UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PAULA EASTWOOD TORRENS

# ESTUDO DE MODELOS MATEMÁTICOS EM FINANÇAS PARA A OTIMIZAÇÃO DE UMA CARTEIRA DO ÍNDICE DE SUSTENTABILIDADE EMPRESARIAL

CURITIBA

2020

PAULA EASTWOOD TORRENS

# ESTUDOS DE MODELOS MATEMÁTICOS EM FINANÇAS PARA A OTIMIZAÇÃO DE UMA CARTEIRA DO ÍNDICE DE SUSTENTABILIDADE EMPRESARIAL

Monografia apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada, Curso de Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Carlos Matioli.

CURITIBA

2020

## AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador professor Doutor Luiz Carlos Matioli por todo apoio, atenção e paciência ao longo da elaboração do meu projeto final, não poderia ter feito escolha melhor para esse papel, sinto-me honrada de ser orientanda desse professor que sempre esteve presente para qualquer dificuldade que encontrasse.

Aos meus pais por possibilitarem que eu estudasse nessa Universidade e que me apoiaram por todo caminho. Aos meus amigos que me ajudaram nessa saga que foi o curso de Matemática, especialmente Gabriel Chileider que me ajudou com todas as matérias de matemática pura e Laiane Sgoda por todo o carinho e apoio sempre. Ao meu marido Paulo Henrique Preto, que além de estar do meu lado todos esses anos, leu artigos e discutiu junto comigo, me ajudou a dar conta de tudo e foi meu parceiro em todos os quesitos da minha vida.

Aos meus professores que me ensinaram tudo que sei para me tornar uma profissional melhor, em especial os professores: Doutor Luiz Santana; Doutor José Eidam; Doutor Marcelo Alves; e Doutora Elisângela de Campos, que foram fundamentais nesses cinco anos de jornada.

Por fim, a fé, que precisei todos os dias para conseguir dar continuidade ao curso e passar por todos os obstáculos encontrados.

Dedico esta monografia a quatro pessoas que não se encontram mais aqui (*In Memoriam*), mas que fazem falta todos os dias, meu tio José Romagnolli, minhas avós Jamila Eastwood e Mônica Torrens, e meu amigo Ian Stempczinski do Prado, vocês sempre serão lembrados.

*"É muito fácil se você não sabe como fazer. Essa é a parte mais importante. Ter absoluta certeza de não saber como está fazendo isso."*

(Até Mais, e Obrigado Pelos Peixes! –
Douglas Adams)

## RESUMO

Esta monografia tem por finalidade analisar o retorno que um investidor pode obter ao investir em empresas com foco em sustentabilidade. Para isso foram utilizados os seguintes modelos matemáticos em finanças pertencentes à Teoria Moderna de Carteiras: fronteira eficiente de Markowitz; adição de um ativo à taxa livre de risco; índice único ou índice Sharpe e índice de corte ou de Elton-Gruber. Os modelos foram avaliados com e sem venda a descoberto. As melhores carteiras para cada modelo foram constituídas, sendo essas determinadas por otimizações realizadas por meio do uso de um *software.* Todos os cálculos necessários para esses métodos foram realizados por meio de planilhas eletrônicas, nesse caso, o Microsoft Excel 365, em Língua Portuguesa (Brasil), utilizando dois suplementos presentes nele: Solver e Análise de Dados. Os modelos foram aplicados a uma carteira de 18 ativos do índice ISE - Índice de Sustentabilidade Empresarial, que compõem a bolsa de valores brasileira, B3. A poupança compôs como o ativo a taxa livre de risco e o índice IBOVESPA foi determinado como índice do mercado. Todos os ativos foram selecionados em um período de 20 meses, compreendidos entre 1º de janeiro de 2018 e 31 de agosto de 2019, sendo de diversos setores empresariais, formadores do índice ISE. Conclui-se que os modelos matemáticos pertencentes à Teoria Moderna de Carteiras são importantes para a definição de carteiras ótimas de investimentos com os ativos do Índice de Sustentabilidade Empresarial.

**Palavras-chave:** Markowitz. Ativo à Taxa Livre de Risco. Índice Único. Índice de Corte. Sustentabilidade.

**ABSTRACT**

This monography has the objective of analyzing the return an investor can obtain when investing in companies focused on sustainability. To do so, the following mathematical models from the Modern Portfolio Theory were used: Markowitz' efficient frontier; adding an asset to a risk-free rate; single index or Sharpe index, and cut index or Elton-Gruber. The models were specified with and without short selling. Whenever they constitute the best portfolios for each model, these being determined for optimizations performed using software. All required calculations for these methods are performed using electronic spreadsheets from Microsoft Excel 365, in Portuguese (Brazil), using two supplements: Solver and Data Analysis. The models were applied to a portfolio of 18 assets with a CSI Index - Corporate Sustainability Index, which is integrated to the Brazilian stock exchange, B3. The savings and investment assets were treated as the risk-free rate, and the IBOVESPA index was treated as a market index. All assets were selected within a period of 20 months, from January 1st, 2018 to August 31, 2019, from several industrial sectors; all of them part of the CSI index. The conclusion is that the mathematical models from the Modern Portfolio Theory are important to select optimal investment portfolios using the assets of the Corporate Sustainability Index.

**Keywords:** Markowitz. Asset to a risk-free rate. Single index. Cut index. Sustainability.

## LISTA DE GRÁFICOS


Gráfico 1 – Carteiras diversificadas.......... 21
Gráfico 2 – Fronteira eficiente de Markowitz .......... 22
Gráfico 3 – Ativo Livre de Risco – CVD.......... 23
Gráfico 4 – Ativo Livre de Risco – SVD.......... 24
Gráfico 5 – Comparativo entre os modelos do Índice Único e de Markowitz .......... 26
Gráfico 6 – Markowitz CVD e SVD.......... 43
Gráfico 7 – Ativo Livre de Risco CVD e SVD .......... 44
Gráfico 8 – Índice Único CVD e SVD .......... 46
Gráfico 9 – Índice de Corte CVD e SVD.......... 47
Gráfico 10 – Todos os Modelos.......... 49

## LISTA DE TABELAS


Tabela 1 – Índice de Corte $C^*$ .......... 28
Tabela 2 – Ativos do Índice ISE .......... 29
Tabela 3 – Markowitz CVD e SVD .......... 42
Tabela 4 – Markowitz: Retorno e Risco .......... 42
Tabela 5 – Ativo a Taxa Livre de Risco CVD e SVD .......... 43
Tabela 6 – Ativo a Taxa Livre de Risco: Retorno e Risco .......... 44
Tabela 7 – Índice Único CVD e SVD .......... 45
Tabela 8 – Índice Único: Retorno, Risco, Beta e Alfa .......... 45
Tabela 9 – Índice de Corte CVD e SVD .......... 46
Tabela 10 – Índice de Corte: Retorno, Risco, Beta e Alfa .......... 47

## LISTA DE FIGURAS


Figura 1 – Suplementos ........................................................ 31
Figura 2 – Solver e Ferramentas de Análise ........................................................ 31
Figura 3 – Exemplo com 5 ativos de linhas e colunas........................................................ 32
Figura 4 – Fórmula SOMA........................................................ 33
Figura 5 – Fórmula MATRIZ.MULT ........................................................ 33
Figura 6 – Tabela mensal........................................................ 34
Figura 7 – Covariância ........................................................ 34
Figura 8 – Intervalo de Entrada ........................................................ 35
Figura 9 – Matriz de Covariância........................................................ 35
Figura 10 – Espelhar ........................................................ 35
Figura 11 – Variância da Carteira........................................................ 36
Figura 12 – Definir Objetivos........................................................ 37
Figura 13 – Alterando Células Variáveis ........................................................ 37
Figura 14 – Adicionar Restrição ........................................................ 38
Figura 15 – CVD e SVD ........................................................ 38
Figura 16 – Matriz Inversa........................................................ 40

## SUMÁRIO


**1 INTRODUÇÃO ... 10**
**2 OBJETIVOS ... 14**
2.1 OBJETIVO GERAL ... 14
2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS ... 14
**3 JUSTIFICATIVA ... 15**
**4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA ... 16**
4.1 TEORIA MODERNA DE CARTEIRAS ... 16
4.1.1 Modelo de Markowitz ... 17
4.1.2 Ativo a Taxa Livre de Risco ... 22
4.1.3 Índice Único ... 24
4.1.4 Índice de Corte ... 27
**5 METODOLOGIA ... 29**
5.1 MODELO DE MARKOWITZ ... 32
5.2 INCLUSÃO DE UM ATIVO A TAXA LIVRE DE RISCO ... 39
5.2.1 Sem Venda a Descoberto ... 39
5.2.2 Com Venda a Descoberto ... 39
5.3 ÍNDICE ÚNICO ... 40
5.4 ÍNDICE DE CORTE ... 41
**6 RESULTADOS NUMÉRICOS ... 42**
6.1 MODELO DE MARKOWITZ ... 42
6.2 INCLUSÃO DE UM ATIVO A TAXA LIVRE DE RISCO ... 43
6.3 ÍNDICE ÚNICO ... 45
6.4 ÍNDICE DE CORTE ... 46
**7 ANÁLISE DE DADOS ... 49**
**8 CONCLUSÃO ... 51**
**REFERÊNCIAS ... 53**

# 1 INTRODUÇÃO

Essa monografia trata do estudo de modelos matemáticos em finanças inseridos na Moderna Teoria de Carteiras com o propósito de otimizar uma carteira de investimentos, por meio de diferentes métodos, formada por ativos do Índice de Sustentabilidade Empresarial (ISE) da B3. Para isso serão necessárias algumas definições que detalharemos a seguir.

A B3, formada pelas iniciais de Brasil, Bolsa e Balcão, é a fusão da BM&F – Bolsa de Futuros e Commodities, Bovespa – Bolsa de Valores de São Paulo, e CETIP – Central de Custódia e de Liquidação Financeira de Títulos. A história da Bovespa começa nos anos 1890, sendo que a partir da década de 1960 assumiu características de bolsa de valores. A BM&F surgiu em 1986 e se integrou com a Bovespa em 2008, criando a BM&FBOVESPA, tornando-se uma das maiores bolsa de valores do mundo em valor de mercado. Em 30 de março de 2017, houve a fusão da BM&FBOVESPA e o CETIP criando assim a B3 que reúne os mercados de “renda variável, renda fixa privada, derivativos financeiros, commodities, títulos de dívida bancária e outros nos segmentos de bolsa e balcão” (B3, 2017a, p. 34).

Ativo compreende o conjunto de bens e direitos de uma empresa ou entidade, tendo valor econômico e que pode ser transformado em dinheiro. O ativo se divide em dois tipos, Ativo Circulante e Ativo Não Circulante, para nós importa apenas o Ativo Não Circulante, que são os bens e direitos que a empresa não tem intenção de converter em dinheiro a curto prazo e, focaremos em apenas um tipo de Ativo Não Circulante, os investimentos (MONTOTO, 2018). Conforme a lei n. 6.404/76, atualizada pela lei n. 11.941/2009:

> Art. 178, § 1º, II — “ativo não circulante, composto por ativo realizável a longo prazo, investimentos, imobilizado e intangível.
> Art. 179 (...)
> III — em investimentos: as participações permanentes em outras sociedades e os direitos de qualquer natureza não classificáveis no ativo circulante e que não se destinem à manutenção da atividade da companhia ou da empresa;
> (...) (Brasil, 2009).

Os investimentos podem ser divididos em duas espécies: renda fixa e renda variável. No primeiro, o rendimento é determinado na hora da compra, logo, possuindo um risco muito baixo. Esses rendimentos geralmente são comparados ao CDI

(Certificado de Deposito Interbancário), ou seja, a taxa com a qual os bancos emprestam dinheiro entre si, e como exemplos de renda fixa se tem a poupança ou títulos do tesouro nacional. No segundo, o rendimento não é determinado na hora da compra e sim através de oscilações do mercado, ou seja, o risco é muito maior, pois há imprevisibilidade de como o mercado se comportará em momentos futuros e como principal exemplo temos as ações, onde compra-se um pedaço do capital social de uma empresa, podendo ao final ter um rendimento positivo assim como negativo (GONÇALVES, GIOVANNETTI, 2015).

As ações brasileiras são operadas através da B3, uma das principais empresas de infraestrutura de mercado financeiro no mundo todo, suas atividades incluem (B3, 2017b):

> (...) criação e administração de sistemas de negociação, compensação, liquidação, depósito e registro para todas as principais classes de ativos, desde ações e títulos de renda fixa corporativa até derivativos de moedas, operações estruturadas e taxas de juro e de commodities. A B3 também opera como contraparte central garantidora para a maior parte das operações realizadas em seus mercados e oferta serviços de central depositária e de central de registro. Por meio de sua unidade de financiamento de veículos e imóveis, a Companhia oferece produtos e serviços que suportam o processo de análise e aprovação de crédito em todo o território nacional, tornando o processo de financiamento mais ágil e seguro.

Apesar dessa importância, conforme uma pesquisa da Anbima (Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiros e de Capitais) juntamente com o apoio do Datafolha, de 2018, 88% dos brasileiros ainda preferem a caderneta de poupança para realizar investimentos, além disso, 48% preferem formar uma reserva financeira sem riscos a ter uma boa lucratividade (D'ÁVILA, 2019b). Segundo Mariana D'Ávila (2019a), em março de 2019, o país se aproximava de um milhão de pessoas investindo na B3, apesar dessa marca, ainda é tímido o mercado de investimento em ações no Brasil, principalmente quando se compara com países como Estados Unidos, na qual 52% das famílias investem direta ou indiretamente na sua bolsa de valores, segundo os dados do Fed, o Banco Central do EUA, de 2016.

Tanto a renda fixa quanto ações de uma empresa são chamados de ativos, e um conjunto de ativos é chamado de carteira de investimentos. Devido ao alto risco de investir em ações a carteira deve ser diversificada para minimizar esses riscos, selecionando ativos de diferentes setores empresariais que não possuam o mesmo comportamento no mercado, evitando-se que, caso haja algum imprevisto, perca-se todo dinheiro investido de uma só vez (ELTON et al, 2012).

Além da diversificação, existem diversos modelos matemáticos em finanças para determinar a melhor carteira de investimentos, com o menor risco e o maior rendimento possível, estes modelos são conhecidos como Moderna Teoria de Carteiras, onde economistas como Markowitz e Sharpe ganharam o prêmio Nobel de Economia. Eles se baseiam em minimizar e maximizar funções com o intuito de conseguir a otimização de carteiras (ELTON et al, 2012).

Utilizando os dados do site InfoMoney (2000), criamos uma carteira com ativos que compõe o Índice de Sustentabilidade Empresarial (ISE) de 2018 e 2019, com empresas de diversos setores. Por meio dessa carteira replicou-se o índice e calculou-se oito carteiras segundo a Moderna Teoria de Carteiras, entre o período de 1º de janeiro de 2018 e 31 de agosto de 2019, 20 meses, ou seja, 1 ano e 8 meses.

O índice surgiu com o objetivo de valorizar empresas comprometidas com a sustentabilidade, visto o aumento de práticas de responsabilidade social e a consciência da necessidade entre o retorno econômico, práticas sociais e conservação da natureza (WWF-BRASIL, 1996). O índice ISE é detalhado no site da B3 (2017c) como:

> (...) uma ferramenta para análise comparativa da performance das empresas listadas na B3 sob o aspecto da sustentabilidade corporativa, baseada em eficiência econômica, equilíbrio ambiental, justiça social e governança corporativa. Também amplia o entendimento sobre empresas e grupos comprometidos com a sustentabilidade, diferenciando-os em termos de qualidade, nível de compromisso com o desenvolvimento sustentável, equidade, transparência e prestação de contas, natureza do produto, além do desempenho empresarial nas dimensões econômico-financeira, social, ambiental e de mudanças climáticas.

Para a criação de carteiras ótimas com esses ativos foram usados quatro métodos de otimização: o modelo da média variância de Markowitz; a adição de um ativo à taxa livre de risco; índice único ou índice Sharpe e índice de corte ou de Elton-Gruber. Todos os modelos foram calculados com venda a descoberto (CVD) e sem venda a descoberto (SVD) (ELTON et al, 2012).

A venda a descoberto, também conhecida como "*short*" é uma modalidade no qual permite ao investidor vender uma ação que não está em sua carteira com o objetivo de mais tarde comprá-lo por um preço menor, assim tendo um lucro sobre o investimento feito. "Como você está vendendo ações que não possui, a BM&FBovespa exige o depósito de garantias (ativos que podem ser vendidos caso você não honre a obrigação de devolver ao doador as ações alugadas) para a realização das operações.” (ITAÚ CORRETORA, 2018).

Como ativo livre de risco foi utilizada a Poupança, visto que seu risco é quase nulo. Por isso, para os cálculos ela será considerada com risco zero, com os dados obtidos do Banco Central do Brasil (1964), e o Índice BOVESPA (IBOVESPA), “pois é o mais popular indicador de desempenho médio das ações do mercado brasileiro” (HAGLER, BRITO, 2007). A IBOVESPA foi considerada como índice de mercado, conforme Hagler e Brito (2007) pois sua relevância está em demostrar o desempenho das principais ações negociadas na B3.

# 2 OBJETIVOS

## 2.1 OBJETIVO GERAL

Analisar a rentabilidade de uma carteira baseada no Índice de Sustentabilidade Empresarial, utilizando-se de modelos matemáticos da Moderna Teoria de Carteiras.

## 2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Apresentar a base matemática dos modelos da Moderna Teoria de Carteiras para se escolher a melhor carteira, com menor risco e maior rentabilidade.
2. Replicar o Índice de Sustentabilidade Empresarial e compará-lo ao rendimento do Índice BOVESPA, ou seja, de mercado.
3. Verificar a rentabilidade de uma carteira do ISE e avaliar o possível ganho com investimentos sustentáveis no Brasil.

## 3 JUSTIFICATIVA

Diante de um cenário em que o desmatamento, poluição dos rios e oceanos, produção excessiva de $CO_2$, entre outros problemas ambientais que estão se agravando, a bolsa de valores brasileira B3, iniciou em 2005 um Índice de Sustentabilidade Empresarial - ISE, o primeiro da América Latina, visando um ambiente de investimentos que fossem compatíveis com a demanda de desenvolvimento sustentável da atualidade (B3, 2017b).

O principal e primeiro índice de sustentabilidade surgiu em 1999 nos Estados Unidos, chamado de *Dow Jones Sustainability Index* (DJSI). Dois anos após surgiu o chamado FTSE4good, de Londres, propagando uma onda de índices de sustentabilidade entre os países emergentes, como o JSE SRI na África do Sul em 2004 (CRISTÓFALO, 2016).

O conceito de desenvolvimento sustentável não é recente, criado em 1987 no relatório Nosso Futuro Comum da Comissão Mundial sobre Meio Ambiente e Desenvolvimento, conhecida também como Comissão *Brundtland*, ele foi cunhado para designar estruturas que atendam às necessidades das gerações presentes e que gerações futuras também possam supri-las, surgindo assim o tripé de sustentabilidade, *triple bottom line*, termo criado por John Elkington da consultoria inglesa *SustainAbility*: econômico, social e ambiental (B3, 2017b).

Esses conceitos têm por objetivo trazer a sustentabilidade para as discussões públicas, além de servirem como um guia para práticas organizacionais sustentáveis (ELKINGTON, 2012). Logo utilizamos o ISE devido à crescente importância desse tópico, como também verificar a importância de as empresas serem “verdes” no mercado de ações.

Além disso, analisamos os conceitos matemáticos e estatísticos que são utilizados nos modelos de Markowitz, Sharpe e Elton-Gruber, detalhando como são feitos esses cálculos. O intuito é demonstrá-los para pessoas que se interessam por investimentos e a matemática envolvida neles.

# 4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

## 4.1 TEORIA MODERNA DE CARTEIRAS

Também conhecida como Teoria Moderna do Portfólio, ela coloca na prática a ideia de “não coloque todos os ovos no mesmo cesto”, ou seja, a ideia de diversificar sua carteira de negócios. Começou com Harry Markowitz (1952) que calculou os riscos de cada ativo, notando que o risco é o desvio padrão dos retornos históricos. Markowitz mudou a análise de investimentos do ativo individual para a análise de uma carteira diversificada, mostrando matematicamente a relação entre o risco e o retorno (CALDEIRA, 2014).

Para começarmos a entender essa teoria, primeiro temos que entender o que são algumas definições.

O retorno médio esperado de um ativo $i$, denotada pelo símbolo $\bar{R}_i$, é a média aritmética do ativo $i$ no período $j$, sendo $j \in \{1, 2, 3, \dots, M\}$, coloca-se a barra $^{-}$ em cima para indicar valor esperado, $R_{ij}$ indica o $j$-ésimo resultado possível para o retorno do ativo $i$ e o símbolo $\sum$ significa somatório (FREUND, 2006), logo:

$$\bar{R}_i = \sum_{j=1}^{M} \frac{R_{ij}}{M}. \tag{1}$$

A variância de um ativo $i$, denotada por $\sigma_i^2$, define-se como a medida de afastamento da média, isto é, quanto os valores variam em relação à média $(\bar{R}_i - R_{ij})$. Evidentemente , estes valores podem ser positivos ou negativos, assim se podendo se anular, não mostrando a dispersão real, logo para evitar os números negativos, se eleva ao quadrado e faz a média aritmética (FREUND, 2006), sendo calculada pela fórmula:

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{M} \frac{(R_{ij} - \bar{R}_i)^2}{M}. \tag{2}$$

E por fim, o desvio padrão, também denominado por Markowitz como risco do ativo $i$,  é denotado por $\sigma_i$, é uma medida mais real a ser usada, visto que a variância foi elevada ao quadrado, modificando seus valores, então é a raiz quadrada da variância, para anular os quadrados inseridos anteriormente (FREUND, 2006), assim:

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{M} \frac{(R_{ij} - \bar{R}_i)^2}{M}}. \tag{3}$$

### 4.1.1 Modelo de Markowitz

Segundo Elton et al. (2012), temos o modelo de média-variância, criado por Harry Markowitz, que se tornou o mais famoso modelo para seleção de carteiras ótimas.

A definição matemática de carteira é um vetor $x \in \mathbb{R}^n$, no qual $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ onde $x_i$ é o percentual a ser investido no ativo $i$, $i = 1, 2, \dots, n$, e $n$ é o número de ativos que a carteira possui. Por exemplo, uma carteira composta por 3 ativos em que $x_1 = 30\%$, $x_2 = 20\%$ e $x_3 = 50\%$ é dada por $x = \begin{pmatrix} 30\% \\ 20\% \\ 50\% \end{pmatrix}$. Note que a soma das componentes $x$ é igual a $100\%$ (ELTON et al., 2012).

Para se montar a carteira de modo que $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Neste caso, está se usando a premissa, proposta por Markowitz, de que o investidor investirá todos o capital que ele se propôs a investir, o que equivale a soma dos percentuais investidos ser igual a $1$ (ou $100\%$). Conforme Elton et al. (2012), no modelo de Markowitz a primeira medida é o retorno médio esperado da carteira de investimentos, denotado por $\bar{R}_c$, que é simplesmente uma média ponderada dos retornos individuais de cada ativo, sendo $x_i$ a porcentagem do ativo $i$ na carteira, ou seja, a soma das porcentagens tem que ser $100\%$. O procedimento para $n$ ativos é:

$$\bar{R}_c = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{R}_i, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1. \tag{5}$$

O retorno esperado pode ser escrito também na forma:

$$\bar{R}_c = E(R_c) = E\left(\sum_{i=1}^{N} x_i R_{ij}\right). \tag{6}$$

Como sabemos, o valor esperado da soma de diversos retornos é a soma dos valores esperados desses retornos, assim,

$$\bar{R}_c = \sum_{i=1}^{N} E\left(x_i R_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{R}_i. \tag{7}$$

Em outras palavras, o operador esperança é linear. Já a variância não goza dessa propriedade e, por isso, é um pouco mais complicado de calculá-la. A seguir, serão realizados os cálculos com 2 ativos e depois sua generalização para n ativos.

Elton et al. (2012) define a variância de uma carteira $c$ de dois ativos, indicada por $\sigma_c^2$, ela é o valor esperado dos desvios quadrados do retorno médio da carteira, ou seja, $\sigma_c^2 = E(R_c - \bar{R}_c)^2$. Substituindo nessa expressão as fórmulas para retorno da carteira e retorno médio, ficamos com,

$$\begin{aligned} \sigma_c^2 &= E(R_c - \bar{R}_c)^2 = E\left[x_1 R_{1j} + x_2 R_{2j} - (x_1 \bar{R}_1 + x_2 \bar{R}_2)\right]^2 \\ &= E\left[x_1 (R_{1j} - \bar{R}_1) + x_2 (R_{2j} - \bar{R}_2)\right]^2, \end{aligned} \tag{8}$$

lembremos que,

$$(X + Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2, \tag{9}$$

aplicando a fórmula (9) na fórmula (8), temos,

$$\begin{aligned} \sigma_c^2 &= E\left[x_1^2 \left(R_{1j} - \bar{R}_1\right)^2 + 2x_1 x_2 \left(R_{1j} - \bar{R}_1\right)(R_{2j} - \bar{R}_2) + x_2^2 (R_{2j} - \bar{R}_2)^2\right] \\ \sigma_c^2 &= x_1^2 E\left[\left(R_{1j} - \bar{R}_1\right)^2\right] + 2x_1 x_2 E\left[\left(R_{1j} - \bar{R}_1\right)(R_{2j} - \bar{R}_2)\right] + x_2^2 E\left[(R_{2j} - \bar{R}_2)^2\right] \\ \sigma_c^2 &= x_1^2 \sigma_1^2 + 2x_1 x_2 E\left[\left(R_{1j} - \bar{R}_1\right)(R_{2j} - \bar{R}_2)\right] + x_2^2 \sigma_2^2. \end{aligned} \tag{10}$$

Em Estatística o termo $E\left[\left(R_{1j} - \bar{R}_1\right)(R_{2j} - \bar{R}_2)\right]$ recebe um nome especial, covariância e denotado pelo símbolo $\sigma_{12}$, logo,

$$\sigma_c^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2x_1 x_2 \sigma_{12}. \tag{11}$$

Essa expressão pode ser escrita na forma matricial como:

$$\sigma_c^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

sendo $x^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ os percentuais investidos na carteira $c$ e,

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

a matriz de covariâncias, a qual é simétrica definida positiva.

Para o caso de três ativos , $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$ e,

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^2 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Já para o caso de uma carteira com $n$ ativos $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T$ e,

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

sendo $\sigma_i^2$ a variância do ativo $i$ e $\sigma_{ij}$ a covariância entre os ativos $i$ e $j$, com $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, n$.

A diagonal principal da matriz $Q$ é formada pelas variâncias dos ativos $i$. $Q$ é uma matriz simétrica definida positiva. Logo, para calcularmos a matriz de covariância de uma carteira de $n$ ativos, deve-se calcular $\frac{n(n-1)}{2}$ covariâncias e $n$ variâncias (ELTON et al., 2012).

A covariância $\sigma_{ij}$ é a medida de como o retorno de dois ativos se movem em conjunto. Caso existam desvios positivos ou negativos em um ativo $i$ , e ao mesmo tempo que desvios positivos ou negativos em outro ativo $j$, então a covariância será positiva. Se os desvios forem opostos, positivos em $i$ e negativos em $j$, ou negativos em $i$ e positivos em $j$, então a covariância será negativa e, caso não tenham relação, a covariância será $0$ (BODIE, KANE, MARCUS, 2015).

A fórmula da variância da carteira é a função quadrática:

$$\sigma_c^2 = x^T Q x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}. \tag{16}$$

Para padronizar a covariância, foi criado o coeficiente de correlação:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}, \tag{17}$$

o coeficiente de correlação varia de $-1$ a $1$, ou seja $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$, sendo $-1$ os ativos que estão correlacionados perfeitamente negativamente, $1$ os ativos que estão correlacionados perfeitamente positivamente e $0$ os ativos que não possuem nenhuma relação (ELTON et al., 2012).

No desvio padrão, retira-se somente a raiz da variância, sendo denotado por $\sigma_c$ e obteremos o risco da carteira de investimentos. Para otimizar a carteira pelo modelo de Markowitz, basta minimizar a função risco. Se $x \in \mathbb{R}_+^n$, não é permitido venda a descoberto, se $x \in \mathbb{R}^n$, então é permitido venda a descoberto. Logo, algumas componentes de $x$ poderão ser negativas (empréstimos), mas a soma delas deverá ser $1$, ou seja $100\%$ (ELTON et al., 2012). Conforme a B3 a venda a descoberto é definida como:

> O empréstimo de ativos é um serviço no qual, em troca de uma taxa de remuneração acordada, o detentor de determinados ativos (doador) autoriza sua transferência a um terceiro – o tomador. O tomador do empréstimo é livre para vender esses ativos, realizando a operação denominada “venda a descoberto”, ou utilizá-los em outras finalidades, mas fica obrigado a devolvê-los seguindo o que foi combinado entre as partes. A B3 garante a devolução dos ativos (B3, 2017d).

Matematicamente, uma venda a descoberto significa que componentes da carteira podem assumir valores negativos. Assim, usaremos as nomenclaturas: Com Venda Descoberto – CVD quando alguma(s) componente(s) da carteira $x$ é(são) negativa(s) e Sem Venda a Descoberto - SVD quando todas as componentes da carteira $x$ são não negativas.

O modelo de Markowitz para uma carteira com $n$ ativos, quando não há venda a descoberto, pode ser escrito como minimizar (ELTON et al., 2012):

$$\sum x_i^2\sigma_i^2 + \sum\sum x_i x_j \sigma_{ij}, \tag{18}$$

sujeito à:

$$\sum x_i = 1, \tag{19}$$

$$x_i \geq 0. \tag{20}$$

Na forma matricial, minimizar:

$$x^T Q x, \tag{21}$$

sujeito à:

$$x^T e = 1, \tag{22}$$

$$x_i \geq 0. \tag{23}$$

Aqui $x^T e$ é o produto escalar e $x \geq 0$ é a notação que indica que todas as componentes de $x$ são não negativas. No caso em que é permitido Venda a Descoberto, basta retirar a restrição nas fórmulas (20) e (23), fazendo $x \in \mathbb{R}^n$.

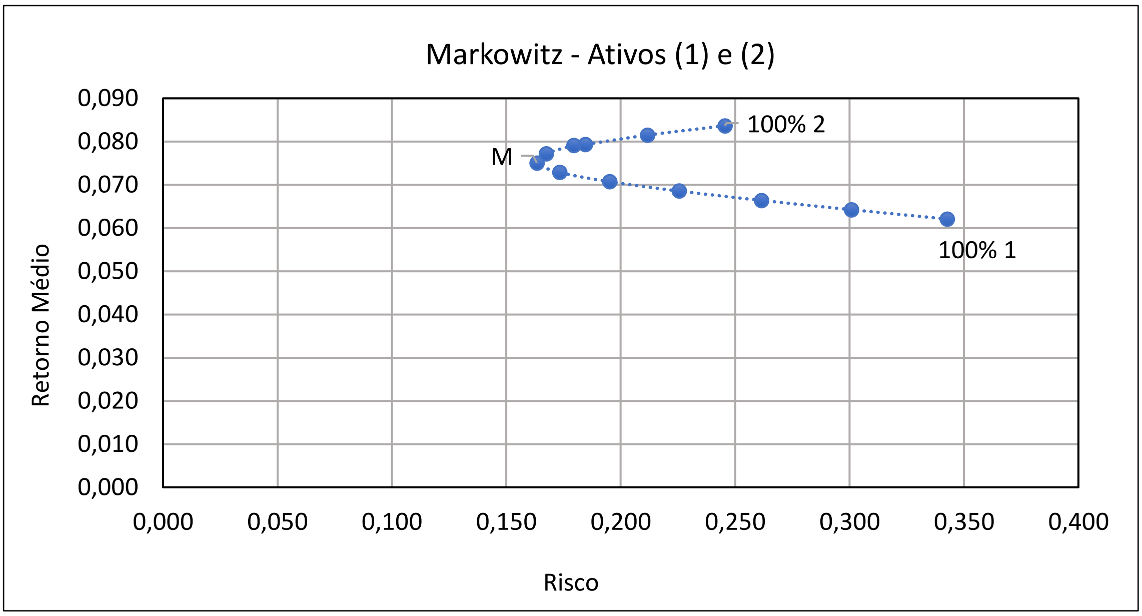
Segundo Elton et al (2012), o risco do ativo poderia ser reduzido através da diversificação da carteira. Quanto mais ativos e dependendo do coeficiente de correlação entre eles, torna-se possível a escolha de carteiras que cheguem a risco zero. Isso só não é possível na prática devido ao fato de que em grande parte dos mercados a maior parte dos ativos possui coeficiente de correlação positivos, mas ainda podemos diminuir muito o risco através da diversificação da carteira de investimentos.

A seguir apresenta-se um exemplo. Podemos ver no Gráfico 1, onde não é permitido venda a descoberto, feita com os cálculos dos ativos 1 RaiaDrogasil S.A.

(RADL3) e 2 Telefônica Brasil S.A. (VIVT4), no período de 01/06/2018 à 31/05/2019, formando à carteira ótima, M, no valor de $40{,}237\%$ investido no ativo 1 e $59{,}763\%$ investido no ativo 2.

Note que cada ponto, na figura do Gráfico 1, representa uma carteira de investimentos com percentuais investidos nos ativos 1 e 2. A carteira M é a que possui o menor risco. Markowitz observou que as carteiras que estão no ramo inferior da hipérbole da figura do Gráfico 1, ou seja, aquelas que vão da carteira de mínima variância M até $100\%$ do ativo 1 não são eficientes. Desta forma ele introduziu o conceito de fronteira eficiente.

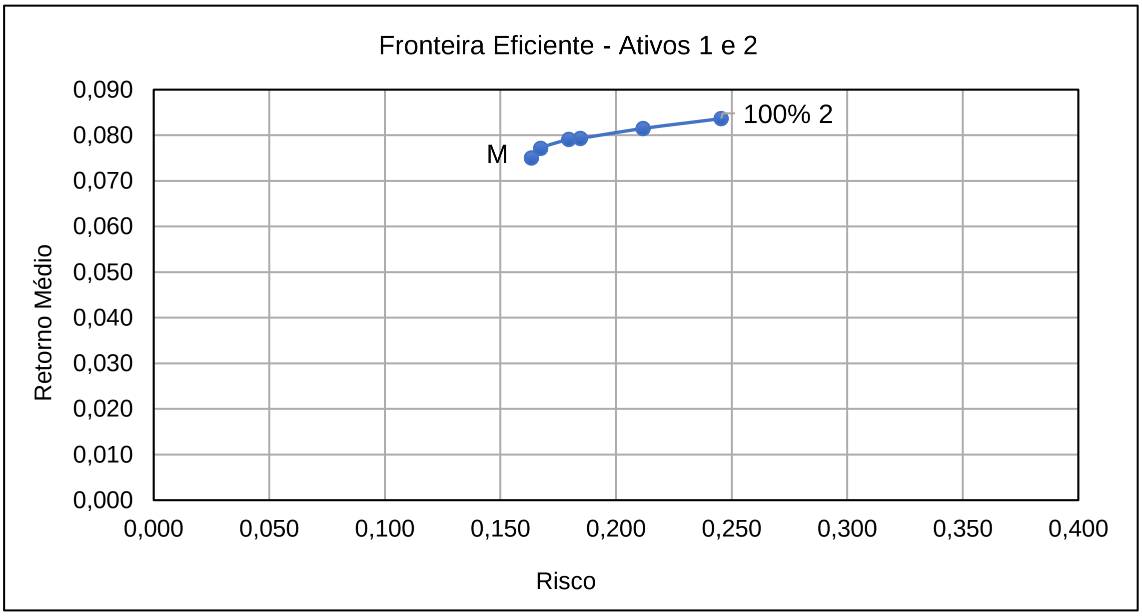
Gráfico 1 – Carteiras diversificadas




Fonte: A autora (2020).

No Gráfico 2, podemos ver a fronteira eficiente de Markowitz, sendo que a curva é criada por carteiras que vão da carteira de mínima variância, M, até a carteira de formada por $100\%$ do ativo 2, isto é, investindo todo o capital no ativo 2.

Gráfico 2 – Fronteira eficiente de Markowitz




Fonte: A autora (2020).

Caso fosse permitida venda a descoberto, a parábola continuaria infinitamente na ponta de cima do Gráfico 2 e a fronteira eficiente continuaria infinitamente após o $100\%$ do ativo 2. Neste caso, toma-se emprestado do ativo 1 para investir no ativo 2, por exemplo, $-20\%$ do ativo 1 e $120\%$ do ativo 2, sempre resultando em $100\%$.

### 4.1.2 Inclusão de um Ativo à Taxa livre de Risco

Até o momento só utilizamos ativos com risco, mais especificamente ações da B3, no mesmo modelo de Markowitz. Agora, introduziremos um ativo à taxa livre de risco, denotado por $R_f$, sem barra $^-$ em cima, pois não é uma média. O risco é denotado por $\sigma_f = 0$, pois sua variância é $0$, e, portanto, seu desvio padrão também o será. Nesse caso, também será necessária uma carteira $A$, de ativos com riscos, com retornos esperados $\bar{R}_A$ e risco $\sigma_A$ (ELTON et al., 2012). O retorno esperado da carteira é:

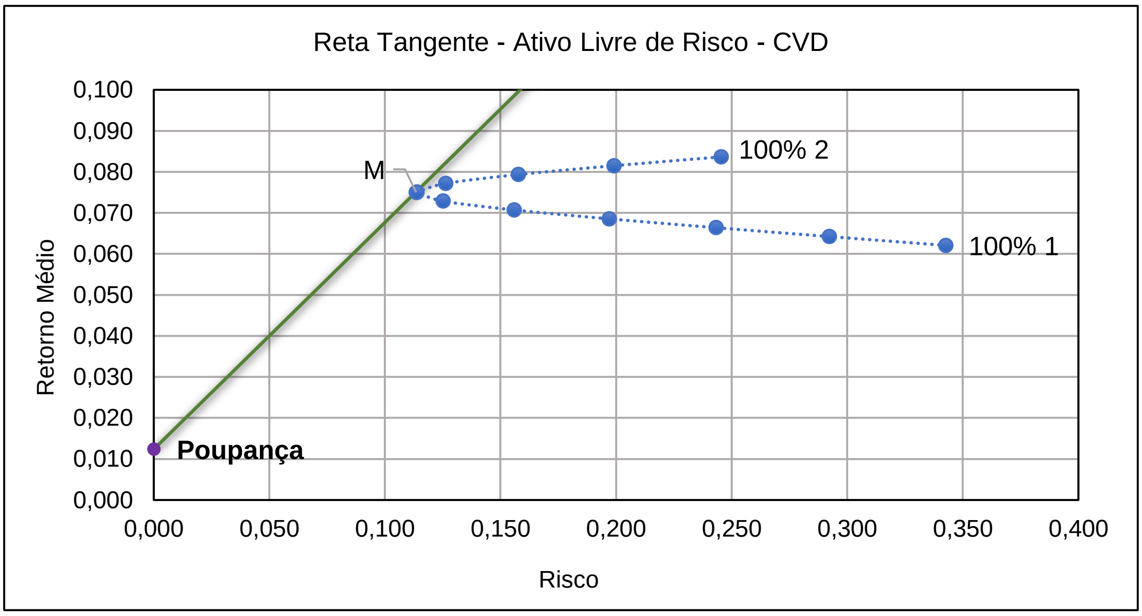
$$\bar{R}_c = R_f + \left(\frac{\bar{R}_A - R_f}{\sigma_A}\right)\sigma_c. \qquad (24)$$

Nota-se que essa é a equação de uma reta onde se encontram todas as combinações do ativo à taxa livre de risco com a carteira $A$. Essa reta passa pelos pontos $(0, R_f)$ e $(\sigma_A, \bar{R}_A)$, isto é, respectivamente, carteiras com $100\%$ do ativo a taxa livre de risco e $100\%$ da carteira $A$. Para se encontrar a carteira ótima sem venda a descoberto, é necessário maximizar o coeficiente angular da reta (ELTON et al., 2012):

$$\theta(x) = \left(\frac{\bar{R}_A - R_f}{\sigma_A}\right). \tag{25}$$

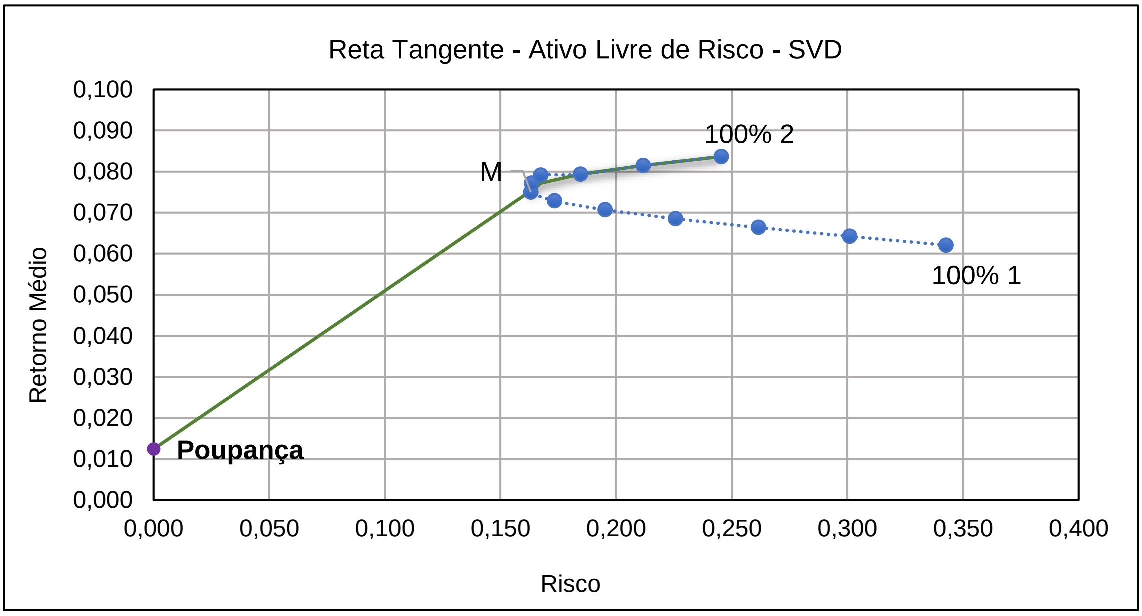
Encontrando esse coeficiente angular, encontra-se a reta tangente à fronteira eficiente de Markowitz, ou seja, “conjunto dos portfólios em que para um dado risco é obtido o maior retorno possível” (OLIVEIRA, SILVA, 2009, p. 325).O Gráfico 3 a seguir, representa a reta tangente no caso de um ativo à taxa livre de risco e com venda a descoberto, sendo que a reta é tangente a fronteira eficiente. O Gráfico 4 exibe a situação em que se tem um ativo à taxa livre de risco, mas sem venda a descoberto, logo a fronteira eficiente vai da reta tangente até $100\%$ do ativo 2.

Gráfico 3 – Ativo Livre de Risco - CVD




Fonte: A autora (2020).

Gráfico 4 – Ativo Livre de Risco – SVD




Fonte: A autora (2020).

No caso com venda a descoberto, os cálculos são feitos de outra forma, sendo necessária a resolução de um sistema de equações lineares, determinado por

$$Qz = (\bar{R}_c - Rf). \tag{26}$$

Conforme Elton et al. (2012), é possível encontrar essa solução através do sistema:

$$\begin{aligned}
\bar{R}_1 - Rf &= \sigma_1^2 z_1 + \sigma_{12} z_2 + \cdots + \sigma_{1n} z_n \\
\bar{R}_2 - Rf &= \sigma_{12} z_1 + \sigma_2^2 z_2 + \cdots + \sigma_{2n} z_n \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \\
\bar{R}_n - Rf &= \sigma_{1n} z_n + \sigma_{2n} z_2 + \cdots + \sigma_n^2 z_n,
\end{aligned} \tag{27}$$

ou para facilitar as contas no Excel, pode ser calculado por meio da fórmula:

$$z = Q^{-1}(\bar{R}_c - Rf), \tag{28}$$

no qual $z \in \mathbb{R}^n$, e as proporções da carteira são dadas por:

$$x_i = \frac{z_i}{\sum_{i=1}^{n} z_i}, \tag{29}$$

com $i = 1,2, \ldots, n$. Aqui será necessário resolver um sistema linear para se determinar a carteira ótima com venda a descoberto.

### 4.1.3 Índice Único

Analisando o mercado, percebe-se que a maioria das ações sobe quando o mercado sobe e vice-versa. Willian Sharpe, que foi aluno de Markowitz, criou uma versão simplificada para o retorno de ativos, chamando-o de índice único (beta), levando em consideração a relação ativo-mercado, sendo $\bar{R}_m$ o retorno esperado do mercado (BELLO, MATIOLI, 2017), no caso do Brasil o IBOVESPA é considerado como o retorno do mercado.

Segundo Elton et al. (2012), o $\beta_i$ é o coeficiente que mede a variação do retorno do ativo $i$, $\bar{R}_i$, dada uma alteração em $\bar{R}_m$, ou seja, uma variação nos retornos do mercado. O coeficiente $\beta$ é calculado através de uma regressão linear simples entre os $\bar{R}_i$ e $\bar{R}_m$ e possui a seguinte expressão (ELTON et al., 2012):

$$\beta_i = \frac{\frac{\left[\sum_{t=1}^{n}(R_i - \bar{R}_i)(R_m - \bar{R}_m)\right]}{n}}{\sum_{t=1}^{n}\frac{(R_m - \bar{R}_m)^2}{n}}. \tag{30}$$

Considere $\sigma_{im}$ a covariância entre o ativo $i$ e o mercado e $\sigma_m^2$ a variância do mercado. Segundo $\beta_i$ pode ser calculado como:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}. \tag{31}$$

Neste caso, $\beta_i$ é uma medida de risco do ativo $i$ e $\beta_i = 1$ é, por convenção, o risco de mercado. Se $\beta_i > 1$, considera-se o ativo $i$ como sendo agressivo, visto que tem mais risco que o mercado. Se $\beta_i = 1{,}5$, então caso o mercado aumente $1\%$, o ativo $i$ aumentará $1{,}5\%$. Se $\beta_i < 1$, considera-se o ativo $i$ como sendo defensivo, assim tem menos risco que o mercado. Por exemplo, se $\beta_i = 0{,}5$ e o mercado diminui $1\%$, o ativo $i$ diminui $0{,}5\%$. E finalmente, se $\beta_i = 1$, considera-se o ativo $i$ como sendo neutro, pois tem o mesmo risco do mercado, variando na mesma proporção. Beta também é o risco que não pode ser extinguido através da diversificação do ativo, isto é, é o risco que mesmo através da diversificação da carteira, ele se mantém (BELLO, MATIOLI, 2017).

O $\alpha_i$ é o componente do retorno que não é afetado pelo mercado, é o retorno esperado das ações se o mercado for neutro, isto é, se é $\bar{R}_m = R_f$. Calcula-se mediante (Elton et al., 2012):

$$\alpha_i = \bar{R}_i - \beta_i \bar{R}_m. \tag{32}$$

Sendo $\bar{R}_i$ o retorno médio do ativo $i$ e $\bar{R}_m$ o retorno médio do mercado.

Segundo Elton et al. (2012), é necessário calcular $\sigma_{ei}^2$, a qual mede a variação do erro na aproximação da regressão linear de cada ativo $i$, que se calcula pela expressão:

$$\sigma_{ei}^2 = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}[R_{ji} - (\alpha_i + \beta_i \bar{R}_m)]^2, \tag{33}$$

sendo $R_{ji}$ o retorno do ativo $i$ no período $j$. Assim, podemos calcular a variância de um ativo $i$ utilizando a fórmula:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{ei}^2. \tag{34}$$

Podemos estimar o beta e o alfa da carteira, pelas respectivas fórmulas:

$$\beta_c = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i, \tag{35}$$

$$\alpha_c = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i, \tag{36}$$

sendo $x_i$ o percentual a ser investido no ativo $i$.

O retorno esperado e a variância da carteira são dados, respectivamente, por:

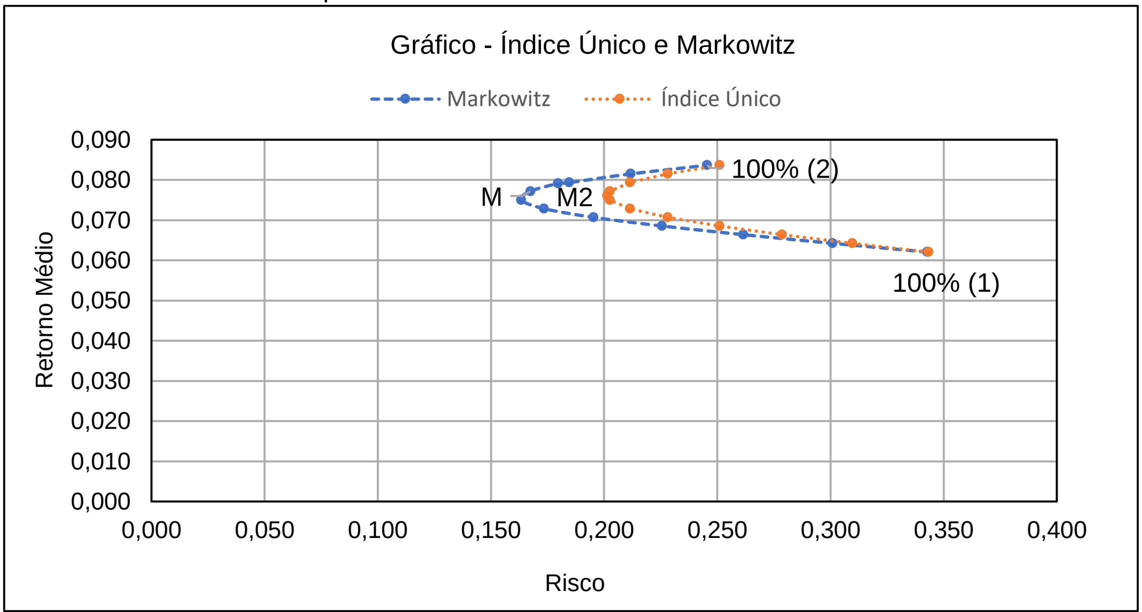
$$\bar{R}_c = \alpha_c + \beta_c \bar{R}_m, \tag{37}$$

$$\sigma_c^2 = \beta_c^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_{ei}^2. \tag{38}$$

Para se calcular o risco da carteira, basta retirar-se a raiz quadrada da variância, como nos outros casos e se calcula a carteira ótima, minimizando-se o risco, nos dois casos.

Segue um comparativo entre o modelo de Markowitz e o modelo de Índice Único de Sharpe:

Gráfico 5 – Comparativo entre os modelos do Índice Único e de Markowitz




Fonte: A autora (2020).

O Gráfico 5 compara os dois modelos. Percebe-se que enquanto os retornos continuam praticamente os mesmos, os riscos aumentam no Índice Único. No novo índice, atinge a carteira ótima (M2) com $35{,}018\%$ do ativo 1 e $64{,}982\%$ do ativo 2. Poderia também ocorrer o contrário e é natural que eles não sejam idênticos pois o modelo de índice único é uma aproximação para o modelo de Markowitz.

### 4.1.4 Índice de Corte

Para esse modelo, também chamado de Elton-Gruber, são necessários os dados calculados no modelo de índice único utilizando-se:

$$\frac{(\bar{R}_i - R_f)}{\beta_i}. \tag{39}$$

Calculamos o retorno excedente, isto é, a diferença entre o retorno esperado do ativo $i$ e o ativo à taxa livre de risco, $R_f$, em seguida dividimos pelo beta do ativo $i$, e desta forma mede-se o retorno excedente por unidade de risco que não pode ser diversificado. Em seguida, deve-se classificar os índices do maior para o menor retorno adicional por unidade de risco não-diversificado (ELTON et al., 2012).

Para se fazer esse cálculo, é conveniente criar uma tabela. Coloca-se na primeira coluna os ativos; na segunda, o retorno excedente dividido pelo beta do maior para o menor valor. Em seguida, as seguintes expressões são calculadas na terceira, quarta, quinta e sexta colunas, respectivamente (ELTON et al., 2012):

$$\frac{(\bar{R}_i - R_f)\beta_i}{\sigma_{ei}^2}, \tag{40}$$

$$\frac{\beta_i^2}{\sigma_{ei}^2}, \tag{41}$$

$$\sum_{j=1}^{i} \frac{(\bar{R}_i - R_f)\beta_i}{\sigma_{ei}^2}\ , \tag{42}$$

$$\sum_{j=1}^{i} \frac{\beta_i^2}{\sigma_{ei}^2}. \tag{43}$$

Na sétima coluna, iremos calcular o Índice de Corte $C^*$, que é o nível de corte da carteira. Todos os ativos que possuem $C_i$ maior que o retorno excedente sobre o risco são selecionados e os outros rejeitados (ELTON et al., 2012). Como as carteiras estão ordenadas, todos os outros cálculos permaneceram corretos, assim, $C_i$ é medido por:

$$C_i = \frac{\sigma_m^2 \sum_{j=1}^{i} \frac{(\bar{R}_i - R_f)\beta_i}{\sigma_{ei}^2}}{1 + \sigma_m^2 \sum_{j=1}^{i} \left(\frac{\beta_i^2}{\sigma_{ei}^2}\right)}. \tag{44}$$

Assim, podemos completar a sétima coluna, conforme a Tabela 1, em que estão exemplificados como realizar os cálculos desta tabela, que é de suma importância para avaliar esse índice, sendo obrigatório que a ordem inicial esteja correta, ou todos os cálculos serão perdidos.

Tabela 1 – Índice de Corte $C^*$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ordem dos títulos $\boldsymbol{i}$ | $\boldsymbol{\frac{(\bar{R}_i - R_f)}{\beta_i}}$ | $\boldsymbol{\frac{(\bar{R}_i - R_f)\beta_i}{\sigma_{ei}^2}}$ | $\boldsymbol{\frac{\beta_i^2}{\sigma_{ei}^2}}$ | $\boldsymbol{\sum_{j=1}^{i} \frac{(\bar{R}_i - R_f)\beta_i}{\sigma_{ei}^2}}$ | $\boldsymbol{\sum_{j=1}^{i} \frac{\beta_i^2}{\sigma_{ei}^2}}$ | $\boldsymbol{C_i}$ |
| NATU3 (1) | 0,546 | 0,552 | 1,010 | 0,552 | 1,010 | 0,029 |
| VIVT4 (2) | 0,318 | 0,278 | 0,872 | 0,829 | 1,883 | 0,041 |
| MRVE3 (3) | 0,268 | 0,559 | 2,088 | 1,388 | 3,971 | 0,062 |
| LREN3 (4) | **0,236** | **3,249** | **13,751** | **4,637** | **17,722** | **0,129** |
| LIGT3 (5) | 0,120 | 1,932 | 16,124 | 6,569 | 33,846 | 0,126 |
| WEGE3 (6) | 0,112 | 0,338 | 3,028 | 6,907 | 36,874 | 0,125 |

Fonte: A autora (2020).

Após ter completado a tabela, compara se a segunda com a sétima coluna, todos os ativos em que:

$$\frac{(\bar{R}_i - R_f)}{\beta_i} > C_i, \tag{45}$$

irão compor a carteira ótima. Uma vez determinados os ativos que vão fazer parte da carteira, calcula se a proporção de cada um destes ativos pela seguinte fórmula:

$$Z_i = \frac{\beta_i}{\sigma_{ei}^2}\left(\frac{(\bar{R}_i - R_f)}{\beta_i} - C^*\right). \tag{46}$$

Depois de se usar a fórmula (46), é usado a fórmula (29) para encontrar os $x_i$. Para o caso em que não há venda a descoberto, basta tomar apenas os ativos acima da linha de corte, e com venda a descoberto utiliza-se todos ativos, calculando como se o $C^*$ fosse o $C_n$.

# 5 METODOLOGIA

Esse trabalho classifica-se como uma pesquisa exploratória pois "têm como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses" (GIL, 2002), ou seja, tem como objetivo analisar o comportamento dos ativos do índice ISE e através da Teoria Moderna de Carteiras, constituir hipóteses e testá-las. As hipóteses a serem testadas são se as empresas, ditas sustentáveis pela B3 possuem as características:

1) tem retorno acima do retorno do mercado;

2) possuem risco abaixo do risco do mercado.

Essas análises foram feitas por meio de pesquisas bibliográficas, "desenvolvidas com base em material já elaborado e constituído principalmente de livros e artigos científicos" (GIL, 2002). A coleta de dados foi realizada no site InfoMoney (2000), em que são disponibilizados, gratuitamente, as variações diárias dos ativos durante o período de três anos. Todos os testes foram realizados no *software* Excel 365 Língua Portuguesa (Brasil), utilizando os suplementos de aplicativos denominados Solver e Ferramenta de Análise, o primeiro para otimizar carteiras e o segundo para calcular automaticamente matrizes de covariâncias e correlações. Foram selecionados 18 ativos do índice ISE da B3, do período de 01/01/2018 à 31/08/2019. A Tabela 2 exibe os ativos escolhidos:

Tabela 2: Ativos do Índice ISE

(Continua)

| Ativo | Nome do Ativo | Código | Setor |
|---|---|---|---|
| **1** | BRASIL | **BBAS3** | Financeiro / Intermediários Financeiros / Bancos |
| **2** | BRADESCO | **BBDC4** | Financeiro / Intermediários Financeiros / Bancos |
| **3** | BRASKEM | **BRKM5** | Materiais Básicos / Químicos / Petroquímicos |
| **4** | CCR SA | **CCRO3** | Bens Industriais / Transporte / Exploração de Rodovias |
| **5** | CIELO | **CIEL3** | Financeiro / Serviços Financeiros Diversos / Serviços Financeiros Diversos |
| **6** | CEMIG | **CMIG4** | Utilidade Pública / Energia Elétrica / Energia Elétrica |
| **7** | COPEL | **CPLE6** | Utilidade Pública / Energia Elétrica / Energia Elétrica |
| **8** | ENGIE BRASIL | **EGIE3** | Utilidade Pública / Energia Elétrica / Energia Elétrica |
| **9** | ELETROBRAS | **ELET3** | Utilidade Pública / Energia Elétrica / Energia Elétrica |
| **10** | FLEURY | **FLRY3** | Saúde / Serv.Méd.Hospit. Análises e Diagnósticos / Serv.Méd.Hospit. Análises e Diagnósticos |
| **11** | ITAUUNIBANCO | **ITUB4** | Financeiro / Intermediários Financeiros / Bancos |
| **12** | KLABIN S/A | **KLBN11** | Materiais Básicos / Madeira e Papel |
| **13** | LOJAS AMERIC | **LAME4** | Consumo Cíclico / Comércio / Produtos Diversos |
| **14** | LOJAS RENNER | **LREN3** | Consumo Cíclico / Comércio / Tecidos. Vestuário e Calçados |
| **15** | MRV | **MRVE3** | Consumo Cíclico / Construção Civil / Incorporações |

(Conclusão)

| Ativo | Nome do Ativo | Código | Setor |
|---|---|---|---|
| **16** | NATURA | **NATU3** | Consumo não cíclico / Produtos de Uso Pessoal e de Limpeza / Produtos de Uso Pessoal |
| **17** | TELEF BRASIL | **VIVT4** | Comunicações / Telecomunicações / Telecomunicações |
| **18** | WEG | **WEGE3** | Bens Industriais / Máquinas e Equipamentos / Motores . Compressores e Outros |

Fonte: B3 (2017c) adaptado pela autora.

Na Tabela 1, a coluna 1 é o número dos ativos, a coluna 2 é o nome dos ativos, a coluna 3 é o código dos ativos os quais são conhecidos no mercado financeiro como *ticker* dos ativos. Por último a coluna 4 descreve os setores a que os ativos pertencem.

Esses ativos foram escolhidos entre os 36 da carteira do índice ISE de 2019, por serem de setores diversos além de terem como participação, nos meses de setembro a dezembro de 2019 por representarem 80,318% do ISE e 31,346% do índice IBOVESPA, podendo assim replicar o índice de sustentabilidade e ao mesmo tempo ter uma carteira variada de ativos. Além disso, todas as empresas estão no índice desde 2017 (B3, 2017c).

Para participar do índice são convidadas anualmente, pela B3, as emissoras das 200 ações mais líquidas da bolsa de valores brasileira, estas devem responder um questionário com questões a respeito de política corporativa, responsabilidade ambiental, gestão ambiental, saúde e segurança do trabalhador, bem-estar animal, poluição causada, procedimentos judiciais civis e penais na área ambiental, entre outros. Além de responder, é imprescindível a divulgação dessas respostas desde 2017. No final, são selecionadas, no máximo, 40 empresas para compor o índice ISE (B3, 2017b).

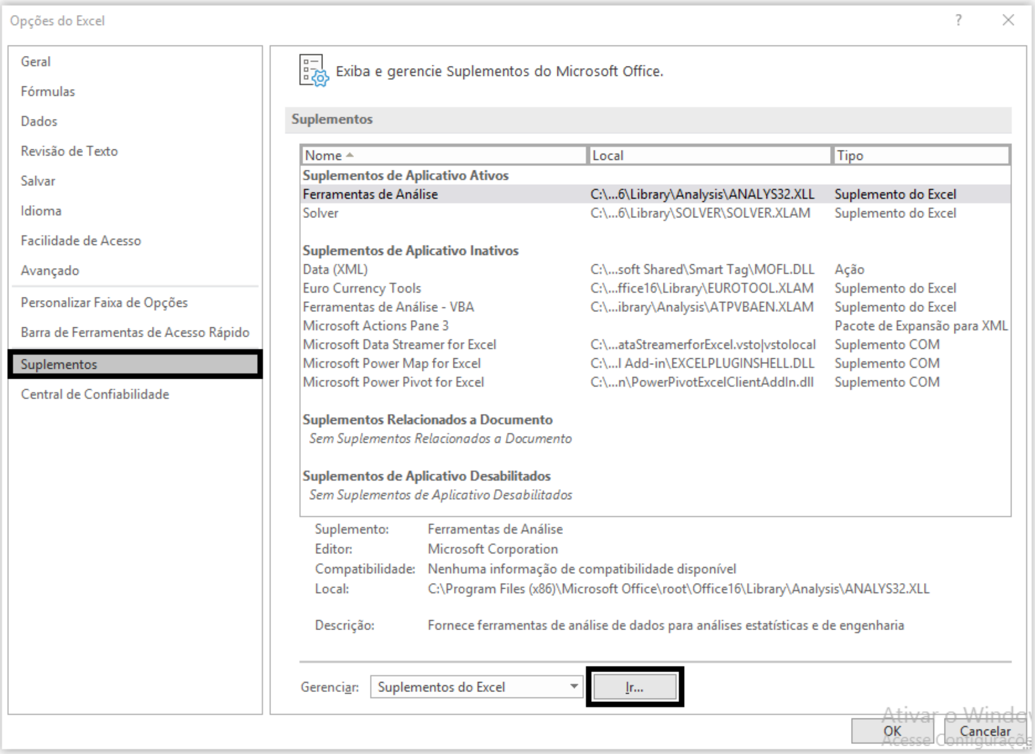
Para os cálculos, o índice de mercado será o IBOVESPA com os dados coletados no site InfoMoney (2000) e, como ativo a taxa livre de risco, será escolhida a poupança, com os dados obtidos do site do Banco Central do Brasil (1964), no mesmo período de 20 meses dos 18 ativos escolhidos. Com todos esses dados, calcula se o retorno médio mensal e anual, além da variância e desvio padrão (risco) de todos os ativos e índices as estimativas do índice ISE para futuras comparações.

Partindo desses dados, consegue se calcular todos os modelos propostos no item 4 deste projeto, e assim determina se as carteiras ótimas utilizando os métodos desenvolvidos na seção anterior.

A seguir descreve se como utilizar os comandos do Excel para a determinação da carteira ótima pelos modelos apresentados.

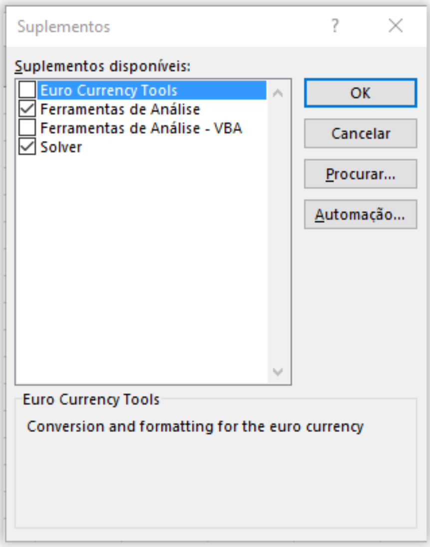
Para ativar os suplementos deve-se ir em: Arquivo → Opções → Suplementos (Figura 1) → Gerenciar → Selecionar na caixa: “Suplementos do Excel” → Apertar no botão “Ir” → Selecionar os quadrados “Solver” e “Análise de Dados” (Figura 2) → Selecionar o botão “Ok” → Aguardar a ativação.

Figura 1 – Suplementos.




Fonte: A autora (2020).

Figura 2 – Solver e Ferramentas de Análise.




Fonte: A autora (2020).

Depois de realizados estes procedimentos, pode-se utilizar os dois aplicativos e para isso basta ir a “Dados”. Com eles criam-se as matrizes necessárias para a execução dos modelos, como é mostrado mais à frente.

## 5.1 MODELO DE MARKOWITZ

Para a determinar carteira ótima pelo modelo de Markowitz são necessários alguns passos:

1º - Cria-se um vetor com componentes $x_i;\ i = \{1, 2, 3, \dots, 18\}$, com quaisquer valores que a soma de como resultado 1. Em uma linha com 19 colunas, sendo a 19ª coluna, a soma das 18 primeiras. Em todos os modelos temos que $\sum_{i=1}^{18}$ e $x_i = 1$. Para facilitar as fórmulas, cria-se um outro vetor de $x_i$, mas no formato de linhas (ver Figura 3, para um exemplo com 5 ativos), copiando-se o valor de $x_1$ na horizontal na célula de $x_1$ na vertical, isto é, se $x_1$ na horizontal está na célula $A1$, $x_1$ na vertical deve conter $= A1$, e assim por diante, copiando todas as células, menos a 19ª, na qual será utilizado a fórmula SOMA (Figura 4), como na matriz linha. Ao final, as carteiras ótimas apareceram no lugar desses valores, por isso não importa o valor colocado no começo.

Figura 3 – Exemplo com 5 ativos de linhas e colunas.

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Xi** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **TOTAL** |
| 2 | **%** | 0,20 | 0,20 | 0,20 | 0,20 | 0,20 | **1,00** |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | **Xi** | **%** | | | | | |
| 5 | **1** | 0,20 | | | | | |
| 6 | **2** | 0,20 | | | | | |
| 7 | **3** | 0,20 | | | | | |
| 8 | **4** | 0,20 | | | | | |
| 9 | **5** | =F2 | | | | | |
| 10 | **TOTAL** | **1,00** | | | | | |

Fonte: A autora (2020).

Figura 4 – Fórmula SOMA.

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Xi** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **TOTAL** |
| 2 | **%** | 0,20 | 0,20 | 0,20 | 0,20 | 0,20 | **1,00** |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | **Xi** | **%** | | | | | |
| 5 | **1** | 0,20 | | | | | |
| 6 | **2** | 0,20 | | | | | |
| 7 | **3** | 0,20 | | | | | |
| 8 | **4** | 0,20 | | | | | |
| 9 | **5** | 0,20 | | | | | |
| 10 | =SOMA(B5:B9) | | | | | | |

Fonte: A autora (2020).

2º - Calcula-se o $\bar{R}_c$, utilizando a fórmula $= MATRIZ.MULT(matriz1; matriz2)$, colocando como $matriz1$ os $x_i$ na horizontal, 1ª a 18ª coluna, e como $matriz2$ a coluna dos valores dos $\bar{R}_i$ (ver Figura 5 para o caso com 5 ativos), que serão calculados e colocados em um vetor coluna com 18 componentes.

Figura 5 – Fórmula MATRIZ.MULT.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Xi** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **TOTAL** | | **Ativo i** | **Ri** | **σ²i** | **σi** |
| 2 | **%** | 0,20 | 0,20 | 0,20 | 0,20 | 0,20 | **1,00** | | **BTOW3 (1)** | 0,18738 | 0,27272 | 0,52223 |
| 3 | | | | | | | | | **CMIG4 (2)** | 0,26595 | 0,29588 | 0,54394 |
| 4 | **Xi** | **%** | | Rc | | | | | **ITSA4 (3)** | 0,13147 | 0,17732 | 0,42110 |
| 5 | **1** | 0,20 | | =MATRIZ.MULT(B2:F2;J2:J6) | | | | | **NATU3 (4)** | 0,18006 | 0,18937 | 0,43517 |
| 6 | **2** | 0,20 | | MATRIZ.MULT(matriz1; **matriz2**) | | | | | **WEGE3 (5)** | 0,05835 | 0,06903 | 0,26274 |
| 7 | **3** | 0,20 | | | | | | | | | | |
| 8 | **4** | 0,20 | | | | | | | | | | |
| 9 | **5** | 0,20 | | | | | | | | | | |
| 10 | **TOTAL** | **1,00** | | | | | | | | | | |

Fonte: A autora (2020).

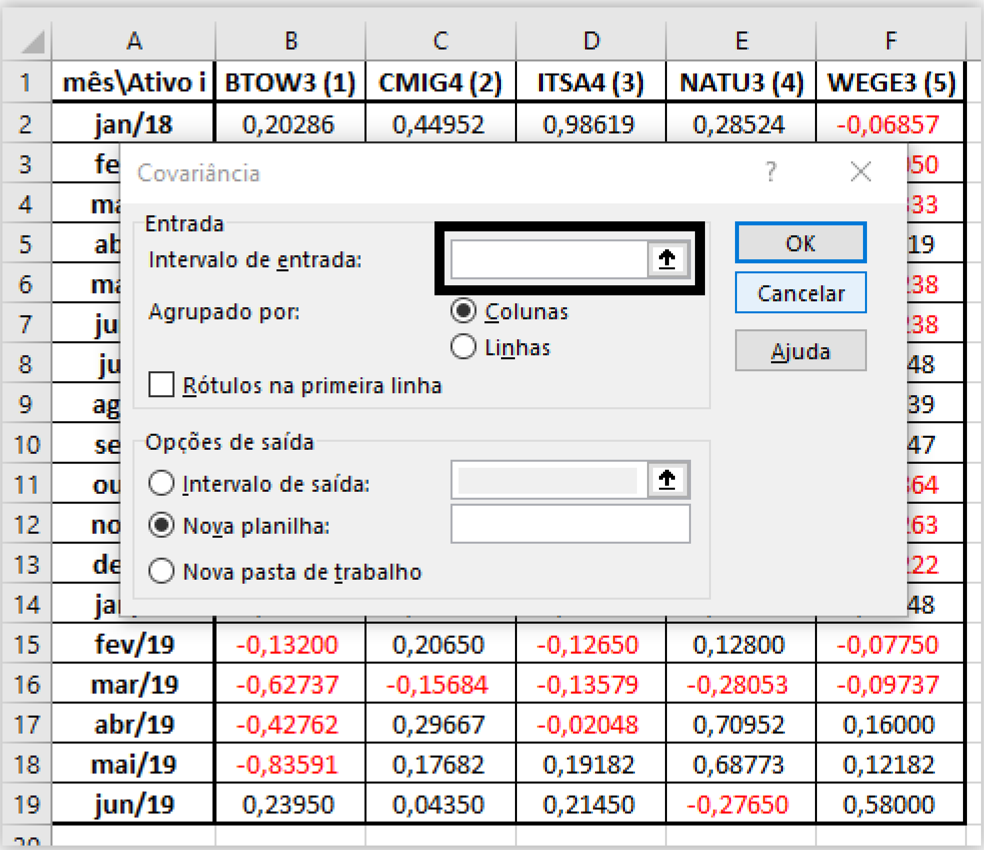
3º - A concepção da tabela de covariâncias $Q$ será criada automaticamente pelo aplicativo Análise de Dados, indo a Covariância → Preenchendo o intervalo de entrada com os dados mensais dos ativos (Figura 6, Figura 7 e Figura 8), que estarão em uma tabela em colunas → Agrupados por "Colunas" → Determinar o intervalo de saída que desejar e selecionar o botão "Ok", cria-se a matriz triangular $Q$ (Figura 9), logo após é necessário preencher os espaços vazios de forma espelhada (Figura 10), pois é uma matriz simétrica.

Figura 6 – Tabela mensal.

| mês\Ativo i | BTOW3 (1) | CMIG4 (2) | ITSA4 (3) | NATU3 (4) | WEGE3 (5) |
|---|---|---|---|---|---|
| jan/18 | 0,20286 | 0,44952 | 0,98619 | 0,28524 | -0,06857 |
| fev/18 | 0,60350 | 0,48600 | 0,20850 | -0,07250 | -0,04050 |
| mar/18 | 0,41905 | 0,22000 | 0,24857 | -0,27905 | -0,13333 |
| abr/18 | 0,61524 | -0,04000 | -0,05381 | 0,05333 | 0,11619 |
| mai/18 | -0,54429 | -0,14048 | -0,88381 | 0,29000 | -0,13238 |
| jun/18 | 0,39048 | -0,19095 | -0,40667 | -0,47286 | -0,24238 |
| jul/18 | 0,25048 | 0,58381 | 0,62095 | -0,17714 | 0,67048 |
| ago/18 | -0,18826 | -0,39696 | -0,24565 | 0,01783 | 0,15739 |
| set/18 | 0,30368 | -0,19158 | 0,29789 | -0,10158 | 0,18947 |
| out/18 | 1,07955 | 2,10500 | 0,51455 | 0,66364 | -0,39864 |
| nov/18 | 0,59158 | 0,76684 | 0,50842 | 1,22737 | -0,04263 |
| dez/18 | 0,55611 | 0,55833 | -0,09222 | 0,53944 | -0,06222 |
| jan/19 | 0,87619 | 0,01095 | 0,54000 | 0,29905 | 0,35048 |
| fev/19 | -0,13200 | 0,20650 | -0,12650 | 0,12800 | -0,07750 |
| mar/19 | -0,62737 | -0,15684 | -0,13579 | -0,28053 | -0,09737 |
| abr/19 | -0,42762 | 0,29667 | -0,02048 | 0,70952 | 0,16000 |
| mai/19 | -0,83591 | 0,17682 | 0,19182 | 0,68773 | 0,12182 |
| jun/19 | 0,23950 | 0,04350 | 0,21450 | -0,27650 | 0,58000 |

Fonte: A autora (2020).

Figura 7 – Covariância.




Fonte: A autora (2020).

Figura 8 – Intervalo de Entrada.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | mês\Ativo i | BTOW3 (1) | CMIG4 (2) | ITSA4 (3) | NATU3 (4) | WEGE3 (5) |
| 2 | jan/18 | 0,20286 | 0,44952 | 0,98619 | 0,28524 | -0,06857 |
| 3 | fe[illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible]50 |
| 4 | ma[illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible]33 |
| 5 | abr/18 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| 6 | mai/18 | -0,54429 | -0,14048 | -0,88381 | 0,29000 | -0,13238 |
| 7 | jun/18 | 0,39048 | -0,19095 | -0,40667 | -0,47286 | -0,24238 |
| 8 | jul/18 | 0,25048 | 0,58381 | 0,62095 | -0,17714 | 0,67048 |
| 9 | ago/18 | -0,18826 | -0,39696 | -0,24565 | 0,01783 | 0,15739 |
| 10 | set/18 | 0,30368 | -0,19158 | 0,29789 | -0,10158 | 0,18947 |
| 11 | out/18 | 1,07955 | 2,10500 | 0,51455 | 0,66364 | -0,39864 |
| 12 | nov/18 | 0,59158 | 0,76684 | 0,50842 | 1,22737 | -0,04263 |
| 13 | dez/18 | 0,55611 | 0,55833 | -0,09222 | 0,53944 | -0,06222 |
| 14 | jan/19 | 0,87619 | 0,01095 | 0,54000 | 0,29905 | 0,35048 |
| 15 | fev/19 | -0,13200 | 0,20650 | -0,12650 | 0,12800 | -0,07750 |
| 16 | mar/19 | -0,62737 | -0,15684 | -0,13579 | -0,28053 | -0,09737 |
| 17 | abr/19 | -0,42762 | 0,29667 | -0,02048 | 0,70952 | 0,16000 |
| 18 | mai/19 | -0,83591 | 0,17682 | 0,19182 | 0,68773 | 0,12182 |
| 19 | jun/19 | 0,23950 | 0,04350 | 0,21450 | -0,27650 | 0,58000 |

Covariância ? ×

$B$2:$F$19

Fonte: A autora (2020).

Figura 9 – Matriz de Covariância.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | *Coluna 1* | *Coluna 2* | *Coluna 3* | *Coluna 4* | *Coluna 5* |
| 2 | Coluna 1 | 0,27272 | | | | |
| 3 | Coluna 2 | 0,142935 | 0,295876 | | | |
| 4 | Coluna 3 | 0,102656 | 0,113148 | 0,177322 | | |
| 5 | Coluna 4 | 0,006709 | 0,119953 | 0,039801 | 0,189371 | |
| 6 | Coluna 5 | -0,01052 | -0,04531 | 0,029548 | -0,02292 | 0,069032 |

Fonte: A autora (2020).

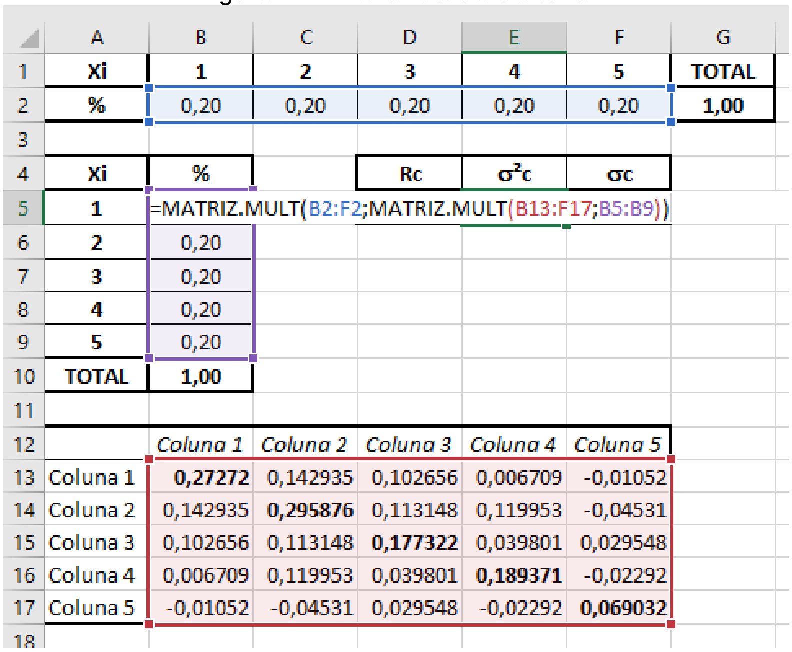
Figura 10 – Espelhar.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | *Coluna 1* | *Coluna 2* | *Coluna 3* | *Coluna 4* | *Coluna 5* |
| 2 | Coluna 1 | **0,27272** | 0,142935 | 0,102656 | 0,006709 | -0,01052 |
| 3 | Coluna 2 | 0,142935 | **0,295876** | 0,113148 | 0,119953 | -0,04531 |
| 4 | Coluna 3 | 0,102656 | 0,113148 | **0,177322** | 0,039801 | 0,029548 |
| 5 | Coluna 4 | 0,006709 | 0,119953 | 0,039801 | **0,189371** | =E6 |
| 6 | Coluna 5 | -0,01052 | -0,04531 | 0,029548 | -0,02292 | **0,069032** |

Fonte: A autora (2020).

4º - Estima-se a $\sigma_c^2$, usando a fórmula da multiplicação de matrizes, $= MATRIZ.MULT(matriz1; MATRIZ.MULT(matriz2; matriz3))$. A $matriz1$ são os valores de $x_i$ na horizontal, a $matriz2$ são os valores da matriz de covariância e a $matriz3$ são os valores dos $x_i$ na vertical (Figura 11).

Figura 11 – Variância da Carteira.



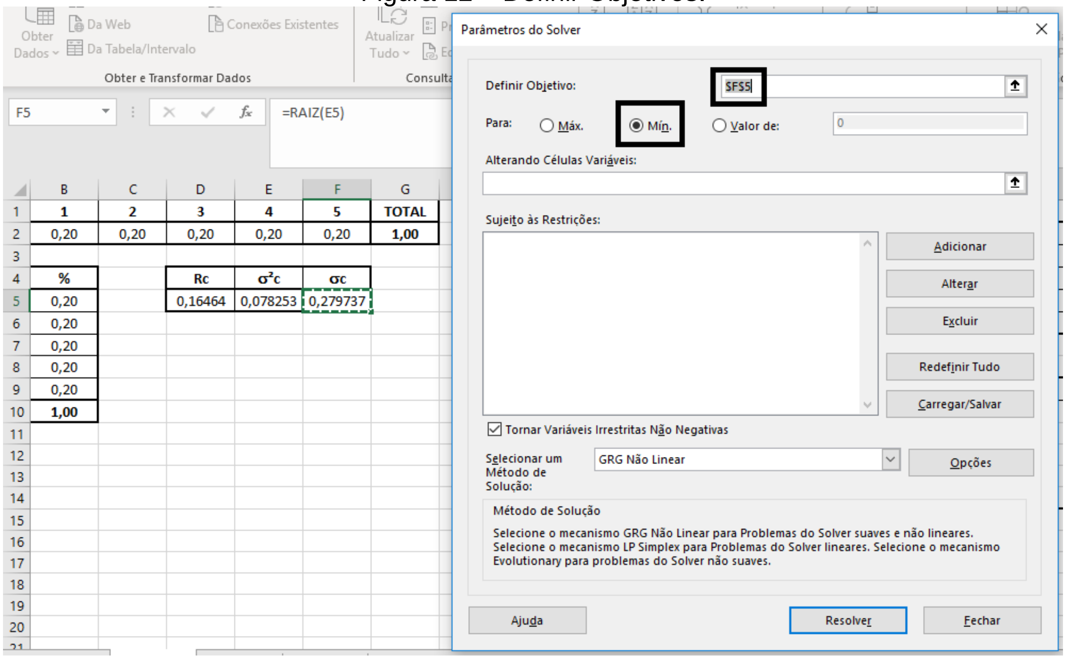
| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Xi** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **TOTAL** |
| 2 | **%** | 0,20 | 0,20 | 0,20 | 0,20 | 0,20 | **1,00** |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | **Xi** | **%** | | **Rc** | **σ²c** | **σc** | |
| 5 | **1** | =MATRIZ.MULT(B2:F2;MATRIZ.MULT(B13:F17;B5:B9)) | | | | | |
| 6 | **2** | 0,20 | | | | | |
| 7 | **3** | 0,20 | | | | | |
| 8 | **4** | 0,20 | | | | | |
| 9 | **5** | 0,20 | | | | | |
| 10 | **TOTAL** | **1,00** | | | | | |
| 11 | | | | | | | |
| 12 | | *Coluna 1* | *Coluna 2* | *Coluna 3* | *Coluna 4* | *Coluna 5* | |
| 13 | Coluna 1 | **0,27272** | 0,142935 | 0,102656 | 0,006709 | -0,01052 | |
| 14 | Coluna 2 | 0,142935 | **0,295876** | 0,113148 | 0,119953 | -0,04531 | |
| 15 | Coluna 3 | 0,102656 | 0,113148 | **0,177322** | 0,039801 | 0,029548 | |
| 16 | Coluna 4 | 0,006709 | 0,119953 | 0,039801 | **0,189371** | -0,02292 | |
| 17 | Coluna 5 | -0,01052 | -0,04531 | 0,029548 | -0,02292 | **0,069032** | |
| 18 | | | | | | | |

Fonte: A autora (2020).

5º - Determina-se $\sigma_c$ usando a fórmula $= RAIZ(núm)$, selecionando a célula onde está o resultado da variância da carteira no lugar de $núm$.

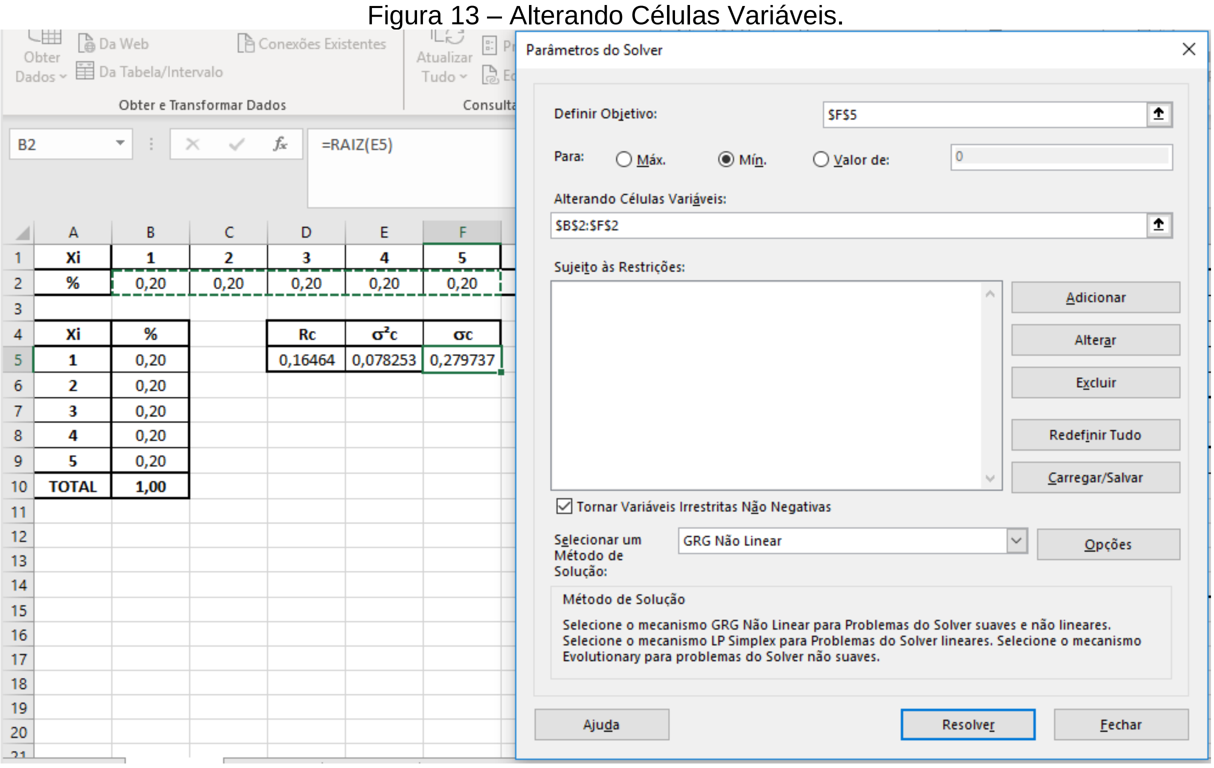
6º - Abre-se o Solver e nos campos: “Definir Objetivo” → seleciona-se a célula onde está o valor do $\sigma_c$; “Para:” → “Mín.” (Figura 12); “Alterando Células Variáveis:” (Figura 13) → escolhidos os valores de $x_i$ na horizontal; “Sujeito a Restrições:” → ir a “Adicionar” e preencher os três setores, na “Referência de Célula:” se seleciona a célula com o valor da soma dos $x_i$ na horizontal, 19ª coluna, no meio o sinal de “=”, e na “Restrição:” determinado o valor “1”; apertar o botão “Ok” (Figura 14).

Figura 12 – Definir Objetivos.



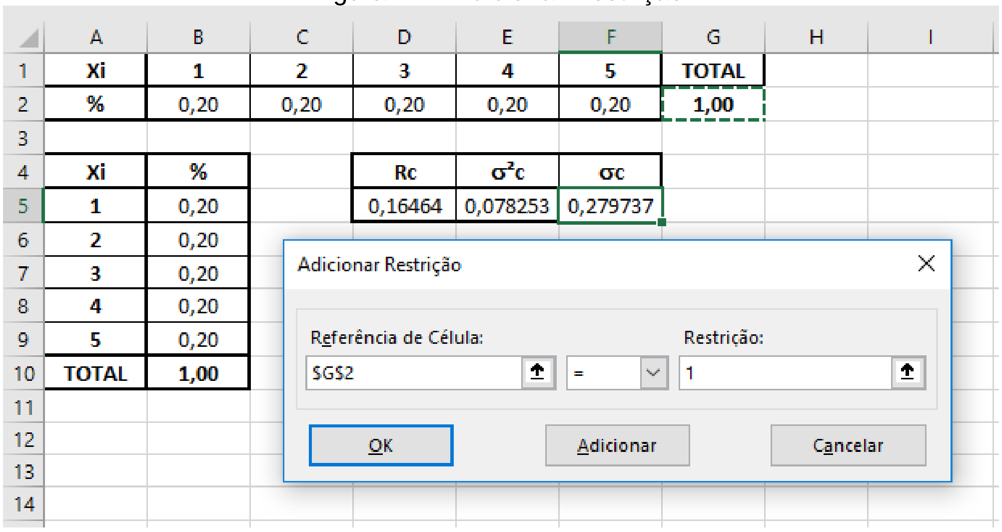

Fonte: A autora (2020).

Figura 13 – Alterando Células Variáveis.




Fonte: A autora (2020).

Figura 14 – Adicionar Restrição.

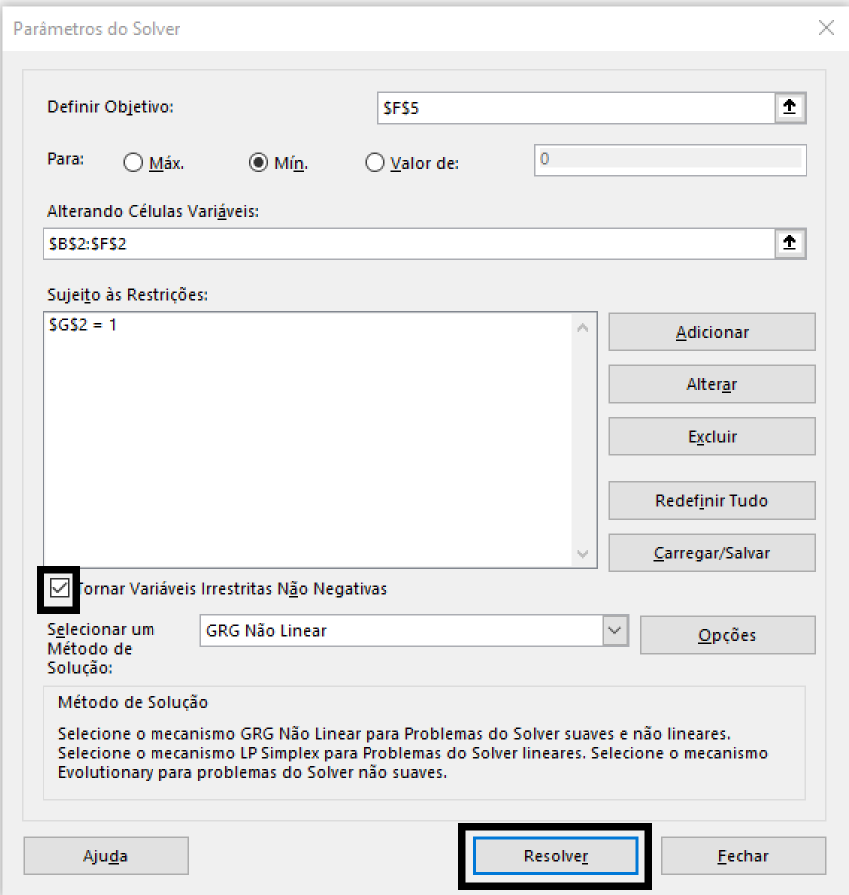


Fonte: A autora (2020).

7º - Para o caso sem venda a descoberto seleciona-se o quadrado "Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas" e para o caso de com venda a descoberto deixa-se esse quadrado em branco (Figura 15).

8º - Seleciona-se o botão "Resolver", as carteiras são formuladas (Figura 15).

Figura 15 – CVD e SVD.



Fonte: A autora (2020).

## 5.2 INCLUSÃO DE UM ATIVO A TAXA LIVRE DE RISCO

### 5.2.1 Sem Venda a Descoberto

Para calcular a carteira ótima no caso de uma carteira com um ativo a taxa livre de risco, sem venda a descoberto, precisa-se maximizar o coeficiente angular:

$$\theta(x) = \left(\frac{\bar{R}_c - R_f}{\sigma_c}\right). \tag{47}$$

Os primeiros passos para o cálculo são similares ao anteriores, mudando-se a partir do passo 6:

6º - Cria-se uma célula com a fórmula do coeficiente angular (47) com os dados que serão calculados até esse momento.

7º - Abre-se o Solver são determinados: “Definir Objetivo” → seleciona-se a célula onde está o valor do coeficiente angular $\theta$; “Para:” → “Máx.”. O restante é igual ao item anterior, mas com o cuidado de marcar o quadrado “Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas”.

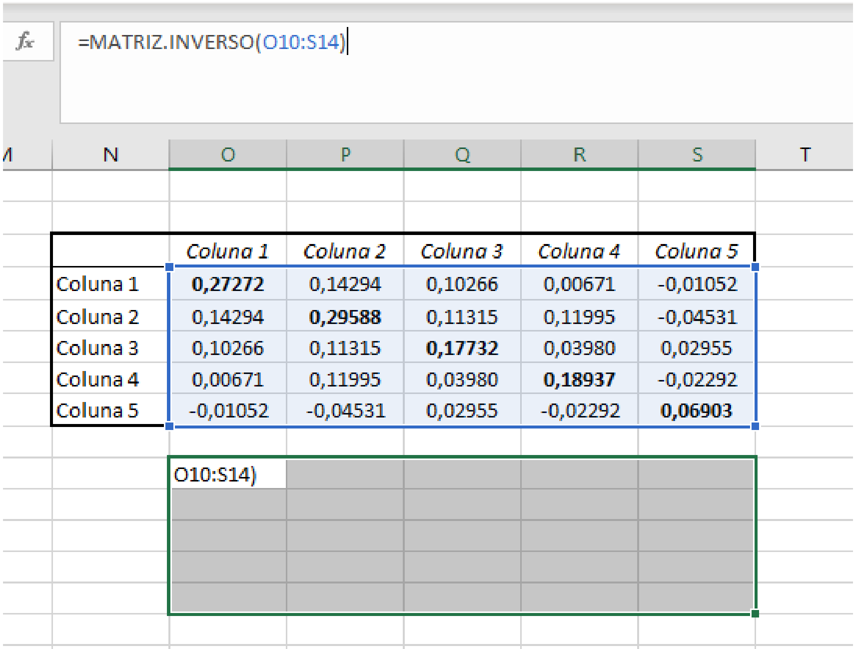
### 5.2.2 Com Venda a Descoberto

Não é necessário utilizar o Solver nesse caso. Com os dados dos cinco primeiros passos e os dados que serão calculados, procede-se da seguinte forma:

6º - Cria-se uma coluna com os valores de $\bar{R}_i - R_f$.

7º - Calcula-se a inversa da matriz de covariâncias selecionando $18 \times 18$ células em branco (Figura 16), e escrevendo a fórmula $= MATRIZ.INVERSO(matriz)$ (Figura 16), selecionando no lugar da $matriz$ as células com os valores da matriz de covariâncias (Figura 16). Em seguida, segura-se as teclas *Ctrl*+*Shift* e pressione *Enter*. A matriz inversa estará pronta.

Figura 16 – Matriz Inversa



=MATRIZ.INVERSO(O10:S14)

| | Coluna 1 | Coluna 2 | Coluna 3 | Coluna 4 | Coluna 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Coluna 1 | **0,27272** | 0,14294 | 0,10266 | 0,00671 | -0,01052 |
| Coluna 2 | 0,14294 | **0,29588** | 0,11315 | 0,11995 | -0,04531 |
| Coluna 3 | 0,10266 | 0,11315 | **0,17732** | 0,03980 | 0,02955 |
| Coluna 4 | 0,00671 | 0,11995 | 0,03980 | **0,18937** | -0,02292 |
| Coluna 5 | -0,01052 | -0,04531 | 0,02955 | -0,02292 | **0,06903** |

O10:S14)

Fonte: A autora (2020).

8º - Seleciona-se uma coluna de 18 linhas e digita-se a expressão $= MATRIZ.MULT(matriz1; matriz2)$, colocando no lugar de $matriz1$ a matriz inversa e no lugar de $matriz2$ a coluna criada no 6º passo. Feito isso, aperta-se *Ctrl+Shift* e pressione *Enter* aparecem os $z_i$. Após isso, em uma célula qualquer se soma todos os $z_i$.

9º - Por fim, calcula-se os $x_i$, no espaço horizontal criado no 1º passo. O $x_1$ é calculado a partir $z_1$ e dividindo-se pelo somatório deles e assim por diante, conforme a fórmula (29).

## 5.3 ÍNDICE ÚNICO

Para o índice único ou índice de Sharpe, será necessário calcular alguns valores utilizando-se os valores calculados até o momento. Para calcular a carteira ótima, minimiza-se o risco. O 1º passo é o mesmo. Partindo-se dele:

2º - Cria-se uma coluna dos betas, fórmula (29).

3º - Calcula-se a coluna dos alfas através da fórmula (30).

4º - Designa-se a coluna dos $\sigma_{ei}^2$, o risco associado ao erro do ativo $i$, pela expressão (31).

5º - Calcula-se o $\beta_c$ e o $\alpha_c$, utilizando a fórmula da multiplicação de matrizes, multiplicando os $x_i$ pela coluna dos $\beta_i$ e multiplicando os $x_i$ pela coluna dos $\alpha_i$, fórmulas (33) e (34):

6º - Estima-se o $\bar{R}_c$ e a $\sigma_c^2$, expressões (35) e (36).

7º - Cria-se uma célula com o risco da carteira, retirando a raiz quadrada do resultado da variância da carteira.

8º – Abre-se o Solver e preencha os requisitos: “Definir Objetivo” → seleciona a célula onde está o valor do risco da carteira; “Para:” → “Mín.”. O resto é igual ao item 5.1, a partir do 6º passo.

## 5.4 ÍNDICE DE CORTE

O índice de corte é bem diferente dos demais. Nesse caso, não é necessário o Solver para maximizar ou minimizar qualquer função. Apenas seguir os procedimentos abaixo passo a passo:

1º - Cria-se uma coluna 1 e lista-se todos os 18 ativos.

2º - Estima-se o retorno excedente por beta de todos os 18 ativos na coluna 2, fórmula (39).

3º - Classifica-se os ativos pelo valor do retorno excedente sobre beta.

4º - Calcula-se a fórmula (40) para todos os ativos na coluna 3.

5º - Calcula-se a expressão (41) para todos os ativos na coluna 4.

6º - Faz-se o somatório das colunas 3 e 4, nas colunas 5 e 6, respectivamente, com as fórmulas (42) e (43).

7º - Estima-se o índice de corte $C_i$ (44) na coluna 7.

8º - Compara-se a segunda com a sétima coluna, todos os ativos no qual seguindo a expressão (45), os ativos que a coluna 2 for maior que a coluna 7, formam a carteira ótima.

9º - Uma vez determinados os ativos que vão fazer parte da carteira, calcula-se a proporção de cada ativo na carteira com as fórmulas (46) e (29).

10º - Caso se queira uma carteira com venda a descoberto, calcula-se todos os $C_i$ e $C^*$ é o último $C_i$. Neste caso, os $C_i$ já calculados até o 9º passo podem ser aproveitados bastando calcular somente os ativos que sobram. Vale ressaltar que não importa qual ativo será retirado da lista, pois ao calcular os $x_i$, o somatório deles sempre será igual a $1$, ou seja, $100\%$.

# 6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesse tópico são apresentados todos os resultados determinados pelo capítulo anterior, utilizando a teoria desenvolvida no capítulo 4.

## 6.1 MODELO DE MARKOWITZ

Conforme o modelo de Markowitz, as carteiras ótimas estão na Tabela 3 e seus retornos e riscos estão na Tabela 4. Percebe-se que existe muita diferença entre a SVD e a CVD.

Tabela 3 – Markowitz CVD e SVD

| Ativo | CVD | SVD |
|---|---|---|
| **BBAS3** | −27,484% | 0% |
| **BBDC4** | −73,413% | 0% |
| **BRKM5** | 41,212% | 11,418% |
| **CCRO3** | 4,860% | 0% |
| **CIEL3** | −22,943% | 0% |
| **CMIG4** | 41,634% | 8,732% |
| **CPLE6** | −0,934% | 0% |
| **EGIE3** | −40,992% | 0% |
| **ELET3** | 30,380% | 0% |
| **FLRY3** | −7,965% | 0% |
| **ITUB4** | 28,418% | 0% |
| **KLBN11** | 40,532% | 13,834% |
| **LAME4** | −36,349% | 0% |
| **LREN3** | 8,641% | 0% |
| **MRVE3** | 23,034% | 0% |
| **NATU3** | 0,305% | 5,882% |
| **VIVT4** | 78,884% | 30,773% |
| **WEGE3** | 12,181% | 29,361% |
| **TOTAL** | **100%** | **100%** |

Fonte: A autora (2020).

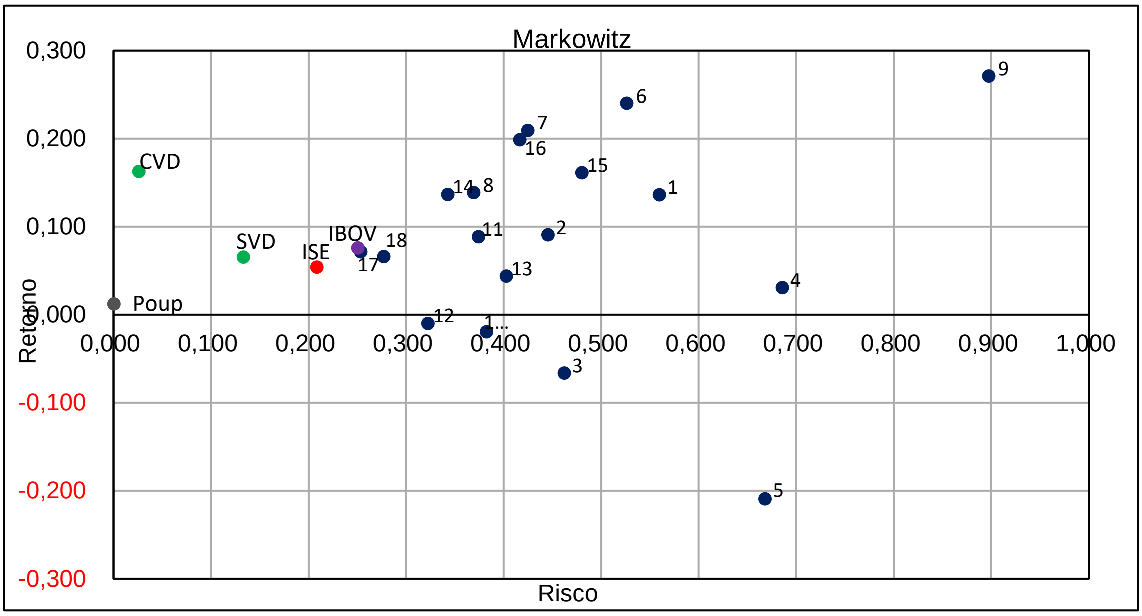
Tabela 4 – Markowitz: Retorno e Risco

| | $\overline{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{c}}$ % | $\boldsymbol{\sigma_c}$ % |
|---|---|---|
| **CVD** | 0,16277 | 0,02616 |
| **SVD** | 0,06530 | 0,13320 |

Fonte: A autora (2020).

Nesse caso com venda a descoberto o retorno é 0,13661% maior e com um risco 0,06790% menor, além de que a carteira CVD é muito mais diversificada, possuindo investimentos nos 18 ativos, enquanto a SVD possui investimento em apenas 6 ativos. O Gráfico 6 mostra a diferença entre as duas carteiras ótimas e a relação entre elas e todos os 18 ativos e os índices ISE e IBOVESPA.

Gráfico 6 – Markowitz CVD e SVD




Fonte: A autora (2020).

Dessa forma, considera-se que a CVD é mais interessante visto o baixo risco, quase chegando próximo de 0 e o rendimento além de mais alto do que o SVD, também é três vezes maior que o índice ISE que possui um retorno diário de 0,05409%. Porém o empréstimo necessário para criar a carteira ótima CVD é de 210,08%, o que é bom para investidores arrojados, mas não tão interessante para investidores mais conservadores, essa estratégia se chama alavancagem financeira, que pode ser definida como: “o processo que emprega recursos de terceiros com a intenção de estender a taxa de lucros sobre o capital próprio” (SILVA, p. 5).

## 6.2 INCLUSÃO DE UM ATIVO A TAXA LIVRE DE RISCO

As carteiras ótimas adicionando um ativo a taxa livre de risco estão na Tabela 5 e seus retornos e riscos estão na Tabela 6.

Tabela 5 – Ativo a Taxa Livre de Risco CVD e SVD
(Continuar)

| Ativo | CVD | SVD |
|---|---|---|
| **BBAS3** | −22,405% | 0% |
| **BBDC4** | −80,039% | 0% |
| **BRKM5** | 43,627% | 0% |
| **CCRO3** | 7,975% | 0% |
| **CIEL3** | −33,067% | 0% |
| **CMIG4** | 36,585% | 22,493% |
| **CPLE6** | −9,424% | 14,899% |
| **EGIE3** | −50,147% | 0% |
| **ELET3** | 39,560% | 0% |

(Conclusão)

| Ativo | CVD | SVD |
|---|---|---|
| **ITUB4** | 22,666% | 0% |
| **KLBN11** | 53,285% | 0% |
| **LAME4** | −41,500% | 0% |
| **LREN3** | 7,476% | 0% |
| **MRVE3** | 23,624% | 3,210% |
| **NATU3** | 4,539% | 16,452% |
| **VIVT4** | 99,237% | 0% |
| **WEGE3** | 7,874% | 42,946% |
| **TOTAL** | **100%** | **100%** |

Fonte: A autora (2020).

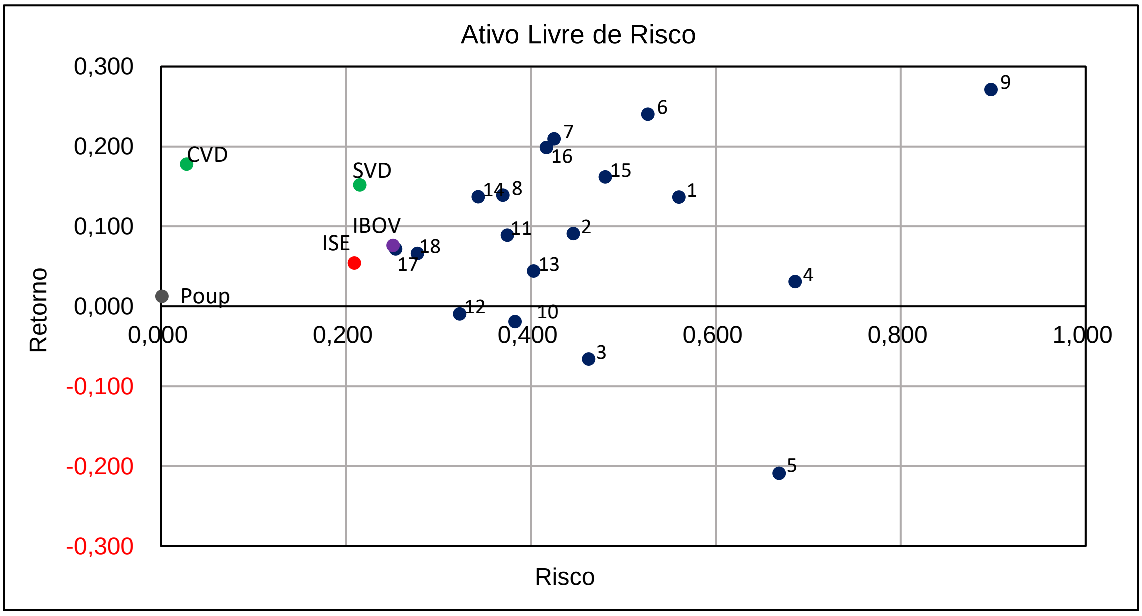
Tabela 6 – Ativo a Taxa Livre de Risco: Retorno e Risco

| | $\bar{R}_c$ % | $\sigma_c$ % |
|---|---|---|
| **CVD** | 0,17777 | 0,02743 |
| **SVD** | 0,15158 | 0,21464 |

Fonte: A autora (2020).

Nesse caso, percebe-se que com venda a descoberto o risco é muito menor, sendo próximo de $0$, sendo $0{,}18721\%$ menor que SVD, porém o empréstimo necessário para a carteira CVD é de $246{,}44\%$, sendo muito mais arriscado. Dessa forma, SVD é mais interessante para investidores conservadores. Caso o investidor seja mais arrojado, o interessante é, novamente, investimento em todos os 18 ativos e realizar a alavancagem financeira, enquanto SVD investe apenas em 5 ativos. Segue o Gráfico 7 que mostra como se situa as carteiras ótimas em relação aos outros ativos e índices.

Gráfico 7 – Ativo Livre de Risco CVD e SVD




Fonte: A autora (2020).

Logo observa-se que a carteira SVD possui o mesmo risco que o ISE, mas um retorno muito superior, novamente quase triplicando o valor e que a carteira CVD está próxima do eixo $y$, isto é, quase sem risco e com um rendimento um pouco mais alto que a SVD, de $0{,}02619\%$ a mais por dia.

## 6.3 ÍNDICE ÚNICO

Nas tabelas 7 e 8 temos as carteiras ótimas pelo índice único e os retornos, riscos, betas e alfas das carteiras.

Tabela 7 – Índice Único CVD e SVD

| Ativo | CVD | SVD |
|---|---|---|
| **BBAS3** | $-2{,}704\%$ | $0\%$ |
| **BBDC4** | $-2{,}708\%$ | $0\%$ |
| **BRKM5** | $12{,}347\%$ | 13,759% |
| **CCRO3** | $-1{,}566\%$ | $0\%$ |
| **CIEL3** | $0{,}673\%$ | $0\%$ |
| **CMIG4** | $0{,}430\%$ | $0\%$ |
| **CPLE6** | $3{,}024\%$ | 0,503% |
| **EGIE3** | $4{,}919\%$ | 2,242% |
| **ELET3** | $-2{,}605\%$ | $0\%$ |
| **FLRY3** | $11{,}256\%$ | 10,641% |
| **ITUB4** | $-2{,}135\%$ | $0\%$ |
| **KLBN11** | $19{,}388\%$ | 20,067% |
| **LAME4** | $1{,}424\%$ | $0\%$ |
| **LREN3** | $1{,}984\%$ | $0\%$ |
| **MRVE3** | $3{,}633\%$ | 1,830% |
| **NATU3** | $13{,}288\%$ | 14,145% |
| **VIVT4** | $17{,}230\%$ | 14,924% |
| **WEGE3** | $22{,}125\%$ | 21,888% |
| **TOTAL** | $\mathbf{100}\%$ | $\mathbf{100}\%$ |

Fonte: A autora (2020).

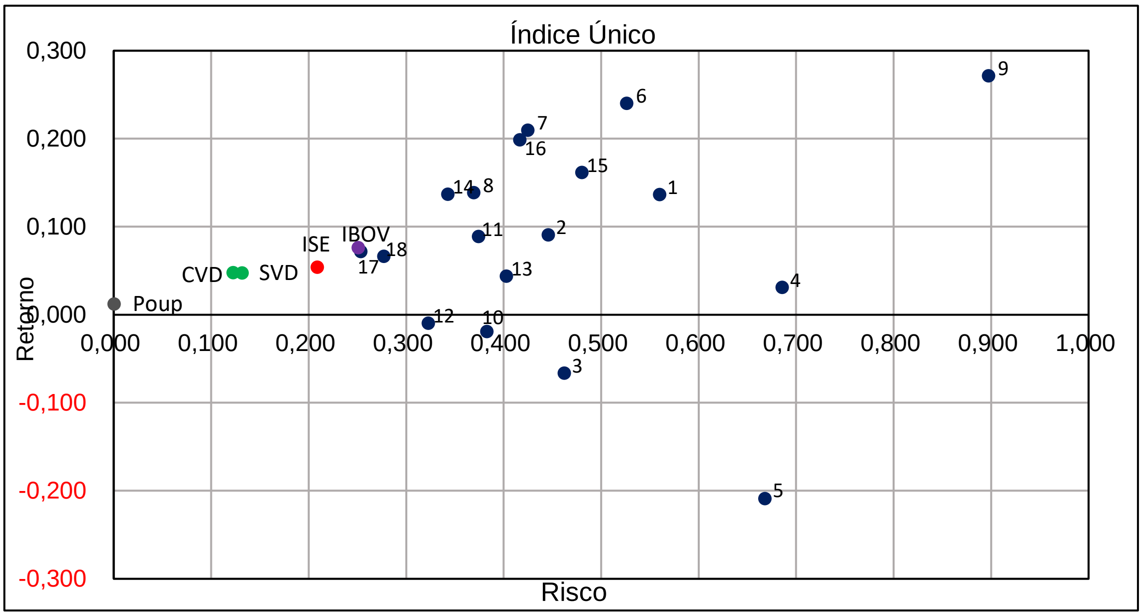
Tabela 8 – Índice Único: Retorno, Risco, Beta e Alfa

| | $\boldsymbol{\bar{R}_c}$ % | $\boldsymbol{\sigma_c}$ % | $\boldsymbol{\beta_c}$ | $\boldsymbol{\alpha_c}$ |
|---|---|---|---|---|
| **CVD** | $0{,}04763$ | $0{,}12256$ | $0{,}21959$ | $0{,}03094$ |
| **SVD** | $0{,}04736$ | $0.13193$ | $0{,}33236$ | $0{,}02210$ |

Fonte: A autora (2020).

Nesse caso, pode se ver que CVD e SVD não possuem grandes diferenças, os dois possuem quase o mesmo retorno e quase o mesmo risco, sendo que CVD possui uma pequena vantagem nos dois casos. Além disso nos dois casos o alfa está acima do rendimento da poupança, sendo o alfa da carteira CVD maior, e seu beta menor, ou seja, ela é menos influenciada pelo mercado. Além de que a carteira CVD necessita de pouco empréstimo, apenas de $11{,}718\%$ e investe nos 18 ativos, enquanto a SVD investe em apenas metade disso. O Gráfico 8 mostra a relação das carteiras ótimas em relação aos outros ativos e índices.

Gráfico 8 – Índice Único CVD e SVD




Fonte: A autora (2020).

Como vemos as duas carteiras estão muito próximas uma da outra, o risco das duas é menos do que o índice ISE e as duas possuem um rendimento levemente inferior ao índice ISE. Mas a carteira CVD ainda é mais atrativa para qualquer investidor, seja ela arrojado ou conservador por pequenos detalhes.

## 6.4 ÍNDICE DE CORTE

As carteiras ótimas pelo índice de corte estão na Tabela 9 e seus retornos, riscos, betas e alfas na Tabela 10.

Tabela 9 – Índice de Corte CVD e SVD

(Continua)

| Ativo | CVD | SVD |
|---|---|---|
| **BBAS3** | −2,485% | 0% |
| **BBDC4** | −14,561% | 0% |
| **BRKM5** | −27,858% | 0% |
| **CCRO3** | −13,899% | 0% |
| **CIEL3** | −44,491% | 0% |
| **CMIG4** | 36,693% | 14,167% |
| **CPLE6** | 51,176% | 22,123% |
| **EGIE3** | 35,432% | 7,901% |
| **ELET3** | 4,310% | 0% |
| **FLRY3** | −28,760% | 0% |
| **ITUB4** | −13,700% | 0% |

(Conclusão)

| Ativo | CVD | SVD |
|---|---|---|
| **LAME4** | −16,762% | 0% |
| **LREN3** | 21,780% | 0% |
| **MRVE3** | 28,141% | 10,183% |
| **NATU3** | 66,093% | 0% |
| **VIVT4** | 23,101% | 43,275% |
| **WEGE3** | 24,141% | 2,351% |
| **TOTAL** | **100%** | **100%** |

Fonte: A autora (2020).

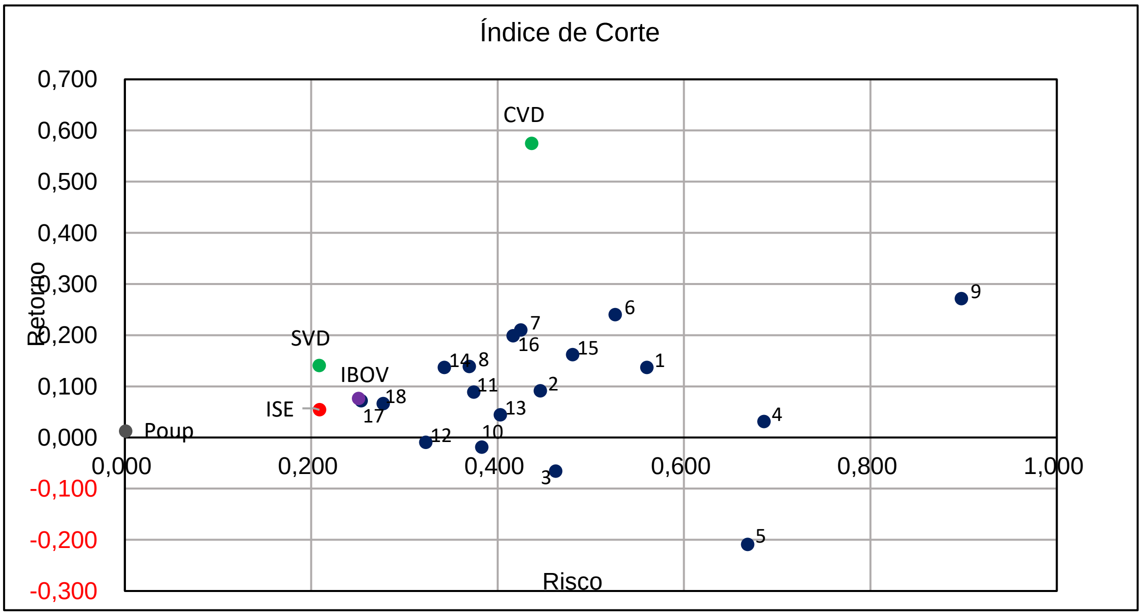
Tabela 10 – Índice de Corte: Retorno, Risco, Beta e Alfa

| | $\bar{R}_c$ % | $\sigma_c$ % | $\beta_c$ | $\alpha_c$ |
|---|---|---|---|---|
| **CVD** | 0,57476 | 0,43628 | 0,40850 | 0,54371 |
| **SVD** | 0,14045 | 0,20833 | 0,67370 | 0,08926 |

Fonte: A autora (2020).

Vemos que a carteira CVD o rendimento é muito maior, nesse caso, quatro vezes maior do que a carteira SVD, mas o risco também é mais que o dobro maior e o empréstimo necessário é de aproximadamente 190,87%. Vale lembrar também que é melhor um investimento em 18 ativos da carteira CVD do que de apenas 6 ativos da carteira SVD. O alfa da carteira CVD também é seis vezes maior, mas o beta é mais baixo, o que mostra que a carteira SVD varia mais com o mercado. Para um investidor mais conservador, a carteira SVD é mais atrativa, pois tem menor risco e não tem que fazer empréstimos. Mas para um investidor arrojado, o alto rendimento da carteira CVD é muito mais interessante e ela também é menos afetada pelo mercado. O Gráfico 9 mostra a relação das carteiras ótimas em relação aos outros ativos e índices.

Gráfico 9 – Índice de Corte CVD e SVD



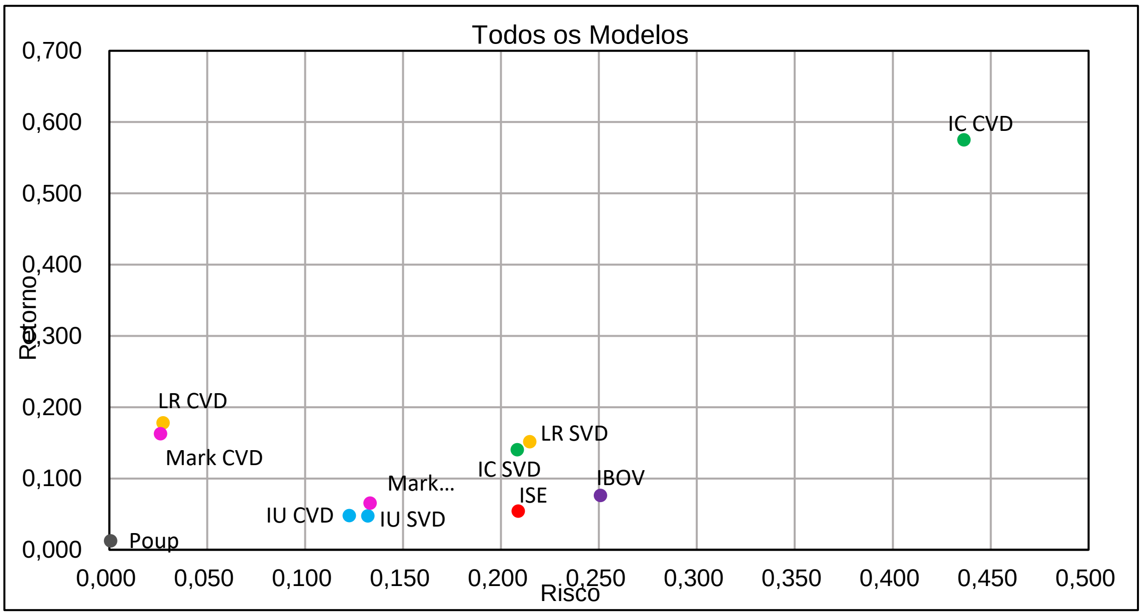

Fonte: A autora (2020).

Vemos que a carteira SVD tem um risco um pouco menor que o índice ISE e um rendimento bem maior, já a carteira CVD está em uma posição de alto risco, muito maior que o ISE, mas com um rendimento maior que os índices e todos os ativos pertencentes a ela.

# 7 ANÁLISE DE DADOS

Nesse trabalho utilizamos quatro métodos para se compor uma carteira ótima, todos sendo analisados CVD e SVD. O Gráfico 10 possui todos os métodos utilizados e as oito carteiras ótimas, além da poupança e os índices ISE e IBOV.

Gráfico 10 – Todos os Modelos




Fonte: A autora (2020).

As siglas significam: Modelo Markowitz (Mark); Ativo à Taxa Livre de Risco (LR); Índice de Corte (IC); Índice Único (IU); Índice de Sustentabilidade Empresarial (ISE) e IBOVESPA (IBOV).

O Gráfico exibe alguns pontos. Nas carteiras CVD se o investidor for mais conservador vai preferir o cálculo pelo modelo de Markowitz CVD e Ativo a Taxa Livre de Risco CVD, mas o Ativo a Taxa Livre de Risco possui um pouco mais de rendimento que o de Markowitz. Percebe-se também que essas duas carteiras possuem um rendimento maior do que o índice ISE, que está sendo usado como base para montar a carteira de ativos, o que mostra que por meio desses 18 ativos conseguimos aumentar o rendimento do índice a um risco muito menor, visto que tem um risco quase comparável a poupança.

Agora, se o investidor for agressivo, pode escolher a carteira do Índice de Corte CVD, que possui rendimento alto e risco maior que do índice ISE e do IBOVESPA.

Essas três carteiras CVD são as mais interessantes, ou seja, se o investidor tiver interesse em alavancagem financeira. Mas caso o investidor não deseje fazer esse tipo de investimento, existem as carteiras SVD, que nesse caso se destacam as carteiras de Markowitz SVD e de Índice Único SVD, que replicam o retorno do índice ISE e possuem um risco muito mais baixo, para um investidor mais conservador. No caso de um investidor mais arrojado pode escolher as carteiras do Ativo a Taxa Livre de Risco SVD e Índice de Corte SVD que possuem um rendimento bem maior, mas um risco muito parecido com o índice ISE.

Logo, a única carteira que não é relevante em relação as outras é a de Índice Único CVD, porque comparada com as outras carteias CVD ela possui um rendimento muito baixo e um risco maior o que não torna ela interessante para nenhum perfil de investidor.

## 8 CONCLUSÃO

Neste trabalho ficou evidenciou-se a utilidade das planilhas eletrônicas, nesse caso o Excel 365, para os cálculos dos métodos matemáticos em carteiras de investimentos, pois cria, automaticamente, matrizes de covariância e correlação. As tabelas são visualmente úteis para fazer análises aprofundadas e diversos gráficos podem ser criados para exibir as carteiras otimizadas.

O objetivo é, por meio desses cálculos, planilhas e gráficos, criar uma carteira de investimentos baseada no Índice de Sustentabilidade Empresarial – ISE. Utilizando-se as variações dela foi possível verificar o retorno que os investidores poderiam ter tido em 20 meses, caso tivessem aderido à ideia de priorizar empresas que se declaram sustentáveis e que seguem os critérios necessários para participarem desse índice.

Com 18 ativos do índice ISE, uma carteira de índice de tamanho moderado, possuindo em agosto de 2019 apenas 33 ativos de 28 empresas, foi possível replicar o rendimento a um risco muito menor, inclusive aumentar o rendimento a um risco menor, do que o próprio índice ISE. Isso mostra a importância dos modelos matemáticos utilizados para calcular as carteiras otimizadas. Obviamente o que está na conclusão só faz sentido se o futuro for parecido com o acontecido no passado, pois foram utilizados dados históricos para executar os modelos, de 2018 a 2019.

Assim, os resultados evidenciam que é possível se obter um bom retorno nesse tipo de investimento, lembrando que para participar do índice ISE são necessárias empresas com um bom desempenho na bolsa de valores, visto os rigorosos critérios que devem ser seguidos. Logo, é possível ser sustentável, seguir o tripé da sustentabilidade, econômico, social e ambiental, e, ao mesmo tempo trazer boas rentabilidades ao mercado. Em outras palavras, sustentabilidade e lucratividade não são mutuamente exclusivos.

Cabe ressaltar que os dados são referentes a uma pequena amostra de empresas brasileiras e, dessa forma, não deveriam ser utilizados para outros países ou circunstâncias. Esse estudo analisa apenas grandes empresas que estão no índice, não analisando outras empresas que estão criando práticas sustentáveis e são menores ou não estão na bolsa, não é possível assim analisar o comportamento destas.

Como sugestão de pesquisas futuras, cabe analisar o índice por completo, com todos seus ativos no último ano. Além de verificar como ocorre o retorno de empresas sustentáveis de outras bolsas de valores, além da B3 no Brasil.

## REFERÊNCIAS

B3. **Índice de Sustentabilidade Empresarial (ISE).** 2017c. Disponível em: <http://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/indices/indices-de-sustentabilidade/indice-de-sustentabilidade-empresarial-ise.htm>. Acesso em: 08 jul. 2019.

B3. **Por Dentro da B3:** Guia Prático de uma das Maiores Bolsa de Valores e Derivativos do Mundo. 2017a. Disponível em: <https://educacional.bmfbovespa.com.br/documentos/ApostilaPQO.pdf>. Acesso em: 10 dez. 2019.

B3. **Institucional:** Quem Somos. 2017b. Disponível em: <http://www.b3.com.br/pt_br/b3/institucional/quem-somos/>. Acesso em: 22 ago. 2019.

B3. **Empréstimos de Ativos.** 2017d. Disponível em: <http://www.b3.com.br/pt_br/produtos-e-servicos/solucoes-para-emissores/aumento-de-liquidez/emprestimo-de-ativos/>. Acesso em: 24 fev. 2020.

Banco Central do Brasil. **Remuneração dos Depósitos de Poupança.** 1964. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/estatisticas/remuneradepositospoupanca>. Acesso em: 19 jun. 2019.

BELLO, Tiago Lino; MATIOLI, Luiz Carlos. **Uma análise teórica e computacional dos modelos matemáticos clássicos da Teoria Moderna de Carteiras.** 2017 (Não publicado). Disponível em: <https://docs.ufpr.br/~matioli/minhahome/arquivos/TIAGO_trabalho_final_CM079.pdf>. Acesso em: 31 ago. 2019.

BODIE, Zvi; KANE, Alex; MARCUS, Alan J. **Investimentos.** 10. ed. Porto Alegre: AMGH, 2015. Tradução de Beth Honorato.

BRASIL. Lei nº 11941, de 27 de maio de 2009.

CALDEIRA, João Frois et al. Seleção de carteiras com modelos fatoriais heterocedásticos: aplicação para fundos de fundos multimercados. **Ram. Revista de Administração Mackenzie**, [s.l.], v. 15, n. 2, p.127-161, abr. 2014. FapUNIFESP (SciELO). http://dx.doi.org/10.1590/s1678-69712014000200006.

CRISTÓFALO, Renan Gazarini et al. Sustentabilidade e o mercado financeiro: estudo do desempenho de empresas que compõem o índice de sustentabilidade empresarial (ISE). **Rege - Revista de Gestão**, [s.l.], v. 23, n. 4, p.286-297, out. 2016. Emerald. http://dx.doi.org/10.1016/j.rege.2016.09.001.

D'ÁVILA, Mariana. **Bolsa se aproxima de 1 milhão de investidores - mas ainda é pouco.** 2019a. Disponível em: <https://www.infomoney.com.br/onde-investir/acoes/noticia/8260177/bolsa-se-aproxima-de-1-milhao-de-investidores---mas-ainda-e-pouco>. Acesso em: 06 jul. 2019.

D'ÁVILA, Mariana. **Brasileiro prefere segurança à rentabilidade na hora de investir.** 2019b. Disponível em: <https://www.infomoney.com.br/onde-investir/renda-fixa/noticia/8089004/brasileiro-prefere-seguranca-a-rentabilidade-na-hora-de-investir>. Acesso em: 06 jul. 2019.

ELKINGTON, John. **Canibais com Garfo e Facas.** São Paulo: M.books do Brasil, 2012. 488 p.

ELTON, Edwin J. et al. **Moderna Teoria das Carteiras e Análise de Investimentos.** Rio de Janeiro: Elsevier, 2012. Tradução: Helga Hoffmann.

FREUND, John E. **Estatística Aplicada:** Economia, Administração e Contabilidade. 11. ed. Porto Alegre: Bookman, 2006. Tradução de Claus Ivo Doering.

GIL, Antonio Carlos. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa.** São Paulo: Atlas, 2002.

GONÇALVES, Carlos Eduardo S.; GIOVANNETTI, Bruno Cara. **Economia na Palma da Mão.** São Paulo: Benvirá, 2015.

HAGLER, Cristina Elizabeth M.; BRITO, Ricardo Dias de Oliveira. About the efficiency of the Brazilian stock indexes. **Revista de Administração**, São Paulo, v. 1, n. 42, p.74-85, 01 mar. 2007.

INFOMONEY. 2000. Disponível em: <https://www.infomoney.com.br/>. Acesso em: 19 jun. 2019.

ITAÚ CORRETORA. **Short ou Venda a Descoberto.** 2018. Disponível em: https://www.itaucorretora.com.br/nossosservicos/short-ou-venda-a-descoberto.aspx. Acesso em: 27 mar. 2020.

MONTOTO, Eugenio. **Contabilidade Geral e Avançada.** 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2018.

OLIVEIRA, Marco Antonio Cunha de; SILVA, Lílian Simone Aguiar da. A inclusão de ações da América Latina sob o ponto de vista do investidor brasileiro: inferências sobre os pesos na fronteira eficiente. **Gestão & Produção**, [s.l.], v. 16, n. 2, p.325-332, jun. 2009. FapUNIFESP (SciELO). http://dx.doi.org/10.1590/s0104-530x2009000200014.

SILVA, Joilma Neves da. **Alavancagem Financeira como Instrumento de Gestão Racional dos Recursos de Terceiros nas Organizações.** Disponível em: https://semanaacademica.org.br/system/files/artigos/artigocientificojoilmaneves.pdf. Acesso em: 30 mar. 2020.

WWF-BRASIL. **Sustentabilidade:** Da teoria à prática. 1996. Disponível em: <https://www. wwf.org.br/participe/porque_participar/sustentabilidade/>. Acesso em: 19 jun. 2019.