórico, primeiro caracterizamos 2-grupoides de Lie em termos de módulos cruzados, depois definimos uma noção de morfismo generalizado entre 2-grupoides e por conseguinte obtemos $[G \rightarrow H]$ -fibrados principais. Realizamos também um paralelo, via nervo, entre o estudo de 2-grupoides e a abordagem simplicial. Finalmente, discutimos extensões de grupoides, suas equivalências de Morita, e então descrevemos explicitamente uma correspondência 1-1 entre classes de equivalências de Morita de, por um lado, $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrados principais, e por outro, de G -extensões de grupoides.

Palavras-chave: 2-grupoides de Lie; Extensões de grupoides; $[G \rightarrow H]$ -fibrados principais; $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrados principais e G -extensões.

ABSTRACT

In this dissertation we recall the notion of a Lie groupoid and introduce G -principal bundles by means of generalized morphisms of groupoids. Later, we extend the study to the 2-categorical case, first we characterize Lie 2-groupoids in terms of crossed modules, then we define a notion of generalized morphism between 2-groupoids, and consequently we obtain $[G \rightarrow H]$ -principal bundles. We also performed a parallel, via a nerve construction, between the theory of 2-groupoids and the simplicial approach. Finally, we discuss groupoid extensions, their Morita equivalences, and then explicitly describe a 1-1 correspondence between Morita equivalence classes of, on the one hand, $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -principal bundles, and on the other hand, of groupoid G -extensions.

Keywords: Lie 2-groupoids; Groupoid extensions; $[G \rightarrow H]$ -principal bundles; $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -principal bundles and groupoid G -extensions.

Sumário

Introdução	8
1 Grupoides de Lie & Fibrados principais	12
1.1 Grupoides de Lie	12
1.2 Fibrações de Morita & Morfismos generalizados de grupoide de Lie	17
1.2.1 Fibrações de Morita	17
1.2.2 Morfismos generalizados de grupoides de Lie	19
1.3 G -fibrados principais	24
2 2-grupoides de Lie & Módulos cruzados de grupoides de Lie	29
2.1 2-grupoides de Lie	29
2.2 Módulos cruzados de grupoides de Lie	34
2.3 Equivalência entre $\mathbf{2Gpd}$ e $\mathbf{GpdXMod}$	37
2.3.1 $\mathbf{2Gpd} \rightarrow \mathbf{GpdXMod}$	37
2.3.2 $\mathbf{2Gpd} \leftarrow \mathbf{GpdXMod}$	40
2.3.3 Morfismos: $\mathbf{2Gpd} \leftrightarrow \mathbf{GpdXMod}$	43
2.4 2-fibrações de Morita	44
3 Contexto simplicial	50
3.1 Conjuntos simpliciais	50
3.2 Variedades simpliciais	59
3.2.1 O nervo de um 2-grupoide de Lie	60
3.2.2 2-grupoides de Lie fracos & Hypercovers	66
3.3 2-fibrações de Morita vs Hypercovers	71
4 $[G \rightarrow H]$-fibrados principais sobre grupoides de Lie	77
4.1 Morfismos generalizados de 2-grupoides de Lie	77
4.2 $[G \rightarrow H]$ -fibrados principais	81
5 G-extensões de grupoides de Lie & $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$-fibrados principais	86
5.1 Extensões de grupoides de Lie e suas equivalências de Morita	86
5.2 G -extensões de grupoides de Lie	89
5.3 Correspondência entre classes de equivalência de Morita de G -extensões e de $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrados principais	92
5.3.1 G -extensões $\rightarrow [G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrados principais	92
5.3.2 G -extensões $\leftarrow [G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrados principais	96
5.3.3 G -extensões $\leftrightarrow [G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrados principais	102
Bibliografia	104

Introdução

De forma intuitiva um grupoide de Lie nada mais é do que um grupoide com uma boa estrutura diferenciável, em especial, um grupo de Lie pode ser visto como um grupoide de Lie com um único objeto. De forma semelhante como no contexto puramente categórico, há uma noção de equivalência (suave) entre grupoides de Lie, nesse caso um morfismo de grupoides de Lie é uma equivalência de Morita se, e somente se, é essencialmente sobrejetor, fiel e pleno. No entanto, geralmente essas equivalências não são invertíveis, o que nos leva a uma inversão formal desses morfismos, que são o que chamamos de morfismos generalizados.

Grosso modo, um morfismo generalizado é dado primeiro substituindo um grupoide de Lie por um grupoide Morita equivalente e, logo após, mapeando esse último por um morfismo de grupoides de Lie. Essa noção sugere uma abordagem de G -fibrados principais realizada de maneira global, sem recorrer à cartas locais e cociclos. De fato, lembre que um G -fibrado principal pode ser definido, a menos de isomorfismos, como uma coleção de funções de transição $g_{ij} : U_{ij} \rightarrow G$ sobre alguma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ de M , satisfazendo a condição de cociclo $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$. Essa coleção de funções de transição define um morfismo de grupoides do grupoide de Čech $\amalg U_{ij} \rightrightarrows \amalg U_i$ associado à cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ para o grupo de Lie $G \rightrightarrows *$. Em particular, obtemos um morfismo generalizado:

$$(M \rightrightarrows M) \xleftarrow{\sim} \left(\amalg U_{ij} \rightrightarrows \amalg U_i \right) \xrightarrow{g_{ij}} (G \rightrightarrows *),$$

onde a flecha para à esquerda é a equivalência de Morita canônica. Em outras palavras, um G -fibrado principal sobre uma variedade M pode ser pensado como um morfismo generalizado de M para o grupo de Lie G , ambos considerados como grupoides.

Esse ponto de vista conduz a uma generalização direta para o contexto 2-categórico, isto é, para uma noção de fibrado principal de um 2-grupo de Lie. O estudo de 2-grupos de Lie surge naturalmente na física matemática, especificamente, na teoria de gauge superior fibrados de 2-grupos de Lie fornecem uma boa estrutura para descrever o transporte paralelo de *strings*.

Em termos práticos, um 2-grupoide de Lie (estrito) pode ser considerado como a

versão superior de um grupoide de Lie. Concretamente, é um grupoide duplo da forma:

$$\begin{array}{ccc} G_2 & \rightrightarrows & G_0 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ G_1 & \rightrightarrows & G_0 \end{array},$$

onde os grupoides que o formam são de Lie. Com isso, um 2-grupo de Lie é um 2-grupoide sobre um único objeto, ou em outros termos, um grupoide de Lie onde as variedades de flechas e objetos são grupos de Lie e os mapas estruturais são morfismos de grupos de Lie.

É um resultado clássico que 2-grupoides estão em bijeção com módulos cruzados de grupoides [11]. Conceitualmente, um módulo cruzado $(\mathcal{G} \xrightarrow{\rho} \mathcal{H})$ é um morfismo de grupoides $\rho : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$, junto com uma ação por automorfismos de \mathcal{H} em \mathcal{G} , satisfazendo condições de compatibilidade adequadas. Além disso, essa bijeção se restringe às subcategorias dos 2-grupos e dos módulos cruzados de grupos, onde o 2-grupo associado ao módulo cruzado $(G \xrightarrow{\rho} H)$ é denotado por $[G \xrightarrow{\rho} H]$. De modo geral, isso nos dá uma maneira simplificada de trabalhar com 2-grupoides, desde que as estruturas de um módulo cruzado são conhecidas.

A generalização do conceito de morfismo generalizado para o caso de 2-grupoides é direto: um morfismo generalizado de 2-grupoides de Lie $\mathbf{G} \rightsquigarrow \mathbf{H}$ é, a menos de equivalências, um par de morfismos de 2-grupoides $\mathbf{G} \xleftarrow{\sim} \mathbf{G}' \rightarrow \mathbf{H}$, onde $\mathbf{G}' \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}$ é uma 2-equivalência de Morita (uma equivalência "suave" de 2-grupoides). Então, definimos um $[G \xrightarrow{\rho} H]$ -fibrado principal sobre um grupoide de Lie \mathcal{H} como sendo (a classe de) um morfismo generalizado $\mathcal{H} \rightsquigarrow [G \xrightarrow{\rho} H]$, ambos vistos como 2-grupoides de Lie. Por exemplo, um G -fibrado principal (de grupos) sobre M induz naturalmente um $[1 \rightarrow G]$ -fibrado principal (de 2-grupos) sobre M .

O conceito de nervo de grupoides de Lie se estende ao contexto 2-categórico como um funtor da categoria dos 2-grupoides de Lie para a categoria das variedades simpliciais. Na verdade, assim como no caso de grupoides esse funtor atribui 2-grupoides de Lie com o que chamamos de 2-grupoides de Lie fracos, esses que nada mais são do que variedades simpliciais satisfazendo a condição de Kan suave em todas as dimensões e a condição de Kan suave estrita para as dimensões superiores a dois, veja [16]. Adicionalmente, o nervo é a ponte entre a teoria de homotopia dos 2-grupoides e a teoria de homotopia de conjuntos simpliciais, em particular, um dos resultados desta dissertação consiste em relacionar 2-fibrações de Morita de 2-grupoides de Lie com hypercovers de 2-grupoides de Lie fracos.

A teoria de fibrados principais de 2-grupos está intimamente relacionada com o estudo de extensões de grupoides. Explicitamente, uma extensão de grupoides é uma

sequência exata curta de grupoides de Lie sobre a mesma base M :

$$\mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H}.$$

Um caso particular ocorre quando ϕ tem núcleo trivial, isto é, $\mathcal{K} = M \times G$, então dizemos que ϕ é uma G -extensão.

É possível definir uma noção de equivalência de Morita tanto para fibrados principais de 2-grupos quanto para extensões de grupoides, isso é feito de maneira óbvia: para o caso de fibrados principais é preciso que ambos os 2-grupos sejam Morita equivalentes, bem como os grupoides envolvidos, ainda, os fibrados principais devem ser equivalentes como morfismos generalizados; já para extensões de grupoides, basta que exista um morfismo de extensões que é uma fibração de Morita em ambos os argumentos.

O nosso caso de interesse está em fibrados principais do 2-grupo de automorfismos associado a um grupo de Lie G . Isto é, morfismos generalizados de um grupoide qualquer \mathcal{H} para o 2-grupo de Lie $[G \xrightarrow{\text{Ad}} \text{Aut}(G)]$. Mais precisamente, o principal resultado desta dissertação estabelece uma correspondência 1-1 entre classes de equivalência de Morita de, por um lado, $[G \xrightarrow{\text{Ad}} \text{Aut}(G)]$ -fibrados principais, e por outro, G -extensões de grupoides. Em termos simples, obtemos que um $[G \xrightarrow{\text{Ad}} \text{Aut}(G)]$ -fibrado principal pode ser visto como um certo morfismo de grupoides de Lie "sobrejetor", cujo núcleo é um fibrado em grupos de Lie trivial.

O texto está dividido em cinco capítulos que estão organizados como segue:

- **Capítulo 1:** É dedicado a um estudo preliminar para o desenvolvimento da dissertação. Apresenta generalidades sobre grupoides de Lie e, em especial, uma discussão autoral baseada em [11], acerca da definição de fibrados principais como morfismos generalizados.
- **Capítulo 2:** Apresenta a teoria de 2-grupoides de Lie e sua caracterização explícita por meio de módulos cruzados de grupoides [27]. Além disso, introduzimos a noção de equivalência de Morita de [11] para o caso de 2-grupoides.
- **Capítulo 3:** Se refere a um breve estudo sobre objetos simpliciais [23], depois apresenta o nervo de um 2-grupoide [8], e então realiza um paralelo entre as teorias, por um lado, 2-grupoides de Lie e seus morfismos, e por outro, suas versões simpliciais fracas.
- **Capítulo 4:** É estendido o conceito de morfismo generalizado para 2-grupoides, então são definidos e exemplificados fibrados principais de 2-grupos de Lie [11].
- **Capítulo 5:** Tem como foco o resultado principal. Primeiro são introduzidos conceitos relacionados à G -extensões de grupoides, depois mostra-se uma detalhada

caracterização, a menos de equivalências, de fibrados principais do 2-grupo de automorfismos por meio de G -extensões.

Capítulo 1

Grupoides de Lie & Fibrados principais

Neste primeiro capítulo será realizada uma breve introdução à teoria dos grupoides de Lie, suas equivalências de Morita e morfismos generalizados. Além disso, serão desenvolvidos conceitos básicos sobre fibrados principais, bem como uma abordagem de fibrados principais por meio de morfismos generalizados de grupoides. Isso será feito, objetivando dar subsídio à teoria de ordem superior que será desenvolvida nos próximos capítulos e, sobretudo, visando fixar as notações e convenções que serão utilizadas ao longo do texto.

1.1 Grupoides de Lie

Esta breve seção é padrão e utiliza como referências gerais [25], [22], [24], [21] e [6].

Um **grupoide** \mathcal{G} é uma categoria pequena em que todos os morfismos são isomorfismos. Explicitamente, um grupoide \mathcal{G} consiste de um conjunto de objetos \mathcal{G}_0 e um conjunto \mathcal{G}_1 de morfismos (ou flechas), junto com mapas estruturais:

- $s, t : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0$, denominados respectivamente, fonte e alvo. Em particular, para uma flecha $y \xleftarrow{g} x$, tem-se $s(g) = x$ e $t(g) = y$;
- uma multiplicação parcial $\cdot : \mathcal{G}_{1s} \times_t \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_1$, $(g, h) \mapsto gh$, que é associativa, isto é, $(gh)f = g(hf)$. Onde:

$$\mathcal{G}_{1s} \times_t \mathcal{G}_1 = \{(g, h) \in \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_1 \mid s(g) = t(h)\}$$

é o conjunto de flechas componíveis.

- um mapa unidade $1 : \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_1$, $x \mapsto 1_x$, tal que, para qualquer flecha $y \xleftarrow{g} x$, tem-se $g1_x = g$ e $1_y g = g$.

- um mapa inversão $i : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_1$, $g \mapsto g^{-1}$, tal que, para qualquer flecha $y \xleftarrow{g} x$, tem-se $gg^{-1} = 1_y$ e $g^{-1}g = 1_x$.

Por vezes, denotamos um grupoide \mathcal{G} por $\mathcal{G}_1 \rightrightarrows \mathcal{G}_0$, deixando implícito seus mapas estruturais.

Definição 1.1.1. Um **grupoide de Lie** \mathcal{G} é um grupoide de modo que: \mathcal{G}_0 e \mathcal{G}_1 são variedades diferenciáveis; os mapas estruturais $\cdot, 1, i$, são suaves; e os mapas s e t são submersões sobrejetoras.

Um grupoide de Lie é, portanto, um grupoide com uma estrutura diferenciável compatível.

Exemplo 1.1.1. O **grupoide de um ponto** $\{*\} \rightrightarrows \{*\}$ é o mais simples exemplo de grupoide de Lie, nesse caso todos os mapas estruturais são triviais.

Exemplo 1.1.2. Para uma variedade diferenciável M obtém-se o **grupoide unidade** $M \rightrightarrows M$, denotado por $\mathbf{1}_M$ e cujos mapas estruturais são todos identidades.

Exemplo 1.1.3. Para uma variedade M pode-se formar também o **grupoide par** $M \times M \rightrightarrows M$, onde os mapas estruturais são dados por:

- $s(y, x) = x$;
- $t(y, x) = y$;
- $(z, y) \cdot (y, x) = (z, x)$;
- $1(x) = (x, x)$;
- $i(y, x) = (x, y)$.

Exemplo 1.1.4. Dados G um grupo de Lie e $(g, x) \mapsto gx$ uma ação suave à esquerda de G em M . Então, pode-se associar o **grupoide de ação** $G \times M \rightrightarrows M$, denotado por $\mathbf{G} \times \mathbf{M}$ e cujos mapas estruturais são:

- $s(g, x) = x$;
- $t(g, x) = gx$;
- $(g', x') \cdot (g, x) = (g'g, x)$;
- $1(x) = (e, x)$;
- $i(g, x) = (g^{-1}, gx)$.

Exemplo 1.1.5. Dada $p : M \rightarrow N$ uma submersão sobrejetora, o **grupoide de submersão** associado a p é o grupoide $M_p \times_p M \rightrightarrows M$, com mapas estruturais:

- $s(y, x) = x$;
- $t(y, x) = y$;
- $(z, y) \cdot (y, x) = (z, x)$;
- $1(x) = (x, x)$;
- $i(y, x) = (x, y)$.

Exemplo 1.1.6. Dada uma variedade diferenciável M , o **grupoide fundamental** de M é o grupoide $\Pi(M) \rightrightarrows M$, onde $\Pi(M)$ é o conjunto de classes de homotopia de caminhos suaves em M (com pontos finais fixos). Mais precisamente, dado γ um caminho representante da classe $[\gamma] \in \Pi(M)$, então $[\gamma]$ tem fonte $s([\gamma]) = \gamma(0)$ e alvo $t([\gamma]) = \gamma(1)$. Já o mapa unidade $1 : M \rightarrow \Pi(M)$, envia um ponto x na classe de homotopia do caminho constante $\text{id}(x)$. A multiplicação do grupoide nada mais é do que a classe da concatenação de dois caminhos e, finalmente, a inversão é definida por $i([\gamma]) = [\gamma^{-1}]$, onde γ^{-1} é o caminho $t \mapsto \gamma(1 - t)$.

Um grupoide de Lie pode ser visto como uma generalização de um grupo de Lie como sugere o seguinte exemplo.

Exemplo 1.1.7. Um grupo de Lie G é um grupoide de Lie com um único objeto $G \rightrightarrows \{*\}$. Os mapas fonte e alvo são as projeções triviais, o mapa unidade $1 : \{*\} \rightarrow G$ é dado pelo elemento unidade do grupo, isto é, $1(*) = e$, e a multiplicação e inversão são as herdadas do grupo G .

Desde que um grupoide de Lie é uma categoria pequena com uma estrutura diferenciável, é claro que um morfismo de grupoides de Lie deve ser definido como um funtor que preserva estruturas diferenciáveis.

Definição 1.1.2. Dados \mathcal{G} e \mathcal{H} grupoides de Lie. Um **morfismo** de grupoides de Lie $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ consiste de dois mapas suaves:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\phi_1} & \mathcal{H}_1 \\ t \downarrow s & & t \downarrow s \\ \mathcal{G}_0 & \xrightarrow{\phi_0} & \mathcal{H}_0 \end{array}$$

que comutam com todos os mapas estruturais de \mathcal{G} e \mathcal{H} . Mais precisamente, para todos $x \in \mathcal{G}_0$, $g \in \mathcal{G}_1$ e $(g, h) \in \mathcal{G}_{1s \times_t \mathcal{G}_1}$, os mapas ϕ_0 e ϕ_1 devem satisfazer:

- $\phi_0(s(g)) = s(\phi_1(g));$
- $\phi_0(t(g)) = t(\phi_1(g));$
- $\phi_1(1_x) = 1_{\phi_0(x)};$
- $\phi_1(gh) = \phi_1(g)\phi_1(h).$

A categoria cujos objetos são grupoides de Lie e morfismos são morfismos de grupoides de Lie é denotada por **Gpd**.

Exemplo 1.1.8. Considere M uma variedade diferenciável e $\Pi(M) \rightrightarrows M$ seu grupoide fundamental. Então, os mapas fonte e alvo $s, t : \Pi(M) \rightarrow M$ induzem naturalmente um

morfismo de $\Pi(M) \rightrightarrows M$ para o grupoide par $M \times M \rightrightarrows M$:

$$\begin{array}{ccc} \Pi(M) & \xrightarrow{(s,t)} & M \times M \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ M & \xrightarrow{\text{id}} & M \end{array} .$$

Agora, recordemos a noção de uma ação de um grupoide de Lie em uma variedade diferenciável, para isso serão consideradas ações à esquerda, mas os resultados a seguir são definidos analogamente para ações à direita.

Definição 1.1.3. Uma **ação à esquerda** de um grupoide de Lie $\mathcal{G}_1 \rightrightarrows \mathcal{G}_0$ em uma variedade diferenciável M é dada por:

- Uma submersão $\mu : M \rightarrow \mathcal{G}_0$, chamada **mapa momento**;
- Um **mapa de ação** suave:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} M &\rightarrow M \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x, \end{aligned}$$

$$\text{onde } \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} M = \{(g, x) \in \mathcal{G}_1 \times M \mid s(g) = \mu(x)\},$$

sujeitos às seguintes condições:

- Para todo $(g, x) \in \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} M$:

$$\mu(g \cdot x) = t(g);$$

- Dados $g, g' \in \mathcal{G}_1$ e $x \in M$, tal que $(gg', x) \in \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} M$, temos:

$$(gg') \cdot x = g \cdot (g' \cdot x),$$

$$\text{e para todo } y \in \mathcal{G}_0, (1_y \cdot x) = x.$$

Há um grupoide natural associado a uma ação de um grupoide em uma variedade diferenciável:

Exemplo 1.1.9. Considere $\mathcal{G}_1 \rightrightarrows \mathcal{G}_0$ um grupoide de Lie. Suponha que \mathcal{G} age à esquerda em uma variedade diferenciável M , com ação $(g, x) \mapsto gx$ e mapa momento μ . Então, pode-se formar o **grupoide de ação** $\mathcal{G}_1 \times M \rightrightarrows M$, onde:

$$\mathcal{G}_1 \times M = \{(g, x) \in \mathcal{G}_1 \times M \mid s(g) = \mu(x)\},$$

com mapas estruturais:

- $s(g, x) = x;$
- $t(g, x) = gx;$
- $(g, x) \cdot (h, y) = (gh, y);$
- $1(x) = (1_x, x);$
- $i(g, x) = (g^{-1}, gx).$

Observação 1.1.1. Observe que ao escolher \mathcal{G} como sendo um grupo de Lie G , o grupoide de ação associado a G é o grupoide de ação do Exemplo 1.1.4.

Existem também ações de grupoides em grupoides, é de interesse o caso particular de ações de grupoides por automorfismos.

Definição 1.1.4. Sejam $\mathcal{G}_1 \rightrightarrows \mathcal{G}_0$ e $\mathcal{H}_1 \rightrightarrows \mathcal{H}_0$ grupoides de Lie. Diz-se que \mathcal{G} **age em \mathcal{H} por automorfismos** se \mathcal{G} age à esquerda em \mathcal{H}_1 ao longo de $\mu : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0$, e por conseguinte em $\mathcal{H}_0 \hookrightarrow \mathcal{H}_1$, com ação de $g \in \mathcal{G}_1$ em $h \in \mathcal{H}_1$ denotada por $g \triangleright h$ e ação de $g \in \mathcal{G}_1$ em $x \in \mathcal{H}_0$ denotada por $g \cdot x$. Além disso, a ação deve satisfazer os seguintes axiomas de compatibilidade:

- os mapas fonte e alvo $s, t : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_0$ são \mathcal{G} -equivariantes, isto é:

$$s(g \triangleright h) = g \cdot s(h) \quad \text{e} \quad t(g \triangleright h) = g \cdot t(h);$$

- a ação de \mathcal{G} em \mathcal{H}_1 é compatível com a multiplicação e unidade do grupoide \mathcal{H} , isto é:

$$(g \triangleright h)(g \triangleright f) = g \triangleright (hf) \quad \text{e} \quad g \triangleright 1_x = 1_{g \cdot x}.$$

Para o caso de ações por automorfismos de um grupoide no outro também associa-se um grupoide, esse que por sua vez é chamado de grupoide produto semi-direto, veja [34] e [25].

Definição 1.1.5. Sejam $\mathcal{G}_1 \rightrightarrows \mathcal{G}_0$ e $\mathcal{H}_1 \rightrightarrows \mathcal{H}_0$ grupoides de Lie. Suponha que \mathcal{G} age em \mathcal{H} por automorfismos, então o **grupoide produto semi-direto** de \mathcal{G} por \mathcal{H} é o grupoide $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{H}_1 \rightrightarrows \mathcal{H}_0$, onde:

$$\mathcal{G}_1 \times \mathcal{H}_1 = \{(g, h) \in \mathcal{G}_1 \times \mathcal{H}_1 \mid g \triangleright h \text{ faz sentido}\}$$

e os mapas estruturais são dados por:

- $s(g, h) = s(h);$
- $t(g, h) = t(g \triangleright h);$
- $(g', h') \cdot (g, h) = (g'g, (g^{-1} \triangleright h')h);$
- $1(x) = (1, 1);$
- $i(g, h) = (g^{-1}, (g \triangleright h^{-1})).$

1.2 Fibrações de Morita & Morfismos generalizados de grupoide de Lie

Esta seção destina-se ao estudo de certos morfismos de Morita de grupoides de Lie, além de uma maneira padrão de invertê-los formalmente. Para tanto, esta seção é subdividida em duas subseções, com referências [13] e [24], além das padrões, já citadas na Seção 1.1.

1.2.1 Fibrações de Morita

Há uma bem conhecida condição necessária e suficiente para que um funtor seja uma equivalência de categorias. Mais precisamente, uma equivalência entre categorias pode ser pensada como um funtor que é fiel, pleno e essencialmente sobrejetor. No entanto, para o caso de grupoides de Lie, apesar da condição não ser suficiente, define-se uma noção de equivalência pedindo que o morfismo seja fiel, pleno e essencialmente sobrejetor. Na verdade, geralmente essa equivalência é induzida por morfismos de Morita.

Definição 1.2.1. Um morfismo de grupoides de Lie $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ é um **morfismo de Morita**, se satisfaz as seguintes condições:

1. O mapa $\mathcal{H}_{1s} \times_{\phi_0} \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$, dado por $(g, x) \mapsto t(g)$ é uma submersão sobrejetora.
2. O seguinte diagrama é um pullback de variedades diferenciáveis:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\phi_1} & \mathcal{H}_1 \\ (t,s) \downarrow & & \downarrow (t,s) \\ \mathcal{G}_0 \times \mathcal{G}_0 & \xrightarrow{(\phi_0 \times \phi_0)} & \mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0 \end{array} \cdot$$

Categoricamente falando, as condições 1 e 2 dizem que ϕ é essencialmente sobrejetor e fiel e pleno, respectivamente.

Estamos interessados em uma classe específica desses morfismos, mais precisamente, morfismos de Morita em que o mapa nos objetos $\phi_0 : \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$ é uma submersão sobrejetora. Esses morfismos recebem uma outra nomenclatura e podem ser caracterizados utilizando o grupoide pullback.

Definição 1.2.2. Sejam \mathcal{H} um grupoide de Lie e $f : M \rightarrow \mathcal{H}_0$ uma submersão sobrejetora. Então, o **grupoide pullback** $f^*\mathcal{H}$ é o grupoide de Lie $f^*\mathcal{H}_1 \rightrightarrows M$, onde:

$$f^*H_1 = \{(y, h, x) \in M \times H_1 \times M \mid t(h) = f(y) \text{ e } s(h) = f(x)\},$$

com mapas estruturais:

- $s(y, h, x) = x;$
- $t(y, h, x) = y;$
- $(z, h, y) \cdot (y, h', x) = (z, hh', x);$
- $1(x) = (x, 1, x);$
- $i(y, h, x) = (x, h^{-1}, y).$

Diversos exemplos de grupoides de Lie podem ser construídos a partir de um pullback.

Exemplo 1.2.1. Nas condições da Definição 1.2.2, se \mathcal{H} é o grupoide unidade $\mathbf{1}_N$ do Exemplo 1.1.2, então o espaço de flechas $f^*N = \{(y, n, x) \in M \times N \times M \mid f(y) = n = f(x)\}$ é difeomorfo à variedade $M_f \times_f M$, isto é, obtém-se o grupoide de submersão $M_f \times_f M \rightrightarrows M$, veja Exemplo 1.1.5. Além disso, se \mathcal{H} é o grupoide de um ponto $\{*\} \rightrightarrows \{*\}$, então o grupoide pullback $f^*\{*\}$ é isomorfo ao grupoide par $M \times M \rightrightarrows M$.

Outro exemplo padrão de um grupoide pullback é o grupoide de Čech.

Exemplo 1.2.2. Considere $\mathcal{G}_1 \rightrightarrows \mathcal{G}_0$ um grupoide de Lie. Sejam $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de \mathcal{G}_0 e $\pi : \coprod_i U_i \rightarrow \mathcal{G}_0$ a projeção. Então, o grupoide de submersão de \mathcal{G} com respeito à cobertura \mathcal{U} é o grupoide pullback $\pi^*\mathcal{G}$ e é denotado por $\check{\mathcal{G}}(\mathcal{U})$. Explicitamente:

$$\check{\mathcal{G}}(\mathcal{U}) = \pi^*\mathcal{G}_1 \rightrightarrows \coprod_{i \in I} U_i,$$

onde os objetos denotados por x_i com $i \in I$ e $x \in U_i$, e flechas por g_{ij} com $i, j \in I$, cujos mapas fonte e alvo são tais que $s(g_{ij}) = x_j \in U_j$ e $t(g_{ij}) = x_i \in U_i$. Para o caso particular do grupoide unidade $\mathbf{1}_M$, obtemos o **grupoide de Čech**:

$$\coprod_{ij \in I} U_{ij} \rightrightarrows \coprod_{i \in I} U_i,$$

onde $U_{ij} = U_i \cap U_j$, as flechas são pontos $x_{ij} \in U_{ij}$ e os mapas fonte e alvo são as projeções $s(x_{ij}) = x_j$ e $t(x_{ij}) = x_i$. Note que há um único morfismo de x_j para x_i quando $x \in U_{ij}$.

Agora, estamos prontos para definir a noção de fibração de Morita [15].

Definição 1.2.3. Um morfismo de grupoides de Lie $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ é uma **fibração de Morita** se, $\phi_0 : \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$ é uma submersão sobrejetora e o grupoide \mathcal{G} é isomorfo ao grupoide pullback $\phi_0^*\mathcal{H}$.

Diz-se que dois grupoides de Lie \mathcal{G} e \mathcal{H} são **Morita equivalentes**, se existem: um terceiro grupoide de Lie \mathcal{K} e morfismos de Morita $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{G}$ e $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$. Note no entanto que não há diferença ao considerar fibrações de Morita ao invés de simplesmente morfismos de Morita. Isso ocorre pelo fato que, se dois grupoides de Lie são Morita

equivalentes $\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$, então sempre pode-se escolher, um outro grupoide de Lie \mathcal{K}' , tal que $\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{H}$ é uma equivalência de Morita com os mapas nos objetos sendo submersões sobrejetoras, veja [13], Proposição 4.4.4, para detalhes. Portanto, pode-se definir a equivalência de Morita em termos de fibrações de Morita como segue.

Definição 1.2.4. Dois grupoides de Lie \mathcal{G} e \mathcal{H} são **Morita equivalentes** se existem, um terceiro grupoide de Lie \mathcal{K} e fibrações de Morita $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{G}$ e $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$.

Observação 1.2.1. Em alguns trabalhos, morfismos de Morita são definidos como o que chamamos de fibrações de Morita, veja por exemplo [19].

Exemplo 1.2.3. Dois grupos de Lie $G \rightrightarrows \{*\}$ e $H \rightrightarrows \{*\}$ são Morita equivalentes se, e somente se, G e H são isomorfos como grupos de Lie.

Exemplo 1.2.4. O grupoide par $M \times M \rightrightarrows M$ é Morita equivalente ao grupoide de um ponto $\{*\} \rightrightarrows \{*\}$. Para ver isso, note que para um mapa $p : M \rightarrow \{*\}$ o grupoide pullback $p^*\{*\}$ é isomorfo ao grupoide par, explicitamente, para uma flecha $(y, *, x) \in p^*\{*\}$ associa-se o par $(y, x) \in M \times M$ e vice-versa.

Exemplo 1.2.5. Seja $p : M \rightarrow N$ uma submersão sobrejetora. Então, obtém-se uma fibração de Morita do grupoide de submersão para o grupoide unidade $\bar{p} : \mathbf{M}_p \times_p \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{1}_N$, com:

$$\begin{array}{ccc} M_p \times_p M & \xrightarrow{p} & N \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ M & \xrightarrow{p} & N \end{array} .$$

Mais ainda, um grupoide de Lie $\mathcal{G}_1 \rightrightarrows \mathcal{G}_0$ é Morita equivalente a um grupoide unidade $N \rightrightarrows N$ se, e somente se, \mathcal{G} é isomorfo a um grupoide de submersão com quociente $\mathcal{G}_0/\mathcal{G}_1 \cong N$.

Exemplo 1.2.6. Geralmente, dado um grupoide de Lie \mathcal{H} e $f : M \rightarrow \mathcal{H}_0$ uma submersão sobrejetora então o grupoide pullback $f^*\mathcal{H}$ é Morita equivalente ao grupoide \mathcal{H} , cuja fibração de Morita é dada por:

$$\begin{array}{ccc} f^*\mathcal{H}_1 & \xrightarrow{\text{pr}_2} & \mathcal{H}_1 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & \mathcal{H}_0 \end{array} ,$$

onde $\text{pr}_2 : f^*\mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ é a segunda projeção.

1.2.2 Morfismos generalizados de grupoides de Lie

Fibrações de Morita em geral não são invertíveis, o que pode ser visto no seguinte exemplo:

Exemplo 1.2.7. Dados uma submersão sobrejetora $p : M \rightarrow N$ e o grupoide de submersões associado $M_p \times_p M \rightrightarrows M$. Pelo Exemplo 1.2.5 tem-se a fibração de Morita canônica $\bar{p} : \mathbf{M}_p \times_p \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{1}_N$. Suponha que exista um morfismo inverso de \bar{p} :

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{g_1} & M_p \times_p M \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ N & \xrightarrow{g_0} & M \end{array}$$

isto é, $\bar{p} \circ g = \text{id}_{\mathbf{1}_N}$ e $g \circ \bar{p} = \text{id}_{\mathbf{M}_p \times_p \mathbf{M}}$. Então, como $\mathbf{1}_N$ é o grupoide unidade, obtém-se que $\bar{p} \circ g = \text{id}_{\mathbf{1}_N}$, portanto $g_0 : N \rightarrow M$ é uma seção de p , mas p nem sempre admite uma seção, particularmente, caso $N = \coprod_i U_i$ é claro que tal seção não existe em geral.

No entanto, fibrações de Morita podem ser invertidas formalmente, isso será feito durante esta subseção. Grosso modo, um morfismo generalizado de um grupoide de Lie \mathcal{G} para um grupoide de Lie \mathcal{H} pode ser pensado como uma sequência de dois passos: (i) substitui-se o grupoide \mathcal{G} por um grupoide Morita equivalente \mathcal{G}' ; (ii) mapeia-se \mathcal{G}' em \mathcal{H} por um morfismo de grupoides de Lie. Concretamente, obtemos a seguinte definição.

Definição 1.2.5. Dados \mathcal{G} e \mathcal{H} grupoide de Lie, um **morfismo generalizado** $\psi/\phi : \mathcal{G} \rightsquigarrow \mathcal{H}$ é um par de morfismos de grupoides de Lie:

$$\mathcal{G} \xleftarrow[\sim]{\phi} \mathcal{G}' \xrightarrow{\psi} \mathcal{H},$$

onde $\phi : \mathcal{G}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$ é uma fibração de Morita.

Exemplo 1.2.8. Qualquer morfismo de grupoides de Lie $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ pode ser visto como um morfismo generalizado $\phi/\text{id}_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \rightsquigarrow \mathcal{H}$.

Acontece que dois pares $\psi/\phi, \psi'/\phi' : \mathcal{G} \rightsquigarrow \mathcal{H}$ podem definir o "mesmo" morfismo generalizado. Nesse sentido, faz-se necessário introduzir a definição de equivalência entre morfismos de grupoides.

Definição 1.2.6. Dados $\phi, \psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ dois morfismos de grupoides de Lie, uma **transformação natural** $\tau : \phi \Rightarrow \psi$ é um mapa suave $\tau : \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{H}_1$ de modo que, para todo $g \in \mathcal{G}_1$:

$$\psi(g) \cdot \tau(x) = \tau(y) \cdot \phi(g),$$

isto é, para todo $x \in \mathcal{G}_0$, $\tau(x) \in \mathcal{H}_1$ é uma flecha da forma:

$$\psi(x) \xleftarrow{\tau(x)} \phi(x).$$

Particularmente, diz-se que dois morfismos de grupoides de Lie $\phi, \psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ são **equivalentes** se existe uma transformação natural $\phi \Rightarrow \psi$.

Definição 1.2.7. Dois morfismos generalizados de grupoides de Lie $\psi/\phi, \psi'/\phi' : \mathcal{G} \rightsquigarrow \mathcal{H}$ são ditos **equivalentes** se existem, um terceiro grupoide de Lie \mathcal{K} , um par de morfismos de grupoides de Lie $\varepsilon : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{G}'$ e $\varepsilon' : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{G}''$, e um par de transformações naturais $\tau : \phi \circ \varepsilon \Rightarrow \phi' \circ \varepsilon'$ e $\gamma : \psi \circ \varepsilon \Rightarrow \psi' \circ \varepsilon'$:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{G}' & & \\
 & \phi & \nearrow & \psi & \\
 \mathcal{G} & & \mathcal{K} & & \mathcal{H}, \\
 & \phi' & \searrow & \psi' & \\
 & & \mathcal{G}'' & &
 \end{array}$$

$\begin{array}{c} \uparrow \varepsilon \\ \downarrow \varepsilon' \end{array}$
 $\begin{array}{c} \leftarrow \tau \\ \rightarrow \gamma \end{array}$

de modo que $\xi := \phi \circ \varepsilon = \phi' \circ \varepsilon'$ e $\chi := \psi \circ \varepsilon = \psi' \circ \varepsilon'$, se tornam um morfismo generalizado $\chi/\xi : \mathcal{G} \rightsquigarrow \mathcal{H}$, como no diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{G}' & & \\
 & \phi & \nearrow & \psi & \\
 \mathcal{G} & \xrightarrow{\xi} & \mathcal{K} & \xrightarrow{\chi} & \mathcal{H}. \\
 & \phi' & \searrow & \psi' & \\
 & & \mathcal{G}'' & &
 \end{array}$$

$\begin{array}{c} \uparrow \varepsilon \\ \downarrow \varepsilon' \end{array}$

Essa noção define uma relação de equivalência nos pares (ϕ, ψ) , vide [13]. Particularmente, daqui em diante, um morfismo generalizado ψ/ϕ representará a classe de equivalência associada ao par ψ/ϕ .

Exemplo 1.2.9. Dadas M e N variedades diferenciáveis, considere $\psi/\phi : \mathbf{1}_M \rightsquigarrow \mathbf{1}_N$ um morfismo generalizado entre os grupoides unidades correspondentes. Então, do Exemplo 1.2.5 obtemos um diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{G} & & \\
 & \phi & \nearrow & \psi & \\
 \mathbf{1}_M & \xrightarrow{\bar{p}} & \mathbf{M}_{\mathbf{p}} \times_{\mathbf{p}} \mathbf{M} & \xrightarrow{\psi \circ \mu^{-1}} & \mathbf{1}_N, \\
 & \text{id} & \searrow & f & \\
 & & \mathbf{1}_M & &
 \end{array}$$

$\begin{array}{c} \parallel \mu \\ \downarrow \bar{p} \end{array}$

onde $\mu : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{M}_{\mathbf{p}} \times_{\mathbf{p}} \mathbf{M}$ é um difeomorfismo e $f : M \rightarrow N$ é tal que $f \circ \bar{p} = \psi \circ \mu^{-1}$. Portanto, um morfismo generalizado entre variedades diferenciáveis $M \rightsquigarrow N$ (vistas como grupoides) é o mesmo que um mapa suave $M \rightarrow N$.

Exemplo 1.2.10. Sejam $\mathcal{G}_1 \rightrightarrows \mathcal{G}_0$ e $\mathcal{H}_1 \rightrightarrows \mathcal{H}_0$ grupoides de Lie. Fixe \mathcal{U} uma cobertura aberta de \mathcal{G}_0 e considere $\check{\mathcal{G}}(\mathcal{U})$ o grupoide de submersão de \mathcal{G} com respeito a \mathcal{U} , veja Exemplo 1.2.2. Então, é claro que o mapa óbvio $\iota : \check{\mathcal{G}}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{G}$ é uma fibração de

Morita, vide Exemplo 1.2.6. Na verdade, qualquer morfismo generalizado $\mathcal{G} \rightsquigarrow \mathcal{H}$ pode ser representado por uma certa cobertura aberta \mathcal{U} de \mathcal{G}_0 , um mapa $\iota : \check{\mathcal{G}}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{G}$ associado e algum morfismo de grupoides de Lie $\xi : \check{\mathcal{G}}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{H}$, como no diagrama:

$$\mathcal{G} \xleftarrow[\sim]{\iota} \check{\mathcal{G}}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\xi} \mathcal{H}.$$

De fato, considere um morfismo generalizado $\psi/\phi : \mathcal{G} \rightsquigarrow \mathcal{H}$, representado pelo diagrama:

$$\mathcal{G} \xleftarrow[\sim]{\phi} \mathcal{G}' \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}.$$

Então, desde que $\phi : \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$ é uma fibração de Morita o mapa $\phi_0 : \mathcal{G}'_0 \rightarrow \mathcal{G}_0$ é uma submersão sobrejetora, logo admite seções locais $\sigma_i : U_i \rightarrow \mathcal{G}'_0$ sobre alguma cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de \mathcal{G}_0 . Mais ainda, denote por $\Gamma : \mathcal{G}'_1 \rightarrow \phi_0^* \mathcal{G}_1$ o difeomorfismo induzido pela fibração de Morita ϕ . Agora, defina o mapa

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 : \check{\mathcal{G}}(\mathcal{U}) &\longrightarrow \mathcal{G}'_1 \\ g_{ij} &\longmapsto \Gamma^{-1}(\sigma_i(t(g_{ij})), g, \sigma_j(s(g_{ij}))), \end{aligned}$$

então, o seguinte diagrama é um morfismo de grupoides de Lie:

$$\begin{array}{ccc} \check{\mathcal{G}}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\varepsilon_1} & \mathcal{G}'_1 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \coprod_i U_i & \xrightarrow{\sigma_i} & \mathcal{G}'_0 \end{array} .$$

Assim sendo, obtemos uma fatoração $\phi \circ \varepsilon = \iota$, e por conseguinte, um diagrama que comuta:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{G}' & \\ \phi \swarrow & \uparrow \varepsilon & \searrow \psi \\ \mathcal{G} & & \mathcal{H} \\ \iota \swarrow & \uparrow & \searrow \xi \\ & \check{\mathcal{G}}(\mathcal{U}) & \end{array}$$

onde $\xi = \psi \circ \varepsilon$.

Mais ainda, observe que um outro par $\iota' : \check{\mathcal{G}}(\mathcal{U}') \rightarrow \mathcal{G}$ e $\xi' : \check{\mathcal{G}}(\mathcal{U}') \rightarrow \mathcal{H}$ representa o mesmo morfismo generalizado se, e somente se, em um refinamento comum de \mathcal{U} e \mathcal{U}' , as restrições de ξ e ξ' são relacionadas por uma transformação natural:

$$\begin{array}{ccccc}
& & \check{\mathcal{G}}(\mathcal{U}) & & \\
& \swarrow \iota & \uparrow i & \searrow \xi & \\
\mathcal{G} & \xleftarrow{\iota''} & \check{\mathcal{G}}(\mathcal{U}'') & & \mathcal{H} \\
& \swarrow \iota' & \downarrow i & \searrow \xi' & \\
& & \check{\mathcal{G}}(\mathcal{U}') & &
\end{array}$$

para ver isso compare com a Definição 1.2.7.

É possível formalizar a noção de morfismo generalizado via cálculo de frações. Dada a categoria \mathbf{Gpd} , considere \mathbf{Gpd}_0 a categoria quociente obtida identificando dois morfismos de grupoides equivalentes. Seja MF a classe de flechas em \mathbf{Gpd}_0 que são representadas por fibrações de Morita em \mathbf{Gpd} . Então MF é um sistema multiplicativo em \mathbf{Gpd}_0 , isto é:

- MF contém todas as identidades e é fechado sobre a composição.
- Dada uma flecha $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ em MF e qualquer flecha $\psi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$, existe uma flecha $\phi' : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{K}$ em MF e uma flecha ψ' em \mathbf{Gpd} tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{L} & \xrightarrow{\psi'} & \mathcal{G} \\
\downarrow \phi' & & \downarrow \phi \\
\mathcal{K} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{H}
\end{array}$$

- Dados uma flecha $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ em MF e um par de morfismos $\psi, \psi' : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{G}$ tais que $\phi \circ \psi = \phi \circ \psi'$, existe uma flecha $\phi' : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{K}$ em MF tal que $\psi \circ \phi' = \psi' \circ \phi'$:

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\phi'} \mathcal{K} \begin{array}{c} \xrightarrow{\psi} \\ \xrightarrow{\psi'} \end{array} \mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H}.$$

Agora, considere $\mathbf{Gpd}_0[MF^{-1}]$ a categoria de frações, obtida de \mathbf{Gpd}_0 invertendo todas as fibrações de Morita. Portanto, uma flecha $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ em $\mathbf{Gpd}_0[MF^{-1}]$ é uma classe de equivalência de pares de morfismos de grupoides de Lie:

$$\mathcal{G} \xleftarrow[\sim]{\phi} \mathcal{G}' \xrightarrow{\psi} \mathcal{H},$$

onde ϕ é uma fibração de Morita, isto é, um morfismo generalizado pode ser visto (a menos de equivalências) como uma flecha em $\mathbf{Gpd}_0[MF^{-1}]$.

1.3 G -fibrados principais

Nesta seção é introduzida a noção de G -fibrado principal de duas maneiras: primeiramente é introduzido o conceito de maneira clássica, seguindo a mesma linha que [25]; posteriormente é dada uma caracterização de maneira global remetendo à ideia de morfismos generalizados de grupoides [11]. Para tanto, é realizada uma discussão acerca da caracterização de G -fibrados principais em termos de funções de transição, satisfazendo a condição de cociclo [18], [9].

Definição 1.3.1. Sejam G um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável. Um **G -fibrado principal** sobre M é uma tripla (P, π, μ) onde P é uma variedade diferenciável, $\pi : P \rightarrow M$ é uma submersão sobrejetora e $\mu : P \times G \rightarrow P$ é uma ação à direita nas fibras de π , isto é, $\pi \circ \mu = \pi \circ \text{pr}_1$, para o qual o mapa $(\mu, \text{pr}_1) : P \times G \rightarrow P \times_M P$ é um difeomorfismo.

Os espaços P e M são chamados respectivamente de **espaço total** e **base** de (P, π, μ) , π é chamada de **projeção** de (P, π, μ) , G é chamado de o **grupo de estrutura** de (P, π, μ) e μ é frequentemente denotada por $(p, g) \mapsto pg$.

O seguinte critério nos dá a possibilidade de definir um G -fibrado principal sobre M de forma alternativa.

Proposição 1.3.1 (Critério de Godement). *Se uma relação de equivalência $R \subset M \times M$ é uma subvariedade mergulhada fechada e $\pi_1|_R, \pi_2|_R : R \rightarrow M$ são submersões, então M/R herda uma única estrutura de variedade que torna a projeção $M \rightarrow M/R$ uma submersão.*

De fato, para que (P, π, μ) defina um G -fibrado principal é necessário e suficiente que:

- A G -ação μ seja livre e transitiva ao longo das fibras de π , isto é, $M \simeq P/G$;
- (P, π, μ) seja localmente trivial, isto é, para todo $x \in M$, existe uma vizinhança U de x , e um difeomorfismo G -equivariante $\Psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ chamado **trivialização** associada a U .

Exemplo 1.3.1. O mais simples exemplo de um G -fibrado principal é o **G -fibrado trivial** sobre M . Nesse caso, a projeção do fibrado é a projeção do primeiro fator $\text{pr}_1 : M \times G \rightarrow M$, e a ação é dada por $(x, g)g' = (x, gg')$.

Definição 1.3.2. Um **morfismo** entre dois G -fibrados principais sobre M , (P, π, μ) e (P', π', μ') , é um mapa suave $F : P \rightarrow P'$ que é G -equivariante, isto é, para todos $p \in P$, $g \in G$:

$$F(pg) = F(p)g.$$

Além disso, (P, π, μ) e (P', π', μ') são ditos **isomorfos** se existe um morfismo $F : P \rightarrow P'$ cobrindo a identidade Id_M , isto é:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{F} & P' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{\text{Id}_M} & M \end{array}$$

Dado (P, π, μ) um G -fibrado principal sobre M , considere $\{(U_i, \Psi_i)\}_{i \in I}$ uma cobertura trivializante, onde escrevemos cada $\Psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G$ como sendo:

$$\Psi_i(p) = (\pi(p), \psi_i(p)),$$

com $\psi_i : U_i \rightarrow G$. Observe que a cada trivialização $\Psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G$ pode-se associar uma seção $\sigma_i : U_i \rightarrow P$, definida por:

$$\sigma_i(x_i) = \Psi_i^{-1}(x_i, e).$$

Em particular, para todo $x \in U_i$ e $p \in \pi^{-1}(x)$, tem-se:

$$\Psi_i(\sigma_i(x)\psi_i(p)) = (x, \psi_i(\sigma_i(x)\psi_i(p))) = (x, \psi_i(p)) = \Psi_i(p),$$

logo, nesse caso

$$p = \sigma_i(x)\psi_i(p).$$

Suponha agora que $x \in U_{ij}$, então todo $p \in \pi^{-1}(x)$ pode ser escrito de duas maneiras utilizando as seções σ_i e σ_j , isto é:

$$\sigma_j(x)\psi_j(p) = p = \sigma_i(x)\psi_i(p),$$

portanto, é possível relacionar ambas as seções da seguinte forma:

$$\sigma_j(x) = \sigma_i(x)\psi_i(p)\psi_j^{-1}(p).$$

Particularmente, o produto $\psi_i(p)\psi_j^{-1}(p)$ é o que chamamos de **função de transição**:

$$\begin{aligned} g_{ij} : U_{ij} &\rightarrow G \\ x &\mapsto \psi_i(p)\psi_j^{-1}(p), \end{aligned}$$

e a família das funções de transição associada à cobertura $\{U_i\}_{i \in I}$ é denotada por $\{g_{ij}\}_{i,j \in I}$.

Acontece que essas funções de transição desempenham um papel fundamental na teoria dos G -fibrados principais. Primeiramente, esses mapas tornam possível estabelecer se dois G -fibrados principais são isomorfos.

Proposição 1.3.2. *Sejam (P, π, μ) e (P', π', μ') dois G -fibrados principais sobre M , com respectivas funções de transição $\{g_{ij}\}_{i,j \in I}$ e $\{g'_{ij}\}_{i,j \in I}$ definidas em relação à mesma cobertura suave $\{U_i\}_{i \in I}$ de M . Então (P, π, μ) e (P', π', μ') são isomorfos se, e somente se, existem funções suaves $\lambda_i : U_i \rightarrow G$ de modo que, para $x \in U_{ij}$, $i, j \in I$:*

$$g'_{ij} = \lambda_i(x)^{-1} g_{ij}(x) \lambda_j(x).$$

Observação 1.3.1. Mesmo que dois G -fibrados principais sobre mesma base possuam funções de transição relativas a coberturas distintas, sempre é possível considerar um refinamento comum e assim compará-las.

Até aqui obtemos que todo G -fibrado principal sobre M leva a uma família de funções transição $\{g_{ij}\}_{i,j \in I}$, associada a uma cobertura $\{U_i\}_{i \in I}$. No entanto, pode-se dizer mais do isso, a saber, a família $\{g_{ij}\}_{i \in I}$ satisfaz a **condição de cociclo**:

$$g_{ij} g_{jk} = g_{ik}.$$

Ora, para todo $x \in U_{ijk}$ e $p \in \pi^{-1}(x)$ tem-se que:

$$g_{ij}(x) g_{jk}(x) = \psi_i(p) \psi_j^{-1}(p) \psi_j(p) \psi_k^{-1}(p) = \psi_i(p) \psi_k^{-1}(p) = g_{ik}(x).$$

Reciprocamente, se são dadas $\{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de M e $\{g_{ij} : U_{ij} \rightarrow G\}$ uma família de funções suaves satisfazendo a condição de cociclo, então é possível construir um G -fibrado principal sobre M de maneira natural como segue:

- Defina:

$$P := \left(\coprod_{i \in I} U_i \times G \times \{i\} \right) / \sim,$$

onde:

$$(x, g, i) \sim (x', g', j) \Leftrightarrow x = x' \text{ e } g' = g_{ji} g.$$

Em particular P é uma variedade diferenciável;

- A projeção $\pi : P \rightarrow M$ é induzida pelas projeções $\text{pr}_1^i : U_i \times G \times \{i\} \rightarrow U_i$, isto é, $\pi([x, g, i]) = x$;
- A ação livre e suave μ é induzida por translações à direita de G no segundo fator de $U_i \times G \times \{i\}$, isto é, $[x, g, i] \cdot h = [x, gh, i]$.

- As trivializações $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G$ são dadas por:

$$\varphi_i([x, g, i]) = (x, g).$$

Logo, por construção, a coleção de funções de transição de P é precisamente $\{g_{ij}\}_{i,j \in I}$.

Portanto, se $\{g_{ij}\}_{i,j \in I}$ é uma família de funções de transição oriundas de algum G -fibrado principal (P, π, μ) , o G -fibrado principal associado a $\{g_{ij}\}_{i,j \in I}$ (dado pela construção acima) é isomorfo a (P, π, μ) , vide Proposição 1.3.2.

Então, G -fibrados principais sobre uma variedade M podem ser definidos, a menos de isomorfismo, por uma coleção de funções de transição $g_{ij} : U_{ij} \rightarrow G$ nas duplas interseções U_{ij} de uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ de M . Mas, note que essas funções de transição constituem um morfismo de grupoides de Lie do grupoide de Čech associado à variedade M para o grupo de Lie G :

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i,j \in I} U_{ij} & \xrightarrow{g_{ij}} & G \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \coprod_{i \in I} U_i & \longrightarrow & \{*\} \end{array} .$$

Assim sendo, o seguinte diagrama define um morfismo generalizado de grupoides:

$$(M \rightrightarrows M) \xleftarrow{\sim} \left(\coprod U_{ij} \rightrightarrows \coprod U_i \right) \xrightarrow{g_{ij}} (G \rightrightarrows *), \quad (1.1)$$

onde a flecha para a esquerda é a fibração de Morita natural do Exemplo 1.2.6.

Além do mais, se $\{g'_{kl}\}_{k,l \in K}$ é uma coleção de funções transição relativas a outra cobertura $\{V_k\}_{k \in K}$ de M , então o morfismo generalizado induzido:

$$(M \rightrightarrows M) \xleftarrow{\sim} \left(\coprod V_{kl} \rightrightarrows \coprod V_k \right) \xrightarrow{g'_{kl}} (G \rightrightarrows *) \quad (1.2)$$

é equivalente ao de (1.1) se, e somente se, em um refinamento comum $\{W_r\}_{r \in R}$ de $\{U_i\}_{i \in I}$ e $\{V_k\}_{k \in K}$, as restrições de g_{ij} e g'_{kl} são relacionadas por uma transformação natural, como no Exemplo 1.2.10:

$$\begin{array}{ccc} & (\coprod U_{ij} \rightrightarrows \coprod U_i) & \\ & \uparrow & \searrow^{g_{ij}} \\ \mathbf{1}_M & \xleftarrow{\sim} (\coprod W_{rs} \rightrightarrows \coprod W_r) & \xrightarrow{\tau} (G \rightrightarrows *) \\ & \downarrow & \swarrow_{g'_{kl}} \\ & (\coprod V_{kl} \rightrightarrows \coprod V_k) & \end{array}$$

No entanto, perceba que nesse caso uma transformação natural $\tau : g_{rs} \rightrightarrows g'_{rs}$ é um mapa

suave $\tau : \coprod_r W_r \rightarrow G$, satisfazendo:

$$g_{rs}(x_{rs})\tau_r(x_r) = \tau_l(x_s)g'_{rs}(x_{rs}),$$

isto é, para $x \in W_{rs}$ temos:

$$g'_{rs}(x) = \tau_l(x)^{-1}g_{rs}(x)\tau_r(x),$$

ou seja, os morfismos generalizados (1.2) e (1.1) são equivalentes se, e somente se, os G -fibrados principais induzidos pelas funções de transição são isomorfos.

Portanto, um G -fibrado principal sobre M (a menos de isomorfismo) pode ser pensado como a classe de um morfismo generalizado da variedade M para o grupo de Lie G , ambos considerados como grupoides de Lie. Assim dizendo, a discussão acima nada mais é do que a afirmação do seguinte do resultado.

Teorema 1.3.1. *Há uma correspondência 1-1 entre classes de isomorfismo de G -fibrados principais sobre M e classes de equivalência de morfismos generalizados de M para G :*

$$\frac{\{G\text{-fibrados principais sobre } M : (P, \pi, \mu)\}}{\text{Isomorfismos}} \stackrel{1-1}{\cong} \frac{\{\text{Morfismos generalizados : } 1_M \rightsquigarrow G\}}{\text{Equivalências}}.$$

Note que facilmente podemos generalizar essa noção para outros contextos, especificamente, essa perspectiva é a base para o estudo de fibrados principais de 2-grupos dada posteriormente no Capítulo 4.

Capítulo 2

2-grupoides de Lie & Módulos cruzados de grupoides de Lie

O conceito de uma 2-categoria sugere a generalização de um grupoide de Lie para a noção de ordem superior, isto é, de um 2-grupoide de Lie. Mais ainda, essa "extensão" induz uma definição de um 2-grupo de Lie, que posteriormente, motiva uma abordagem acerca de fibrados principais no sentido 2-categórico, assim dizendo, fibrados principais de 2-grupos de Lie.

O enfoque deste capítulo está tanto na definição de um 2-grupoide de Lie quanto na caracterização de 2-grupoides via módulos cruzados de grupoides. Mais precisamente, nas Seções 2.1 e 2.2 serão realizados estudos sobre 2-grupoides de Lie e módulos cruzados de grupoides, respectivamente. Logo após, na Seção 2.3 será desenvolvida uma equivalência entre as categorias de ambos os objetos. Finalmente, a Seção 2.4 destina-se a uma noção de 2-equivalências de Morita, estendendo a definição de fibração de Morita para o caso de 2-grupoides de Lie. Para tanto, as principais referências deste capítulo são [11] e [27].

2.1 2-grupoides de Lie

Um **2-grupoide** (estrito) \mathbf{G} é uma 2-categoria pequena em que todos 1-morfismos e 2-morfismos são isomorfismos. Concretamente, um 2-grupoide \mathbf{G} consiste de: um conjunto de objetos G_0 ; um conjunto G_1 de 1-morfismos (ou 1-flechas); e um conjunto G_2 de 2-morfismos (ou 2-flechas), junto com mapas estruturais:

- s_V e s_H , chamados respectivamente mapas **fonte vertical** e **fonte horizontal**; t_V e t_H , denominados respectivamente mapas **alvo vertical** e **alvo horizontal**, onde $s_V, t_V : G_2 \rightarrow G_1$ e $s_H, t_H : G_1 \rightarrow G_0$ e são tais que

$$s_H \circ t_V = s_H \circ s_V \quad \text{e} \quad t_H \circ t_V = t_H \circ s_V; \quad (2.1)$$

- uma multiplicação parcial $\cdot : G_{1s_H} \times_{t_H} G_1 \rightarrow G_1$, $(g, h) \mapsto g \cdot h$, para a qual

$$G_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s_H} \\ \xrightarrow{t_H} \end{array} G_0$$

é um grupoide, com mapa unidade $1 : G_0 \rightarrow G_1$, $x \mapsto 1_x$;

- uma multiplicação parcial $\circ_V : G_{2s_V} \times_{t_V} G_2 \rightarrow G_2$, $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \circ_V \beta$, chamada **multiplicação vertical**, com respeito à qual:

$$G_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{s_V} \\ \xrightarrow{t_V} \end{array} G_1$$

é um grupoide, com mapa unidade $1 : G_1 \rightarrow G_2$, $g \mapsto 1_g$;

- uma multiplicação parcial $\circ_H : G_{2s_H} \times_{t_H} G_2 \rightarrow G_2$, $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \circ_H \beta$, chamada **multiplicação horizontal**;

que satisfazem a **lei de intercâmbio**:

$$(\alpha' \circ_H \alpha) \circ_V (\beta' \circ_H \beta) = (\alpha' \circ_V \beta') \circ_H (\alpha \circ_V \beta), \quad (2.2)$$

quando os produtos fazem sentido.

Há uma maneira simples de caracterizar um 2-grupoide, isso é feito usando uma estrutura dupla, a saber um diagrama de estruturas compatíveis:

$$\begin{array}{ccc} G_2 & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_H} \\ \xrightarrow{t_H} \end{array} & G_0 \\ t_V \downarrow \text{id} & \begin{array}{c} \text{id} \downarrow \text{id} \\ \text{id} \downarrow \text{id} \end{array} & \\ G_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_H} \\ \xrightarrow{t_H} \end{array} & G_0 \end{array}$$

onde "compatibilidade" quer dizer que os mapas estruturais horizontais são funtoriais com respeito às estruturas verticais, especificamente essa estrutura recebe o nome de **grupoide duplo**.

Observação 2.1.1. Note que é a caracterização acima que motiva a nomenclatura dos mapas estruturais de um 2-grupoide, ainda, observe que os mapas fonte e alvo do grupoide $G_2 \rightrightarrows G_0$ podem ser denotados por s_H e t_H , devido à condição (2.1).

Ao longo do texto denotamos um 2-grupoide por \mathbf{G} ou $G_2 \rightrightarrows G_1 \rightrightarrows G_0$ deixando implícito seus mapas estruturais. Já em alguns exemplos e definições é conveniente explicitar os mapas fonte e alvo e utilizar a notação reduzida:

$$G_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{s_V} \\ \xrightarrow{t_V} \end{array} G_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s_H} \\ \xrightarrow{t_H} \end{array} G_0.$$

Representamos os objetos do 2-grupoide por letras x, y, z, a, b, c , etc, 1-morfismos por

letras g, h, f , etc, e 2-morfismos por letras gregas α, β, γ , etc. No que diz respeito a diagramas, 1-morfismos e 2-morfismos são expressos da seguinte forma:

$$y \xleftarrow{g} x \qquad y \xleftarrow[\alpha \Downarrow h]{g} x .$$

A multiplicação vertical pode ser vista como a concatenação vertical de 2-morfismos:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} g \\ \leftarrow \beta \Downarrow \\ y \xleftarrow{h} x \\ \leftarrow \alpha \Downarrow \\ f \end{array} & \xrightarrow{\circ_V} & \begin{array}{c} g \\ \leftarrow \alpha \circ_V \beta \Downarrow \\ y \xleftarrow{h} x \\ \leftarrow f \end{array} \end{array}$$

enquanto a multiplicação horizontal, como a concatenação horizontal de 2-morfismos:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} g \\ \leftarrow \alpha \Downarrow \\ z \xleftarrow{h} y \end{array} & \xrightarrow{\circ_H} & \begin{array}{c} gg' \\ \leftarrow \alpha \circ_H \alpha' \Downarrow \\ z \xleftarrow{hh'} x \end{array} \end{array}$$

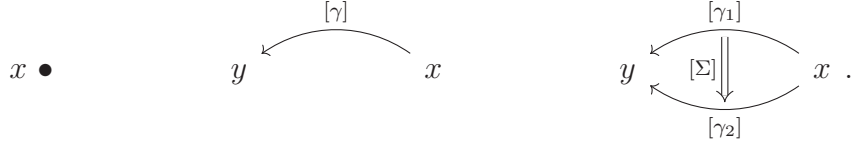
Finalmente, em termos de diagramas a lei de intercâmbio se refere à comutatividade do grande diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} g' \\ \leftarrow \beta' \Downarrow \\ z \xleftarrow{f'} y \end{array} & \xrightarrow{\circ_H} & \begin{array}{c} g'g \\ \leftarrow \beta' \circ_H \beta \Downarrow \\ z \xleftarrow{f'f} x \end{array} \\ \leftarrow \alpha' \Downarrow \\ h' \end{array} & & \begin{array}{c} \leftarrow \alpha \Downarrow \\ h \end{array} \\ \circ_V \downarrow & & \downarrow \circ_V \\ \begin{array}{c} g' \\ \parallel \\ \leftarrow \alpha' \circ_V \beta' \Downarrow \\ z \xleftarrow{h'} y \end{array} & \xrightarrow{\circ_H} & \begin{array}{c} g'g \\ \parallel \\ \leftarrow \alpha \circ_V \beta \Downarrow \\ z \xleftarrow{h'h} x \end{array} \end{array}$$

Exemplo 2.1.1. Dada uma variedade diferenciável M , um **bigon parametrizado** em M é um mapa suave $\Sigma : [0, 1]^2 \rightarrow M$ que é constante próximo de $s = 0, 1$ e independente de t próximo a $t = 0, 1$. Denominam-se $\Sigma(\cdot, 0)$ a fonte de Σ e $\Sigma(\cdot, 1)$ de alvo de Σ . Para dois bigons parametrizados $\Sigma : \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$ e $\Sigma' : \gamma'_1 \rightarrow \gamma'_2$, uma **homotopia fina** entre Σ e Σ' é um mapa suave $H : [0, 1]^3 \rightarrow M$ satisfazendo uma lista de propriedades (veja Exemplo 12, [1]). Um **bigon** é uma classe de homotopia fina $[\Sigma]$ de bigons parametrizados.

O **2-grupoide de caminhos** de uma variedade diferenciável M é o 2-grupoide $\mathbf{P}_2(M)$ em que: os objetos são pontos x em M ; morfismos são classes de homotopia finas

$[\gamma]$ de caminhos em M que são constantes próximos de $s = 0, 1$; e 2-morfismos são bigons:



Com mapas estruturais:

- $s_V([\Sigma]) = [\gamma_1]$ e $t_V([\Sigma]) = [\gamma_2]$;
- $s_H([\gamma]) = x$ e $t_H([\gamma]) = y$;
- $[\gamma_1] \cdot [\gamma_2] = [\gamma_1 \circ \gamma_2]$, onde $(\gamma_1 \circ \gamma_2)(s) = \gamma_1(2s)$ para $0 \leq s \leq 1/2$; e $(\gamma_1 \circ \gamma_2)(s) = \gamma_2(2s - 1)$ para $1/2 \leq s \leq 1$;
- $[\Sigma_1] \circ_V [\Sigma_2] = [\Sigma_1 \Sigma_2]$, onde $(\Sigma_1 \Sigma_2)(s, t) = \Sigma_1(s, 2t)$ para $0 \leq t \leq 1/2$; e $(\Sigma_1 \Sigma_2)(s, t) = \Sigma_2(s, 2t - 1)$ para $1/2 \leq t \leq 1$;
- $[\Sigma_1] \circ_H [\Sigma_2] = [\Sigma_1 \circ \Sigma_2]$, onde $(\Sigma_1 \circ \Sigma_2)(s, t) = \Sigma_1(2s, t)$ para $0 \leq s \leq 1/2$; e $(\Sigma_1 \circ \Sigma_2)(s, t) = \Sigma_2(2s - 1, t)$ para $1/2 \leq s \leq 1$.

Vê-se que os 2-grupoides são generalizações naturais dos grupoides, particularmente, assim como no caso dos grupoides é de interesse o estudo de 2-grupoides com uma "boa" estrutura diferenciável.

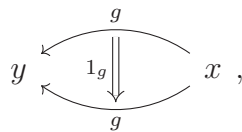
Definição 2.1.1. Um 2-grupoide de Lie \mathcal{G} é um 2-grupoide de modo que: G_0, G_1 e G_2 são variedades diferenciáveis; todos os mapas estruturais são suaves e todos os mapas fonte e alvo são submersões sobrejetoras.

Considerado como um grupoide duplo, um 2-grupoide de Lie é, portanto, um 2-grupoide onde cada um dos grupoides que o formam é um grupoide de Lie. Então, é claro que um grupoide de Lie é um 2-grupoide de Lie.

Exemplo 2.1.2. Um grupoide de Lie $\mathcal{G}_1 \rightrightarrows \mathcal{G}_0$ pode ser visto como um 2-grupoide de Lie:

$$\mathcal{G}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id}} \\ \xleftarrow{\text{id}} \end{array} \mathcal{G}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{t} \end{array} \mathcal{G}_0.$$

Nesse caso, dados $x, y \in \mathcal{G}_0$ e $g : x \rightarrow y$, uma 2-flecha é uma identidade $1_g : g \Rightarrow g$:



denotamos um grupoide de Lie \mathcal{G} visto como um 2-grupoide por \mathcal{G} , também chamamos \mathcal{G} de 2-grupoide induzido pelo grupoide \mathcal{G} .

Com efeito, todos os grupoides de Lie exemplificados na Seção 1.1 podem ser vistos como 2-grupoides, em particular, qualquer variedade diferenciável pode ser vista como um 2-grupoide $M \rightrightarrows M \rightrightarrows M$, com todos os mapas estruturais sendo identidades. Outro exemplo natural de um 2-grupoide de Lie é o seguinte.

Exemplo 2.1.3. Seja $\mathcal{G}_1 \rightrightarrows \mathcal{G}_0$ um grupoide de Lie regular, isto é, todas as órbitas de \mathcal{G} possuem mesma dimensão. Considere a subvariedade de \mathcal{G}_1 que consiste de laços fechados $S_{\mathcal{G}} = \{g \in \mathcal{G}_1 \mid s(g) = t(g)\}$. Então, $S_{\mathcal{G}}$ induz o 2-grupoide de Lie:

$$S_{\mathcal{G}} \times \mathcal{G}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s_V} \\ \xrightarrow{t_V} \end{array} \mathcal{G}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} \mathcal{G}_0.$$

Um 2-morfismo $(g, h) \in S_{\mathcal{G}} \times \mathcal{G}_1$, é representado da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} & h & \\ & \downarrow & \\ y & \xleftarrow{(g,h)} & x \\ & \downarrow & \\ & gh & \end{array} .$$

E os mapas estruturais são tais que:

- $s_V(g, h) = h$;
- $t_V(g, h) = gh$;
- $(g', gh) \circ_V (g, h) = (g'g, h)$;
- $(g', h') \circ_H (g, h) = (g'h'gh'^{-1}, h'h)$.

Seguindo a mesma linha de raciocínio como nos grupoides, pode-se definir um 2-grupo de Lie como sendo um 2-grupoide de Lie com um único objeto.

Definição 2.1.2. Um **2-grupo de Lie** é um 2-grupoide de Lie com um único objeto $G_2 \rightrightarrows G_1 \rightrightarrows \{*\}$.

Observe que um 2-grupo de Lie é um grupoide de Lie $G_2 \rightrightarrows G_1$, de modo que G_2 e G_1 são grupos de Lie e todos os mapas estruturais são morfismos de grupos.

Exemplo 2.1.4. Um grupo de Lie G induz o **2-grupo de Lie de automorfismos**:

$$G \times \text{Aut}(G) \begin{array}{c} \xrightarrow{s_V} \\ \xrightarrow{t_V} \end{array} \text{Aut}(G) \rightrightarrows \{*\}.$$

Em termos de diagramas, 1-morfismos $\phi \in \text{Aut}(G)$ e 2-morfismos $(g, \phi) \in G \times \text{Aut}(G)$ são da forma:

$$\begin{array}{ccc} & \phi & \\ & \downarrow & \\ * & \xleftarrow{\quad} & * \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \phi & \\ & \downarrow & \\ * & \xleftarrow{(g,\phi)} & * \\ & \downarrow & \\ & \text{Ad}_g \circ \phi & \end{array} .$$

E os mapas estruturais são dados por:

- $s_V(g, \phi) = \phi$;
- $t_V(g, \phi) = \text{Ad}_g \circ \phi$;
- $(g', \text{Ad}_g \circ \phi') \circ_V (g, \phi) = (g'g, \phi)$;
- $(g', \phi') \circ_H (g, \phi) = (g'\phi'(g), \phi' \circ \phi)$.

Observação 2.1.2. Geralmente, dado um grupoide de Lie \mathcal{G} podemos formar o grupoide de automorfismos $\text{Aut}(\mathcal{G})$, onde os objetos são automorfismos do grupoide \mathcal{G} e as flechas são transformações naturais, veja [7] para detalhes. Particularmente, obtemos um 2-grupo de maneira natural:

$$\begin{array}{ccc} \text{Aut}(\mathcal{G})_1 & \rightrightarrows & \{*\} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{Aut}(\mathcal{G})_0 & \rightrightarrows & \{*\} \end{array} . \quad (2.3)$$

Observe que caso $\mathcal{G} = G \rightrightarrows \{*\}$ obtemos o 2-grupo (de Lie) de automorfismos do Exemplo 2.1.4. No entanto, nem sempre o 2-grupo (2.3) é de Lie. De fato, considere $\mathcal{G} = \mathbf{1}_M$ o grupoide unidade, então $\text{Aut}(\mathbf{1}_M) = \{\text{Id}_M\} \times \text{Diff}(M) \rightrightarrows \text{Diff}(M)$, isto é, $\text{Aut}(\mathbf{1}_M)$ tem dimensão infinita.

Como 2-grupoides são 2-categorias pequenas, naturalmente, morfismos de 2-grupoides de Lie são 2-funtores diferenciáveis.

Definição 2.1.3. Um **morfismo** de 2-grupoides de Lie $\phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$ consiste de uma tripla de mapas suaves:

$$\begin{array}{ccc} G_2 & \xrightarrow{\phi_2} & H_2 \\ t_V \downarrow s_V & & t_V \downarrow s_V \\ G_1 & \xrightarrow{\phi_1} & H_1 \\ t_H \downarrow s_H & & t_H \downarrow s_H \\ G_0 & \xrightarrow{\phi_0} & H_0 \end{array}$$

que comuta com todos os mapas estruturais de \mathbf{G} e \mathbf{H} . Ainda mais, uma tripla (ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2) é um **isomorfismo** de 2-grupoides de Lie se, para $i = 0, 1, 2$, ϕ_i é um difeomorfismo.

Denotamos a categoria dos 2-grupoides de Lie e seus morfismos por $\mathbf{2Gpd}$ e a subcategoria composta dos 2-grupos de Lie por $\mathbf{2Gp}$.

2.2 Módulos cruzados de grupoides de Lie

Esta seção é destinada ao estudo dos módulos cruzados de grupoides, esses que generalizam a noção de módulos cruzados de grupos introduzida em [35]. Na verdade, a abordagem considerada aqui é dada no contexto suave, isto é, todos os grupos e grupoides são de Lie.

Definição 2.2.1. Um **módulo cruzado** de grupoides de Lie $(\mathcal{G} \xrightarrow{\rho} \mathcal{H})$ é dado por:

- Um morfismo de grupoides de Lie:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{H}_1 \\ p \downarrow \downarrow p & & t \downarrow \downarrow s \\ \mathcal{G}_0 & \xrightarrow{\text{id}} & \mathcal{H}_0 \end{array}$$

de uma família de grupos de Lie $\mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0$ para um grupoide de Lie $\mathcal{H}_1 \rightrightarrows \mathcal{H}_0$, que compartilham o mesmo espaço unidade $\mathcal{G}_0 = \mathcal{H}_0$.

- Uma ação à esquerda por automorfismos de $\mathcal{H}_1 \rightrightarrows \mathcal{H}_0$ em $\mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0$, veja Definição 1.1.4:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 \times_{\mathcal{H}_0} \mathcal{G}_1 &\rightarrow \mathcal{G}_1 \\ (h, g) &\mapsto h \triangleright g. \end{aligned}$$

Sujeitos às seguintes condições:

CM1. ρ preserva a ação, i.e. para todo $(h, g) \in \mathcal{H}_1 \times_{\mathcal{H}_0} \mathcal{G}_1$:

$$\rho(h \triangleright g) = h\rho(g)h^{-1};$$

CM2. $\rho(g')$ age por conjugação, i.e. para todo $(g, g') \in \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{H}_0} \mathcal{G}_1$:

$$\rho(g') \triangleright g = g'gg'^{-1}.$$

Se $\mathcal{G}_0 = \{*\} = \mathcal{H}_0$, isto é, G e H são grupos de Lie, diz-se que $(G \xrightarrow{\rho} H)$ é um módulo cruzado de grupos de Lie.

Observação 2.2.1. A condição CM2 é usualmente chamada de **identidade de Peiffer**.

Exemplo 2.2.1. Para um grupo de Lie G pode-se construir o módulo cruzado $(G \xrightarrow{\text{id}} G)$, cujo morfismo é a identidade $\text{id} : G \rightarrow G$ e a ação é dada por conjugação $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$.

Exemplo 2.2.2. Dado H um subgrupo normal do grupo de Lie G , o **módulo cruzado induzido** $(X \xrightarrow{i} G)$ é o módulo cruzado cujo morfismo é a inclusão $i : H \rightarrow G$ e a ação é dada por conjugação $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$. Em particular, se 1 é o subgrupo trivial de um grupo de Lie G , então $(1 \rightarrow G)$ é um módulo cruzado.

Exemplo 2.2.3. Para um grupoide de Lie $\mathcal{H}_1 \rightrightarrows \mathcal{H}_0$, o mapa de inclusão das identidades $1 : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_1$ define um módulo cruzado $(\mathcal{H}_0 \xrightarrow{1} \mathcal{H}_1)$ com ação dada por conjugação.

Exemplo 2.2.4. Dado um grupo de Lie G , pode-se construir o **módulo cruzado de automorfismos**:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\text{Ad}} & \text{Aut}(G) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \{*\} & \xrightarrow{\text{id}} & \{*\} \end{array} .$$

Com a ação natural de $\text{Aut}(G)$ em G :

$$\begin{aligned} \text{Aut}(G) \times G &\rightarrow G \\ (\phi, g) &\mapsto \phi(g). \end{aligned}$$

Note que $(G \xrightarrow{\text{Ad}} \text{Aut}(G))$ satisfaz trivialmente as condições de módulo cruzado. De fato, a identidade de Peiffer é satisfeita diretamente, uma vez que $\text{Ad}_h(g) = hgh^{-1}$. Além disso, CM1 segue do cálculo simples:

$$\phi \circ \text{Ad}_g \circ \phi^{-1}(h) = \phi(g\phi^{-1}(h)g^{-1}) = \phi(g)h\phi(g^{-1}) = \phi(g)h\phi(g)^{-1} = \text{Ad}_{\phi(g)}(h).$$

Exemplo 2.2.5. Seja $\mathcal{G}_1 \rightrightarrows \mathcal{G}_0$ um grupóide de Lie regular. Considere a subvariedade de \mathcal{G}_1 que consiste de laços fechados:

$$S_{\mathcal{G}} = \{g \in \mathcal{G}_1 \mid s(g) = t(g)\}.$$

Então, $S_{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}_0$ é uma família de grupos de Lie, além do mais \mathcal{G} age por conjugação em $S_{\mathcal{G}}$, isto é, $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$. Portanto, obtém-se um módulo cruzado:

$$\begin{array}{ccc} S_{\mathcal{G}} & \xrightarrow{i} & \mathcal{G}_1 \\ s \downarrow \downarrow s & & t \downarrow \downarrow s \\ \mathcal{G}_0 & \xrightarrow{\text{id}} & \mathcal{G}_0 \end{array} ,$$

denotado por $(S_{\mathcal{G}} \xrightarrow{i} \mathcal{G})$ com i sendo o mapa de inclusão.

A seguir, é definida a noção de morfismo entre módulos cruzados, que nada mais é do que um par de morfismos de grupóides satisfazendo as óbvias condições de compatibilidade, isto é, o par de morfismos é compatível tanto com as ações por automorfismos quanto com os morfismos de grupóides dos módulos cruzados envolvidos.

Definição 2.2.2. Um **morfismo** de módulos cruzados de grupóides de Lie $(f_1, f_2) : (\mathcal{G} \xrightarrow{\rho} \mathcal{H}) \rightarrow (\mathcal{G}' \xrightarrow{\rho'} \mathcal{H}')$ é um par de morfismos de grupóides de Lie $f_1 : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ e $f_2 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ de modo que:

- O seguinte diagrama de grupoides de Lie comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{f_1} & \mathcal{G}' \\ \rho \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{f_2} & \mathcal{H}' \end{array} .$$

- As ações são preservadas, i.e. para todo $(h, g) \in \mathcal{H}_1 \times_{\mathcal{H}_0} \mathcal{G}_1$ temos:

$$f_1(h \triangleright g) = f_2(h) \triangleright f_1(g).$$

A categoria dos módulos cruzados de grupoides de Lie é denotada por **GpdXMod** e a subcategoria dos módulos cruzados de grupos de Lie por **GpXMod**. Ao longo do texto são omitidas as terminologias "de grupoide de Lie" e "de grupo de Lie", isto é, denomina-se somente módulo cruzado.

2.3 Equivalência entre 2Gpd e GpdXMod

Há uma bem conhecida equivalência entre as categorias dos 2-grupos e dos módulos cruzados de grupos, veja por exemplo [30], [28] e [2]. Nesta seção realiza-se a construção superior para o caso de 2-grupoides e módulos cruzados de grupoides. Na verdade, é construída a versão diferenciável desse resultado, isto é, todos os grupoides e 2-grupoides são de Lie. Em resumo, esta seção é dedicada ao seguinte resultado.

Teorema 2.3.1. *Há uma equivalência entre as categorias 2Gpd e GpdXMod.*

Para isso, esta seção organiza-se como segue. Na primeira subseção mostra-se que todo 2-grupoide de Lie induz um módulo cruzado de grupoides de Lie. Na segunda subseção mostra-se o recíproco, isto é, todo módulo cruzado de grupoides de Lie induz um 2-grupoide de Lie. Finalmente, na última subseção estuda-se a correspondência entre os morfismos de ambas as categorias.

2.3.1 2Gpd \rightarrow GpdXMod

Considere $G_2 \rightrightarrows G_1 \rightrightarrows G_0$ um 2-grupoide de Lie e defina a seguinte subvariedade de G_2 :

$$X := \{\alpha \in G_2 \mid s_V(\alpha) = 1_x \text{ para algum } x \in G_0\}.$$

Note que em termos de diagramas, elementos em X são da forma:

$$x \begin{array}{c} \xleftarrow{1_x} \\ \alpha \Downarrow \\ \xrightarrow{g} \end{array} x .$$

Então, $X \xrightarrow{p} G_0$ é uma família de grupos de Lie pela multiplicação horizontal, onde a projeção p é o mapa óbvio:

$$p(\alpha) = t_H(t_V(\alpha)) = s_H(t_V(\alpha)).$$

Mais do que isso, obtém-se um morfismo de grupoides de Lie pondo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{t_V} & G_1 \\ p \Downarrow & & t_H \Downarrow s_H \\ G_0 & \xrightarrow{\text{id}} & G_0 \end{array}$$

onde $t_V : X \rightarrow G_1$ é a restrição do mapa alvo vertical do 2-grupoide \mathbf{G} em X . Esse morfismo torna-se um módulo cruzado junto com a ação à esquerda de $G_1 \rightrightarrows G_0$ em $X \rightarrow G_0$:

$$\begin{aligned} G_1 \times_{G_0} X &\rightarrow X \\ (g, \alpha) &\mapsto 1_g \circ_H \alpha \circ_H 1_{g^{-1}}. \end{aligned}$$

Traduzindo a ação em diagramas para simplificar a verificação dos axiomas:

$$y \xleftarrow{g} x \begin{array}{c} \xleftarrow{1_y} \\ \alpha \Downarrow \\ \xrightarrow{h} \end{array} x \quad \longmapsto \quad y \begin{array}{c} \xleftarrow{1_y} \\ \parallel \\ 1_g \circ_H \alpha \circ_H 1_{g^{-1}} \\ \Downarrow \\ ghg^{-1} \end{array} y .$$

Para CM1, dados $(g, \alpha) \in G_1 \times_{G_0} X$:

$$y \xleftarrow{g} x \begin{array}{c} \xleftarrow{1_x} \\ \alpha \Downarrow \\ \xrightarrow{h} \end{array} x .$$

O mapa alvo vertical t_V da ação $1_g \circ_H \alpha \circ_H 1_{g^{-1}}$, é representado no diagrama

$$y \begin{array}{c} \xleftarrow{1_y} \\ \parallel \\ 1_g \circ_H \alpha \circ_H 1_{g^{-1}} \\ \Downarrow \\ ghg^{-1} \end{array} y$$

pela flecha inferior, que é a mesma que a composição:

$$y \xleftarrow{g} x \xleftarrow{h=t_V(\alpha)} x \xleftarrow{g^{-1}} y,$$

isto é:

$$t_V(1_g \circ_H \alpha \circ_H 1_{g^{-1}}) = gt_V(\alpha)g^{-1}.$$

Já para a identidade de Peiffer CM2, considere $(\alpha, \beta) \in X \times_{G_0} X$:

$$x \begin{array}{c} \xleftarrow{1_x} \\ \alpha \Downarrow \\ \xleftarrow{h} \end{array} x \qquad x \begin{array}{c} \xleftarrow{1_x} \\ \beta \Downarrow \\ \xleftarrow{f} \end{array} x .$$

Note que a ação de $t_V(\beta) = f$ em α é representada pela seguinte composição horizontal:

$$x \begin{array}{c} \xleftarrow{f} \\ \parallel \\ 1_f \\ \Downarrow \\ \xleftarrow{f} \end{array} x \begin{array}{c} \xleftarrow{1_x} \\ \parallel \\ \alpha \\ \Downarrow \\ \xleftarrow{h} \end{array} x \begin{array}{c} \xleftarrow{f^{-1}} \\ \parallel \\ 1_{f^{-1}} \\ \Downarrow \\ \xleftarrow{f^{-1}} \end{array} x \xrightarrow{\circ_H} x \begin{array}{c} \xleftarrow{1_x} \\ \parallel \\ 1_f \circ_H \alpha \circ_H 1_{f^{-1}} \\ \Downarrow \\ \xleftarrow{f h f^{-1}} \end{array} x .$$

Em particular, é possível reescrever o primeiro diagrama como uma composição vertical da seguinte forma:

$$x \begin{array}{c} \xleftarrow{f} \\ \beta^{-1} \Downarrow \\ \xleftarrow{1_x} \\ \beta \Downarrow \\ \xleftarrow{f} \end{array} x \begin{array}{c} \xleftarrow{1_x} \\ \parallel \\ 1 \\ \Downarrow \\ \xleftarrow{h} \end{array} x \begin{array}{c} \xleftarrow{f^{-1}} \\ \beta \Downarrow \\ \xleftarrow{1_x} \\ \beta^{-1} \Downarrow \\ \xleftarrow{f^{-1}} \end{array} x \xrightarrow{\circ_V} x \begin{array}{c} \xleftarrow{f} \\ \parallel \\ 1_f \\ \Downarrow \\ \xleftarrow{f} \end{array} x \begin{array}{c} \xleftarrow{1_x} \\ \parallel \\ \alpha \\ \Downarrow \\ \xleftarrow{h} \end{array} x \begin{array}{c} \xleftarrow{f^{-1}} \\ \parallel \\ 1_{f^{-1}} \\ \Downarrow \\ \xleftarrow{f^{-1}} \end{array} x .$$

Então, a identidade segue do caso particular da lei de intercâmbio:

$$\begin{array}{c} x \begin{array}{c} \xleftarrow{f} \\ \beta^{-1} \Downarrow \\ \xleftarrow{1_x} \\ \beta \Downarrow \\ \xleftarrow{f} \end{array} x \begin{array}{c} \xleftarrow{1_x} \\ \parallel \\ 1 \\ \Downarrow \\ \xleftarrow{h} \end{array} x \begin{array}{c} \xleftarrow{f^{-1}} \\ \beta \Downarrow \\ \xleftarrow{1_x} \\ \beta^{-1} \Downarrow \\ \xleftarrow{f^{-1}} \end{array} x \xrightarrow{\circ_H} x \begin{array}{c} \xleftarrow{1_x} \\ \parallel \\ 1 \\ \Downarrow \\ \beta \circ_H \alpha \circ_H \beta^{-1} \\ \Downarrow \\ \xleftarrow{f h f^{-1}} \end{array} x \\ \circ_V \downarrow \qquad \qquad \qquad \circ_V \downarrow \\ x \begin{array}{c} \xleftarrow{f} \\ \parallel \\ 1_f \\ \Downarrow \\ \xleftarrow{f} \end{array} x \begin{array}{c} \xleftarrow{1_x} \\ \parallel \\ \alpha \\ \Downarrow \\ \xleftarrow{h} \end{array} x \begin{array}{c} \xleftarrow{f^{-1}} \\ \parallel \\ 1_{f^{-1}} \\ \Downarrow \\ \xleftarrow{f^{-1}} \end{array} x \xrightarrow{\circ_H} x \begin{array}{c} \xleftarrow{1_x} \\ \parallel \\ \gamma \\ \Downarrow \\ \xleftarrow{f h f^{-1}} \end{array} x \end{array} .$$

Ora, comparando os diagramas conclui-se que:

$$1_{t_V(\beta)} \circ_H \alpha \circ_H 1_{t_V(\beta)^{-1}} = \beta \circ_H \alpha \circ_H \beta^{-1}.$$

Portanto, para cada 2-grupoide de Lie \mathbf{G} associa-se um módulo cruzado como da forma acima, cuja notação é dada simplesmente por $(X \xrightarrow{t_V} G)$.

Observação 2.3.1. Note que a validade da identidade de Peiffer está estritamente condicionada à lei de intercâmbio ser satisfeita.

2.3.2 $2\mathbf{Gpd} \leftarrow \mathbf{GpdXMod}$

Reciprocamente, considere um módulo cruzado $(\mathcal{G} \xrightarrow{\rho} \mathcal{H})$, então:

- Segue da definição que $\mathcal{H}_1 \rightrightarrows \mathcal{H}_0$ é um grupoide de Lie com mapa fonte s e mapa alvo t ;
- Pode-se formar um grupoide de Lie de transformação associado à ação de \mathcal{G} em \mathcal{H}_1 , dada por $(h, g) \mapsto \rho(g)h$:

$$\mathcal{G}_1 \times \mathcal{H}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s_V} \\ \xrightarrow{t_V} \end{array} \mathcal{H}_1,$$

cujos mapas estruturais são definidos como segue:

- $s_V(g, h) = h$;
- $t_V(g, h) = \rho(g)h$;
- $(g', \rho(g)h) \circ_V (g, h) = (g'g, h)$.

Note que elementos $(g, h) \in \mathcal{G}_1 \times \mathcal{H}_1$ são multiplicações horizontais como no diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & \overset{1_b}{\curvearrowright} & & \overset{h}{\curvearrowright} & \\ & \parallel & & \parallel & \\ b & & b & & a \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ & \rho(g) & & h & \end{array} \\ \xrightarrow{H} \\ \begin{array}{ccc} & \overset{h}{\curvearrowright} & \\ & \parallel & \\ b & & a \\ & \downarrow & \\ & \rho(g)h & \end{array} \end{array} \quad (2.4)$$

- Pode-se construir um grupoide produto semidireto do grupoide $\mathcal{H}_1 \rightrightarrows \mathcal{H}_0$ por $\mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0$. Note em particular que o espaço de flechas $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{H}_1$ é o mesmo que o espaço de flechas do grupoide de ação $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{H}_1$, então o grupoide produto semidireto é dado por:

$$\mathcal{G}_1 \times \mathcal{H}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s_H} \\ \xrightarrow{t_H} \end{array} \mathcal{H}_0,$$

cuja multiplicação é:

$$(g', h') \circ_H (g, h) = (g'(h' \triangleright g), h'h).$$

Facilmente verifica-se usando o diagrama (2.4) que os mapas fonte (s e s_V) e os mapas alvo (t e t_V) comutam no sentido de (2.1). De fato, para $(g, h) \in \mathcal{G}_1 \times \mathcal{H}_1$:

$$\begin{aligned} s \circ t_V(g, h) &= s(\rho(g)h) = s(h) = s \circ s_V(g, h) \\ t \circ t_V(g, h) &= t(\rho(g)h) = t(h) = t \circ s_V(g, h). \end{aligned}$$

Além disso, a lei de intercâmbio (2.2) é satisfeita quando os produtos fazem sentido:

$$\begin{aligned} ((g', \rho(g)h) \underset{H}{\circ} (k', \rho(k)l)) \underset{V}{\circ} ((g, h) \underset{H}{\circ} (k, l)) &= (g'(\rho(g)h \triangleright k'), \rho(g)h\rho(k)l) \underset{V}{\circ} (g(h \triangleright k), hl) \\ &= (g'(\rho(g)h \triangleright k')g(h \triangleright k), hl) \\ &= (g'(h \triangleright k')g^{-1}g(h \triangleright k), hl) \\ &= (g'g(h \triangleright k')(h \triangleright k), hl), \end{aligned}$$

e por outro lado:

$$\begin{aligned} ((g', \rho(g)h) \underset{V}{\circ} (g, h)) \underset{H}{\circ} ((k', \rho(k)l) \underset{V}{\circ} (k, l)) &= (g'g, h) \underset{H}{\circ} (k'k, l) \\ &= (g'g(h \triangleright (k'k)), hl) \\ &= (g'g(h \triangleright k')(h \triangleright k), hl). \end{aligned}$$

Portanto, $(\mathcal{G} \xrightarrow{\rho} \mathcal{H})$ induz o 2-grupoide de Lie:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1 \times \mathcal{H}_1 & \xrightarrow{s_H} & \mathcal{H}_0 \\ & \searrow t_H & \downarrow \text{id} \\ t_V \downarrow s_V & & \downarrow \text{id} \\ \mathcal{H}_1 & \xrightarrow{s} & \mathcal{H}_0 \\ & \searrow t & \end{array}$$

que é chamado de 2-grupoide associado ao módulo cruzado $(\mathcal{G} \xrightarrow{\rho} \mathcal{H})$ e denotado simplesmente por $[\mathcal{G} \xrightarrow{\rho} \mathcal{H}]$.

Observação 2.3.2. Note que a lei de intercâmbio é satisfeita se, e somente se, a identidade de Peiffer o é:

$$\begin{aligned} g'(\rho(g)h \triangleright k')g(h \triangleright k) &= g'g(g \triangleright (k'k)) \Leftrightarrow (\rho(g)h \triangleright k')g(h \triangleright k) = g(h \triangleright k')(h \triangleright k) \\ &\Leftrightarrow (\rho(g)h \triangleright k')g = g(h \triangleright k') \\ &\Leftrightarrow (\rho(g)h \triangleright k') = g(h \triangleright k')g^{-1} \\ &\Leftrightarrow (\rho(g) \triangleright (h \triangleright k')) = g(h \triangleright k')g^{-1}. \end{aligned}$$

Então, dada a Observação 2.3.1, pode-se dizer que a lei de intercâmbio é equivalente à identidade de Peiffer.

Observação 2.3.3. Dado um 2-grupoide de Lie \mathbf{G} considere o módulo cruzado associado $(X \xrightarrow{t_V} G)$. Então, o 2-grupoide $[X \xrightarrow{t_V} G]$ é isomorfo ao 2-grupoide de Lie \mathbf{G} . Explícitamente, tal isomorfismo associa:

- para um 2-morfismo $\alpha \in G_2$, o 2-morfismo $(\alpha \circ_H 1_{g^{-1}}, g) \in X \times G_1$:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc} & g & \\ \curvearrowleft & \parallel & \curvearrowright \\ y & \alpha & x \\ \curvearrowright & \downarrow & \curvearrowleft \\ & h & \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{ccc} & g & \\ \curvearrowleft & \parallel & \curvearrowright \\ y & (\alpha \circ_H 1_{g^{-1}}, g) & x \\ \curvearrowright & \downarrow & \curvearrowleft \\ & h & \end{array} ;
 \end{array}$$

- e para $(\beta, g) \in X \times G_1$, o 2-morfismo $\beta \circ_H 1_g \in G_2$:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc} & g & \\ \curvearrowleft & \parallel & \curvearrowright \\ y & (\beta, g) & x \\ \curvearrowright & \downarrow & \curvearrowleft \\ & t_V(\beta)g & \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{ccc} & g & \\ \curvearrowleft & \parallel & \curvearrowright \\ y & \beta \circ_H 1_g & x \\ \curvearrowright & \downarrow & \curvearrowleft \\ & t_V(\beta)g & \end{array} .
 \end{array}$$

Essa correspondência torna possível a construção de uma grande gama de exemplos de 2-grupoide de Lie, bastando tomar o 2-grupoide associado a um módulo cruzado.

Exemplo 2.3.1. Dado um grupoide de Lie $\mathcal{H}_1 \rightrightarrows \mathcal{H}_0$, o módulo cruzado $(\mathcal{H}_0 \xrightarrow{1} \mathcal{H}_1)$ induz o 2-grupoide Lie $\mathcal{H}_1 \rightrightarrows \mathcal{H}_1 \rightrightarrows \mathcal{H}_0$.

Exemplo 2.3.2. O módulo cruzado $(S_{\mathcal{G}} \xrightarrow{i} \mathcal{G})$ do Exemplo 2.2.5, induz o 2-grupoide de Lie $[S_{\mathcal{G}} \xrightarrow{i} \mathcal{G}]$, vide Exemplo 2.1.3:

$$S_{\mathcal{G}} \times \mathcal{G}_1 \xrightarrow[t_V]{s_V} \mathcal{G}_1 \xrightarrow[t]{s} \mathcal{G}_0.$$

Além disso, a correspondência citada acima se restringe a uma correspondência na subcategoria dos 2-grupos de Lie $\mathbf{2Gp}$ com a subcategoria dos módulos cruzados de grupos de Lie \mathbf{GpXMod} .

Exemplo 2.3.3. O módulo cruzado de grupos $(G \xrightarrow{\text{Ad}} \text{Aut}(G))$ do Exemplo 2.2.4, induz o 2-grupo de Lie de automorfismos $[G \xrightarrow{\text{Ad}} \text{Aut}(G)]$, vide Exemplo 2.1.4:

$$G \times \text{Aut}(G) \xrightarrow[t_V]{s_V} \text{Aut}(G) \rightrightarrows \{*\}.$$

2.3.3 Morfismos: $\mathbf{2Gpd} \leftrightarrow \mathbf{GpdXMod}$

Morfismos de 2-grupoides de Lie induzem morfismos em seus módulos cruzados associados. De fato, um morfismo de 2-grupoides (ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2) de \mathbf{G} para \mathbf{H} :

$$\begin{array}{ccc} G_2 & \xrightarrow{\phi_2} & H_2 \\ t_V \downarrow s_V & & t_V \downarrow s_V \\ G_1 & \xrightarrow{\phi_1} & H_1 \\ t_H \downarrow s_H & & t_H \downarrow s_H \\ G_0 & \xrightarrow{\phi_0} & H_0 \end{array}$$

induz um mapa:

$$\begin{array}{ccc} X_G & \xrightarrow{\phi_2} & X_H \\ t_V \downarrow & & \downarrow t_V \\ G & \xrightarrow{\phi_1} & H \end{array}$$

onde $\phi_2 : X_G \rightarrow X_H$ representa a restrição de ϕ_2 em X_G . Então, desde que (ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2) é um morfismo de 2-grupoides o diagrama acima comuta, logo resta verificar que as ações são preservadas. De fato, para $(g, \alpha) \in G_1 \times_{G_0} X_G$:

$$\phi_2(1_g \circ_H \alpha \circ_H 1_{g^{-1}}) = \phi_2(1_g) \circ_H \phi_2(\alpha) \circ_H \phi_2(1_{g^{-1}}) = 1_{\phi_1(g)} \circ_H \phi_2(\alpha) \circ_H 1_{\phi_1(g)^{-1}}.$$

Por outro lado, para um morfismo de módulos cruzados $(f_1, f_2) : (\mathcal{G} \xrightarrow{\rho} \mathcal{H}) \rightarrow (\mathcal{G}' \xrightarrow{\rho'} \mathcal{H}')$, pode-se construir um mapa nos 2-grupoides associados:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1 \times \mathcal{H}_1 & \xrightarrow{(f_2, f_1)} & \mathcal{G}'_1 \times \mathcal{H}'_1 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathcal{H}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathcal{H}'_1 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathcal{H}_0 & \longrightarrow & \mathcal{H}'_0 \end{array}$$

que claramente comuta com todos os mapas estruturais, isto é, o mapa induzido é um morfismo de 2-grupoides de Lie.

Dados os resultados das Subseções 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3, e graças à Observação 2.3.3, conclui-se que o funtor que associa a cada 2-grupoide de Lie \mathbf{G} o 2-grupoide induzido $[X \xrightarrow{t_V} G]$ é uma equivalência entre $\mathbf{2Gpd}$ e $\mathbf{GpdXMod}$, mais ainda, o funtor se restringe em uma equivalência entre $\mathbf{2Gp}$ e \mathbf{GpXMod} .

2.4 2-fibrações de Morita

Nesta seção estudam-se 2-equivalências entre 2-categorias, mais especificamente no contexto de 2-grupoides de Lie. Geralmente, um funtor é uma equivalência de categorias se, e somente se, é fiel, pleno e essencialmente sobrejetor. Para o caso de 2-categorias há um resultado análogo que caracteriza 2-equivalências, a saber, um 2-funtor é uma 2-equivalência se, e somente se, é essencialmente sobrejetor nos objetos (i.e. sobrejetor a menos de equivalências adjuntas), essencialmente completo nos 1-morfismos (i.e. sobrejetivo a menos de isomorfismos), e fiel e pleno nos 2-morfismos (i.e. uma bijeção), esse resultado é chamado de Teorema de Whitehead para bicategorias, veja [17] para detalhes.

Para o caso específico de 2-grupoides de Lie, pode-se considerar uma outra perspectiva, veja [11] e [14]. Essa abordagem, em particular, pode ser pensada como uma análoga superior à noção de morfismo de Morita de grupoides, mais especificamente fibrações de Morita. Para tanto, define-se o 2-grupoide pullback, que é a versão 2-catórica do grupoide de Lie pullback, veja Definição 1.2.2.

Definição 2.4.1. Sejam \mathbf{H} um 2-grupoide de Lie e $f : M \rightarrow H_0$ uma submersão sobrejetora. Então, o 2-grupoide pullback $f^*\mathbf{H}$ é o 2-grupoide de Lie:

$$f^*H_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{t_V} \\ \xrightarrow{s_V} \end{array} f^*H_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s_H} \\ \xrightarrow{t_H} \end{array} M,$$

onde para $i = 1, 2$:

$$f^*H_i = \{(m, h_i, n) \in M \times H_i \times M \mid t_H(h_i) = f(m) \text{ e } s_H(h_i) = f(n)\}.$$

Com mapas estruturais definidos como segue:

- $s_H(m, h_i, n) = n$;
- $t_H(m, h_i, n) = m$;
- $s_V(m, h, n) = (m, s_V(h), n)$;
- $t_V(m, h, n) = (m, t_V(h), n)$;
- $(m, h, n) \circ_H (n, h', p) = (m, h \circ_H h', p)$;
- $(m, h, n) \circ_V (m, h', n) = (m, h \circ_V h', n)$.

Observação 2.4.1. Em termos de diagramas, 1-morfismos (m, h_1, n) e 2-morfismos (m, h_2, n) são da forma:

$$\begin{array}{ccc} \bullet m & & \bullet n \\ & \xleftarrow{h_1} & \\ & f(m) & f(n) \\ & & \\ \bullet m & & \bullet n \\ & \xleftarrow{h_2} & \\ & f(m) & f(n) \\ & \downarrow & \\ & & \end{array}$$

Exemplo 2.4.1. Considere M uma variedade diferenciável. Sejam $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de M e $\pi : \coprod_i U_i \rightarrow M$ a projecção. Então, o 2-grupoide de Čech é o

2-grupoide pullback π^*M , isto é:

$$\coprod_{i,j \in I} U_{ij} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id}} \\ \xrightarrow{\text{id}} \end{array} \coprod_{i,j \in I} U_{ij} \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} \coprod_{i \in I} U_i.$$

Em particular, o 2-grupoide de Čech é o grupoide de Čech visto como um 2-grupoide, veja Exemplo 1.2.2.

Do mesmo modo como nos grupoides de Lie, é possível visualizar o 2-grupoide de Čech como um caso particular de 2-grupoides de submersão com respeito a uma cobertura aberta.

Exemplo 2.4.2. Seja $G_2 \rightrightarrows G_1 \rightrightarrows G_0$ um 2-grupoide de Lie. Considere $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de G_0 e $\pi : \coprod_i U_i \rightarrow G_0$ a projeção. Então, o 2-grupoide de submersão de \mathbf{G} com respeito à cobertura \mathcal{U} é o 2-grupoide pullback $\pi^*\mathbf{G}$:

$$\pi^*G_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{sv} \\ \xrightarrow{tv} \end{array} \pi^*G_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{sH} \\ \xrightarrow{tH} \end{array} \coprod_{i \in I} U_i,$$

onde as flechas e 2-flechas são denotadas por g_{ij} e α_{ij} , respectivamente. Em termos de diagramas, g_{ij} e α_{ij} são representadas da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} & g_{ij} & \\ & \curvearrowleft & \\ y_i & & x_j \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & g_{ij} & \\ & \curvearrowleft & \\ y_i & \begin{array}{c} \Downarrow \alpha_{ij} \\ \Downarrow \end{array} & x_j \\ & \curvearrowright & \\ & h_{ij} & \end{array} .$$

Agora é possível definir uma 2-fibração de Morita de 2-grupoides de Lie.

Definição 2.4.2. Um morfismo de 2-grupoides de Lie $\phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$ é uma **2-fibração de Morita** se ϕ é a composição de dois morfismos:

$$\begin{array}{ccccc} G_2 & \xrightarrow{\sim} & \phi_0^*H_2 & \longrightarrow & H_2 \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ G_1 & \longrightarrow & \phi_0^*H_1 & \longrightarrow & H_1 \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ G_0 & \xrightarrow{\text{id}} & G_0 & \xrightarrow{\phi_0} & H_0 \end{array}$$

onde $G_0 \rightarrow H_0$ e $G_1 \rightarrow \phi_0^*H_1$ são submersões sobrejetoras e

$$\begin{array}{ccc} G_2 & \xrightarrow{\sim} & \phi_0^*H_2 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ G_1 & \longrightarrow & \phi_0^*H_1 \end{array}$$

é um morfismo de Morita de grupoides.

Em outras palavras, $\phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$ é uma 2-fibração de Morita, se $\phi_0 : G_0 \rightarrow H_0$ é uma submersão sobrejetora e a restrição:

$$\phi : (G_2 \rightrightarrows G_1) \rightarrow (\phi_0^* H_2 \rightrightarrows \phi_0^* H_1)$$

é uma fibração de Morita. Ao longo do texto denotamos uma 2-fibração de Morita entre \mathbf{G} e \mathbf{H} como sendo uma flecha $\mathbf{G} \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}$.

Observação 2.4.2. Observe que do ponto de vista de 2-categorias as condições para que um morfismo de 2-grupoides seja uma 2-fibração de Morita implicam diretamente que: ϕ é essencialmente sobrejetor nos objetos; ϕ é essencialmente completo nos 1-morfismos; e que ϕ é fiel e pleno nos 2-morfismos.

Observação 2.4.3. Em termos de módulos cruzados, dizemos que um morfismo de módulos cruzados é um morfismo de Morita, se o morfismo induzido nos 2-grupoides associados é uma 2-fibração de Morita como na Definição 2.4.2.

2-fibrações de Morita de 2-grupoides de Lie induzem certas propriedades nos morfismos de módulos cruzados induzidos. A seguir, será apresentado um resultado especificando duas dessas propriedades que serão essenciais ao longo do Capítulo 5.

Proposição 2.4.1. *Seja $\phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$ uma 2-fibração de Morita de 2-grupoides de Lie. Considere o morfismo de módulos cruzados induzido pela 2-fibração de Morita:*

$$\begin{array}{ccc} X_G & \xrightarrow{\phi_2} & X_H \\ j \downarrow & & \downarrow i \\ G & \xrightarrow{\phi_1} & H \end{array} .$$

Então:

1. Para todo $m \in G_0$, ϕ mapeia bijectivamente $j^{-1}(1_m)$ para $i^{-1}(1_{\phi(m)})$;
2. ϕ induz um funtor do grupóide $G_1/j(X_G)$ para o grupóide $H_1/i(X_H)$ que é fiel, pleno e sobrejetor nos objetos.

Demonstração.

1. Dado $m \in G_0$, desde que j e i são os mapas alvo verticais dos 2-grupoides \mathbf{G} e \mathbf{H} , os conjuntos $j^{-1}(1_m)$ e $i^{-1}(1_{\phi(m)})$ correspondem aos subconjuntos de 2-flechas da forma:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1_m & \\ \curvearrowleft & \parallel \alpha & \curvearrowright \\ m & & m \\ \curvearrowright & \parallel & \curvearrowleft \\ & 1_m & \end{array} & \text{e} & \begin{array}{ccc} & 1_{\phi(m)} & \\ \curvearrowleft & \parallel \beta & \curvearrowright \\ \phi(m) & & \phi(m) \\ \curvearrowright & \parallel & \curvearrowleft \\ & 1_{\phi(m)} & \end{array} . \end{array}$$

Mas, como ϕ é uma 2-fibração de Morita, tem-se que ϕ é fiel e pleno nos 2-morfismos, isto é, dadas flechas $g, h \in G_1$, o mapa:

$$\phi : \text{Hom}(g, h) \rightarrow \text{Hom}(\phi(g), \phi(h))$$

é bijetivo, em particular, pondo $g = 1_m = h$, o resultado segue.

2. Primeiramente, observe que os grupoides quociente $G_1/j(X_G) \rightrightarrows G_0$ e $H_1/j(X_H) \rightrightarrows H_0$, correspondem aos grupoides $G_1/G_2 \rightrightarrows G_0$ e $H_1/H_2 \rightrightarrows H_0$, respectivamente. De fato, por definição $g \sim h$ se, e somente se, $gh^{-1} \in j(X_G)$, em outras palavras, $g \sim h$ se, e somente se, existe $\alpha \in G_2$ de modo que $s_V(\alpha) = 1_n$ e $t_V(\alpha) = gh^{-1}$, em termos de diagramas:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} & g & \\ n \swarrow & \sim & \searrow m \\ & h & \end{array} & \iff & \begin{array}{ccc} & 1_n & \\ n \swarrow & \Downarrow \exists \alpha & \searrow n \\ & gh^{-1} & \end{array} \end{array}$$

Em particular, por composição existe a 2-flecha $\alpha \circ_H 1_h : h \Rightarrow g$:

$$\begin{array}{ccc} & h & \\ n \swarrow & \Downarrow \alpha \circ_H 1_h & \searrow m \\ & g & \end{array}$$

Por outro lado, se existe uma 2-flecha $\beta : h \Rightarrow g$, então a existência da 2-flecha $\beta \circ_H 1_{h^{-1}} : 1_n \Rightarrow gh^{-1}$, garante que $g \sim h$.

Portanto, o funtor induzido pode ser reescrito como:

$$\begin{array}{ccc} G_1/G_2 & \xrightarrow{\bar{\phi}} & H_1/G_2 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ G_0 & \xrightarrow{\phi_0} & H_0 \end{array}$$

Desde que $\phi_0 : G_0 \rightarrow H_0$ é sobrejetora, basta verificar que esse funtor é fiel e pleno. Para isso, observe que como ϕ é uma 2-fibração de Morita, $\phi_1 : G_1 \rightarrow H_1$ é sobrejetor, logo $\bar{\phi} : G_2/G_1 \rightarrow H_2/H_1$ também o é, garantindo que o funtor induzido é pleno. Finalmente, do fato que ϕ é fiel e pleno nos 2-morfismos, segue que ϕ preserva isomorfismos de 1-flechas, isto é, se $g, h \in G_1$ são tais que existe uma 2-flecha $\phi(g) \Rightarrow \phi(h)$, então existe uma 2-flecha $g \Rightarrow h$, logo ϕ é injetivo nas classes de equivalência de 1-flechas, em outras palavras, o funtor induzido é fiel. \square

Observação 2.4.4. Em termos de módulos cruzados, a condição 1 significa que, para todo $m \in G_0$ o morfismo ϕ induz uma bijeção entre $\ker(j_m)$ e $\ker(i_{\phi(m)})$. Já a condição 2, quer

dizer que ϕ induz uma equivalência entre $\text{coker}(j)$ e $\text{coker}(i)$.

Exemplo 2.4.3. As propriedades induzidas nos módulos cruzados são semelhantes as que ocorrem nos complexos de 2-termos no caso de equivalências entre 2-espços vetoriais. Assim como no caso dos 2-grupoides e módulos cruzados de grupoides existe uma equivalência entre as categorias dos 2-espços vetoriais $\mathbf{2Vect}$ e dos complexos de cadeia de 2-termos $\mathbf{2Term}$. Na verdade, a correspondência $\mathbf{2Vect} \rightarrow \mathbf{2Term}$ é feita de modo bastante similar: um 2-espço vetorial $V_1 \rightrightarrows V_0$ é associado ao complexo de cadeia de 2-termos $\ker(s) \xrightarrow{t|_{\ker(s)}} V_0$, veja a construção detalhada em [3]. No que diz respeito aos grupos de cohomologia, $H^0(\ker(s) \xrightarrow{t|_{\ker(s)}} V_0)$ equivale ao espço vetorial dos automorfismos de $0 \in V_0$ e $H^1(\ker(s) \xrightarrow{t|_{\ker(s)}} V_0)$ corresponde ao espço vetorial das classes de isomorfismos de objetos em $V_1 \rightrightarrows V_0$ [29]. Com relação aos morfismos, um funtor linear:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{F_1} & W_1 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ V_0 & \xrightarrow{F_0} & W_0 \end{array}$$

induz o mapa de cadeias:

$$\begin{array}{ccc} \ker(s_V) & \xrightarrow{F_1} & \ker(s_W) \\ t_V|_{\ker(s_V)} \downarrow & & \downarrow t_W|_{\ker(s_W)} \\ V_0 & \xrightarrow{F_0} & W_0 \end{array} \cdot$$

Particularmente, uma equivalência entre 2-espços vetoriais $F : V \rightarrow W$ é um funtor linear que é essencialmente sobrejetor, fiel e pleno, o que no nível de complexos de cadeia de 2-termos corresponde a um quase-isomorfismo de complexos, ou seja, F induz isomorfismos $H_0(\ker(s_V) \rightarrow V_0) \simeq H_0(\ker(s_W) \rightarrow W_0)$ e $H_1(\ker(s_V) \rightarrow V_0) \simeq H_1(\ker(s_W) \rightarrow W_0)$, compare isso com a Proposição 2.4.1.

Uma 2-fibração de Morita de 2-grupoides é, portanto, uma 2-equivalência de 2-categorias que preserva estruturas diferenciáveis, em particular, a relação de equivalência gerada pelas 2-fibrações de Morita é chamada de **2-equivalência de Morita**.

Definição 2.4.3. Diz-se que \mathbf{G} e \mathbf{H} são **Morita 2-equivalentes** se existem, um terceiro 2-grupoide de Lie \mathbf{J} e uma cadeia de 2-fibrações de Morita $\mathbf{G} \xleftarrow{\sim} \mathbf{J} \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}$.

Observação 2.4.5. Como o morfismo identidade $\text{id} : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ é uma 2-fibração de Morita de 2-grupoides, segue que toda 2-fibração de Morita $\phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$ induz uma equivalência de Morita entre \mathbf{G} e \mathbf{H} pondo $\mathbf{G} \xleftarrow{\text{id}} \mathbf{G} \xrightarrow{\phi} \mathbf{H}$.

Exemplo 2.4.4. Dada uma variedade diferenciável M , para qualquer cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de M , o 2-grupoide de Lie $M \rightrightarrows M \rightrightarrows M$ é Morita equivalente ao 2-grupoide

de Čech $\coprod_{ij} U_{ij} \rightrightarrows \coprod_{ij} U_{ij} \rightrightarrows \coprod_i U_i$, com a 2-fibração de Morita natural:

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_{ij} U_{ij} & \xrightarrow{\pi} & M \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 \coprod_{ij} U_{ij} & \xrightarrow{\pi} & M \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 \coprod_i U_i & \xrightarrow{\pi} & M
 \end{array} .$$

Exemplo 2.4.5. Geralmente, dados um 2-grupoide de Lie \mathbf{H} e uma submersão sobrejetora $f : M \rightarrow H_0$, há um mapa natural de $f^*\mathbf{H}$ para \mathbf{H} , dado por

$$\begin{array}{ccc}
 f^*H_2 & \xrightarrow{\text{pr}_2} & H_2 \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 f^*H_1 & \xrightarrow{\text{pr}_2} & H_1 \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 M & \xrightarrow{f} & H_0
 \end{array} .$$

Trivialmente esse mapa é uma 2-fibração de Morita, logo $f^*\mathbf{H}$ e \mathbf{H} são 2-grupoides Morita 2-equivalentes. Mais ainda, se \mathcal{U} é uma cobertura aberta de H_0 então o 2-grupoide de Čech de \mathbf{H} é também Morita 2-equivalente a \mathbf{H} .

Capítulo 3

Contexto simplicial

Assim como no caso dos grupoides, há um conjunto simplicial naturalmente associado a um 2-grupoide, que, por simplicidade também é chamado de nervo. Acontece que o nervo define um funtor fiel e pleno da categoria dos 2-grupoides para a categoria dos conjuntos simpliciais, com efeito, é possível realizar um paralelo entre o estudo de 2-grupoides e seus nervos.

A teoria de 2-grupoides de Lie (estritos) está intimamente relacionada, via nervo, com o que chamaremos de 2-grupoides de Lie fracos, que nada mais são do que variedades simpliciais satisfazendo a condição de Kan (suave) em todas as dimensões e a condição de Kan estrita para dimensões maiores que dois. Particularmente, este capítulo busca estabelecer essas relações entre os 2-grupoides de Lie e suas versões simpliciais "fracas".

Para tanto, na Seção 3.1 é desenvolvida uma breve introdução aos conjuntos simpliciais, e logo após, na Seção 3.2 realiza-se a passagem para o contexto suave. Ainda nesta seção, definem-se o nervo de um 2-grupoide de Lie, a noção de hypercover e se estabelece a correspondência entre 2-grupoides de Lie e 2-grupoides de Lie fracos. Finalmente, na Seção 3.3 mostra-se a correspondência entre 2-fibrações de Morita e hypercovers de 2-grupoides de Lie fracos.

As referências gerais para a teoria dos conjuntos simpliciais são [37], [23] e [31], já para o estudo do nervo, 2-grupoides de Lie fracos, e hypercovers, têm-se [8], [38], [6], [36] e [16].

3.1 Conjuntos simpliciais

Defina Δ a categoria cujos objetos são conjuntos ordenados, finitos, não vazios $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$, e morfismos são funções que preservam ordem, isto é, funções $\alpha : [m] \rightarrow [n]$ tais que para cada $0 \leq i \leq j \leq m$ têm-se $0 \leq \alpha(i) \leq \alpha(j) \leq n$.

Observação 3.1.1. Note que para $m \leq n$, um morfismo $\alpha : [m] \rightarrow [n]$ pode ser descrito como uma sequência de índices (k_0, k_1, \dots, k_m) satisfazendo $0 \leq k_0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_m \leq n$.

Ora, se $m \leq n$ então $\alpha : [m] \rightarrow \alpha([m]) \subseteq [n]$ é uma bijeção, em particular $\alpha([m]) = \{k_0, k_1, \dots, k_m\}$ descreve unicamente o morfismo α .

Para cada i com $0 \leq i \leq n$, defina os morfismos $d^i : [n-1] \rightarrow [n]$ e $s^i : [n+1] \rightarrow [n]$ como segue:

$$d^i(j) = \begin{cases} j, & \text{se } j < i; \\ j+1, & \text{se } j \geq i, \end{cases} \quad \text{e} \quad s^i(j) = \begin{cases} j, & \text{se } j \leq i; \\ j-1, & \text{se } j > i. \end{cases}$$

Um cálculo simples mostra que tais morfismos satisfazem as seguintes relações:

$$\begin{cases} d^j d^i = d^i d^{j-1} & i < j \\ s^j d^i = d^i s^{j-1} & i < j \\ s^j d^j = 1_{[n]} = s^j d^{j+1} \\ s^j d^i = d^{i-1} s^j & i > j+1 \\ s^j s^i = s^i s^{j+1} & i \leq j. \end{cases}$$

Chamamos d^i e s^i respectivamente, de **cofaces** e **codegenerações** e as relações de **identidades cosimpliciais**.

As cofaces e codegenerações são únicas no seguinte sentido: a i -ésima coface d^i é o único morfismo injetivo $[n-1] \rightarrow [n]$ que perde o i em sua imagem, enquanto a i -ésima codegeneração é o único morfismo sobrejetor $[n+1] \rightarrow [n]$ que envia dois elementos em i .

Observação 3.1.2. As cofaces e codegenerações caracterizam todos os morfismos em Δ , isto é, todo morfismo pode ser escrito de forma única como composições de cofaces e codegenerações, mais do que isso, sabe-se exatamente como ocorrem essas "decomposições", veja [23], Seção 2.

Com isso posto, é possível definir um conjunto simplicial.

Definição 3.1.1. Um **conjunto simplicial** é um funtor contravariante $X_\bullet : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$.

Sendo um funtor, para determinar um conjunto simplicial X_\bullet é preciso atribuir: a cada objeto $[n]$ em Δ um conjunto X_n , e a cada morfismo $[m] \rightarrow [n]$ em Δ^{op} uma função $X_n \rightarrow X_m$ com condições, de modo que tornem tais atribuições um funtor. Mas como todo morfismo em Δ pode ser expresso unicamente como composição de cofaces e codegenerações, o mesmo ocorre para morfismos na categoria oposta Δ^{op} , então para determinar um conjunto simplicial X_\bullet é suficiente: atribuir a cada n um conjunto X_n e declarar os mapas $d_i = X_\bullet(d^i)$ e $s_i = X_\bullet(s^i)$ que devem satisfazer por dualidade as identidades simpliciais. Com efeito, pode-se reescrever a Definição 3.1.1 da seguinte forma:

Definição 3.1.2. Um **conjunto simplicial** X_\bullet consiste de uma sequência de conjuntos X_0, X_1, \dots , e para cada $n \geq 0$, funções $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$ e $s_i : X_n \rightarrow X_{n+1}$, para cada i

com $0 \leq i \leq n$, que satisfazem as seguintes **identidades simpliciais**:

$$\begin{cases} d_i d_j = d_{j-1} d_i & i < j \\ d_i s_j = s_{j-1} d_i & i < j \\ d_j s_j = 1_{X_n} = d_{j+1} s_j \\ d_i s_j = s_j d_{i-1} & i > j + 1 \\ s_i s_j = s_{j+1} s_i & i \leq j. \end{cases}$$

Para cada $n \geq 0$, elementos em X_n são chamados de **n -símplices** e os mapas d_i e s_i são denominados **faces** e **degenerações**.

Levando em conta a primeira definição, é natural que um morfismo entre conjuntos simpliciais (vistos como funtores) deva ser definido como uma transformação natural entre eles, no entanto, a segunda abordagem nos dá a possibilidade de especificar como se dão tais morfismos e se desvincular da linguagem categórica.

Definição 3.1.3. Um **mapa simplicial** $\phi : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ consiste de um mapa $\phi_n : X_n \rightarrow Y_n$, para cada $n \geq 0$, satisfazendo para cada i com $0 \leq i \leq n$, $\phi_n \circ d_i = d_i \circ \phi_{n+1}$ e $\phi_n \circ s_i = s_i \circ \phi_{n-1}$, isto é, tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc} X_{n-1} & \xleftarrow{d_i} & X_n & \xrightarrow{s_i} & X_{n+1} \\ \phi_{n-1} \downarrow & & \phi_n \downarrow & & \downarrow \phi_{n+1} \\ X_{n-1} & \xleftarrow{d_i} & X_n & \xrightarrow{s_i} & X_{n+1} \end{array}$$

Frequentemente, um conjunto simplicial X_\bullet é denotado simplesmente por X , e a categoria cujos objetos são conjuntos simpliciais e morfismos são mapas simpliciais é denotada por **sSets**.

Exemplo 3.1.1. Um conjunto X pode ser visto como um conjunto simplicial **constante** X_\bullet , onde para todo $n \geq 0$, tem-se $X_n = X$, e todos os mapas de faces e degenerações são identidades em X .

Exemplo 3.1.2. Para um grupoide $\mathcal{G}_1 \rightrightarrows \mathcal{G}_0$, há um conjunto simplicial \mathcal{G}_\bullet chamado **nervo** de \mathcal{G} , dado explicitamente como segue:

- para $n = 0$, \mathcal{G}_0 é conjunto de objetos do grupoide;
- para $n = 1$, \mathcal{G}_1 é o conjunto de flechas do grupoide, em particular, um 0-símplice $x \in \mathcal{G}_0$ tem degeneração $s_0 : \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_1$, $x \mapsto 1_x$; e um 1-símplice $g \in \mathcal{G}_1$ tem faces $d_0 : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0$, $g \mapsto t(g)$ e $d_1 : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0$, $g \mapsto s(g)$;

- para $n \geq 2$, \mathcal{G}_n é o conjunto composto de n flechas componíveis:

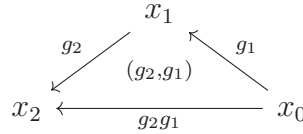
$$\mathcal{G}_n := \{(g_n, \dots, g_1) \in (\mathcal{G}_1)^n \mid s(g_{i+1}) = t(g_i), 1 \leq i \leq n-1\},$$

com faces $d_0, \dots, d_n : \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{G}_{n-1}$ e degenerações $s_0, \dots, s_{n-1} : \mathcal{G}_{n-1} \rightarrow \mathcal{G}_n$, definidas por:

$$\begin{cases} d_0(g_n, \dots, g_1) = (g_n, \dots, g_2) \\ d_j(g_n, \dots, g_1) = (g_n, \dots, g_{j+1}g_j, \dots, g_1) & 1 \leq j \leq n-1 \\ d_n(g_n, \dots, g_1) = (g_{n-1}, \dots, g_1). \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_0(g_{n-1}, \dots, g_1) = (g_{n-1}, \dots, g_1, 1_{s(g_1)}) \\ s_j(g_{n-1}, \dots, g_1) = (g_{n-1}, \dots, g_{j+1}, 1_{t(g_j)}, g_j, \dots, g_1) & 1 \leq j \leq n-2 \\ s_{n-1}(g_{n-1}, \dots, g_1) = (1_{t(g_{n-1})}, g_{n-1}, \dots, g_1). \end{cases}$$

Por exemplo, um 2-símplice $(g_2, g_1) \in \mathcal{G}_2$ pode ser representado como um diagrama:



cujas faces são os vértices opostos ao indicado pelo operador, isto é, $d_0(g_2, g_1) = g_2$, $d_1(g_2, g_1) = g_2 g_1$ e $d_2(g_2, g_1) = g_1$.

A noção de mapa simplicial torna possível a definição de subconjuntos nesse contexto.

Definição 3.1.4. Diz-se que Y é um **subconjunto simplicial** de X , se para cada $n \geq 0$, Y_n é um subconjunto de X_n de modo que as inclusões $i_n : Y_n \rightarrow X_n$ formam um mapa simplicial $i : Y \rightarrow X$.

Se X é um dado conjunto simplicial, frequentemente especificamos um subconjunto simplicial dando um conjunto de **geradores**, esse que normalmente possui a forma de um subconjunto $S \subset X_n$, para alguns n 's.

Definição 3.1.5. O subconjunto simplicial de X **gerado** por S é definido por:

$$\langle S \rangle := \bigcap \{S \subseteq Y \subseteq X \mid Y \text{ é um subconjunto simplicial de } X\}.$$

Note que $\langle S \rangle$ é o menor subconjunto simplicial de X que contém S . Ademais, elementos em $\langle S \rangle$ são elementos em X que podem ser escritos como composições de faces e degenerações de elementos em S .

Exemplo 3.1.3. Seja $\phi : X \rightarrow Y$ um mapa simplicial. Então, o conjunto imagem de ϕ , definido por:

$$\text{Im}(\phi) = \{\text{Im}(\phi_n) : n \geq 0\},$$

é um subconjunto simplicial de Y .

Dados X um conjunto simplicial e $x \in X_n$ um n -símplice, sua n -ésima **face de fronteira** $\partial_n(x)$ é a sequência de suas $n + 1$ faces:

$$\partial_n(x) := (d_0(x), \dots, d_n(x)),$$

e seu k -ésimo **chifre** $\text{pr}_{\hat{k}}(x)$, é a imagem da projeção de sua fronteira a essa mesma sequência de faces, mas com a k -ésima face omitida:

$$\text{pr}_{\hat{k}}(x) := (d_0(x), \dots, \hat{d}_k(x), \dots, d_n(x)).$$

O n -ésimo **espaço de correspondência** de X , denotado por $M_n(X)$, é o conjunto de todas as sequências possíveis de $(n - 1)$ -símplices que podem ser a fronteira de qualquer n -símplice em X , isto é:

$$M_n(X) := \{(x_0, \dots, x_n) \in (X_{n-1})^{n+1} \mid d_i(x_j) = d_{j-1}(x_i), \forall i < j\};$$

Semelhantemente, o (n, k) -ésimo **chifre** de X , denotado por $\Lambda_k^n(X)$, é o conjunto de todas as sequências de $(n - 1)$ -símplices que podem ser a fronteira de um n -símplice, exceto pela k -ésima coordenada, isto é:

$$\Lambda_k^n(X) := \{(x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n) \in (X_{n-1})^n \mid d_i(x_j) = d_{j-1}(x_i), \forall i < j; i, j \neq k\}.$$

Observação 3.1.3. Note que as faces de fronteira tornam-se mapas naturais $(d_0, \dots, d_n) : X_n \rightarrow M_n(X)$, que juntamente com os chifres dão origem a mapas naturais $(d_0, \dots, \hat{d}_k, \dots, d_n) : X_n \rightarrow \Lambda_k^n(X)$, dados pela seguinte composição:

$$X_n \xrightarrow{\partial_n} M_n(X) \xrightarrow{\text{pr}_{\hat{k}}} \Lambda_k^n(X).$$

Exemplo 3.1.4. Considere \mathcal{G} um grupoide e \mathcal{G}_\bullet seu nervo. Seja $(g_2, g_1) \in \mathcal{G}_2$, então a 2-face de fronteira é dada por $\partial_2(g_2, g_1) = (g_2, g_2g_1, g_1)$, enquanto, os k -ésimos chifres $\text{pr}_{\hat{k}}(g_2, g_1)$, para $k = 0, 1, 2$, são tais que $\text{pr}_{\hat{0}}(g_2, g_1) = (g_2g_1, g_1)$, $\text{pr}_{\hat{1}}(g_2, g_1) = (g_2, g_1)$ e $\text{pr}_{\hat{2}}(g_2, g_1) = (g_2, g_2g_1)$. Mais ainda, em graus baixos, os espaços de correspondência de \mathcal{G}_\bullet

são: $M_1(\mathcal{G}_\bullet) = \mathcal{G}_0 \times \mathcal{G}_0$ e $M_2(\mathcal{G}_\bullet)$ é o conjunto que consiste de triplos (g_0, g_1, g_2) da forma:

$$\begin{array}{ccc} & x_1 & \\ g_0 \swarrow & & \nwarrow g_2 \\ x_2 & \xleftarrow{g_1} & x_0 \end{array}$$

Também em graus baixos, os chifres de \mathcal{G}_\bullet são: $\Lambda_0^1(\mathcal{G}_\bullet) = \mathcal{G}_0 = \Lambda_1^1(\mathcal{G}_\bullet)$; $\Lambda_0^2(\mathcal{G}_\bullet) = \mathcal{G}_{1s} \times_s \mathcal{G}_1$, $\Lambda_1^2(\mathcal{G}_\bullet) = \mathcal{G}_{1s} \times_t \mathcal{G}_1$ e $\Lambda_2^2(\mathcal{G}_\bullet) = \mathcal{G}_{1t} \times_t \mathcal{G}_1$, isto é, para $k = 0, 1, 2$, são os conjuntos que consistem de diagramas da forma:

$$\begin{array}{ccc} & x_1 & \\ & \nwarrow g_2 & \\ x_2 & \xleftarrow{g_1} & x_0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & x_1 & \\ g_0 \swarrow & & \nwarrow g_2 \\ x_2 & & x_0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & x_1 & \\ & \nwarrow g_2 & \\ x_2 & \xleftarrow{g_1} & x_0 \end{array}$$

Os conjuntos $M_n(X)$ e $\Lambda_k^n(X)$ desempenham um papel fundamental na teoria das fibrações de Kan, na verdade, ambos os conjuntos podem ser vistos como morfismos entre certos conjuntos simpliciais.

Definição 3.1.6. O n -simplexo padrão é o conjunto simplicial Δ_\bullet^n que como um funtor, é o funtor contravariante na categoria $\mathbf{\Delta}$, representada por $[n]$, isto é:

$$\Delta_\bullet^n = \text{Hom}_{\mathbf{\Delta}}(-, [n]).$$

Então, m -símplices em Δ^n são morfismos $\alpha : [m] \rightarrow [n]$ em $\mathbf{\Delta}$, e os mapas de faces e degenerações d_i e s_i são dados pelas pré-composições em $\mathbf{\Delta}$ por d^i e s^i , respectivamente.

Explicitamente, graças a Observação 3.1.1, para $m \leq n$:

$$\Delta_m^n = \{(k_0, k_1, \dots, k_m) \mid 0 \leq k_0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_m \leq n\},$$

com faces $d_i : \Delta_m^n \rightarrow \Delta_{m-1}^n$ e degenerações $s_i : \Delta_m^n \rightarrow \Delta_{m+1}^n$ dadas por:

$$d_i(k_0, \dots, k_m) = (k_0, \dots, \hat{k}_i, \dots, k_m) \quad s_i(k_0, \dots, k_m) = (k_0, \dots, k_i, k_i, \dots, k_m).$$

Observação 3.1.4. Note que dado $1_{[n]} = (0, \dots, n) \in \Delta_n^n$ o morfismo identidade, qualquer elemento em Δ^n pode ser escrito como composições iteradas de faces e degenerações de $1_{[n]}$.

Dado um conjunto simplicial X , o Lema de Yoneda nos dá uma bijeção entre X_n e $\text{Hom}_{\mathbf{sSets}}(\Delta^n, X)$, em particular, para um n -símplice $x \in X_n$, denotamos o morfismo representante como $\iota_x : \Delta^n \rightarrow X$, que é o único morfismo cujo valor na identidade é x , isto é, $\iota_x(1_{[n]}) = x$. Para uma breve explanação acerca do Lema de Yoneda veja [31], Seção 3.

Além do n -símplice padrão, existem dois subconjuntos simpliciais de Δ^n que irão desempenhar um importante papel na sequência desta subseção.

Definição 3.1.7. Para cada $n \geq 0$:

- O subconjunto simplicial $\partial\Delta^n$ de Δ^n , chamado **fronteira** de Δ^n , é o subconjunto gerado pelo conjunto $\{d_0(1_{[n]}), \dots, d_n(1_{[n]})\} \subset \Delta^n$. Em outras palavras, $\partial\Delta^n$ é o menor subconjunto de Δ^n que contém todas as faces.
- O subconjunto simplicial Λ_k^n de Δ^n , chamado k -ésimo **chifre** de Δ^n , é o subconjunto gerado pelo conjunto $\{d_0(1_{[n]}), \dots, \hat{d}_k(1_{[n]}), \dots, d_n(1_{[n]})\} \subset \Delta^n$. Em outras palavras, Λ_k^n é o menor subconjunto de Δ^n que contém todas as faces, exceto a k -ésima.

Observe que, nesse caso, as faces de fronteira tornam-se mapas naturais $\partial : \Delta^n \rightarrow \partial\Delta^n$, bem como os chifres induzem mapas naturais $\text{pr}_k : \Delta^n \rightarrow \Lambda_k^n$. Com efeito, a bijeção entre X_n e $\text{Hom}_{\mathbf{sSets}}(\Delta^n, X)$ se restringe em bijeções entre $M_n(X)$ e $\text{Hom}_{\mathbf{sSets}}(\partial\Delta^n, X)$, e entre $\Lambda_k^n(X)$ e $\text{Hom}_{\mathbf{sSets}}(\Lambda_k^n, X)$. De fato, para um elemento $(x_0, \dots, x_n) \in M_n(X)$, o morfismo correspondente $\iota_{(x_0, \dots, x_n)} : \partial\Delta^n \rightarrow X$ é o único morfismo de modo que:

$$(\iota_{(x_0, \dots, x_n)} \circ \partial)(1_{[n]}) = (x_0, \dots, x_n).$$

Enquanto para um elemento $(x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n) \in \Lambda_k^n(X)$, o morfismo correspondente $\iota_{(x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n)} : \Lambda_k^n \rightarrow X$, é o único morfismo tal que:

$$(\iota_{(x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n)} \circ \text{pr}_k)(1_{[n]}) = (x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n).$$

Agora, estamos prontos para introduzir a teoria de Kan para conjuntos simpliciais. Geralmente, diz-se que um conjunto simplicial X satisfaz a **condição de Kan** se, qualquer mapa simplicial $\alpha : \Lambda_k^n \rightarrow X$, para $n \geq 1$, e $k = 0, \dots, n$, se estende a um mapa definido em Δ^n :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow i & \nearrow & \\ \Delta^n & & \end{array} .$$

Porém, observe que é possível reescrever a condição de Kan em termos dos conjuntos X_n e $\Lambda_k^n(X)$, utilizando as caracterizações citadas anteriormente.

Proposição 3.1.1. *Um conjunto simplicial X satisfaz a condição de Kan se, e somente se, para todo elemento $(x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n) \in \Lambda_k^n(X)$, existe um n -símplice $x \in X_n$, de modo que $d_i(x) = x_i$ para todo $i \neq k$.*

Demonstração.

(\Rightarrow) Suponha que X é de Kan e considere $(x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n) \in \Lambda_k^n(X)$. Então, desde que $\Lambda_k^n(X) \cong \text{Hom}_{\mathbf{sSets}}(\Lambda_k^n, X)$, o mapa representante $\iota_{(x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n)} : \Lambda_k^n \rightarrow X$ é um

mapa simplicial. Mas como X é de Kan existe uma extensão $\beta : \Delta^n \rightarrow X$, tal que $\beta|_{\Lambda_k^n} = \iota_{(x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n)}$. Portanto, pondo $x = \beta(1_{[n]})$, segue que para todo $i \neq k$:

$$d_i(x) = d_i(\beta(1_{[n]})) = \beta(d_i(1_{[n]})) = \iota_{(x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n)}(d_i(1_{[n]})) = x_i.$$

(\Leftarrow) Como há uma bijeção entre $\Lambda_k^n(X)$ e $\text{Hom}_{\mathbf{sSets}}(\Lambda_k^n, X)$, é suficiente verificar que para todo $(x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n) \in \Lambda_k^n(X)$, o mapa representante $\iota_{(x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n)} : \Lambda_k^n \rightarrow X$ possui uma extensão. De fato, por suposição existe $x \in X_n$ de modo que $d_i(x) = x_i$, logo o mapa representante $\iota_x : \Delta^n \rightarrow X$ é uma extensão para $\alpha_{(x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n)}$. \square

Com efeito, a condição "para todo elemento $(x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n) \in \Lambda_k^n(X)$, existe um n -símplice $x \in X_n$, de modo que $d_i(x) = x_i$ para todo $i \neq k$ ", pode ser traduzida na seguinte definição.

Definição 3.1.8. Um conjunto simplicial X é um **conjunto simplicial de Kan** se, e somente se, os mapas naturais:

$$(d_0, \dots, \hat{d}_k, \dots, d_n) : X_n \rightarrow \Lambda_k^n(X)$$

são sobrejetores para todo $n \geq 0$ e $0 \leq k \leq n$.

Observação 3.1.5. Se para algum $0 \leq i \leq n$, o mapa natural $(d_0, \dots, \hat{d}_k, \dots, d_i) : X_i \rightarrow \Lambda_k^i(X)$ for bijetivo, isto quer dizer de maneira clássica que qualquer mapa simplicial $\alpha : \Lambda_k^i \rightarrow X$, se estende de maneira única a um mapa definido em Δ^n .

O mais simples exemplo de um conjunto simplicial de Kan é o nervo de um grupoide, mas nesse caso particular os mapas naturais para $n > 1$ não são somente sobrejetores, mas sim bijetivos, e é isso que motiva a definição de um grupoide no contexto simplicial.

Definição 3.1.9. Dado um conjunto simplicial X , diz-se que X é um **j -grupoide fraco** se os mapas naturais:

$$(d_0, \dots, \hat{d}_k, \dots, d_n) : X_n \rightarrow \Lambda_k^n(X)$$

são sobrejetores para $n \geq 0$, e bijetivos para $n > j$, e $0 \leq k \leq n$.

Uma importante classe de conjuntos simpliciais são os n -coesqueletos, que, graças a correspondência bijetiva entre $\text{Hom}_{\mathbf{sSets}}(\partial\Delta^k, X)$ e $M_k(X)$, podem ser caracterizados da seguinte maneira:

Definição 3.1.10. Um conjunto simplicial X é um **n -coesqueleto** se, e somente se, os mapas naturais:

$$(d_0, \dots, d_k) : X_k \rightarrow M_k(X)$$

são bijetivos para todo $k > n$.

Agora, o foco a partir daqui será em uma classe específica de mapas simpliciais, mais precisamente, mapas simpliciais $\phi : X \rightarrow Y$, tais que, para todo diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \phi \\ \Delta^n & \longrightarrow & Y \end{array}$$

existe um mapa simplicial $\theta : \Delta^n \rightarrow X$, de modo que o diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow \theta & \downarrow \phi \\ \Delta^n & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Um mapa que satisfaz essa condição recebe o nome de **fibração de Kan**, e do mesmo modo como os conjuntos simpliciais, é possível reescrever a condição de maneira conjuntista.

Proposição 3.1.2. *Um mapa simplicial $\phi : X \rightarrow Y$ é uma fibração de Kan se, e somente se, para todo elemento $(x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n) \in \Lambda_k^n(X)$ e todo n -símplice $y \in Y_n$, tal que $d_i(y) = \phi(x_i)$ para $i \neq k$, existe um n -símplice $x \in X_n$, de modo que $d_i(x) = x_i$ para $i \neq k$, e $\phi(x) = y$.*

A demonstração é uma extensão do caso de conjuntos simpliciais de Kan, veja Proposição 3.1.1. Então, assim como antes, esse resultado nos dá a possibilidade de reformular a condição de Kan de um mapa simplicial, em termos da sobrejetividade de mapas naturais.

Definição 3.1.11. Um mapa simplicial $\phi : X \rightarrow Y$ é uma fibração de Kan se, e somente se, os mapas naturais:

$$((d_0, \dots, \hat{d}_k, \dots, d_n), \phi) : X_n \rightarrow \Lambda_k^n(X) \times_{\Lambda_k^n(Y)} Y_n$$

são sobrejetores para todo $n \geq 0$ e $0 \leq k \leq n$.

A categoria **sSets** possui uma estrutura modelo de Quillen, vide [32], Teorema 11. Nessa estrutura, as fibrações são fibrações de Kan e as equivalências fracas são homotopias simpliciais, veja [12], Capítulo 1, Seção 6. Em particular, uma fibração de Kan trivial é portanto, uma fibração de Kan que é também uma homotopia simplicial. No entanto, há uma maneira simples de caracterizar uma fibração de Kan trivial por meio de propriedades extensão:

Teorema 3.1.1. *Uma fibração de Kan $\phi : X \rightarrow Y$ é trivial se, e somente se, para todo diagrama comutativo de mapas simpliciais:*

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \phi \\ \Delta^n & \longrightarrow & Y \end{array}$$

existe um mapa simplicial $\theta : \Delta^n \rightarrow X$, de modo que o diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow \theta & \downarrow \phi \\ \Delta^n & \longrightarrow & Y \end{array}$$

A prova desse resultado é dada em [12], Teorema 7.10. Com efeito, assim como nos outros casos, é possível caracterizar uma fibração de Kan trivial de maneira simples:

Definição 3.1.12. Um mapa simplicial $\phi : X \rightarrow Y$ é uma fibração de Kan trivial se, e somente se, os mapas naturais:

$$((d_0, \dots, d_n), \phi) : X_n \rightarrow M_n(X) \times_{M_n(Y)} Y_n$$

são sobrejetores para todo $n \geq 0$.

Exemplo 3.1.5. Dado um morfismo de grupoides $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$, em graus baixos a condição para que o mapa induzido $\phi_\bullet : \mathcal{G}_\bullet \rightarrow \mathcal{H}_\bullet$, seja uma fibração de Kan trivial é equivalente aos seguintes mapas serem sobrejetores, $\phi_0 : \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$ e $((s, t), \phi) : \mathcal{G}_1 \rightarrow (\mathcal{G}_0 \times \mathcal{G}_0) \times_{\mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0} \mathcal{H}_1$.

3.2 Variedades simpliciais

É possível generalizar o conceito de conjunto simplicial para quaisquer categorias, mais precisamente, para uma categoria \mathcal{C} , um **objeto simplicial em \mathcal{C}** é um funtor contravariante $X_\bullet : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$, logo, todos os conceitos tratados anteriormente podem ser passados para a linguagem dessa nova categoria \mathcal{C} .

Esta seção tem como foco o caso particular de um objeto simplicial na categoria das variedades diferenciáveis **Man**, especificamente, grande parte dos conceitos tratados na Seção 3.1 serão reescritos no contexto diferenciável.

Definição 3.2.1. Uma **variedade simplicial** X é um conjunto simplicial onde para todo $n \geq 0$, X_n é uma variedade diferenciável e cujos mapas de faces e degenerações são suaves. E um **morfismo** de variedades simpliciais é um mapa simplicial $\phi : X \rightarrow Y$ de modo que, para todo $n \geq 0$, $\phi_n : X_n \rightarrow Y_n$ é um mapa suave.

Do mesmo modo como na categoria dos conjuntos simpliciais, denotamos a categoria das variedades simpliciais por \mathbf{sMan} .

Exemplo 3.2.1. Uma variedade diferenciável M pode ser vista como uma variedade simplicial onde, para todo $n \geq 0$, $M_n = M$ e todos os mapas de faces e degenerações são identidades em M .

Exemplo 3.2.2. Os conjuntos simpliciais Δ^n , $\partial\Delta^n$ e Λ_k^n são variedades simpliciais com suas topologias discretas.

Observação 3.2.1. Para uma variedade simplicial X obtemos um difeomorfismo, induzido pelo Lema de Yoneda $\text{Hom}_{\mathbf{sMan}}(\Delta^n, X) \cong X_n$.

Exemplo 3.2.3. O nervo de um grupoide de Lie \mathcal{G}_\bullet é uma variedade simplicial. Ora, para todo $n \geq 0$, o conjunto de n flechas componíveis \mathcal{G}_n é uma variedade diferenciável, ainda, é claro que os mapas de faces e degenerações são suaves.

A partir daqui, serão desenvolvidos conceitos separados em duas subseções, cada uma com um objetivo específico. A primeira subseção é reservada para a definição da variedade simplicial associada a um 2-grupoide de Lie, junto com ilustrações de seus n -símplices e exemplos básicos. Enquanto a segunda subseção destina-se à passagem da teoria de Kan (dada no contexto conjuntista) para o contexto suave, e à demonstração do fato que o nervo de um 2-grupoide de Lie é um 2-grupoide de Lie fraco.

3.2.1 O nervo de um 2-grupoide de Lie

Considere $G_2 \rightrightarrows G_1 \rightrightarrows G_0$ um 2-grupoide de Lie, então o **nervo** $N\mathbf{G}$ é a variedade simplicial onde:

- $N_0\mathbf{G}$ é a variedade de objetos G_0 ;
- $N_1\mathbf{G}$ é a variedade de flechas G_1 , em particular um 1-símplice $x_1 \xleftarrow{g_{01}} x_0$ tem faces:

$$d_0(g_{01}) = x_1 \quad \text{e} \quad d_1(g_{01}) = x_0.$$

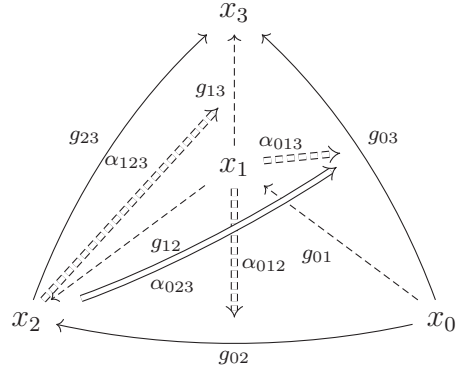
- $N_2\mathbf{G}$ é a subvariedade de $G_2 \times G_1 \times G_1 \times G_1$ composta de diagramas $\Delta = (\alpha_{012}; g_{12}, g_{02}, g_{01})$ da forma:

$$\begin{array}{ccc}
 & x_1 & \\
 g_{12} \swarrow & \Downarrow \alpha_{012} & \nwarrow g_{01} \\
 x_2 & & x_0 \\
 & \xleftarrow{g_{02}} &
 \end{array}$$

com $\alpha : g_{012} \Rightarrow g_{02}$, e cujas faces são os 1-símplices opostos aos vértices indicados:

$$d_0(\Delta) = g_{12}, \quad d_1(\Delta) = g_{02} \quad \text{e} \quad d_2(\Delta) = g_{01}.$$

- $N_3\mathbf{G}$ é a subvariedade de $(G_2)^4 \times (G_1)^6$ composta de tetraedros "comutativos" $\Theta = (\alpha_{023}, \alpha_{012}, \alpha_{013}, \alpha_{123}; g_{23}, g_{13}, g_{03}, g_{12}, g_{02}, g_{01})$ da forma:



onde, $\alpha_{023} : g_{023} \Rightarrow g_{03}$, $\alpha_{012} : g_{012} \Rightarrow g_{02}$, $\alpha_{013} : g_{013} \Rightarrow g_{03}$ e $\alpha_{123} : g_{123} \Rightarrow g_{13}$. Por comutatividade do tetraedro queremos dizer que o seguinte diagrama de 2-flechas comuta:

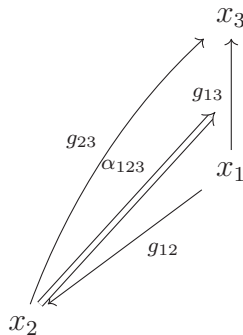
$$\begin{array}{ccc}
 & g_{23} \circ \alpha_{012} & \\
 & \xrightarrow{H} & \\
 g_{0123} & \xrightarrow{H} & g_{023} \\
 \alpha_{123} \circ g_{01} \downarrow & & \downarrow \alpha_{023} \\
 g_{013} & \xrightarrow{\alpha_{013}} & g_{03}
 \end{array}$$

isto é:

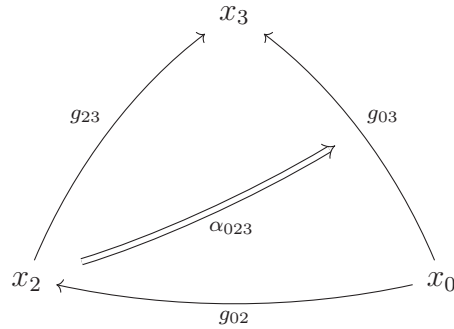
$$(g_{23} \circ_H \alpha_{012}) \circ_V \alpha_{023} = (\alpha_{123} \circ_H g_{01}) \circ_V \alpha_{013}.$$

Assim como nos outros casos, as faces são os 2-símplices opostos aos vértices indicados pelos operadores:

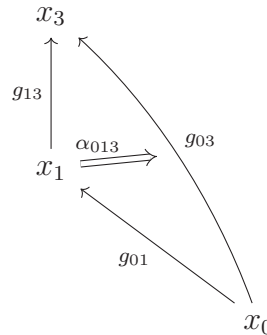
- $d_0(\Theta) = (\alpha_{123}; g_{23}, g_{13}, g_{12})$ é a face esquerda:



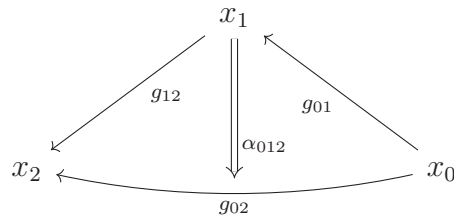
– $d_1(\Theta) = (\alpha_{023}; g_{23}, g_{03}, g_{02})$ é a face frontal:



– $d_2(\Theta) = (\alpha_{013}; g_{03}, g_{13}, g_{01})$ é a face direita;

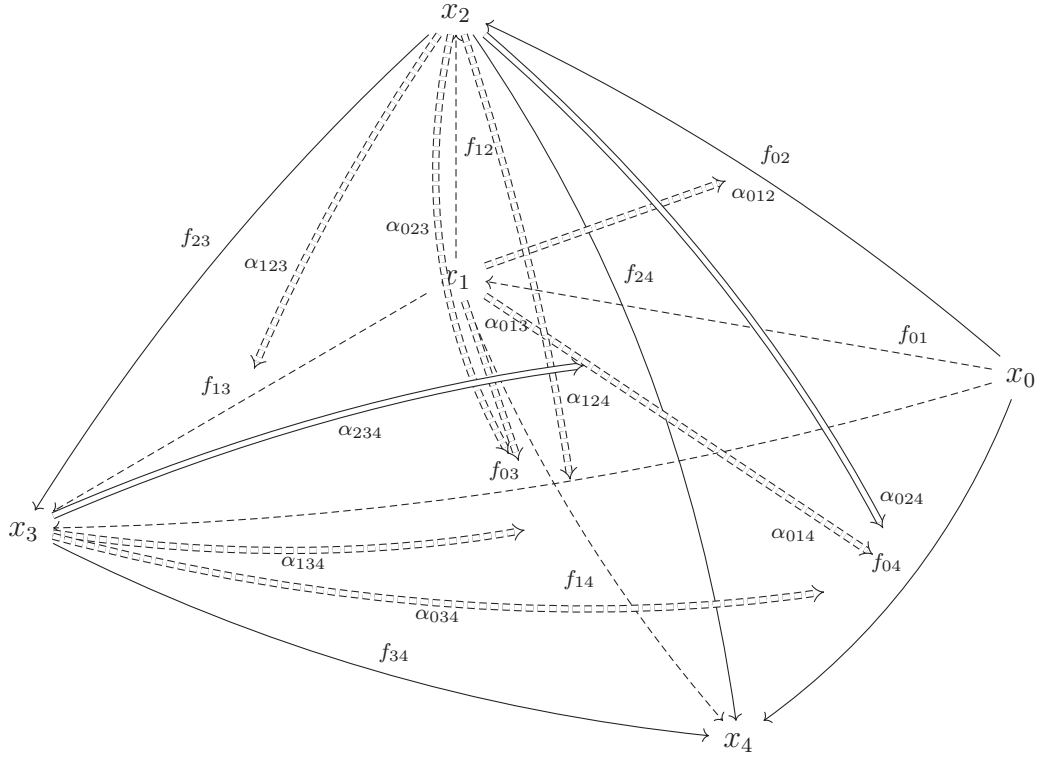


– $d_3(\Theta) = (\alpha_{012}; g_{12}, g_{02}, g_{01})$ é a face baixa.



- $N_n \mathbf{G}$ para $n \geq 3$ é a variedade composta de todos os n -símplices tais que cada subsímplice de dimensão 3 é um tetraedro da forma acima, em outras palavras, $N \mathbf{G}$ é um 3-coesqueleto.

Por exemplo, para $n = 4$, elementos em $N_4 \mathbf{G}$ são compostos de cinco 3-símplices colados simplicialmente:



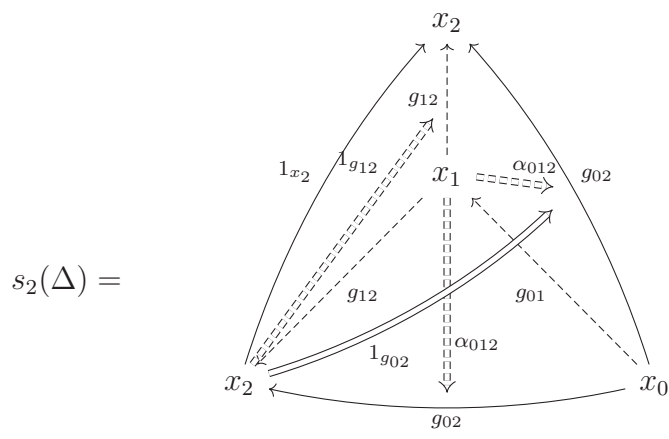
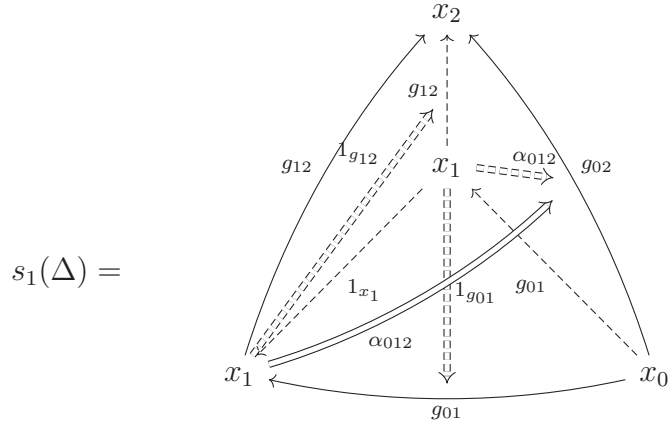
Observe que com a nossa notação, dado $n \geq 0$ e um i fixo, o mapa de face $d_i : N_n \mathbf{G} \rightarrow N_{n-1} \mathbf{G}$ corresponde ao $(n-1)$ -símplice cujo índice não contém o índice i .

O mapa degeneração $s_0 : G_0 \rightarrow G_1$ é o mapa unidade 1 do grupoide $G_1 \rightrightarrows G_0$. Dado um 1-símplice $x_1 \xleftarrow{g_{01}} x_0$, os mapas degenerações $s_0, s_1 : G_1 \rightarrow G_2$ são dados por:

$$s_0(g_{01}) = \begin{array}{c} x_0 \\ \swarrow g_{01} \quad \searrow 1_{x_0} \\ x_1 \quad \xleftarrow{g_{01}} \quad x_0 \\ \uparrow 1_{g_{01}} \\ x_0 \end{array} \qquad s_1(g_{01}) = \begin{array}{c} x_1 \\ \swarrow 1_{x_1} \quad \searrow g_{01} \\ x_1 \quad \xleftarrow{g_{01}} \quad x_0 \\ \uparrow 1_{g_{01}} \\ x_0 \end{array}$$

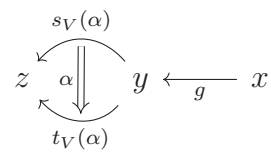
Já as degenerações de grau 2, $s_0, s_1, s_2 : G_2 \rightarrow N_3 \mathbf{G}$, para $\Delta = (\alpha_{012}; g_{12}, g_{02}, g_{01})$:

$$s_0(\Delta) = \begin{array}{c} x_2 \\ \swarrow g_{12} \quad \searrow g_{02} \\ x_1 \quad \xleftarrow{g_{01}} \quad x_0 \\ \uparrow 1_{g_{01}} \\ x_0 \\ \uparrow 1_{g_{01}} \\ x_0 \end{array}$$

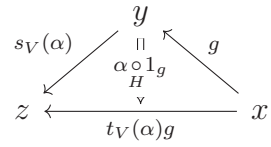


Observação 3.2.2. Para um 2-grupoide de Lie \mathbf{G} todos os mapas de faces $d_i : N_n \mathbf{G} \rightarrow N_{n-1} \mathbf{G}$ são submersões sobrejetoras, veja [16], Corolário 6.4.

Observação 3.2.3. Note que podemos identificar $N_2 \mathbf{G}$ com $G_{2s_H} \times_{t_H} G_1$, do seguinte modo: um elemento $(\alpha, g) \in G_{2s_H} \times_{t_H} G_1$:



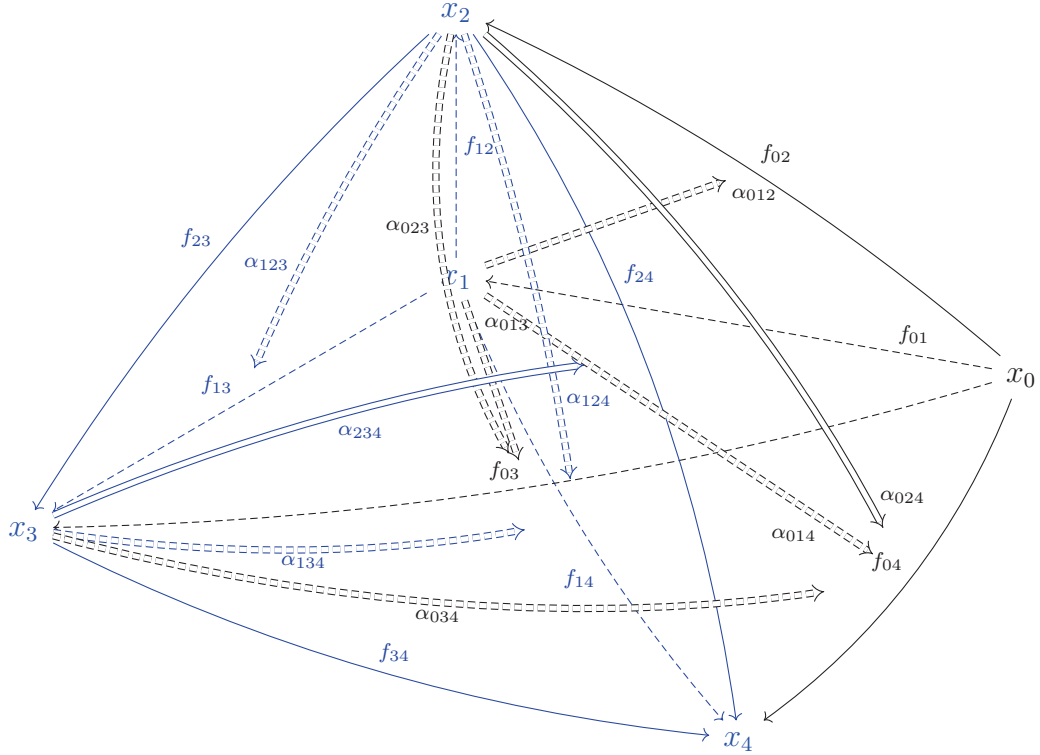
é identificado ao diagrama $(\alpha \circ_H 1_g, s_V(\alpha), t_V(\alpha)g, g) \in N_2 \mathbf{G}$:



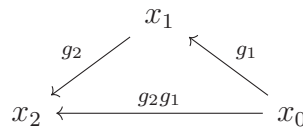
e portanto, com essa identificação os mapas de faces são dados por:

- $d_0(\alpha, g) = s_V(\alpha)$;
- $d_1(\alpha, g) = t_V(\alpha)g$;
- $d_2(\alpha, g) = g$.

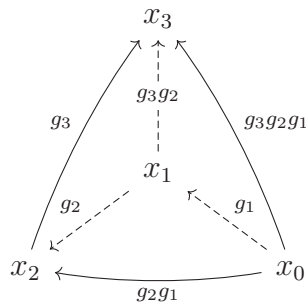
Observação 3.2.4. Um 4-símplice $\Phi \in N_4\mathbf{G}$ é totalmente expresso por quatro de suas cinco faces. Ora, por exemplo a face $d_0(\Phi)$ (em azul) está contida na união $d_1(\Phi) \cup d_2(\Phi) \cup d_3(\Phi) \cup d_4(\Phi)$, que é todo o 4-símplice:



Exemplo 3.2.4. Seja $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \rightrightarrows \mathcal{G}_1 \rightrightarrows \mathcal{G}_0$ um grupoide de Lie visto como um 2-grupoide. Então, note que para $n = 0, 1$, têm-se $N_0\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$ e $N_1\mathcal{G} = \mathcal{G}_1$, além disso, desde que 2-flechas em \mathcal{G} são identidades, segue que os 2-símplices e 3-símplices são isomorfos aos seguintes diagramas: para $n = 2$:



e para $n = 3$:



Portanto, como $N\mathcal{G}$ é um 3-coesqueleto, facilmente verifica-se que $N_n\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}_n$, isto é, o nervo $N\mathcal{G}$ é isomorfo ao nervo usual \mathcal{G}_\bullet .

Observação 3.2.5. Assim como no caso das categorias, o nervo define um funtor fiel e pleno, da categoria das 2-categorias pequenas para a categoria dos conjuntos simpliciais. Mais ainda, esse funtor se restringe em um funtor da categoria dos 2-grupoides de Lie para a categoria das variedades simpliciais. Com efeito, um morfismo de 2-grupoides de Lie $\phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$ é o mesmo que morfismo de variedades simpliciais $\phi : N\mathbf{G} \rightarrow N\mathbf{H}$.

3.2.2 2-grupoides de Lie fracos & Hypercovers

A abordagem utilizada na Seção 3.1, dada por meio da sobrejetividade de mapas naturais, torna possível uma mudança da linguagem conjuntista para o contexto diferenciável de maneira bastante simples. Na verdade, esse tipo de perspectiva remete à definição de uma **cobertura**. Mais precisamente, dada uma categoria \mathcal{C} , uma cobertura é uma subcategoria de \mathcal{C} , satisfazendo uma lista de axiomas, veja [36], Seção 1.

Para o caso da categoria dos conjuntos **Sets**, a subcategoria com mesmos objetos e cujos morfismos são funções sobrejetoras define uma cobertura, então, para realizar a passagem do contexto de conjuntos para o contexto de variedades diferenciáveis é necessário utilizar uma cobertura compatível que nesse caso é a subcategoria das variedades diferenciáveis com morfismos sendo submersões sobrejetoras.

Portanto, a mudança deve ser feita considerando variedades simpliciais em vez de conjuntos simpliciais; submersões sobrejetoras em vez de simplesmente funções sobrejetoras; e difeomorfismos em troca de funções bijetoras. Em particular, a definição de 2-grupoides de Lie fracos segue diretamente.

Definição 3.2.2. Seja X uma variedade simplicial. Diz-se que X é um **2-grupoide de Lie fraco** se cada espaço $\Lambda_k^n(X)$ é uma variedade simplicial, e os mapas naturais:

$$(d_0, \dots, \hat{d}_k, \dots, d_n) : X_n \rightarrow \Lambda_k^n(X)$$

são submersões sobrejetoras para $n \geq 0$, e difeomorfismos para $n > 2$, e $0 \leq k \leq n$.

Note que a única diferença entre um 1-grupoide de Lie fraco e um 2-grupoide de Lie fraco é que, para o primeiro caso, os mapas naturais $(d_0, \dots, \hat{d}_k, \dots, d_2) : X_2 \rightarrow \Lambda_k^2(X)$, para $k \in \{0, 1, 2\}$, devem ser difeomorfismos. Portanto, é claro que um 1-grupoide de Lie fraco é também um 2-grupoide de Lie fraco, na verdade, o mais simples exemplo de uma variedade simplicial que satisfaz as condições para ser um 2-grupoide de Lie fraco é o nervo de um grupoide de Lie:

Exemplo 3.2.5. Se $\mathcal{G}_1 \rightrightarrows \mathcal{G}_0$ é um grupoide de Lie, então seu nervo \mathcal{G}_\bullet é um 1-grupoide de Lie fraco. Mais ainda, se X é um 1-grupoide de Lie fraco, então X é isomorfo ao nervo de um grupoide de Lie.

Acontece que para o contexto de 2-grupoides de Lie, há um resultado equivalente, que, graças ao seguinte Lema, pode ser demonstrado de maneira simples.

Lema 3.2.1. Para $n > 4$, os mapas naturais:

$$(d_0, \dots, \hat{d}_k, \dots, d_n) : N_n \mathbf{G} \rightarrow \Lambda_k^n N \mathbf{G},$$

são difeomorfismos.

Observação 3.2.6. O Lema 3.2.1 é uma versão para $n = 3$, suave, do fato que conjuntos simpliciais que são n -cosqueletos possuem preenchimentos únicos para todos os chifres de dimensão pelo menos $n + 2$, veja uma prova para $n = 3$ em [33], Corolário 4.2, e para o resultado geral, veja [8], Seção 2.3.

Agora, será demonstrado o resultado principal desta subseção, que caracteriza 2-grupoides de Lie com suas versões simpliciais (fracas).

Proposição 3.2.1. \mathbf{G} é um 2-grupoide de Lie se, e somente se, seu nervo $N \mathbf{G}$ é um 2-grupoide de Lie fraco.

Demonstração.

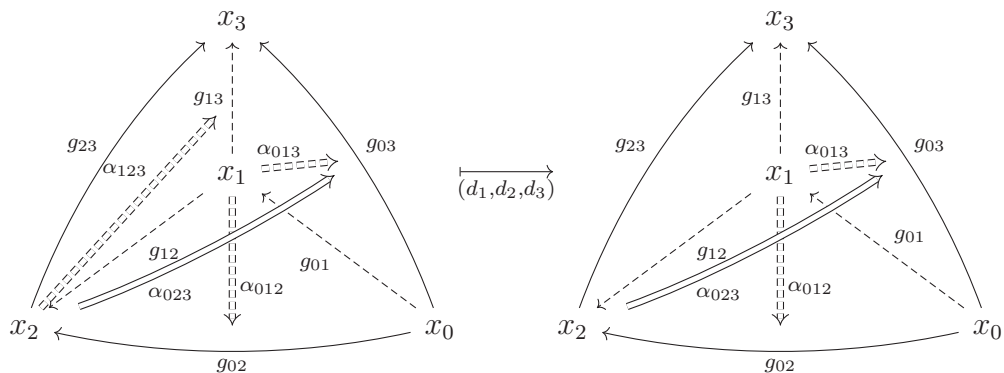
(\Rightarrow) Pelo Lema 3.2.1, é suficiente mostrar que os mapas naturais:

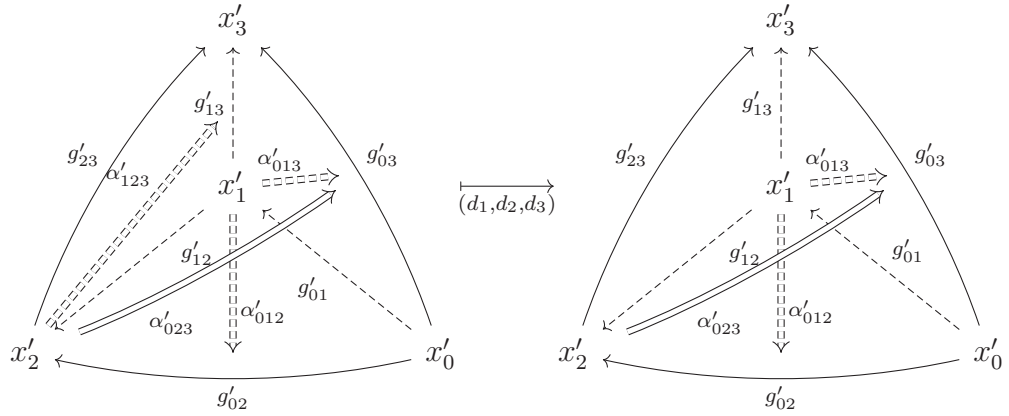
$$(d_0, \dots, \hat{d}_k, \dots, d_n) : N_n \mathbf{G} \rightarrow \Lambda_k^n(N \mathbf{G})$$

são submersões sobrejetoras para $n = 0, 1, 2$ e difeomorfismos para $n = 3, 4$. O caso $n = 0$ é trivial, além disso, desde que $N_1 \mathbf{G} = G_1$ e $\Lambda_0^1 N \mathbf{G} = G_0 = \Lambda_1^1 N \mathbf{G}$, o resultado para $n = 1$ segue do fato que os mapas de faces $d_0, d_1 : G_1 \rightarrow G_0$ são submersões sobrejetoras. Para $n \geq 2$, os mapas naturais:

$$(d_0, \dots, \hat{d}_k, \dots, d_n) : N_n \mathbf{G} \rightarrow \Lambda_k^n(N \mathbf{G})$$

satisfazem a condição como produto finito de submersões sobrejetoras, restando verificar que são injetivos para $n = 3, 4$. De fato, fixe $k = 0$, $n = 3$, e considere dois diagramas $\Theta, \Theta' \in N_3 \mathbf{G}$, isto é, Θ é composto por flechas $g_{ij} : x_i \rightarrow x_j$, e 2-flechas $\alpha_{ijk} : g_{ijk} \Rightarrow g_{ik}$, com $i, j, k \in \{0, \dots, 3\}$ e $i < j < k$. Em termos ilustrativos, têm-se que as imagens de Θ e Θ' por (d_1, d_2, d_3) são da forma:





Suponha que $(d_1, d_2, d_3)(\Theta) = (d_1, d_2, d_3)(\Theta')$, então obtemos que $g_{ij} = g'_{ij}$ para todos $i, j \in \{0, \dots, 3\}$, com $i < j$, e $\alpha_{ijk} = \alpha'_{ijk}$ para todos $i \in \{0, 2, 3\}$ e $j, k \in \{0, \dots, 3\}$, com $i < j < k$. Isto é, o requerimento que $(d_1, d_2, d_3)(\Theta) = (d_1, d_2, d_3)(\Theta')$, diz que caso Θ e Θ' sejam diferentes, diferem somente nas 2-flechas $\alpha_{123} : g_{123} \Rightarrow g_{13}$ e $\alpha'_{123} : g_{123} \Rightarrow g_{13}$, compare no diagrama acima. Mas como os diagramas são comutativos, segue que:

$$(\alpha_{123} \circ_H g_{01}) \circ_V \alpha_{013} = (g_{23} \circ_H \alpha_{012}) \circ_V \alpha_{023} = (\alpha'_{123} \circ_H g_{01}) \circ_V \alpha_{013},$$

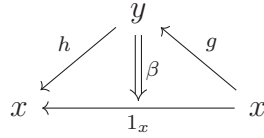
o que garante, pela invertibilidade das 2-flechas, que $\alpha_{123} = \alpha'_{123}$, e por conseguinte $\Theta = \Theta'$, provando a injetividade de (d_1, d_2, d_3) . Observe que para $k = 1, 2, 3$, o resultado é análogo, ora, a comutatividade dos diagramas garante a igualdade das 2-flechas que restam após a remoção da face d_k . Finalmente, para $n = 4$, para qualquer $k = 0, \dots, 4$, o mapa $(d_0, \dots, \hat{d}_k, \dots, d_4) : N_4 \mathbf{G} \rightarrow \Lambda_k^4(N\mathbf{G})$ é sempre injetivo, veja [8], Seção 6.3. Isso ocorre pelo fato que quatro das cinco faces de um 4-símplice o descrevem totalmente, vide Observação 3.2.4.

- (\Leftarrow) Suponha que $N\mathbf{G}$ seja um 2-grupoide de Lie fraco com \mathbf{G} uma 2-categoria pequena. Note que em particular, a construção do nervo de uma 2-categoria pequena é análogo ao de um 2-grupoide. Então, considere $g : x \rightarrow y$ uma flecha em \mathbf{G} . Como o mapa natural $(d_0, d_1) : N_2 \mathbf{G} \rightarrow \Lambda_2^2(N\mathbf{G})$ é uma submersão sobrejetora, existe um 2-símplice $(\alpha, g, 1_y, f) \in N_2 \mathbf{G}$:

$$\begin{array}{ccc} & x & \\ g \swarrow & & \nwarrow f \\ y & \xrightarrow{\alpha} & y \\ & \downarrow 1_y & \end{array} .$$

Isto é, $f : y \rightarrow x$ é uma inversa à direita de g . Similarmente, da sobrejetividade do

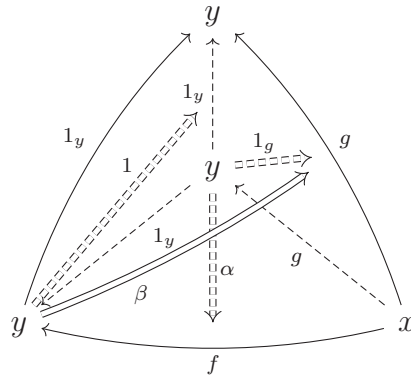
mapa natural $(d_1, d_2) : N_2\mathbf{G} \rightarrow \Lambda_0^2(N\mathbf{G})$, existe um 2-símplice $(\beta, h, 1_x, g) \in N_2\mathbf{G}$:



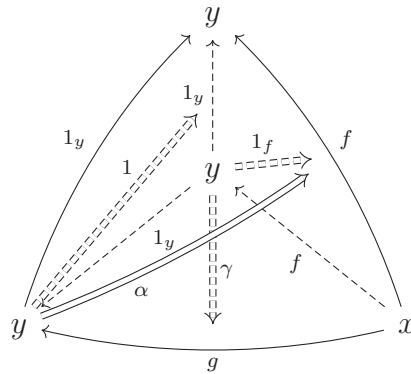
logo, nos fornece uma inversa à esquerda de g , $h : y \rightarrow x$, que na verdade é equivalente à f , uma vez que:

$$f = 1_x f = (hg)f = h(gf) = h1_x = h.$$

Com efeito, todo morfismo em \mathbf{G} é um isomorfismo, restando verificar o mesmo para 2-morfismos. De fato, seja $\alpha : g \Rightarrow f$ uma 2-flecha em \mathbf{G} . Desde que $(d_0, d_2, d_3) : N_3\mathbf{G} \rightarrow \Lambda_1^3(N\mathbf{G})$ é um difeomorfismo, existe um único 3-símplice em $N\mathbf{G}$, da forma:



isto é, existe uma 2-flecha $\beta : f \Rightarrow g$ que é uma inversa à direita de α . Do mesmo modo, como $(d_0, d_1, d_2) : N_3\mathbf{G} \rightarrow \Lambda_2^3(N\mathbf{G})$ é um difeomorfismo, segue que existe um único 3-símplice:



e por conseguinte, uma inversa à esquerda de α , $\gamma : f \Rightarrow g$. Mas, tem-se que:

$$\beta = 1_f \circ_V \beta = (\gamma \circ_V \alpha) \circ_V \beta = \gamma \circ_V (\alpha \circ_V \beta) = \gamma \circ_V 1_g = \gamma,$$

isto é, α é um isomorfismo. Finalmente, observe que a estrutura diferenciável do 2-grupoide \mathbf{G} , é induzida pela estrutura diferenciável do 2-grupoide de Lie fraco. \square

Agora, vamos traduzir a noção de fibração de Kan trivial para o contexto de 2-grupoides de Lie fracos.

Definição 3.2.3. Seja $\phi : X \rightarrow Y$ um morfismo de 2-grupoides de Lie fracos. Então, ϕ é uma **hypercover** se, o produto fibrado $M_n(X) \times_{M_n(Y)} Y_n$ é uma variedade diferenciável, e os mapas naturais:

$$((d_0, \dots, d_n), \phi) : X_n \rightarrow M_n(X) \times_{M_n(Y)} Y_n$$

são submersões sobrejetoras para todo $n < 2$, e difeomorfismos para $n \geq 2$.

Hypercovers podem ser vistos como fibrações de Morita no contexto de grupoides de Lie fracos, veremos isso com mais precisão na Seção 3.3.

Esses morfismos específicos de 2-grupoides de Lie fracos, satisfazem diversas propriedades, veja [36], Seção 2, para algumas demonstrações. Na verdade, a categoria dos 2-grupoides de Lie fracos é uma categoria de objetos fibrantes, que é essencialmente como uma categoria modelo de Quillen, mas sem os axiomas referentes as cofibrações. Para uma explanação precisa, veja [4], Seção 3, mais especificamente a partir do Teorema 3.6.

Aqui, daremos enfoque somente as principais propriedades que fazem com que essa categoria se torne de objetos fibrantes, particularmente às que darão subsídio à teoria das próximas seções.

Proposição 3.2.2. *Dadas duas hypercovers $\phi : X \rightarrow Y$ e $\psi : Y \rightarrow Z$, então a composição $\psi \circ \phi : X \rightarrow Z$ é uma hypercover.*

Demonstração. Dado $n \geq 0$, o quadrado no seguinte diagrama comutativo é um pull-back:

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{\alpha} & M_n(X) \times_{M_n(Y)} Y_n & \longrightarrow & Y_n \\ & \searrow \lambda & \downarrow \gamma & & \downarrow \beta \\ & & M_n(X) \times_{M_n(Z)} Z_n & \longrightarrow & M_n(Y) \times_{M_n(Z)} Z_n \end{array} .$$

Desde que ψ é uma hypercover, segue que β é uma submersão sobrejetora para $n < 2$ e um difeomorfismo para $n \geq 2$, e por conseguinte o mapa pullback γ satisfaz as mesmas propriedades. Mas como ϕ é também uma hypercover, temos que α é uma submersão sobrejetora para $n < 2$ e um difeomorfismo para $n \geq 2$, logo, do fato que o triângulo no diagrama é comutativo, o mesmo ocorre para λ , como composição de α e γ . Portanto, $\psi \circ \phi$ é uma hypercover. \square

Proposição 3.2.3. *Sejam $\phi : X \rightarrow Z$ uma hypercover e $\psi : Y \rightarrow Z$ um morfismo de 2-grupoides de Lie fracos. Então, a projeção mapa $pr_2 : X \times_Z Y \rightarrow Y$ no pullback:*

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z Y & \longrightarrow & X \\ pr_2 \downarrow & & \downarrow \phi \\ Y & \xrightarrow{\psi} & Z \end{array}$$

é uma hypercover.

Demonstração. Dado $n \geq 0$, o seguinte quadrado é um pullback:

$$\begin{array}{ccc} X_n \times_{Z_n} Y_n & \longrightarrow & X_n \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ M_n(X \times_Z Y) \times_{M_n(Y)} Y_n & \longrightarrow & M_n(X) \times_{M_n(Z)} Z_n \end{array} .$$

Como ϕ é uma hypercover, β é uma submersão sobrejetora para $n < 2$ e um difeomorfismo para $n \geq 2$, portanto, o mapa pullback α satisfaz as mesmas propriedades, isto é, pr_2 é uma hypercover. \square

Proposição 3.2.4. *Se $\phi : X \rightarrow Y$ e $\psi : Y \rightarrow Z$ são morfismos de 2-grupoides de Lie fracos tais que ψ e $\psi \circ \phi$ são equivalências fracas, então ϕ é uma equivalência fraca.*

Demonstração. Veja Lema 3.27 em [4]. \square

3.3 2-fibrações de Morita vs Hypercovers

O funtor nervo é a ponte entre a teoria de homotopia de 2-grupoides e a teoria de homotopia de conjuntos simpliciais, veja [28] e [26]. Mais especificamente, fibrações de 2-grupoides induzem fibrações de Kan no nervo, e equivalências de 2-grupoides induzem equivalências homotópicas no nervo.

No nosso caso, uma 2-fibração de Morita de 2-grupoides de Lie é um morfismo que é tanto uma fibração quanto uma equivalência de 2-grupoides e ainda é compatível com uma estrutura diferenciável. Além disso, uma hypercover é uma fibração de Kan trivial que é suave. Portanto, é natural pensar que uma 2-fibração de Morita de 2-grupoides de Lie induz uma hypercover em seus nervos (que são 2-grupoides de Lie fracos), bem como, uma hypercover de 2-grupoides de Lie fracos torna-se uma 2-fibração de Morita nos 2-grupoides de Lie associados.

Para o caso de grupoides de Lie, na Seção 2.3, [6], é demonstrado o fato que fibrações de Morita induzem hypercovers de 1-grupoides de Lie fracos, bem como o recíproco desse resultado, mais precisamente, demonstra-se o seguinte Teorema.

Teorema 3.3.1. *Seja $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ um morfismo de grupoides de Lie. Então, ϕ é uma fibração de Morita se, e somente se, $\phi_\bullet : \mathcal{G}_\bullet \rightarrow \mathcal{H}_\bullet$ é uma hypercover.*

Nesta seção, vamos construir o resultado análogo superior, para 2-grupoides de Lie. Para isso, primeiramente será introduzido o seguinte Lema, que será de utilidade durante a prova do resultado.

Lema 3.3.1. *Seja $\phi : X \rightarrow Y$ uma fibração de 2-grupoides de Lie fracos. Se o produto fibrado $M_n(X) \times_{M_n(Y)} Y_n$ é uma variedade diferenciável e os mapas naturais:*

$$((d_0, \dots, d_n), \phi) : X_n \rightarrow M_n(X) \times_{M_n(Y)} Y_n$$

são submersões sobrejetoras para todo $n < 2$ e é um difeomorfismo para $n = 2$, então $\phi : X \rightarrow Y$ é um hypercover.

Demonstração. É suficiente verificar que para $n > 2$, os mapas naturais:

$$((d_0, \dots, d_n), \phi) : X_n \rightarrow M_n(X) \times_{M_n(Y)} Y_n$$

são difeomorfismos. De fato, dado $n > 2$ e $i \in \{0, \dots, n\}$, o quadrado no seguinte diagrama comutativo é um pullback, veja Lema 3.12, [4]:

$$\begin{array}{ccccc} X_n & \xrightarrow{\beta} & M_n(X) \times_{M_n(Y)} Y_n & \longrightarrow & X_{n-1} \\ & \searrow \alpha & \downarrow \xi & & \downarrow \gamma \\ & & \Lambda_i^n(X) \times_{\Lambda_i^n Y} Y_n & \xrightarrow{\lambda} & M_{n-1}(X) \times_{M_{n-1}(Y)} Y_{n-1} \end{array} .$$

Além disso, como ϕ é uma fibração, para todo $n \geq 2$, α é um difeomorfismo. Agora, fixe $n = 3$, então γ é um difeomorfismo por suposição, e desde que o quadrado é um pullback, ξ também o é. Portanto, como o diagrama comuta, β é um difeomorfismo, logo, o resultado segue por indução em n . \square

Agora, demonstraremos o resultado principal desta seção.

Teorema 3.3.2. *Seja $\phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$ um morfismo de 2-grupoides de Lie. Então, ϕ é uma 2-fibração de Morita se, e somente se, $\phi : N\mathbf{G} \rightarrow N\mathbf{H}$ é uma hypercover.*

Demonstração.

(\Rightarrow) É necessário mostrar que os mapas naturais:

$$((d_0, \dots, d_n), \phi) : N_n \mathbf{G} \rightarrow M_n(N\mathbf{G}) \times_{M_n(N\mathbf{H})} N_n \mathbf{H} \quad (3.1)$$

são submersões sobrejetoras para $n < 2$ e difeomorfismos para $n \geq 2$. Por definição, uma 2-fibração de Morita é, de modo que, $\phi_0 : G_0 \rightarrow H_0$ é uma submersão sobrejetora e cuja restrição $\phi : (G_2 \rightrightarrows G_1) \rightarrow (\phi_0^* H_2 \rightrightarrows \phi_0^* H_1)$, é uma fibração de Morita,

isto é, $(t_H, \phi_1, s_H) : G_1 \rightarrow \phi_0^* H_1$ é uma submersão sobrejetora e o mapa:

$$((s_V, t_V), (t_H, \phi_2, s_H)) : G_2 \rightarrow (G_1 \times G_1) \times_{\phi_0^* H_1 \times \phi_0^* H_1} \phi_0^* H_2, \quad (3.2)$$

é um difeomorfismo. Com efeito, os casos para $n = 0, 1$ em (3.1) são satisfeitos, logo, é suficiente verificar que para $n \geq 2$, (3.1) é um difeomorfismo. Primeiramente, note que o mapa natural:

$$((\text{id}, \text{id}), \text{pr}_2) : (G_1 \times G_1) \times_{\phi_0^* H_1 \times \phi_0^* H_1} \phi_0^* H_2 \rightarrow (G_1 \times G_1) \times_{H_1 \times H_1} H_2, \quad (3.3)$$

define um difeomorfismo. De fato, é claramente uma submersão sobrejetora, como produto de submersões sobrejetoras, logo, resta perceber que é injetor. Para isso, observe que elementos em $(G_1 \times G_1) \times_{\phi_0^* H_1 \times \phi_0^* H_1} \phi_0^* H_2$ consistem de triplos

$$(g, h, (t_H(g), \beta, s_H(h))),$$

que em diagramas são representados da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} & g & \\ & \curvearrowright & \\ y & & x \\ & \curvearrowleft & \\ & h & \end{array} \quad y \quad \begin{array}{ccc} & \phi(g) & \\ & \parallel & \\ y & \phi(y) & \beta & \phi(x) & x \\ & \downarrow & \\ & \phi(h) & \end{array}$$

Agora, sejam $(g_1, h_1, (t_H(g_1), \beta_1, s_H(h_1)))$ e $(g_2, h_2, (t_H(g_2), \beta_2, s_H(h_2)))$ elementos em $(G_1 \times G_1) \times_{\phi_0^* H_1 \times \phi_0^* H_1} \phi_0^* H_2$, de modo que:

$$((\text{id}, \text{id}), \text{pr}_2)(g_1, h_1, (t_H(g_1), \beta_1, s_H(h_1))) = ((\text{id}, \text{id}), \text{pr}_2)(g_2, h_2, (t_H(g_2), \beta_2, s_H(h_2))),$$

então, segue que $(g_1, h_1, \beta_1) = (g_2, h_2, \beta_2)$, isto é, $g_1 = g_2$, $h_1 = h_2$ e $\beta_1 = \beta_2$, logo, $t_H(g_1) = t_H(g_2)$ e $s_H(h_1) = s_H(h_2)$, portanto, $(g_1, h_1, (t_H(g_1), \beta_1, s_H(h_1))) = (g_2, h_2, (t_H(g_2), \beta_2, s_H(h_2)))$, garantindo a injetividade de (3.3).

Desde que (3.2) e (3.3) são difeomorfismos, a composição:

$$\begin{array}{ccc} G_2 & \xrightarrow{((s_V, t_V), \phi_2)} & (G_1 \times G_1) \times_{H_1 \times H_1} H_2 \\ & \searrow^{((s_V, t_V), (t_H, \phi_2, s_H))} & \uparrow^{((\text{id}, \text{id}), \text{pr}_2)} \\ & & (G_1 \times G_1) \times_{\phi_0^* H_1 \times \phi_0^* H_1} \phi_0^* H_2 \end{array} \quad (3.4)$$

é também um difeomorfismo, mais ainda, (3.4) se restringe em um difeomorfismo

nas identidades ($G_1 \subset G_2$):

$$(\text{id}, \phi_1) : G_1 \rightarrow G_1 \times_{H_0} H_1. \quad (3.5)$$

Finalmente, pela Observação 3.2.3, $N_2\mathbf{G}$ pode ser identificado com $G_{2s_H} \times_{t_H} G_1$, logo para $n = 2$, o mapa (3.1) pode ser reescrito como:

$$((d_0, d_1, d_2), \phi_2 \times \phi_1) : G_{2s_H} \times_{t_H} G_1 \rightarrow M_2(N\mathbf{G}) \times_{M_2(N\mathbf{H})} H_{2s_H} \times_{t_H} H_1,$$

que nada mais é do que, uma restrição do mapa produto dos difeomorfismos (3.4) e (3.5), e portanto, um difeomorfismo. Sendo para $n = 2$ um difeomorfismo, o resultado segue do Lema 3.3.1.

(\Leftarrow) Suponha que:

$$((d_0, \dots, d_n), \phi) : N_n\mathbf{G} \rightarrow M_n(N\mathbf{G}) \times_{M_n(N\mathbf{H})} N_n\mathbf{H}$$

são submersões sobrejetoras para $n < 2$ e difeomorfismos para $n \geq 2$. Então, pondo $n = 0, 1$, segue diretamente que $\phi_0 : G_0 \rightarrow H_0$ e $(t_H, \phi_1, s_H) : G_1 \rightarrow \phi_0^*H_1$ são submersões sobrejetoras. Logo, resta verificar que $\phi : (G_2 \rightrightarrows G_1) \rightarrow (\phi_0^*H_2 \rightrightarrows \phi_0^*H_1)$ é uma fibração de Morita. Por suposição, para $n = 2$ o seguinte mapa é um difeomorfismo:

$$\begin{aligned} ((d_0, d_1, d_2), (\phi_2 \times \phi_1)) : G_{2s_H} \times_{t_H} G_1 &\rightarrow M_2(N\mathbf{G}) \times_{M_2(N\mathbf{H})} H_{2s_H} \times_{t_H} H_1 \\ (\alpha, g) &\mapsto (s_V(\alpha), t_V(\alpha)g, g, (\phi_2(\alpha), \phi_1(g))). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Então, restringindo à variedade das 2-flechas G_2 , obtemos o difeomorfismo:

$$((s_V, t_V), \phi_2) : G_2 \rightarrow (G_1 \times G_1) \times_{H_1} H_2.$$

Note que essa restrição é feita utilizando identidades em um ponto, isto é, substituindo g em (3.6), por uma identidade 1_x .

No entanto, esse mapa pode ser visto como a composição:

$$\begin{array}{ccc} G_2 & \xrightarrow{((s_V, t_V), \phi_2)} & (G_1 \times G_1) \times_{H_1 \times H_1} H_2 \\ & \searrow^{((s_V, t_V), (t_H, \phi_2, s_H))} & \uparrow^{((\text{id}, \text{id}), \text{pr}_2)} \\ & & (G_1 \times G_1) \times_{\phi_0^*H_1 \times \phi_0^*H_1} \phi_0^*H_2 \end{array}$$

em particular, como $((\text{id}, \text{id}), \text{pr}_2)$ é um difeomorfismo, veja (3.3), segue que o mapa:

$$((s_V, t_V), (t_H, \phi_2, s_H)) : G_2 \rightarrow (G_1 \times G_1) \times_{\phi_0^* H_1 \times \phi_0^* H_1} \phi_0^* H_2,$$

é também um difeomorfismo, e portanto, $\phi : (G_2 \rightrightarrows G_1) \rightarrow (\phi_0^* H_2 \rightrightarrows \phi_0^* H_1)$ é uma fibração de Morita. \square

Essa nova caracterização das 2-fibrações de Morita torna possível a verificação de algumas de suas propriedades de maneira bastante simples, na verdade, basta tomar o funtor nervo e verificar as propriedades no contexto simplicial.

Proposição 3.3.1. *As 2-fibrações de Morita satisfazem as seguintes propriedades:*

- (1) *Para todo 2-grupoide de Lie \mathbf{G} , o morfismo identidade $\text{id} : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ é uma 2-fibração de Morita;*
- (2) *Dadas $\phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$ e $\psi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{J}$ duas 2-fibrações de Morita, então a composição $\psi \circ \phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{J}$ é uma 2-fibração de Morita;*
- (3) *Dados $\phi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{J}$ uma 2-fibração de Morita e $\psi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{J}$ um morfismo de 2-grupoide de Lie, como no diagrama:*

$$\mathbf{G} \xrightarrow{\psi} \mathbf{J} \xleftarrow[\sim]{\phi} \mathbf{H}$$

então existem, um outro 2-grupoide de Lie \mathbf{K} , e um par de morfismos de 2-grupoide de Lie $\xi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{K}$ e $\chi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{K}$, onde χ é uma 2-fibração de Morita, isto é, existe um diagrama:

$$\mathbf{G} \xrightarrow[\sim]{\chi} \mathbf{K} \xleftarrow{\xi} \mathbf{H}$$

de modo que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{K} & \\ \chi \swarrow & & \searrow \xi \\ \mathbf{G} & & \mathbf{H} \\ \psi \searrow & & \swarrow \phi \\ & \mathbf{J} & \end{array} \cdot$$

- (4) *Sejam $\phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$ uma 2-fibração de Morita e $\psi, \psi' : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{J}$ um par de morfismos de 2-grupoide de Lie, como no diagrama:*

$$\mathbf{G} \xrightarrow[\sim]{\phi} \mathbf{H} \begin{array}{c} \xrightarrow{\psi} \\ \xrightarrow{\psi'} \end{array} \mathbf{J} \cdot$$

Se $\psi \circ \phi = \psi' \circ \phi$, então $\psi = \psi'$.

Demonstração.

- (1) Segue diretamente da definição de 2-fibrações de Morita, veja Definição 1.2.3.
- (2) Fazendo uso da caracterização dada pelo Teorema 3.3.2, $\psi \circ \phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{J}$ é uma 2-fibração de Morita se, e somente se, o mapa induzido $\psi \circ \phi : N\mathbf{G} \rightarrow N\mathbf{J}$ é uma hypercover. De fato, também pelo Teorema 3.3.2, como ϕ e ψ são 2-fibrações de Morita, segue que os mapas induzidos são hypercovers, logo, o resultado segue da Proposição 3.2.2.
- (3) Defina o 2-grupoide de Lie do produto fibrado $\mathbf{H} \times_J \mathbf{G}$. Então, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H} \times_J \mathbf{G} & \xrightarrow{\text{pr}_1} & \mathbf{H} \\ \text{pr}_2 \downarrow & & \sim \downarrow \phi \cdot \\ \mathbf{G} & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{J} \end{array}$$

Em particular, o diagrama comutativo induzido no nervo é um pullback:

$$\begin{array}{ccc} N\mathbf{H} \times_{N\mathbf{J}} N\mathbf{G} & \xrightarrow{\text{pr}_1} & N\mathbf{H} \\ \text{pr}_2 \downarrow & & \downarrow \phi \cdot \\ N\mathbf{G} & \xrightarrow{\psi} & N\mathbf{J} \end{array}$$

Pelo Teorema 3.3.2, segue que $\text{pr}_2 : \mathbf{H} \times_J \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ é uma 2-fibração de Morita se, e somente se, $\text{pr}_2 : N\mathbf{H} \times_{N\mathbf{J}} N\mathbf{G} \rightarrow N\mathbf{G}$ é uma hypercover. Portanto, o resultado segue da Proposição 3.2.3.

- (4) Como ψ é uma 2-fibração de Morita, $\phi_0 : G_0 \rightarrow H_0$ e $\phi_1 : G_1 \rightarrow H_1$ são sobrejetoras e ϕ é fiel e pleno nos 2-morfismos. Portanto, para todo $y \in H_0$, existe $x \in G_0$ de modo que $\phi_0(x) = y$, logo:

$$\psi_0(y) = \psi_0 \circ \phi_0(x) = \psi'_0 \circ \phi_0(x) = \psi'_0(y).$$

Similarmente, para $h \in H_1$, existe $g \in G_1$ tal que $\phi_1(g) = h$, donde segue que:

$$\psi_1(h) = \psi_1 \circ \phi_1(g) = \psi'_1 \circ \phi_1(g) = \psi'_1(h).$$

Finalmente, do fato que ϕ é fiel e pleno nos 2-morfismos, segue que para qualquer $\beta \in H_2$, existe um único $\alpha \in G_2$, de modo que $\phi_2(\alpha) = \beta$, e portanto:

$$\psi_2(\beta) = \psi_2 \circ \phi_2(\alpha) = \psi'_2 \circ \phi_2(\alpha) = \psi'_2(\beta),$$

isto é, $\psi = \psi'$. □

Capítulo 4

$[G \rightarrow H]$ -fibrados principais sobre grupoides de Lie

A noção de um 2-grupo de Lie motiva uma definição de fibrados principais nesse contexto. Como já visto na Seção 1.3, um G -fibrado principal pode ser pensado como um morfismo generalizado de grupoides, nesse sentido, é possível generalizar essa abordagem para o contexto 2-categórico, primeiramente definindo um morfismo generalizado de 2-grupoides, para logo após, tratar de $[G \rightarrow H]$ -fibrados principais, sempre realizando um paralelo entre as abordagens de 2-grupoides e de módulos cruzados. Tudo isso será realizado durante este capítulo que têm como principais referências [11] e [27].

4.1 Morfismos generalizados de 2-grupoides de Lie

Morfismos generalizados de 2-grupoides de Lie são uma direta generalização de morfismos generalizados de grupoides de Lie. Mais precisamente, um morfismo generalizado de 2-grupoides de Lie é dado, primeiro substituindo um 2-grupo de Lie por um 2-Morita equivalente, logo após, mapeia esse último por um morfismo de 2-grupoides de Lie.

Definição 4.1.1. Um **morfismo generalizado** de 2-grupoides de Lie $\psi/\phi : \mathbf{G} \rightsquigarrow \mathbf{H}$, é um par de morfismos de 2-grupoides de Lie:

$$\mathbf{G} \xleftarrow[\sim]{\phi} \mathbf{G}' \xrightarrow{\psi} \mathbf{H}$$

onde ϕ é uma 2-fibração de Morita.

Observação 4.1.1. É possível reescrever a noção de morfismos generalizados de 2-grupoides de Lie no contexto de módulos cruzados. Mais especificamente, um morfismo generalizado

de 2-grupoides de Lie:

$$\begin{array}{ccccc}
G_2 & \xleftarrow{\phi_2} & G'_2 & \xrightarrow{\psi_2} & H_2 \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
G_1 & \xleftarrow{\phi_1} & G'_1 & \xrightarrow{\psi_1} & H_1 \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
G_0 & \xleftarrow{\phi_0} & G'_0 & \xrightarrow{\psi_0} & H_0
\end{array}$$

induz um morfismo generalizado nos módulos cruzados associados:

$$\begin{array}{ccccc}
X_G & \xleftarrow{\phi_2} & X_{G'} & \xrightarrow{\psi_2} & X_H \\
t_V \downarrow & & t_V \downarrow & & \downarrow t_V \\
G & \xleftarrow{\phi_1} & G' & \xrightarrow{\psi_1} & H
\end{array}$$

Dados dois morfismos generalizados de 2-grupoides de Lie $\psi/\phi : \mathbf{G} \rightsquigarrow \mathbf{H}$ e $\psi'/\phi' : \mathbf{H} \rightsquigarrow \mathbf{J}$, o morfismo generalizado dado pela composição $\psi'/\phi' \circ \psi/\phi$ é definido por $\psi' \circ \text{pr}_2/\phi \circ \text{pr}_1 : \mathbf{G} \rightsquigarrow \mathbf{J}$:

$$\begin{array}{ccccc}
& & \mathbf{G}' \times_{\mathbf{H}} \mathbf{H}' & & \\
& \swarrow \text{pr}_1 & & \searrow \text{pr}_2 & \\
& \mathbf{G}' & & \mathbf{H}' & \\
& \swarrow \phi & & \swarrow \phi' & \searrow \psi' \\
\mathbf{G} & & \mathbf{H} & & \mathbf{J}
\end{array}$$

Exemplo 4.1.1. Qualquer morfismo de 2-grupoides de Lie $\phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$ pode ser visto como um morfismo generalizado $\phi/\text{id}_{\mathbf{G}} : \mathbf{G} \rightsquigarrow \mathbf{H}$. Em particular, para um 2-grupoide de Lie \mathbf{G} , o morfismo generalizado identidade é por definição $\text{id} := \text{id}_{\mathbf{G}}/\text{id}_{\mathbf{G}} : \mathbf{G} \rightsquigarrow \mathbf{G}$.

Uma 2-fibração de Morita $\phi : \mathbf{G} \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}$ vista como um morfismo generalizado $\phi/\text{id}_{\mathbf{G}}$, é denotada por uma biflecha $\phi/\text{id}_{\mathbf{G}} : \mathbf{G} \rightleftarrows \mathbf{H}$.

Exemplo 4.1.2. Dados \mathbf{H} e \mathbf{G} 2-grupoides de Lie e $f : M \rightarrow H_0$ uma submersão sobrejetora. Então, qualquer morfismo $\phi : f_0^* \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{G}$ induz um morfismo generalizado $\phi/\bar{f} : \mathbf{H} \rightsquigarrow \mathbf{G}$, onde:

$$\begin{array}{ccccc}
H_2 & \xleftarrow{\text{pr}_2} & f_0^* H_2 & \xrightarrow{\phi_2} & G_2 \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
H_1 & \xleftarrow{\text{pr}_2} & f_0^* H_1 & \xrightarrow{\phi_1} & G_1 \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
H_0 & \xleftarrow{f} & M & \xrightarrow{\phi_0} & G_0
\end{array}$$

É possível formalizar a noção de morfismos generalizados de 2-grupoides de Lie via cálculo de frações, assim como no caso dos grupoides de Lie. Para tanto, é necessário estender a noção de equivalência entre morfismos de grupoides para o caso de 2-categorias, isto é, introduzir o conceito de uma 2-transformação natural entre morfismos de 2-grupoides de Lie:

Definição 4.1.2. Sejam $\phi, \psi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$ morfismos de 2-grupoides de Lie. Então, uma **2-transformação natural** $\tau : \phi \Rightarrow \psi$ é dada por um par de mapas suaves:

$$\begin{array}{ccc} G_2 & & H_2 \\ \Downarrow & \nearrow \tau_1 & \Downarrow \\ G_1 & & H_1 \\ \Downarrow & \nearrow \tau_0 & \Downarrow \\ G_0 & & H_0 \end{array}$$

sujeitos às seguintes condições:

- para todo $x \in G_0$, $\tau(x) \in H_1$ é uma flecha da forma:

$$\psi(x) \xleftarrow{\tau(x)} \phi(x)$$

- para toda flecha $y \xleftarrow{g} x \in G_1$, $\tau(g) \in H_2$ é uma 2-flecha da forma:

$$\begin{array}{ccc} & \psi(g)\tau(x) & \\ & \longleftarrow & \\ \psi(y) & \xleftarrow{\tau(g)} & \phi(x) \\ & \longrightarrow & \\ & \tau(y)\phi(g) & \end{array}$$

- para todo par de flechas componíveis $z \xleftarrow{g} y \xleftarrow{h} x$ em \mathbf{G} , a seguinte igualdade é satisfeita em \mathbf{H} :

$$\tau(gh) = \tau(g) \circ_H 1_{\tau(y)^{-1}} \circ_H \tau(h).$$

- para toda 2-flecha em \mathbf{G} :

$$\begin{array}{ccc} & g & \\ & \longleftarrow & \\ y & \xleftarrow{\alpha} & x \\ & \longrightarrow & \\ & h & \end{array}$$

o seguinte diagrama de 2-flechas comuta em $H_2 \rightrightarrows H_1$:

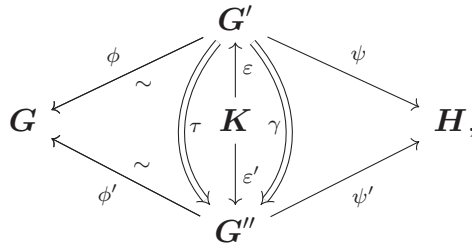
$$\begin{array}{ccc}
 \psi(g)\tau(x) & \xrightarrow{\tau(g)} & \tau(y)\phi(g) \\
 \psi(\alpha) \circ_H 1_{\tau(x)} \Downarrow & & \Downarrow 1_{\tau(y)} \circ_H \phi(\alpha) \\
 \psi(h)\tau(x) & \xrightarrow{\tau(h)} & \tau(y)\phi(h)
 \end{array}$$

Grosso modo, uma 2-transformação natural é dada por um par de transformações naturais de morfismos de grupoides, uma em cada par de componentes do morfismo de 2-grupoides, junto com condições de compatibilidade com as multiplicações de flechas e 2-flechas.

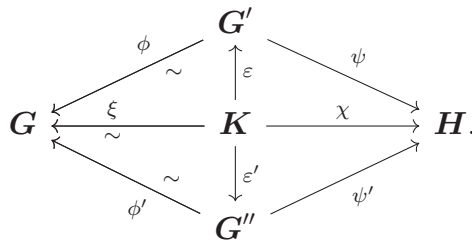
Definição 4.1.3. Dois morfismos de 2-grupoides de Lie $\phi, \psi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$ são **equivalentes**, isto é $\phi \cong \psi$, se existe uma 2-transformação natural $\phi \Rightarrow \psi$.

Com isso posto, é possível estender a noção de equivalência de morfismos generalizados para o caso de 2-grupoides:

Definição 4.1.4. Dois morfismos generalizados de 2-grupoides de Lie $\psi/\phi, \psi'/\phi' : \mathbf{G} \rightsquigarrow \mathbf{H}$ são ditos **2-equivalentes** se existem, um terceiro 2-grupoide de Lie \mathbf{K} , um par de morfismos de 2-grupoides de Lie $\varepsilon : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{G}'$ e $\varepsilon' : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{G}''$, e um par de 2-transformações naturais $\tau : \phi \circ \varepsilon \Rightarrow \phi' \circ \varepsilon'$ e $\gamma : \psi \circ \varepsilon \Rightarrow \psi' \circ \varepsilon'$:



de modo que $\xi := \phi \circ \varepsilon = \phi' \circ \varepsilon'$ e $\chi := \psi \circ \varepsilon = \psi' \circ \varepsilon'$, se tornam um morfismo generalizado $\chi/\xi : \mathbf{G} \rightsquigarrow \mathbf{H}$, como no diagrama:



Observação 4.1.2. Note que isso define uma relação de equivalência fraca que satisfaz as três seguintes propriedades: (1) Se existe uma 2-transformação natural $\phi \Rightarrow \psi$, então ϕ/id e ψ/id são equivalentes como morfismos generalizados; (2) Se ϕ é uma 2-fibração de Morita, então o morfismo generalizado ϕ/ϕ é equivalente ao morfismo generalizado identidade

id; (3) As composições à direita e à esquerda com um terceiro morfismo generalizado preservam a equivalência. Logo, a Definição 4.1.4 concorda com a noção de equivalência de morfismos generalizados dada em [11].

A partir daqui, assim como no caso de grupoides, consideraremos um morfismo generalizado ψ/ϕ como sendo a classe de equivalência do par (ψ, ϕ) .

Exemplo 4.1.3. Sejam $\psi/\phi, \psi'/\phi' : \mathbf{G} \rightsquigarrow \mathbf{H}$ dois morfismos generalizados. Suponha que existe um morfismo de 2-grupoides de Lie $\xi : \mathbf{G}' \rightarrow \mathbf{G}''$, de modo que o seguinte diagrama comuta a menos de 2-transformações:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbf{G}' & & \\
 & \phi \swarrow & \downarrow \xi & \searrow \psi & \\
 \mathbf{G} & & & & \mathbf{H} \\
 & \phi' \swarrow & \downarrow \xi & \searrow \psi' & \\
 & & \mathbf{G}'' & &
 \end{array}$$

\sim (entre ϕ e ϕ') \sim (entre ψ e ψ')

Então, $\phi' \circ \xi$ é uma 2-fibração de Morita, e por conseguinte, $\psi' \circ \xi/\phi' \circ \xi : \mathbf{G} \rightsquigarrow \mathbf{H}$ é um morfismo generalizado, isto é, ψ/ϕ e ψ'/ϕ' são equivalentes.

Exemplo 4.1.4. Sejam \mathbf{G} e \mathbf{H} 2-grupoides de Lie 2-Morita equivalentes, isto é, existe um terceiro 2-grupoide de Lie \mathbf{J} e uma cadeia de 2-fibrações de Morita $\mathbf{G} \xleftarrow{\phi} \mathbf{J} \xrightarrow{\psi} \mathbf{H}$. Então, isso define dois morfismos generalizados $\psi/\phi : \mathbf{G} \rightsquigarrow \mathbf{H}$ e $\phi/\psi : \mathbf{H} \rightsquigarrow \mathbf{G}$, cujas composições $\psi/\phi \circ \phi/\psi : \mathbf{G} \rightsquigarrow \mathbf{G}$ e $\phi/\psi \circ \psi/\phi : \mathbf{H} \rightsquigarrow \mathbf{H}$ são equivalentes aos morfismos identidades.

Considere $\mathbf{2gpd}_0$ a categoria quociente obtida de $\mathbf{2gpd}$ identificando dois morfismos equivalentes. Seja $2FM$ a classe de morfismos em $\mathbf{2gpd}_0$ que são 2-fibrações de Morita. Note que pela Proposição 3.3.1, $2FM$ é um sistema multiplicativo na categoria $\mathbf{2gpd}_0$, logo, é possível considerar a localização $\mathbf{2Gpd}_0[2FM^{-1}]$ de $\mathbf{2Gpd}_0$ com respeito à $2FM$. Portanto, a nova categoria $\mathbf{2Gpd}_0[2FM^{-1}]$, possui os mesmos objetos que $\mathbf{2Gpd}$, mas suas flechas são classes de equivalência de morfismos generalizados. Logo, um morfismo generalizado pode ser visto como uma flecha em $\mathbf{2Gpd}_0[2FM^{-1}]$ (a menos de equivalências), ademais, um isomorfismo nessa categoria corresponde a (a classe de equivalência de) uma 2-equivalência de Morita em $\mathbf{2Gpd}_0$.

4.2 $[G \rightarrow H]$ -fibrados principais

Nesta seção será dada uma definição de fibrados principais de 2-grupos de Lie de uma maneira global, formulada em termos de morfismos generalizados de 2-grupoides, estendendo a noção apresentada na Seção 1.3. Particularmente, durante esta seção todos os módulos cruzados citados serão módulos cruzados de grupos de Lie.

Definição 4.2.1. Um $[G \rightarrow H]$ -fibrado principal sobre um grupoide de Lie $\mathcal{H}_1 \rightrightarrows \mathcal{H}_0$ é um morfismo generalizado:

$$\mathfrak{B} : \mathcal{H} \rightsquigarrow [G \rightarrow H],$$

onde \mathcal{H} é o grupoide $\mathcal{H}_1 \rightrightarrows \mathcal{H}_0$ visto como um 2-grupoide e $[G \rightarrow H]$ é o 2-grupo de Lie associado ao módulo cruzado $(G \rightarrow H)$.

Observação 4.2.1. Há também uma noção de fibrados principais de 2-grupos de Lie dada de maneira clássica, remetendo a uma 2-ação de um 2-grupo de Lie em um grupoide, veja [5], Capítulo 3. No entanto, não há conhecimento de que essas duas abordagens sejam equivalentes.

Naturalmente, para fazer sentido com a definição de morfismos generalizados, dois $[G \rightarrow H]$ -fibrados principais \mathfrak{B} e \mathfrak{B}' sobre um grupoide $\mathcal{H}_1 \rightrightarrows \mathcal{H}_0$ são **isomorfos** se, e somente se, \mathfrak{B} e \mathfrak{B}' são equivalentes como morfismos generalizados.

Exemplo 4.2.1. Seja $[G \rightarrow H]$ um 2-grupo de Lie, então um $[G \rightarrow H]$ -fibrado sobre uma variedade M é um $[G \rightarrow H]$ -fibrado sobre o grupoide unidade $M \rightrightarrows M$, isto é, um morfismo generalizado de $M \rightrightarrows M \rightrightarrows M$ para $[G \rightarrow H]$.

Exemplo 4.2.2. Seja \mathfrak{B} um $[G \rightarrow H]$ -fibrado principal sobre um grupoide de Lie $\mathcal{H}_1 \rightrightarrows \mathcal{H}_0$. Se $\mathcal{H}'_1 \rightrightarrows \mathcal{H}'_0$ e $[G' \rightarrow H']$ são Morita equivalentes a $\mathcal{H}_1 \rightrightarrows \mathcal{H}_0$ e $[G \rightarrow H]$ respectivamente, então a composição:

$$\mathcal{H}' \rightleftarrows \mathcal{H} \rightsquigarrow [G \rightarrow H] \rightleftarrows [G' \rightarrow H'],$$

define um $[G' \rightarrow H']$ -fibrado principal sobre $\mathcal{H}'_1 \rightrightarrows \mathcal{H}'_0$ denotado por \mathfrak{B} por abuso de notação.

Qualquer G -fibrado principal sobre uma variedade diferenciável M pode ser visto como um $[1 \rightarrow G]$ -fibrado principal sobre M .

Exemplo 4.2.3. Seja $\pi : P \rightarrow M$ um G -fibrado principal. Defina o 2-grupoide de Lie $P \times_M P \rightrightarrows P \times_M P \rightrightarrows P$, com mapas estruturais verticais sendo identidades e cujos mapas horizontais são $s_H(x, y) = x$ e $t_H(x, y) = y$. Considere o seguinte par de morfismos de 2-grupoide de Lie:

$$\begin{array}{ccccc} M & \xleftarrow{\phi} & P \times_M P & \xrightarrow{f} & G \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ M & \xleftarrow{\phi} & P \times_M P & \xrightarrow{f} & G \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ M & \xleftarrow{\pi} & P & \longrightarrow & * \end{array}$$

onde $\phi(x, y) = \pi(x) = \pi(y)$ e $x \cdot f(x, y) = y$. Na verdade, note que o primeiro morfismo (ϕ, ϕ, π) é uma 2-fibração de Morita. De fato, (ϕ, ϕ, π) se fatora numa composição da projeção natural do 2-grupoide pullback com um isomorfismo de 2-grupoides de Lie:

$$\begin{array}{ccccc}
P \times_M P & \xrightarrow{\psi} & \pi^* M & \xrightarrow{\text{pr}_2} & M \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
P \times_M P & \xrightarrow{\psi} & \pi^* M & \xrightarrow{\text{pr}_2} & M \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
P & \xrightarrow{\text{id}} & P & \xrightarrow{\pi} & M
\end{array}$$

onde $\psi(x, y) = (x, \pi(x), y) = (x, \pi(y), y)$. Portanto, $(f, f, \cdot)/(\phi, \phi, \pi)$ define um morfismo generalizado da variedade diferenciável M para o 2-grupo de Lie $[1 \rightarrow G]$, isto é, um $[1 \rightarrow G]$ -fibrado principal sobre M .

Exemplo 4.2.4. Sejam M uma variedade diferenciável e G um grupo de Lie. Um 2-cociclo em M com valores em G é uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ de M junto com uma coleção de mapas suaves:

$$\lambda_{ij} : U_{ij} \rightarrow \text{Aut}(G) \quad \text{e} \quad g_{ijk} : U_{ijk} \rightarrow G,$$

satisfazendo as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
\lambda_{ij} \circ \lambda_{jk} &= \text{Ad}_{g_{ijk}} \circ \lambda_{ik} \\
g_{ijl} g_{jkl} &= g_{ikl} \lambda_{kl}^{-1}(g_{ijk}).
\end{aligned}$$

Acontece que um 2-cociclo define um $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrado sobre M . De fato, defina o 2-grupoide de Lie:

$$\coprod_{ij} U_{ij} \times G \times G \xrightarrow[t_V]{s_V} \coprod_{ij} U_{ij} \times G \xrightarrow[t_H]{s_H} \coprod_i U_i,$$

com mapas estruturais:

- $s_V(x_{ij}, g, h) = (x_{ij}, g);$
- $t_V(x_{ij}, g, h) = (x_{ij}, h);$
- $s_H(x_{ij}) = x_i;$
- $t_H(x_{ij}) = x_j;$
- $(x_{ij}, g, h) \circ_V (x_{ij}, h, f) = (x_{ij}, g, f);$
- $(x_{ij}, g) \circ_H (x_{ij}, h) = (x_{ik}, g_{ijk} \circ \lambda_{ij}^{-1}(g)h).$

Então, considere o seguinte par de morfismos de 2-grupoides de Lie:

$$\begin{array}{ccccc}
M & \xleftarrow{\iota_2} & \coprod_{i,j} U_{ij} \times G \times G & \xrightarrow{f_2} & G \times \text{Aut}(G) \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
M & \xleftarrow{\iota_1} & \coprod_{i,j} U_{ij} \times G & \xrightarrow{f_1} & \text{Aut}(G) \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
M & \xleftarrow{\iota_0} & \coprod_i U_i & \xrightarrow{f_0} & *
\end{array}$$

onde $\iota_2(x_{ij}, g, h) = x$, $\iota_1(x_{ij}, g) = x$, $f_2(x_{ij}, g, h) = (hg^{-1}, \text{Ad}_g \circ \lambda_{ij}(x))$ e $f_1(x_{ij}, g) = \text{Ad}_g \circ \lambda_{ij}(x)$. Note que o primeiro mapa é uma 2-fibração de Morita, uma vez que se decompõe numa composição da forma:

$$\begin{array}{ccccc}
\coprod_{i,j} U_{ij} \times G \times G & \xrightarrow{\text{pr}_1} & \coprod_{i,j} U_{ij} & \xrightarrow{i} & M \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\coprod_{i,j} U_{ij} \times G & \xrightarrow{\text{pr}_1} & \coprod_{i,j} U_{ij} & \xrightarrow{i} & M \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\coprod_i U_i & \xrightarrow{\text{id}} & \coprod_i U_i & \xrightarrow{i} & M
\end{array}$$

onde claramente o seguinte quadrado é uma fibração de Morita de grupoides de Lie:

$$\begin{array}{ccc}
\coprod_{i,j} U_{ij} \times G \times G & \xrightarrow{\text{pr}_1} & \coprod_{i,j} U_{ij} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\coprod_{i,j} U_{ij} \times G & \xrightarrow{\text{pr}_1} & \coprod_{i,j} U_{ij}
\end{array} .$$

Portanto, isso define um morfismo generalizado $f/\iota : \mathbf{M} \rightsquigarrow [G \rightarrow \text{Aut}(G)]$.

Na verdade, estamos interessados em equivalências de Morita de fibrados principais de 2-grupos de Lie.

Definição 4.2.2. Sejam \mathfrak{B} um $[G \rightarrow H]$ -fibrado principal sobre $\mathcal{H}_1 \rightrightarrows \mathcal{H}_0$ e \mathfrak{B}' um $[G' \rightarrow H']$ -fibrado principal sobre $\mathcal{H}'_1 \rightrightarrows \mathcal{H}'_0$. Então, diz-se que \mathfrak{B} e \mathfrak{B}' são **Morita equivalentes** se as seguintes condições são satisfeitas:

- $\mathcal{H}_1 \rightrightarrows \mathcal{H}_0$ e $\mathcal{H}'_1 \rightrightarrows \mathcal{H}'_0$ são grupoides de Lie Morita equivalentes;
- $[G \rightarrow H]$ e $[G' \rightarrow H']$ são 2-grupos de Lie 2-Morita equivalentes;
- \mathfrak{B} e \mathfrak{B}' são morfismos generalizados equivalentes.

Exemplo 4.2.5. Dois $[G \rightarrow H]$ -fibrados principais \mathfrak{B} e \mathfrak{B}' isomorfos são Morita equivalentes.

Exemplo 4.2.6. Um G -fibrado principal $\pi : P \rightarrow M$ é Morita equivalente (como um fibrado de 2-grupos de Lie) a um G' -fibrado principal $\pi' : P' \rightarrow M'$ se, e somente se, G e M são isomorfos à G' e M' respectivamente, e $\pi : P \rightarrow M$ e $\pi' : P' \rightarrow M'$ são isomorfos como fibrados principais.

Exemplo 4.2.7. O $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrado sobre M do Exemplo 4.2.4:

$$\begin{array}{ccccc}
M & \xleftarrow{\iota_2} & \coprod_{i,j} U_{ij} \times G \times G & \xrightarrow{f_2} & G \rtimes \text{Aut}(G) \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
M & \xleftarrow{\iota_1} & \coprod_{i,j} U_{ij} \times G & \xrightarrow{f_1} & \text{Aut}(G) \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
M & \xleftarrow{\iota_0} & \coprod_i U_i & \xrightarrow{f_0} & *
\end{array}$$

é Morita equivalente ao $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrado sobre o grupoide de Čech $\coprod U_{ij} \rightrightarrows \coprod U_i$:

$$\begin{array}{ccccc}
\coprod_{ij} U_{ij} & \xleftarrow{\text{pr}_1} & \coprod_{i,j} U_{ij} \times G \times G & \xrightarrow{f_2} & G \rtimes \text{Aut}(G) \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\coprod_{ij} U_{ij} & \xleftarrow{\text{pr}_1} & \coprod_{i,j} U_{ij} \times G & \xrightarrow{f_1} & \text{Aut}(G) \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\coprod_i U_i & \xleftarrow{\text{id}} & \coprod_i U_i & \xrightarrow{f_0} & *
\end{array}$$

De fato, desde que o 2-grupoide de Čech associado a M é Morita equivalente a M , é possível reescrever ambos os $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrados principais, sobre M , isto é, existe um diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
[\coprod_i U_i \rightarrow \coprod_{ij} U_{ij}] & \xleftarrow[\text{pr}_1]{\sim} & [\coprod_i U_i \times G \rightarrow \coprod_{ij} U_{ij} \times G] & \xrightarrow{f} & [G \rightarrow \text{Aut}(G)] \\
\downarrow \sim i & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \text{id} \\
[M \rightarrow M] & \xleftarrow[\iota]{\sim} & [\coprod_i U_i \times G \rightarrow \coprod_{ij} U_{ij} \times G] & \xrightarrow{f} & [G \rightarrow \text{Aut}(G)]
\end{array}$$

Portanto, o resultado segue do Exemplo 4.1.3.

Capítulo 5

G -extensões de grupoides de Lie & $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrados principais

Na Seção 4.2 foram apresentados diversos exemplos de $[G \rightarrow H]$ -fibrados principais sobre grupoides. Percebe-se que casos bastante interessantes de fibrados principais de 2-grupos ocorrem quando o 2-grupo de Lie é o 2-grupo de automorfismos, isto é, $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrados principais.

Acontece que $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrados principais podem ser caracterizados a partir de estruturas um pouco mais simples, que envolvem somente morfismos entre certos grupoides de Lie. Mais precisamente, um $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrado principal induz uma sequência exata curta de grupoides de Lie em que o núcleo é um fibrado em grupos trivial, que é o que chamamos de uma G -extensão de grupoides. Além disso, pode-se construir um $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrado principal dada uma G -extensão e essas correspondências são invariantes sob equivalências de Morita.

Portanto, este capítulo tem como objetivo geral estabelecer essa bijeção entre classes de equivalência de Morita de $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrados principais sobre grupoides de Lie e classes de equivalência de Morita de G -extensões de grupoides de Lie. Para tanto, as Seções 5.1 e 5.2 são destinadas ao estudo de G -extensões e suas equivalências de Morita, enquanto as demais seções destinam-se à demonstração do teorema principal. As referências gerais deste capítulo são [19], [11] e [10].

5.1 Extensões de grupoides de Lie e suas equivalências de Morita

Nesta seção é introduzida a definição de uma extensão de grupoides de Lie, bem como uma noção de equivalência de Morita entre extensões. Na sequência, por vezes um grupoide $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ será denotado simplesmente por \mathcal{G} .

Definição 5.1.1. Uma **extensão de grupoides de Lie** é uma sequência exata curta de grupoides de Lie:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{K} & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{G} & \xrightarrow{\phi} \twoheadrightarrow & \mathcal{H} \\ p \downarrow \downarrow p & & t \downarrow \downarrow s & & t \downarrow \downarrow s \\ M & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\text{id}} & M \end{array}$$

onde \mathcal{K} (ou $\ker(\phi)$) é o núcleo da extensão, $\iota : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{G}$ é a inclusão e $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ é um morfismo de grupoides de Lie cuja restrição em M é a identidade. Usualmente, uma extensão de grupoides de Lie como acima, é denotada por $\mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \rightrightarrows M$, ou simplesmente por:

$$\mathcal{K} \xhookrightarrow{\iota} \mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \twoheadrightarrow \mathcal{H}$$

uma vez que os grupoides considerados são definidos acima da mesma base.

Aqui \mathcal{K} é definido por $\mathcal{K} = \{k \in \mathcal{G} \mid \phi(k) = 1_{s(k)}\}$, mais ainda, perceba que os mapas fonte e alvo de $\mathcal{K} \rightrightarrows M$ coincidem, isto é, o núcleo de uma extensão $\mathcal{K} \rightrightarrows M$ é um fibrado em grupos de Lie. Além disso, sendo um subgrupoide de $\mathcal{G} \rightrightarrows M$, é possível multiplicar elementos de \mathcal{G} por elementos componíveis de \mathcal{K} . Isso pode ser feito tanto à direita quanto à esquerda, na verdade essas duas ações comutam e o espaço quociente por qualquer uma delas é \mathcal{H} .

Observação 5.1.1. Note que o grupoide $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ age em $\mathcal{K} \rightarrow M$ por conjugação, mais precisamente, qualquer $g \in \mathcal{G}$ induz um isomorfismo de grupos:

$$\begin{aligned} \text{Ad}_g : \mathcal{K}_{t(g)} &\rightarrow \mathcal{K}_{s(g)} \\ k &\mapsto gkg^{-1}. \end{aligned}$$

Exemplo 5.1.1. Sejam N uma variedade diferenciável, $f : N \rightarrow M$ uma submersão sobrejetora e $\mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \rightrightarrows M$ uma extensão de grupoides. Então, a seguinte sequência de grupoides de Lie:

$$\begin{array}{ccccc} f^*\mathcal{K} & \xhookrightarrow{\iota} & f^*\mathcal{X} & \xrightarrow{\phi^*} \twoheadrightarrow & f^*\mathcal{Y} \\ \downarrow \downarrow & & \downarrow \downarrow & & \downarrow \downarrow \\ N & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\text{id}} & N \end{array}$$

é a **extensão pullback** de $\mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \rightrightarrows M$ por f , denotada simplesmente por $f^*\mathcal{G} \xrightarrow{\phi^*} f^*\mathcal{H} \rightrightarrows N$.

Exemplo 5.1.2. Seja (P, π, μ) um G -fibrado principal sobre M e considere a ação diagonal de G em $P \times P$, isto é, $(p, q) \cdot g = (pg, qg)$. Então, $(P \times P)/G \rightrightarrows M$ define naturalmente um grupoide de Lie, veja o Exemplo 2.2, [20]. Agora, considere a ação de G em si mesmo, dada por conjugação, e tome $(P \times G)/G \rightarrow M$ o fibrado associado a (P, π, μ) ao longo dessa ação. Então, elementos $[p, g]$ em $(P \times G)/G$ são órbitas $[p, g] \in P \times G$ sob a ação

$(p, g) \cdot h = (ph, hgh^{-1})$. Nesse caso, $(P \times G)/G \rightarrow M$ é um fibrado em grupos de Lie, logo, obtemos uma extensão de grupoides de Lie, pondo:

$$\begin{array}{ccccc} (P \times G)/G & \xleftarrow{\iota} & (P \times P)/G & \xrightarrow{\phi} & M \times M \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ M & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\text{id}} & M \end{array}$$

onde, $\phi([p, q]) = (\pi(p), \pi(q))$.

Definição 5.1.2. Um **morfismo** de extensões de grupoides de Lie $(f_2, f_1) : (\mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \rightrightarrows M) \rightarrow (\mathcal{G}' \xrightarrow{\phi'} \mathcal{H}' \rightrightarrows M')$ é um par de morfismos de grupoides de Lie $f_2 : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ e $f_1 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$, de modo que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{f_2} & \mathcal{G}' & & \\ \Downarrow & \searrow & \Downarrow & \searrow & \\ M & \xrightarrow{\dots} & M' & \xrightarrow{\text{id}} & \mathcal{H}' \\ \searrow & \phi & \searrow & & \searrow \\ & \mathcal{H} & \xrightarrow{f_1} & \mathcal{H}' & \\ \text{id} \searrow & \Downarrow & & \Downarrow & \\ & M & \xrightarrow{f_0} & M' & \end{array}$$

Além disso, um **isomorfismo** entre extensões de grupoides de Lie é, portanto, um morfismo de extensões onde f_1 e f_2 são isomorfismos de grupoides de Lie.

Ao longo do texto, um morfismo de extensões de grupoides de Lie (f_2, f_1) como na Definição 5.1.2, será representado por um diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{f_2} & \mathcal{G}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{f_1} & \mathcal{H}' \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ M & \xrightarrow{f_0} & M' \end{array}$$

Assim como no caso de fibrados principais de 2-grupos de Lie, estamos interessados em certas equivalências de extensões de grupoides de Lie.

Definição 5.1.3. Um morfismo de extensões de grupoides de Lie $(f_2, f_1) : (\mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \rightrightarrows M) \rightarrow (\mathcal{G}' \xrightarrow{\phi'} \mathcal{H}' \rightrightarrows M')$ é de **Morita**, se os morfismos de grupoides de Lie $f_2 : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ e $f_1 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ são fibrações de Morita.

Exemplo 5.1.3. O morfismo identidade $(\text{id}, \text{id}) : (\mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \rightrightarrows M) \rightarrow (\mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \rightrightarrows M)$ é de Morita.

Exemplo 5.1.4. Considere $\mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \rightrightarrows M$ e $\mathcal{G}' \xrightarrow{\phi'} \mathcal{H}' \rightrightarrows M'$ extensões de grupoides de Lie. Logo, existem difeomorfismos naturais $\mathcal{H} \simeq \mathcal{G}/\ker(\phi)$ e $\mathcal{H}' \simeq \mathcal{G}'/\ker(\phi')$. Com efeito, se $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ é uma fibração de Morita de grupoides, por definição $f_0 : M \rightarrow M'$ é uma submersão sobrejetora e $\mathcal{G} \simeq f_0^* \mathcal{G}'$. Portanto, se f satisfaz $f(\ker(\phi)) = \ker(\phi')$ então, como $\ker(\phi)$ é um subgrupoide de \mathcal{G} , segue que há um isomorfismo de grupoides de Lie induzido $\ker(\phi) \simeq f_0^* \ker(\phi')$, logo:

$$\mathcal{H} \simeq \mathcal{G}/\ker(\phi) \simeq f_0^* \mathcal{G}' / \ker(\phi) \simeq f_0^* \mathcal{G}' / f_0^* \ker(\phi') \simeq f_0^* (\mathcal{G}' / \ker(\phi')) \simeq f_0^* \mathcal{H}'$$

isto é, f induz uma fibração de Morita $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$, e por conseguinte um morfismo de Morita entre as extensões $\mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \rightrightarrows M$ e $\mathcal{G}' \xrightarrow{\phi'} \mathcal{H}' \rightrightarrows M'$.

Definição 5.1.4. Duas extensões de grupoides de Lie $\mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \rightrightarrows M$ e $\mathcal{G}' \xrightarrow{\phi'} \mathcal{H}' \rightrightarrows M'$ são **Morita equivalentes** se existem, uma terceira extensão $\mathcal{G}'' \xrightarrow{\phi''} \mathcal{H}'' \rightrightarrows M''$ e morfismos de Morita $(f_2, f_1) : (\mathcal{G}'' \xrightarrow{\phi''} \mathcal{H}'' \rightrightarrows M'') \rightarrow (\mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \rightrightarrows M)$, $(g_2, g_1) : (\mathcal{G}'' \xrightarrow{\phi''} \mathcal{H}'' \rightrightarrows M'') \rightarrow (\mathcal{G}' \xrightarrow{\phi'} \mathcal{H}' \rightrightarrows M')$.

Fazendo uso do conceito de extensão pullback introduzido no Exemplo 5.1.1, é possível reescrever a noção de equivalência de Morita de extensões de grupoides de Lie do seguinte modo: duas extensões $\mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \rightrightarrows M$ e $\mathcal{G}' \xrightarrow{\phi'} \mathcal{H}' \rightrightarrows M'$ são Morita equivalentes se existem, uma variedade diferenciável N , duas submersões sobrejetoras $f : N \rightarrow M$, $f' : N \rightarrow M'$, e um isomorfismo de extensões de grupoides de Lie entre $f^* \mathcal{G} \xrightarrow{\phi} f^* \mathcal{H} \rightrightarrows N$ e $f'^* \mathcal{G}' \xrightarrow{\phi'} f'^* \mathcal{H}' \rightrightarrows N$.

Exemplo 5.1.5. Desde que o morfismo identidade é de Morita, qualquer morfismo de Morita de extensões de grupoides de Lie $(\mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \rightrightarrows M) \rightarrow (\mathcal{G}' \xrightarrow{\phi'} \mathcal{H}' \rightrightarrows M')$, induz uma equivalência de Morita entre as extensões $\mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \rightrightarrows M$ e $\mathcal{G}' \xrightarrow{\phi'} \mathcal{H}' \rightrightarrows M'$.

Observação 5.1.2. Como no caso de 2-fibrações de Morita e 2-grupoides de Lie, os morfismos de Morita de extensões de grupoides de Lie formam um sistema multiplicativo na categoria de extensões e morfismos de extensões. Com efeito, essa categoria pode ser localizada por seus morfismos de Morita. Nesse caso, duas extensões de grupoides de Lie são Morita equivalentes se são isomorfas na categoria localizada.

5.2 G -extensões de grupoides de Lie

Para esta seção, fixe G um grupo de Lie. Geralmente, uma extensão de grupoides de Lie $\mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \rightrightarrows M$ é dita uma G -extensão se, seu núcleo $\mathcal{K} \rightrightarrows M$ é um fibrado em grupos localmente trivial, cujas fibras são isomorfas a G , veja [19]. Note, no entanto, que pela Proposição 3.2, [19], qualquer G -extensão admite uma G -extensão Morita equivalente cujo núcleo é um fibrado em grupos trivial.

Como o nosso interesse está no estudo de G -extensões de grupoides de Lie a menos de equivalências de Morita, assumiremos que uma extensão é uma G -extensão se seu núcleo é um fibrado em grupos trivial $M \times G \rightrightarrows M$. Isto é, uma G -**extensão** é uma seqüência exata curta de grupoides de Lie:

$$\begin{array}{ccccc} M \times G & \xleftarrow{i} & \mathcal{G} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{H} \\ \text{pr}_1 \downarrow \downarrow \text{pr}_1 & & t \downarrow \downarrow s & & t \downarrow \downarrow s \\ M & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\text{id}} & M, \end{array}$$

aqui, flechas $i(x, g) \in \mathcal{G}$ serão denotadas por g_x .

Observação 5.2.1. Note que a propriedade de ser uma G -extensão é invariante sob equivalências de Morita. Mais precisamente, se uma extensão é Morita equivalente a uma G -extensão, então ela mesma é uma G -extensão.

Exemplo 5.2.1. Para um grupo de Lie G e uma variedade diferenciável M , pode-se formar a G -extensão trivial:

$$\begin{array}{ccccc} M \times G & \xrightarrow{\text{id}} & M \times G & \xrightarrow{\text{pr}_1} & M \\ \text{pr}_1 \downarrow \downarrow \text{pr}_1 & & \downarrow \downarrow & & \downarrow \downarrow \\ M & \xrightarrow{\text{id}} & M & \xrightarrow{\text{id}} & M \end{array} .$$

Exemplo 5.2.2. Dados uma variedade diferenciável M e um 2-cociclo em M com valores em G , veja Exemplo 4.2.4, obtemos uma G -extensão de grupoides de Lie do seguinte modo:

$$\begin{array}{ccccc} \coprod U_i \times G & \xrightarrow{\text{pr}_1 \times \text{id}} & \coprod U_{ij} \times G & \xrightarrow{\phi} & \coprod U_{ij} \\ \text{pr}_1 \downarrow \downarrow \text{pr}_1 & & \downarrow \downarrow & & \downarrow \downarrow \\ \coprod U_i & \xrightarrow{\text{id}} & \coprod U_i & \xrightarrow{\text{id}} & \coprod U_i \end{array} .$$

Essa G -extensão é Morita equivalente à G -extensão trivial.

É possível relacionar a teoria de G -extensões de grupoides de Lie com o estudo de 2-grupoides de Lie e módulos cruzados de grupoides.

Definição 5.2.1. Dada uma G -extensão $\mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \rightrightarrows M$, o **2-grupoide de Lie associado a ϕ** é o 2-grupoide:

$$\mathcal{G} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} \xrightarrow[t_V]{s_V} \mathcal{G} \xrightarrow[t_H]{s_H} M,$$

onde $\mathcal{G} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} = \{(g_1, g_2) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \mid \phi(g_1) = \phi(g_2)\}$, e os mapas estruturais são definidos como segue:

- $s_V(g_1, g_2) = g_2$;
- $t_V(g_1, g_2) = g_1$;

- $s_H(g) = s(\phi(g))$;
- $t_H(g) = t(\phi(g))$;
- $(g_1, g_2) \circ_V (g_2, g_3) = (g_1, g_3)$;
- $(g'_1, g'_2) \circ_H (g_1, g_2) = (g'_1 g_1, g'_2 g_2)$.

Note ainda, que o morfismo de 2-grupoïdes de Lie $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ induz uma 2-fibração de Morita do 2-grupoïde de Lie associado para o 2-grupoïde de Lie induzido por \mathcal{H} :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{H} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{H} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ M & \xrightarrow{\text{id}} & M \end{array} \cdot$$

Com respeito aos módulos cruzados, o 2-grupoïde induzido corresponde ao 2-grupoïde de Lie associado ao módulo cruzado $(M \times G \xrightarrow{i} \mathcal{G})$, onde a ação de \mathcal{G} em $M \times G$ é dada por conjugação. Logo, a 2-fibração de Morita natural pode ser vista como uma equivalência de Morita de módulos cruzados entre $(M \times G \rightarrow \mathcal{G})$ e $(M \rightarrow \mathcal{H})$, dada explicitamente como segue:

$$\begin{array}{ccc} M \times G & \xrightarrow{\text{pr}_1} & M \\ \downarrow i & & \downarrow 1 \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{H} \end{array} \cdot$$

Particularmente, isso nos dá a possibilidade de caracterizar G -extensões de grupoïdes em termos de módulos cruzados.

Proposição 5.2.1. *Um morfismo de grupoïdes $\mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \rightrightarrows M$ é uma G -extensão de grupoïdes se, e somente se, $(M \times G \xrightarrow{i} \mathcal{G})$ é um módulo cruzado de grupoïdes com grupoïde quociente $\mathcal{G}/i(M \times G)$ isomorfo a \mathcal{H} .*

Demonstração.

(\Rightarrow) Sendo uma G -extensão, pela discussão acima, obtém-se um 2-grupoïde de Lie associado e uma 2-fibração de Morita natural entre o 2-grupoïde de Lie associado e o 2-grupoïde de Lie induzido por \mathcal{H} . Em particular, pela Proposição 2.4.1, a equivalência de Morita de módulos cruzados:

$$\begin{array}{ccc} M \times G & \xrightarrow{\text{pr}_1} & M \\ \downarrow i & & \downarrow 1 \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{H} \end{array}$$

induz uma equivalência de categorias entre $\mathcal{G}/i(M \times G)$ e $\mathcal{H}/1_M$, isto é, $\mathcal{G}/i(M \times G)$ é isomorfo à \mathcal{H} .

(\Leftarrow) Sendo $(M \times G \xrightarrow{i} \mathcal{G})$ um módulo cruzado com grupoide quociente $\mathcal{G}/i(M \times G)$ isomorfo à \mathcal{H} , segue que o mapa de projeção $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/i(M \times G)$, torna-se naturalmente a G -extensão:

$$M \times G \hookrightarrow \mathcal{G} \twoheadrightarrow \mathcal{H}.$$

□

5.3 Correspondência entre classes de equivalência de Morita de G -extensões e de $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrados principais

Esta seção é dedicada a demonstração do seguinte resultado.

Teorema 5.3.1. *Há uma bijeção entre as classes de equivalência de Morita de G -extensões de grupoides de Lie e as classes de equivalência de Morita de $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrados principais sobre grupoides de Lie.*

Para isso, esta organiza-se como segue: na primeira subseção demonstra-se que toda G -extensão induz um $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrado principal e que esta correspondência é invariante sob equivalências de Morita; na segunda subseção prova-se o recíproco, isto é, todo $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrado principal induz uma G -extensão, e que isso também ocorre de maneira invariante sob equivalências de Morita; e, finalmente, na última subseção mostra-se que as correspondências das seções anteriores são inversas uma da outra.

5.3.1 G -extensões $\rightarrow [G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrados principais

Seja $\mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \rightrightarrows M$ uma G -extensão de grupoides de Lie. Considere o 2-grupoide de Lie induzido pela extensão $\mathcal{G} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G} \rightrightarrows M$ e a 2-fibração de Morita natural:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{H} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{H} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ M & \xrightarrow{\text{id}} & M \end{array} .$$

Lembre que um $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrado principal sobre \mathcal{H} é um morfismo generalizado $\mathcal{H} \rightsquigarrow [G \rightarrow \text{Aut}(G)]$, onde \mathcal{H} é o grupoide de Lie \mathcal{H} visto como um 2-grupoide e $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ é o 2-grupo de Lie do Exemplo 2.1.4. Então, resta definir um morfismo

de 2-grupoides de Lie do grupoides induzido $\mathcal{G} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G} \rightrightarrows M$ para o 2-grupo de Lie $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$. Porém, o mapa:

$$\begin{aligned} \text{Ad} : \mathcal{G} &\rightarrow \text{Aut}(G) \\ g &\mapsto \text{Ad}_g, \end{aligned}$$

define canonicamente um morfismo de grupoides de Lie:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{\text{Ad}} & \text{Aut}(G) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ M & \longrightarrow & \{*\} \end{array} .$$

Aqui, G é identificado com $G_x \subset \mathcal{G}$ para todo $x \in M$, logo, o automorfismo Ad_g é definido, de modo que, para $h_{s(h)}$, tem-se:

$$\text{Ad}_g(h_{s(h)}) = gh_{s(h)}g^{-1} = \text{Ad}_g(h)_{t(g)}.$$

Na verdade, o morfismo $\text{Ad} : \mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}(G)$ se estende num outro morfismo de grupoides de Lie:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} & \xrightarrow{\psi} & G \times \text{Aut}(G) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\text{Ad}} & \text{Aut}(G) \end{array}$$

onde $\psi : \mathcal{G} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} \rightarrow G \times \text{Aut}(G)$, $(g_1, g_2) \mapsto (g, \text{Ad}_{g_2})$. Aqui, $g_1 g_2^{-1} = g_{t(g_1)}$, então esse mapa está bem definido, ora $\phi(g_1) = \phi(g_2)$, logo:

$$\phi((g_1 g_2^{-1})) = \phi(g_1) \phi(g_2)^{-1} = \phi(g_1) \phi(g_1)^{-1} = 1_{s(g_1)},$$

isto é, $g_1 g_2^{-1} \in G$.

Lema 5.3.1. *O mapa:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} & \xrightarrow{\psi} & G \times \text{Aut}(G) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\text{Ad}} & \text{Aut}(G) \end{array} \tag{5.1}$$

define um morfismo de grupoides de Lie.

Demonstração. Sejam $g \in \mathcal{G}$ e $(g_1, g_2) \in \mathcal{G} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G}$. Observe que ψ é suave, desde que os mapas Ad e $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2^{-1}$ os são. Então, basta verificar que (ψ, Ad) comuta com todos

os mapas estruturais (verticais). Primeiramente, em relação aos mapas fonte e alvo:

$$\begin{aligned} s_V(\psi(g_1, g_2)) &= s_V(g, \text{Ad}_{g_2}) = \text{Ad}_{g_2} = \text{Ad}_{s_V(g_1, g_2)} \\ t_V(\psi(g_1, g_2)) &= t_V(g, \text{Ad}_{g_2}) = \text{Ad}_g \circ \text{Ad}_{g_2} = \text{Ad}_{g_1 g_2^{-1}} \circ \text{Ad}_{g_2} = \text{Ad}_{g_1} = \text{Ad}_{t_V(g_1, g_2)}; \end{aligned}$$

com respeito às multiplicações:

$$\begin{aligned} \psi((g_1, g_2) \circ_V (g_2, g_3)) &= \psi(g_1, g_3) \\ &= (g_1 g_3^{-1}, \text{Ad}_{g_3}) \\ &= (g_1 g_2^{-1}, \text{Ad}_{g_2}) \circ_V (g_2 g_3^{-1}, \text{Ad}_{g_3}) \\ &= \psi(g_1, g_2) \circ_V \psi(g_2, g_3); \end{aligned}$$

e, finalmente, com relação às unidades:

$$\psi(1_g) = \psi(g, g) = (g g^{-1}, \text{Ad}_g) = (1_{s(g)}, \text{Ad}_g) = 1_{\text{Ad}(g)}.$$

□

Observação 5.3.1. Note que os grupoides envolvidos no mapa (5.1) correspondem às estruturas verticais do 2-grupoide de Lie induzido e do 2-grupo de Lie de automorfismos.

Finalmente, para que (ψ, Ad, \cdot) defina um morfismo de 2-grupoides de Lie resta verificar a compatibilidade com as estruturas horizontais, isto é, que o seguinte par é um morfismo de grupoides de Lie:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} & \xrightarrow{\psi} & G \ltimes \text{Aut}(G) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ M & \longrightarrow & \{*\} \end{array} .$$

Nesse caso, como $G \ltimes \text{Aut}(G) \rightrightarrows \{*\}$ é um grupo de Lie, basta analisar a multiplicação horizontal, de fato:

$$\begin{aligned} \psi((g_1, g_2) \circ_H (g_3, g_4)) &= \psi(g_1 g_3, g_2 g_4) \\ &= (g_1 g_3 (g_2 g_4)^{-1}, \text{Ad}_{g_2 g_4}) \\ &= (g_1 g_3 g_4^{-1} g_2^{-1}, \text{Ad}_{g_2 g_4}) \\ &= (g_1 g_2^{-1} (g_2 (g_3 g_4^{-1}) g_2^{-1}), \text{Ad}_{g_2 g_4}) \\ &= (g_1 g_2^{-1} (\text{Ad}_{g_2} (g_3 g_4^{-1})), \text{Ad}_{g_2 g_4}) \\ &= (g_1 g_2^{-1}, \text{Ad}_{g_2}) \circ_H (g_3 g_4^{-1}, \text{Ad}_{g_4}) \\ &= \psi(g_1, g_2) \circ_H \psi(g_3, g_4). \end{aligned}$$

Portanto, os mapas ψ e Ad constituem um morfismo do 2-grupoide induzido por ϕ para o 2-grupo de Lie de automorfismos:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} & \xrightarrow{\psi} & G \rtimes \text{Aut}(G) \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 \mathcal{G} & \xrightarrow{\text{Ad}} & \text{Aut}(G) \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 M & \longrightarrow & \{*\}
 \end{array} \quad . \quad (5.2)$$

E por conseguinte, o par:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{H} & \xleftarrow{\phi} & \mathcal{G} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} & \xrightarrow{\psi} & G \rtimes \text{Aut}(G) \\
 \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 \mathcal{H} & \xleftarrow{\phi} & \mathcal{G} & \xrightarrow{\text{Ad}} & \text{Aut}(G) \\
 \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 M & \xleftarrow{\text{id}} & M & \longrightarrow & \{*\}
 \end{array} \quad (5.3)$$

é um morfismo generalizado $\mathcal{H} \rightsquigarrow [G \rightarrow \text{Aut}(G)]$, isto é, um $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrado principal sobre \mathcal{H} .

Observação 5.3.2. O morfismo de 2-grupoides (5.2) corresponde, em termos de módulos cruzados, ao morfismo de módulos cruzados:

$$\begin{array}{ccc}
 M \times G & \xrightarrow{\text{pr}_2} & G \\
 i \downarrow & & \downarrow \text{Ad} \\
 \mathcal{G} & \xrightarrow{\text{Ad}} & \text{Aut}(G)
 \end{array} \quad .$$

Então, graças à discussão realizada na Seção 5.2, o morfismo generalizado (5.3), pode ser visto como o morfismo generalizado de módulos cruzados:

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xleftarrow{\text{pr}_1} & M \times G & \xrightarrow{\text{pr}_2} & G \\
 1 \downarrow & & i \downarrow & & \downarrow \text{Ad} \\
 \mathcal{H} & \xleftarrow{\phi} & \mathcal{G} & \xrightarrow{\text{Ad}} & \text{Aut}(G)
 \end{array} \quad .$$

Portanto, é possível reescrever o morfismo generalizado (5.3), em termos de 2-grupoides associados a módulos cruzados como segue:

$$[M \rightarrow \mathcal{H}] \xleftarrow[\sim]{[\text{pr}_1, \phi]} [M \times G \xrightarrow{i} \mathcal{G}] \xrightarrow{[\text{pr}_2, \text{Ad}]} [G \rightarrow \text{Aut}(G)].$$

Agora, vejamos que a correspondência acima é invariante sob equivalências de Morita. Para isso, suponha que exista um morfismo de Morita entre duas G -extensões:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{f_2} & \mathcal{G}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{f_1} & \mathcal{H}' \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ M & \xrightarrow{f_0} & M' \end{array} .$$

Mais ainda, considere os $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrados principais associados:

$$\begin{array}{ccc} [M \rightarrow \mathcal{H}] & \xleftarrow[\sim]{[\text{pr}_1, \phi]} & [M \times G \xrightarrow{i} \mathcal{G}] \xrightarrow{[\text{pr}_2, \text{Ad}]} [G \rightarrow \text{Aut}(G)], \\ [M' \rightarrow \mathcal{H}'] & \xleftarrow[\sim]{[\text{pr}_1, \phi]} & [M' \times G \xrightarrow{i} \mathcal{G}'] \xrightarrow{[\text{pr}_2, \text{Ad}]} [G \rightarrow \text{Aut}(G)]. \end{array}$$

Então, desde que (f_2, f_1) é um morfismo de G -extensões, (f_2, f_1) comuta com as ações de \mathcal{G} e \mathcal{G}' em G , logo, obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} [M \rightarrow \mathcal{H}] & \xleftarrow[\sim]{[\text{pr}_1, \phi]} & [M \times G \xrightarrow{i} \mathcal{G}] & \xrightarrow{[\text{pr}_2, \text{Ad}]} & [G \rightarrow \text{Aut}(G)] \\ \downarrow [f_0, f_1] \sim & & \downarrow [f_0 \times \text{id}, f_2] \sim & & \downarrow \text{id} \\ [M' \rightarrow \mathcal{H}'] & \xleftarrow[\sim]{[\text{pr}_1, \phi]} & [M' \times G \xrightarrow{i} \mathcal{G}'] & \xrightarrow{[\text{pr}_2, \text{Ad}]} & [G \rightarrow \text{Aut}(G)] \end{array}$$

isto é, pelo Exemplo 4.1.3, ambos os $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrados principais são Morita equivalentes.

5.3.2 G -extensões $\leftarrow [G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrados principais

Reciprocamente, considere um $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrado principal sobre $\mathcal{H} \rightrightarrows M$, representado pelo morfismo generalizado:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H} & \xleftarrow{\phi_2} & K_2 & \xrightarrow{\psi_2} & G \ltimes \text{Aut}(G) \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathcal{H} & \xleftarrow{\phi_1} & K_1 & \xrightarrow{\psi_1} & \text{Aut}(G) \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ M & \xleftarrow{\phi_0} & K_0 & \xrightarrow{\psi_0} & \{*\} \end{array} .$$

Mais ainda, tome o morfismo generalizado de módulos cruzados induzido:

$$\begin{array}{ccccc} M & \xleftarrow{\phi_2} & X & \xrightarrow{\psi_2} & G \\ 1 \downarrow & & t_V \downarrow & & \downarrow \text{Ad} \\ \mathcal{H} & \xleftarrow{\phi_1} & K_1 & \xrightarrow{\psi_1} & \text{Aut}(G) \end{array}$$

aqui $X = \{\alpha \in K_2 \mid s_V(\alpha) = 1_x \text{ para algum } x \in K_0\}$.

Observação 5.3.3. Observe que como ϕ é uma 2-fibração de Morita, pela Proposição 2.4.1, para todo $x \in K_0$, ϕ mapeia bijetivamente $t_V^{-1}(1_x)$ para $1^{-1}(1_{\phi(x)})$, ademais, o mapa:

$$\begin{array}{ccc} K_1/t_V(X) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{H}/1(M) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ K_0 & \xrightarrow{\phi_0} & M \end{array} \quad (5.4)$$

é um funtor fiel e pleno.

Da Observação 5.3.3, os seguintes resultados seguem de maneira direta.

Lema 5.3.2. *O mapa $t_V : X \rightarrow K_1$ é injetivo.*

Demonstração. Desde que $1 : M \rightarrow \mathcal{H}$ é uma injeção, $1^{-1}(1_{\phi(x)}) = \{\phi(x)\}$, logo, dados $\alpha, \beta \in X$ com $t_V(\alpha) = t_V(\beta)$, segue que $t_V(\alpha \circ_H \beta^{-1}) = 1_{s_H(\alpha)}$, isto é, $\alpha \circ_H \beta^{-1} \in t_V^{-1}(1_{s_H(\alpha)})$, portanto, como ϕ mapeia bijetivamente $t_V^{-1}(1_x)$ para $1^{-1}(1_{\phi(x)})$ tem-se:

$$\phi(\alpha \circ_H \beta^{-1}) = \phi(1_{s_H(\alpha)}) \implies \alpha \circ_H \beta^{-1} = 1_{s_H(\alpha)},$$

isto é, $\alpha = \beta$. □

Lema 5.3.3. *$K_1/t_V(X)$ é uma variedade diferenciável.*

Demonstração. Desde que $\mathcal{H}/1(M)$ é difeomorfo a \mathcal{H} e (5.4) é fiel e pleno, segue que o grupoide $K_1/t_V(X) \rightrightarrows G_0$ é o grupoide pullback de $\mathcal{H} \rightrightarrows M$ ao longo da submersão sobrejetora $\phi_0 : K_0 \rightarrow M$, donde conclui-se que $K_1/t_V(X) = K_0 \times_M \mathcal{H} \times_M K_0$ é uma variedade diferenciável. □

Agora, note que é possível definir uma estrutura de grupoide em $K_1 \times G \rightrightarrows K_0$, com mapa fonte $s(k, g) = s(k)$, mapa alvo $t(k, g) = t(k)$, multiplicação parcial:

$$(k, g) \cdot (k', g') = (kk', \psi_1(k'^{-1})[g] \cdot g')$$

e inversa $(k, g)^{-1} = (k^{-1}, \psi_1(k)[g^{-1}])$, para todos $k, k' \in K_1$ e $g, g' \in G$. Em termos de

diagramas, uma flecha em $K_1 \times G \rightrightarrows K_0$, pode ser representada como sendo um par:

$$\begin{array}{ccc} y & \xleftarrow{k} & x \\ & & \uparrow g \\ & & x, \end{array}$$

além disso, é possível visualizar a multiplicação parcial do seguinte modo:

$$\begin{array}{ccc} z \xleftarrow{k} y & & z \xleftarrow{k} y \xleftarrow{k'} x \\ \uparrow g & & \uparrow g \\ y \xleftarrow{k'} x & \mapsto & y \xleftarrow{k'} x \\ & & \uparrow \psi_1(k'^{-1})[g] \\ & & x \\ & & \uparrow g' \\ & & x \end{array} .$$

Mas, perceba que existem mapas naturais $X \xrightarrow{t_V} K_1$ e $X \xrightarrow{\psi_2} G$, logo, pode-se definir o mapa:

$$\begin{aligned} \xi : X &\rightarrow K_1 \times G \\ \alpha &\mapsto (t_V(\alpha), \psi_2(\alpha^{-1})), \end{aligned}$$

que, na verdade, é um morfismo de grupoides de Lie do grupoide $X \rightrightarrows K_0$ para o grupoide $K_1 \times G \rightrightarrows K_0$.

Lema 5.3.4. *O mapa:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\xi} & K_1 \times G \\ p \downarrow \downarrow p & & t \downarrow \downarrow s \\ K_0 & \xrightarrow{id} & K_0 \end{array}$$

é um morfismo de grupoides de Lie.

Demonstração. Dados $x \in K_0$ e $\alpha, \beta \in X$. Observe que ξ é suave, desde que t_V e ψ_2 os são. Então, basta verificar que (ξ, id) comuta com todos os mapas estruturais. Primeiramente, em relação aos mapas fonte e alvo:

$$\begin{aligned} s(\xi(\alpha)) &= s(t_V(\alpha), \psi_2(\alpha^{-1})) = s(t_V(\alpha)) = p(\alpha) \\ t(\xi(\alpha)) &= t(t_V(\alpha), \psi_2(\alpha^{-1})) = t(t_V(\alpha)) = p(\alpha); \end{aligned}$$

com respeito às multiplicações:

$$\begin{aligned}
\xi(\alpha \circ_H \beta) &= (t_V(\alpha \circ_H \beta), \psi_2((\alpha \circ_H \beta)^{-1})) \\
&= (t_V(\alpha)t_V(\beta), \psi_2(\beta^{-1})\psi_2(\alpha^{-1})) \\
&= (t_V(\alpha)t_V(\beta), \text{Ad}_{\psi_2(\beta^{-1})}(\psi_2(\alpha^{-1})) \cdot \psi_2(\beta^{-1})) \\
&= (t_V(\alpha)t_V(\beta), \psi_1(t_V(\beta)^{-1})[\psi_2(\alpha^{-1})] \cdot \psi_2(\beta^{-1})) \\
&= (t_V(\alpha), \psi_2(\alpha^{-1})) \cdot (t_V(\beta), \psi_2(\beta^{-1})) \\
&= \xi(\alpha) \cdot \xi(\beta);
\end{aligned}$$

e, finalmente, com relação às unidades:

$$\xi(1_{1_x}) = (t_V(1_{1_x}), \psi_2(1_{1_x}^{-1})) = (t_V(1_{1_x}), \psi_2(1_{1_x})) = (1_x, e).$$

□

Além do mais, a imagem de X por ξ define um subgrupoide normal de $K_1 \times G \rightrightarrows K_0$.

Lema 5.3.5. $\xi(X)$ é um subgrupoide normal de $K_1 \times G \rightrightarrows K_0$.

Demonstração. Dados $\alpha \in X$, $k \in K_1$ e $g \in G$, têm-se:

$$\begin{aligned}
(k, g) \cdot (t_V(\alpha), \psi_2(\alpha^{-1})) &= (kt_V(\alpha), \psi_1(t_V(\alpha)^{-1})[g] \cdot \psi_2(\alpha^{-1})) \\
&= (kt_V(\alpha), \text{Ad}_{\psi_2(\alpha^{-1})}(g) \cdot \psi_2(\alpha^{-1})) \\
&= (kt_V(\alpha), \psi_2(\alpha^{-1}) \cdot g),
\end{aligned}$$

e, por outro lado:

$$\begin{aligned}
(kt_V(\alpha), \psi_2(\alpha^{-1}) \cdot g) \cdot (k, g)^{-1} &= (kt_V(\alpha), \psi_2(\alpha^{-1}) \cdot g) \cdot (k^{-1}, \psi_1(k)[g^{-1}]) \\
&= (kt_V(\alpha)k^{-1}, \psi_1(k)[\psi_2(\alpha^{-1}) \cdot g] \cdot \psi_1(k)[g^{-1}]) \\
&= (kt_V(\alpha)k^{-1}, \psi_1(k)[\psi_2(\alpha^{-1})]) \\
&= (t_V(1_k \circ_H \alpha \circ_H 1_{k^{-1}}), \text{Ad}_{\psi_2(1_k)}(\psi_2(\alpha^{-1}))) \\
&= (t_V(1_k \circ_H \alpha \circ_H 1_{k^{-1}}), \psi_2(1_k)\psi_2(\alpha^{-1})\psi_2(1_k)^{-1}) \\
&= (t_V(1_k \circ_H \alpha \circ_H 1_{k^{-1}}), \psi_2(1_k \circ_H \alpha \circ_H 1_{k^{-1}})^{-1}),
\end{aligned}$$

isto é:

$$(k, g) \cdot \xi(\alpha) \cdot (k, g)^{-1} = (t_V(1_k \circ_H \alpha \circ_H 1_{k^{-1}}), \psi_2(1_k \circ_H \alpha \circ_H 1_{k^{-1}})^{-1}).$$

□

Portanto, isso nos dá a possibilidade de agir com X em $K_1 \times G$ à direita, com ação:

$$(k, g) \bullet \alpha = (k, g) \cdot \xi(\alpha) = (k \cdot t_V(\alpha), \psi_2(\alpha^{-1}) \cdot g). \quad (5.5)$$

Agora, considere a seguinte G -extensão:

$$K_0 \times G \xhookrightarrow{\iota} K_1 \times G \xrightarrow{\text{pr}_1} K_1,$$

e as inclusões dos subgrupoides normais $\xi(X) \hookrightarrow K_1 \times G$ e $t_V(X) \hookrightarrow K_1$. Perceba que o morfismo de grupoides da G -extensão:

$$\begin{array}{ccc} K_1 \times G & \xrightarrow{\text{pr}_1} & K_1 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ K_0 & \xrightarrow{\text{id}} & K_0 \end{array}$$

entrelaça a ação à direita (5.5) de X em $K_1 \times G$ com a ação à direita de X em K_1 , dada por:

$$k \bullet \alpha = k \cdot t_V(\alpha). \quad (5.6)$$

De fato, dados $\alpha \in X$ e $(k, g) \in K_1 \times G$, têm-se:

$$\text{pr}_1((k, g) \bullet \alpha) = \text{pr}_1(k \cdot t_V(\alpha), \psi_2(\alpha^{-1}) \cdot g) = k \cdot t_V(\alpha) = k \bullet t_V(\alpha).$$

Particularmente, como $t_V : X \rightarrow K_1$ é injetivo, a ação (5.5) é livre, e o espaço de órbitas $(K_1 \times G)/\xi(X)$ é uma variedade diferenciável, mais ainda, pelo Lema 5.3.3, $K_1/t_V(X)$ também o é. Portanto, passando aos quocientes, obtemos a seguinte sequência de grupoides de Lie sobre K_0 :

$$K_0 \times G \xhookrightarrow{\iota} (K_1 \times G)/\xi(X) \xrightarrow{\text{pr}_1} K_1/t_V(X) \quad (5.7)$$

que também é uma G -extensão. Além do mais, perceba que o módulo cruzado correspondente a G -extensão, via Proposição 5.2.1, é o módulo cruzado:

$$(K_0 \times G \rightarrow (K_1 \times G)/\xi(X)).$$

Observação 5.3.4. Note que o quociente $(K_1 \times G)/\xi(X)$ não mata o núcleo $K_0 \times G$ da G -extensão $K_1 \times G \xrightarrow{\text{pr}_1} K_1 \rightrightarrows K_0$. Mais precisamente, dados $(1_x, g) \in K_0 \times G$ e $(k, h) \in K_1 \times G$, têm-se que:

$$(1_x, g) \sim (k, h) \iff (1_x, g)(k, h)^{-1} \in \xi(X),$$

mas como:

$$(1_x, g)(k, h)^{-1} = (1_x, g) \cdot (k^{-1}, \psi_1(k)[h^{-1}]) = (k^{-1}, \psi_1(k)[gh^{-1}]),$$

segue que $(1_x, g) \sim (k, h)$ se, e somente se, existe $\alpha \in X$, de modo que:

$$\xi(\alpha) = (t_V(\alpha), \psi_2(\alpha^{-1})) = (k^{-1}, \psi_1(k)[gh^{-1}]).$$

Simplicando a equação acima, $\alpha \in X$ deve satisfazer $t_V(\alpha) = k^{-1}$ e:

$$\psi_2(\alpha^{-1}) = \psi_1(k)[gh^{-1}] = \psi_1(t_V(\alpha)^{-1})[gh^{-1}] = \text{Ad}_{\psi_2(\alpha^{-1})}(gh^{-1}) = \psi_2(\alpha^{-1})gh^{-1}\psi_2(\alpha),$$

isto é, $\psi_2(\alpha^{-1}) = gh^{-1}$.

Agora, considere $(k, h) \in K_0 \times G$ então $k = 1_x$, logo se $(1_x, g) \sim (1_x, h)$, existe $\alpha \in X$ tal que $t_V(\alpha) = 1_x$ e $\psi_2(\alpha^{-1}) = gh^{-1}$. No entanto, como t_V é injetivo, segue que $\alpha = 1_{1_m}$, com efeito:

$$gh^{-1} = \psi_2(\alpha^{-1}) = \psi_2(1_{1_m}) = e \in G,$$

isto é, $g = h$.

A partir daqui, mostraremos que a atribuição que associa um $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrado principal sobre \mathcal{H} , na G -extensão associada (5.7) é invariante sob equivalências de Morita. Para isso, considere dois $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrados principais sobre \mathcal{H} Morita equivalentes:

$$\begin{aligned} [M \rightarrow \mathcal{H}] &\xleftarrow[\sim]{\phi_1} \mathbf{K} \xrightarrow{\psi_1} [G \rightarrow \text{Aut}(G)], \\ [M \rightarrow \mathcal{H}] &\xleftarrow[\sim]{\phi_2} \mathbf{L} \xrightarrow{\psi_2} [G \rightarrow \text{Aut}(G)]. \end{aligned}$$

Observe que isso é o mesmo que pedir que exista um morfismo de 2-grupoides de Lie $\varepsilon : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{L}$, de modo que o seguinte diagrama comuta a menos de 2-transformações:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{K} & \\ \phi_1 \swarrow & & \searrow \psi_1 \\ [M \rightarrow \mathcal{H}] & & [G \rightarrow \text{Aut}(G)]. \\ \phi_2 \swarrow & \varepsilon \downarrow & \searrow \psi_2 \\ & \mathbf{L} & \end{array}$$

Portanto, é suficiente verificar que para qualquer diagrama como o acima, as G -extensões correspondentes aos morfismos generalizados ψ_1/ϕ_1 e ψ_2/ϕ_2 são Morita equivalentes.

De fato, como o diagrama comuta a menos de 2-transformações segue que $\phi_2 \circ \varepsilon$ é uma 2-fibração de Morita. Então, têm-se ϕ_1 , ϕ_2 e $\phi_2 \circ \varepsilon$ 2-fibrações de Morita, e por conseguinte os mapas induzidos nos nervos são hypercovers de 2-grupoides de Lie

fracos, vide Teorema 3.3.2. Mas como hypercovers são também equivalências fracas, da Proposição 3.2.4 obtém-se que o mapa $\varepsilon : N\mathbf{K} \rightarrow N\mathbf{L}$ é, também, uma equivalência fraca, assim sendo, $\varepsilon : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{L}$ é uma equivalência de Morita de 2-grupoides de Lie. Então, particularmente, pode-se escolher ε como sendo uma 2-fibração de Morita.

Agora, denote por $(X_K \rightarrow K)$ e $(X_L \rightarrow L)$ os módulos cruzados associados a \mathbf{K} e \mathbf{L} . Então, ε induz o seguinte diagrama comutativo de G -extensões induzidas:

$$\begin{array}{ccccc} (K_1 \times G)/\xi(X_K) & \longrightarrow & K_1/t_V(X_K) & \rightrightarrows & K_0 \\ (\varepsilon_1, \text{id}) \downarrow & & \varepsilon_1 \downarrow & & \varepsilon_0 \downarrow \\ (L_1 \times G)/\xi(X_L) & \longrightarrow & L_1/t_V(X_L) & \rightrightarrows & L_0 \end{array}$$

que é uma equivalência de Morita de G -extensões, pelo Lema 5.3.3.

5.3.3 G -extensões $\leftrightarrow [G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrados principais

Nesta subseção será demonstrado que as correspondências das Subseções 5.3.1 e 5.3.2 são inversas uma da outra. Para isso, iniciemos com um $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrado principal sobre $\mathcal{H} \rightrightarrows M$, representado pelo morfismo generalizado:

$$[M \rightarrow \mathcal{H}] \longleftarrow \sim \mathbf{K} \longrightarrow [G \rightarrow \text{Aut}(G)],$$

Considere a G -extensão induzida, obtida na Subseção 5.3.2:

$$(K_1 \times G)/\xi(X) \longrightarrow K_1/t_V(X) \rightrightarrows K_0,$$

e lembre que a G -extensão acima corresponde ao módulo cruzado:

$$(K_0 \times G \rightarrow (K_1 \times G)/\xi(X)).$$

Com efeito, obtemos o seguinte diagrama comutativo de módulos cruzados:

$$\begin{array}{ccccc} (M \rightarrow \mathcal{H}) & \longleftarrow \sim & (X \rightarrow K_1) & \longrightarrow & (G \rightarrow \text{Aut}(G)) \\ \sim \uparrow & & \downarrow & \nearrow & \\ (K_0 \rightarrow K_1/t_V(X)) & \longleftarrow \sim & (K_0 \times G \rightarrow (K_1 \times G)/\xi(X)) & & \end{array}$$

Portanto, o morfismo generalizado pelo qual iniciamos:

$$[M \rightarrow \mathcal{H}] \longleftarrow \sim [X \rightarrow K_1] \longrightarrow [G \rightarrow \text{Aut}(G)],$$

é equivalente ao morfismo generalizado:

$$[M \rightarrow \mathcal{H}] \xleftarrow{\sim} [K_0 \times G \rightarrow (K_1 \times G)/\xi(X)] \longrightarrow [G \rightarrow \text{Aut}(G)],$$

isto é, ambos representam o mesmo $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrado principal sobre $\mathcal{H} \rightrightarrows M$.

Reciprocamente, seja $\mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \rightrightarrows M$ uma G -extensão de grupoides. Então, pela Subseção 5.3.1 associamos o $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$ -fibrado principal sobre $\mathcal{H} \rightrightarrows M$ dado pelo seguinte morfismo generalizado:

$$[M \rightarrow \mathcal{H}] \xleftarrow[\sim]{[\text{pr}_1, \phi]} [M \times G \xrightarrow{\iota} \mathcal{G}] \xrightarrow{[\text{pr}_2, \text{Ad}]} [G \rightarrow \text{Aut}(G)]. \quad (5.8)$$

Mas, note que nesse caso, o mapa $\xi : M \times G \rightarrow \mathcal{G} \times G$ é definido como sendo:

$$\xi(x, g) = (i(x, g), \text{pr}_2(x, g)) = (g_x, g),$$

logo, a imagem de $M \times G$ por ξ é isomorfa a G , assim sendo, o quociente $(\mathcal{G} \times G)/\xi(M \times G)$ é isomorfo a \mathcal{G} . Além do mais, como ϕ é uma G -extensão o quociente $\mathcal{G}/i(M \times G)$ é isomorfo a \mathcal{H} , isto é, a G -extensão correspondente ao morfismo generalizado (5.8):

$$(\mathcal{G} \times G)/\xi(M \times G) \longrightarrow \mathcal{G}/i(M \times G) \rightrightarrows M,$$

nada mais é do que a G -extensão $\mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \rightrightarrows M$.

Bibliografia

- [1] J. Baez and U. Schreiber. “Higher Gauge Theory”. In: (2005). DOI: 10.48550/ARXIV.MATH/0511710. URL: <https://arxiv.org/abs/math/0511710>.
- [2] J. Baez et al. “Infinite-Dimensional Representations of 2-Groups”. In: *Memoirs of the American Mathematical Society* 219.1032 (2012), pp. 0–0. DOI: 10.1090/s0065-9266-2012-00652-6. URL: <https://doi.org/10.1090%2Fs0065-9266-2012-00652-6>.
- [3] J. C. Baez and A. S. Crans. *Higher-Dimensional Algebra VI: Lie 2-Algebras*. 2010. arXiv: math/0307263 [math.QA].
- [4] K. Behrend and E. Getzler. *Geometric Higher Groupoids and Categories*. 2017. DOI: 10.1007/978-3-319-49638-2_1. URL: https://doi.org/10.1007%2F978-3-319-49638-2_1.
- [5] J. S. H. Carmona. “Chern-Weil-Lecomte morphism for L_∞ -algebras”. Tese de Doutorado. São Paulo: Doutorado em Matemática, Universidade de São Paulo, 2022. URL: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45131/tde-05052022-122744/publico/Chern_Weil_Lecomte_morphism_for_L_infinity_algebras.pdf.
- [6] F. S. Carvalho. “On the cohomology of representations up to homotopy of Lie groupoids”. Tese de Doutorado. São Paulo: Doutorado em Matemática, Universidade de São Paulo, 2019. URL: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45131/tde-27042020-232832/publico/ThesisFerStudzinski.pdf>.
- [7] B. Chen, C. Du, and R. Wang. “The groupoid structure of groupoid morphisms”. In: *Journal of Geometry and Physics* 145 (2019), p. 103486. ISSN: 0393-0440. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2019.103486>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0393044019301676>.
- [8] J. W. Duskin. “Simplicial matrices and the nerves of weak n -categories I: Nerves of bicategories.” eng. In: *Theory and Applications of Categories [electronic only]* 9 (2001), pp. 198–308. URL: <http://eudml.org/doc/123775>.
- [9] R. L. Fernandes. *Differential Geometry*. 2021. URL: <https://faculty.math.illinois.edu/~ruiloja/Meus-papers/HTML/notesDG.pdf>.
- [10] G. Ginot. *Introduction to Differentiable Stacks (and gerbes, moduli spaces ...)*. <https://www.math.univ-paris13.fr/~ginot/papers/DiffStacksIGG2013.pdf>. 2013.
- [11] G. Ginot and M. Stiénon. “ G -gerbes, principal 2-group bundles and characteristic classes”. In: *Journal of Symplectic Geometry* 13.4 (2015), pp. 1001–1047. DOI: 10.4310/jsg.2015.v13.n4.a6. URL: <https://doi.org/10.4310%2Fjsg.2015.v13.n4.a6>.

- [12] P. G. Goerss and J. F. Jardine. *Simplicial Homotopy Theory*. Progress in mathematics (Boston, Mass.) v. 174. Springer, 1999.
- [13] M. del Hoyo. “Lie groupoids and their orbispaces”. In: *Portugaliae Mathematica* 70.2 (2013), pp. 161–209. DOI: 10.4171/pm/1930. URL: <https://doi.org/10.4171%2Fpm%2F1930>.
- [14] M. del Hoyo. *Vector bundles over Lie groupoids and related structures*. <https://www.unige.ch/math/folks/nikolaev/assets/files/GP-220104093634-del-Hoyo.pdf>. 2022.
- [15] M. del Hoyo and R. L. Fernandes. “Riemannian metrics on differentiable stacks”. In: *Mathematische Zeitschrift* 292.1-2 (Oct. 2018), pp. 103–132. DOI: 10.1007/s00209-018-2154-6. URL: <https://doi.org/10.1007%2Fs00209-018-2154-6>.
- [16] M. del Hoyo and D. Stefani. “The general linear 2-groupoid”. In: *Pacific Journal of Mathematics* 298.1 (Feb. 2019), pp. 33–57. DOI: 10.2140/pjm.2019.298.33. URL: <https://doi.org/10.2140%2Fpjm.2019.298.33>.
- [17] N. Johnson and D. Yau. *2-Dimensional Categories*. 2020. DOI: 10.48550/ARXIV.2002.06055. URL: <https://arxiv.org/abs/2002.06055>.
- [18] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*. v. 1. Interscience Publishers, 1963. ISBN: 9780470496473.
- [19] C. Laurent-Gengoux, M. Stiénon, and P. Xu. “Non-abelian differentiable gerbes”. In: *Advances in Mathematics* 220.5 (Mar. 2009), pp. 1357–1427. DOI: 10.1016/j.aim.2008.10.018. URL: <https://doi.org/10.1016%2Fj.aim.2008.10.018>.
- [20] K. Mackenzie. “Classification of principal bundles and lie groupoids with prescribed gauge group bundle”. In: *Journal of Pure and Applied Algebra* 58.2 (1989), pp. 181–208. ISSN: 0022-4049. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-4049\(89\)90157-6](https://doi.org/10.1016/0022-4049(89)90157-6).
- [21] K. Mackenzie and London Mathematical Society. *General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids*. London Mathematical Society lecture note series. Cambridge University Press, 2005.
- [22] C. Marle. *Calculus on Lie algebroids, Lie groupoids and Poisson manifolds*. 2008. arXiv: 0806.0919 [math.DG].
- [23] J. P. May. *Simplicial Objects in Algebraic Topology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, 1992.
- [24] I. Moerdijk. *Orbifolds as Groupoids: an Introduction*. 2002. arXiv: math/0203100 [math.DG].
- [25] I. Moerdijk and J. Mrcun. *Introduction to Foliations and Lie Groupoids*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2003. ISBN: 9780521831970. URL: <https://books.google.com.br/books?id=vsMHvgAACAAJ>.
- [26] I. Moerdijk and J. Svensson. “Algebraic classification of equivariant homotopy 2-types, I”. In: *Journal of Pure and Applied Algebra* 89.1 (1993), pp. 187–216. ISSN: 0022-4049. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-4049\(93\)90094-A](https://doi.org/10.1016/0022-4049(93)90094-A). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002240499390094A>.
- [27] E. M. Moutuou. *Crossed extensions and equivalences of topological 2-groupoids*. 2018. DOI: 10.48550/ARXIV.1802.02017. URL: <https://arxiv.org/abs/1802.02017>.

- [28] B. Noohi. “Notes on 2-groupoids, 2-groups and crossed-modules”. In: (2005). DOI: 10.48550/ARXIV.MATH/0512106. URL: <https://arxiv.org/abs/math/0512106>.
- [29] C. Ortiz and J. Waldron. *On the Lie 2-algebra of sections of an LA-groupoid*. 2017. arXiv: 1703.09791 [math.DG].
- [30] S. Porst. *Strict 2-Groups are Crossed Modules*. 2008. DOI: 10.48550/ARXIV.0812.1464. URL: <https://arxiv.org/abs/0812.1464>.
- [31] E. Riehl. “A leisurely introduction to simplicial sets”. In: 2011. URL: <https://math.jhu.edu/~eriehl/ssets.pdf>.
- [32] E. Riehl. “A model structure for quasi-categories”. In: 2012. URL: <https://emilyriehl.github.io/files/topic.pdf>.
- [33] E. Riehl. “On the structure of simplicial categories associated to quasi-categories”. In: (2009). DOI: 10.48550/ARXIV.0912.4809. URL: <https://arxiv.org/abs/0912.4809>.
- [34] J. Tu and P. Xu. *The ring structure for equivariant twisted K-theory*. 2006. DOI: 10.48550/ARXIV.MATH/0604160. URL: <https://arxiv.org/abs/math/0604160>.
- [35] J. H. C. Whitehead. “Note on a Previous Paper Entitled On Adding Relations to Homotopy Groups”. In: *Annals of Mathematics* 47.4 (1946), pp. 806–810. ISSN: 0003486X. URL: <http://www.jstor.org/stable/1969237>.
- [36] J. Wolfson. “Descent for n -Bundles”. In: (2013). DOI: 10.48550/ARXIV.1308.1113. URL: <https://arxiv.org/abs/1308.1113>.
- [37] J. Wu. *Simplicial objects and homotopy groups*. URL: <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=7aa5ae4519aaedf2696b86e255fc7e14ff285f7b>.
- [38] C. Zhu. *Lie n -groupoids and stacky Lie groupoids*. 2006. DOI: 10.48550/ARXIV.MATH/0609420. URL: <https://arxiv.org/abs/math/0609420>.