

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Marcellen de Souza Ramos

Séries de Fourier e o problema de condução do calor numa barra finita

CURITIBA

2021

Marcellen de Souza Ramos

Séries de Fourier e o problema de condução do calor numa barra finita

Trabalho de conclusão apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná como requisito parcial à obtenção do grau de licenciada em Matemática.
Orientador: Prof. Cleber de Medeira

Curitiba

2021

Resumo

Neste trabalho estudamos o problema de condução do calor numa barra finita, sujeita a certas condições iniciais e de fronteira. Utilizando séries de Fourier encontramos uma solução para esse problema e por fim, usando o princípio de máximo - mínimo, conseguimos provar a unicidade da solução.

Palavras chave: Equação do calor, séries de Fourier, separação de variáveis, princípio do máximo.

Abstract

In this work we study the heat conduction problem in a finite bar subject to certain initial and boundary conditions. We use Fourier series to obtain a solution for this problem and, additionally, by using the maximum and minimum principle, we prove the uniqueness of the solution.

Key words: Heat equation, Fourier series, separation of variables, maximum principle.

Sumário

1	Introdução as séries de Fourier	8
1.1	Convergência pontual e convergência uniforme	8
1.2	Funções periódicas	13
1.3	Coeficientes de Fourier	14
1.4	Séries de Fourier	16
1.5	Séries de Fourier de funções pares e ímpares	18
1.6	Cálculo de algumas séries de Fourier	20
1.7	Forma complexa da série de Fourier	23
2	Convergência das séries de Fourier	26
2.1	O espaço de funções \mathcal{L}^1	26
2.2	Lema de Riemann-Lebesgue	30
2.3	Convergência pontual da série de Fourier	32
2.3.1	Demonstração do Teorema de Fourier	38
2.4	Convergência uniforme da série de Fourier	39
3	Equação do calor numa barra finita	45
3.1	Condução do calor em uma barra finita	45
3.1.1	Condições de fronteira	48
3.2	Método de separação de variáveis	49
3.3	Barras com extremidades a 0°C	54
3.4	Problema do calor com outras condições de fronteira	61
3.4.1	Condições de fronteira de Neumann	61
3.4.2	Condições de fronteira não-homogêneas	65
3.5	Equação do calor não-homogênea	67

3.6	Unicidade de solução	72
-----	--------------------------------	----

Introdução

O estudo das Equações Diferenciais Parciais (EDP's) surgiu como uma sequência natural do Cálculo Diferencial e Integral no século XVII. Por volta de 1807, Joseph Fourier (1768-1830) com o estudo da propagação do calor, admitindo certas condições iniciais, desenvolveu um método para expressar uma solução para esse problema usando as chamadas séries de Fourier. O objetivo principal desse trabalho é o estudo desse método para um problema de valor inicial e de fronteira envolvendo a equação do calor.

Nossa referência principal será o livro *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais* do autor D. G. Figueiredo (veja [1]), sendo o objetivo central solucionar o problema de condução do calor numa barra finita. Para atingirmos tal objetivo, será necessário lembrarmos inicialmente as definições e principais propriedades das funções periódicas, convergência pontual, convergência uniforme e então explorarmos as séries de Fourier afim de obter uma solução para o problema do calor.

No primeiro capítulo, relembremos as propriedades sobre sequências e séries de funções, convergência pontual e uniforme de funções reais. Introduzimos o conceito de série de Fourier de uma função periódica, analisando as condições essenciais para definir tal série. No segundo capítulo são apresentadas hipóteses suficientes que garantem a convergência pontual e também a convergência uniforme das séries de Fourier. Por fim, no terceiro e último capítulo desse trabalho será proposto um problema de condução do calor em uma barra finita, onde usaremos os resultados apresentados anteriormente como ferramentas para fazer a modelagem matemática do problema, bem como encontrar uma forma de resolvê-lo, além de provarmos a unicidade de solução.

Capítulo 1

Introdução as séries de Fourier

Iniciamos o capítulo lembrando algumas propriedades sobre sequências e séries de funções, convergência pontual e convergência uniforme. Em seguida, é introduzido o conceito de série de Fourier de uma função periódica. Estudaremos também algumas propriedades básicas dos coeficientes de Fourier, funções pares e ímpares, forma complexa da série de Fourier, dentre outras.

1.1 Convergência pontual e convergência uniforme

Nessa seção serão apresentadas algumas definições e resultados básicos sobre sequências de funções. No estudo sobre a convergência de sequências de funções são consideradas duas noções muito importantes, a convergência pontual e a convergência uniforme. Iniciaremos lembrando a definição de sequência de funções, em seguida as definições de convergência e o teste M de Weierstrass.

Definição 1. *Seja X um conjunto de números reais. Uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma correspondência que associa a cada número natural $n \in \mathbb{N}$ uma função f_n , definida em X e tomando valores reais.*

Definição 2. *Diz-se que uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, onde $n \in \mathbb{N}$, converge pontualmente (ou simplesmente) para a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ quando para todo $x \in X$, a sequência de números $f_n(x)$ converge para $f(x)$. Assim, $f_n \rightarrow f$ pontualmente quando, dados $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo de ε e de x) tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.*

Exemplo 1. A sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f_n(x) = \frac{x}{n}$, converge pontualmente

para a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ identicamente nula. Com efeito, para todo $x \in \mathbb{R}$ fixado, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{n} \right) = 0.$$

Definição 3. Uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ quando dado $\varepsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo apenas de ε) tal que $n > n_0$ implicar que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, seja qual for $x \in X$.

Exemplo 2. Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado, então a sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f_n(x) = \frac{x}{n}$, converge uniformemente para a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ identicamente nula. De fato, seja $M > 0$ tal que $X \subset [-M, M]$, logo dado $\varepsilon > 0$ tome $n_0 \in \mathbb{N}$ com $n_0 > M/\varepsilon$ e teremos para todo $n > n_0$ que

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{n} \right| \leq \frac{M}{n} < \varepsilon,$$

para todo $x \in X$.

Exemplo 3. Pode-se perceber que a sequência de funções $f_n(x) = x^n$ converge simplesmente em $[0, 1]$ para a função f dada por $f(1) = 1$ e $f(x) = 0$, se $0 \leq x < 1$. Porém, a sequência f_n não converge uniformemente para f , nem mesmo no intervalo $[0, 1)$. Vejamos agora que (f_n) converge uniformemente para a função identicamente nula em cada intervalo da forma $[0, 1 - \delta]$, onde $0 < \delta < 1$. Com efeito, sendo $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \delta)^n = 0$, dado qualquer $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0 \Rightarrow (1 - \delta)^n < \varepsilon$. Então, para todo $x \in [0, 1 - \delta]$, temos $0 < x^n \leq (1 - \delta)^n < \varepsilon$, desde que $n > n_0$. Isto prova a afirmação feita.

Exemplo 4. A sequência de funções $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$ converge simplesmente para a função nula em $[0, 1]$. De fato, se $x = 0$ ou $x = 1$ então $f_n(x) = 0$, para todo n . Se $0 < x < 1$ então $x^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, logo $f_n(x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Por outro lado a convergência não é uniforme, pois $f'_n(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = 0$ se, e somente se, $x = \sqrt[n]{1/2}$ o qual é o ponto de máximo de f_n . O valor máximo de $f_n(x)$ é igual a $1/4$ para todo n . Logo, para $0 < \varepsilon < 1/4$ temos que $|f_n(\sqrt[n]{1/2})| = 1/4 > \varepsilon$ o que prova que a convergência não é uniforme. Note também que $\sqrt[n]{1/2} \rightarrow 1$, porém $f_n(1) = 0$, para todo n .

A convergência uniforme de uma sequência de funções pode ser interpretada geometricamente da seguinte forma. Suponha que $f_n \rightarrow f$ uniformemente, então dado $\varepsilon > 0$ considere as funções transladadas $f - \varepsilon$ e $f + \varepsilon$. Os gráficos dessas duas funções formam uma “faixa de raio ε ” em torno do gráfico da função f .

Pela definição de convergência uniforme, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$ então

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

Isso significa geometricamente que, sempre que $n > n_0$, os gráficos das funções f_n estão contidos na faixa de raio ε mencionada acima, conforme mostra a figura a seguir.

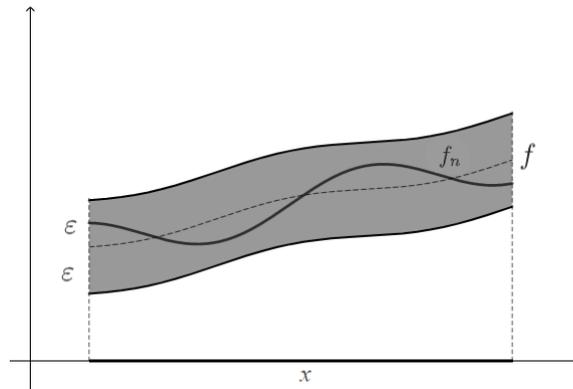


Figura 1.1: $f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon$

Definição 4. Uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de sequência de Cauchy quando para qualquer $\epsilon > 0$ é possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m, n > n_0 \implies |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon,$$

qualquer que seja $x \in X$.

Teorema 1 (Critério de Cauchy). Uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente convergente se, e somente se, (f_n) é uma sequência de Cauchy.

Demonstração. Primeiro vamos considerar que a sequência f_n converge para f uniformemente em X . Dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica em $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $x \in X$, tomando também um $m > n_0$, temos da mesma maneira, que $|f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. Logo, por hipótese, com m e n maiores que n_0 , temos

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

para todo $x \in X$. Portanto f_n é uma sequência de Cauchy.

Considerando a sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ é de Cauchy, então para cada $x \in X$, os números $f_n(x)$, com $n \in \mathbb{N}$, formam um sequência de Cauchy de números reais, que converge

para um número real que chamaremos de $f(x)$. Isto define a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Para mostrar que f_n converge uniformemente para f em X , tomemos um $\epsilon > 0$. Existe n_0 , tal que podemos tomar m e n maiores que n_0 , que implica $|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$, para todo $x \in X$. Vamos considerar n e x fixos e m tendendo ao infinito. Assim, obtemos $|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$, para todo $x \in X$ e $n > n_0$, o que prova que (f_n) converge uniformemente para f .

□

Proposição 1 (Teste M de Weierstrass). *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ uma série de funções $u_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida em um subconjunto X de \mathbb{R} . Suponha que existam constantes $M_n \geq 0$ tais que:*

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $|u_n(x)| \leq M_n$, para todo $x \in X$;
- a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convirja.

Então, a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniforme e absolutamente em X .

Demonstração. Como para cada $x \in X$ temos que $|f_n(x)| \leq M_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, então o teste da comparação garante que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ é convergente e portanto a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ também converge.

Vejamus que a convergência é uniforme. De fato, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, dependendo apenas de ϵ , tal que para todo $m, n > N$, com $m > n$, temos

$$\left| \sum_{k=n}^m f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^m |f_k(x)| \leq \sum_{k=n}^m M_k < \epsilon,$$

para todo $x \in X$. Segue pelo critério de Cauchy, Teorema 1, que as séries $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ são uniformemente convergentes em X .

□

Exemplo 5. Seja $p > 1$ e considere a série de funções dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^p}.$$

Note que a sequência de funções $f_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{n^p}$ pode ser limitada da seguinte forma:

$$\left| \frac{\text{sen}(nx)}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como $p > 1$, temos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ é convergente, e portanto segue do Teste M de Weierstrass que a série de funções acima converge uniforme e absolutamente em \mathbb{R} .

O Teste M de Weierstrass apresenta condições suficientes para que uma série de funções seja uniformemente convergente, porém uma série pode convergir uniformemente sem que valham as condições do teste. Vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 6. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $f_n : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f_n = 1/x, \text{ se } x \in [n, n+1) \text{ e } f_n(x) = 0, \text{ caso contrário.}$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = 1/x$, para todo $x \in [1, +\infty)$. Seja $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$. A convergência $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ é uniforme em $[1, +\infty)$, pois

$$0 \leq f(x) - [f_1(x) + \dots + f_n(x)] < \frac{1}{n},$$

para todo $x \in [1, +\infty)$. Por outro lado, se existissem constantes a_n tais que $f_n(x) \leq a_n$, para todo $x \in [1, +\infty)$, então tomando $x = n$, obtemos $a_n \geq 1/n$ e, portanto, a série $\sum a_n$ não converge.

Para finalizar essa seção, enunciamos alguns importantes resultados obtidos a partir da convergência uniforme. As demonstrações desses resultados serão omitidas e podem ser encontradas em [2].

Proposição 2. *Suponhamos que as funções u_n sejam contínuas e que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convirja uniformemente. Então a função dada por $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ é também contínua.*

Proposição 3. *Suponhamos que as funções u_n sejam integráveis em um intervalo I e que a série $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convirja uniformemente. Então*

$$\int_I \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I u_n(x) dx.$$

Proposição 4. *Sejam u_n funções deriváveis no intervalo $I = [a, b]$. Se existe $c \in I$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c)$ converge e, além disso, a série $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n \doteq g$ converge uniformemente em I , então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u$ converge uniformemente em I e u é derivável com $u' = g$. Em outras palavras, nessas hipóteses, podemos derivar termo a termo*

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

1.2 Funções periódicas

Definição 5. *Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período $T > 0$ (ou T -periódica), quando*

$$f(x + T) = f(x), \quad \text{para todo } x.$$

Segue da definição que se T é um período para a função f , então $2T$ também é um período, pois $f(x + 2T) = f(x + T) = f(x)$, para todo x . De forma geral, qualquer múltiplo natural de T é também um período da função f . O menor período positivo da função f , quando existe, é chamado de *período fundamental*. Observe que uma função constante é periódica para qualquer período $T > 0$, porém não possui período fundamental.

Exemplo 7. A função $\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é periódica com período fundamental $T = \frac{2L}{n}$, o qual pode ser determinado do seguinte modo:

Devemos ter $\text{sen}\left(\frac{n\pi(x+T)}{L}\right) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, ou equivalentemente,

$$\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi T}{L}\right) + \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi T}{L}\right) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Para $x = \frac{L}{2n}$, obtemos:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi T}{L}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \implies \cos\left(\frac{n\pi T}{L}\right) = 1. \quad (1.1)$$

Então, usando a identidade $\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, obtemos

$$\text{sen}\left(\frac{n\pi T}{L}\right) = 0. \quad (1.2)$$

Como estamos interessados no menor valor positivo de T que satisfaça (1.1) e (1.2), simultaneamente, concluímos que

$$\frac{n\pi T}{L} = 2\pi.$$

Logo, o período fundamental da função f é $T = \frac{2L}{n}$.

1.3 Coeficientes de Fourier

Suponha que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é expressa pela seguinte série

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (1.3)$$

É natural de se esperar que os coeficientes a_n e b_n que aparecem nessa série estejam intimamente ligados à função f . Vejamos como expressar esses coeficientes em termos de f . Para isso, vamos supor que a série (1.3) convirja uniformemente.

Observe que a função f é periódica de período $2L$, pois como vimos no Exemplo 7, o período fundamental de $\operatorname{sen}(\pi x/L)$ é $2L$ e portanto cada função $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$ é $2L$ periódica. O mesmo raciocínio se aplica para as funções $\cos(n\pi x/L)$.

Como consequência da Proposição 2, f é contínua e, portanto, é integrável em cada intervalo de comprimento $2L$. Assim, usando a Proposição (3), podemos integrar membro a membro a série (1.3), obtendo

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$

e, portanto

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad (1.4)$$

pois,

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.5)$$

Para obter os demais coeficientes, exploramos a mesma ideia e usamos as seguintes relações de ortogonalidade para $m, n \geq 1$:

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = 0, \quad (1.6)$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n \neq m, \end{cases} \quad (1.7)$$

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n \neq m. \end{cases} \quad (1.8)$$

Agora, multiplicando (1.3) por $\cos m\pi x/L$, para $m \geq 1$ fixado, e integrando, obtemos:

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = a_m L. \quad (1.9)$$

De modo semelhante, obtemos

$$\int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = b_m L. \quad (1.10)$$

Finalmente, de (1.4), (1.9) e (1.10), obtemos

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 0; \quad (1.11)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1. \quad (1.12)$$

Logo se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função $2L$ periódica, integrável e absolutamente integrável em cada intervalo fechado, em particular em $[-L, L]$, temos que

$$|a_n| \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx, \quad n \geq 0 \quad \text{e} \quad |b_n| \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx, \quad n \geq 1.$$

Esses números a_n e b_n , dados em (1.11) e (1.12) respectivamente, são chamados de *coeficientes de Fourier* da função f . Note que o fato de ter o número $\frac{1}{2}$ multiplicando o coeficiente a_0 , nos

garante uma única fórmula para a_n , com $n \geq 0$.

Além disso, os coeficientes de Fourier de uma função f periódica, sendo f , $|f|$ e $|f|^2$ integráveis satisfazem a *Identidade de Parseval*, a qual é dada por:

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx.$$

A demonstração dessa igualdade pode ser encontrada na Seção 3.11 do livro [1].

1.4 Séries de Fourier

Motivados pela seção anterior, dada uma função $2L$ periódica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, integrável e absolutamente integrável, definimos seus *coeficientes de Fourier* pelas expressões abaixo:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 0, \quad (1.13)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sen \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1. \quad (1.14)$$

e assim escrevemos

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sen \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (1.15)$$

sendo que a expressão do lado direito é a *série de Fourier* da função f .

Várias questões surgem a partir da definição anterior. A primeira delas é, sob que hipóteses a série de Fourier converge? e quando isso ocorre, para que valor ela converge?

Nessa seção iremos apresentar condições suficientes que garantem que a função f coincide com sua série de Fourier. Antes disso, precisamos de algumas definições preliminares.

Definição 6. *Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua se ela tiver um número finito de descontinuidades, todas de primeira espécie em qualquer intervalo limitado, ou seja, dados $a < b$, existem pontos $a \leq a_1 < \dots < a_n \leq b$, tais que f é contínua em cada intervalo aberto (a_j, a_{j+1}) , para todo $j = 1, \dots, n-1$ e existem os limites laterais*

$$f(a_j + 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x) \quad e \quad f(a_j - 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x).$$

Obviamente, toda função contínua é seccionalmente contínua.

Exemplo 8. A função *senal de x*, definida abaixo, é seccionalmente contínua.

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

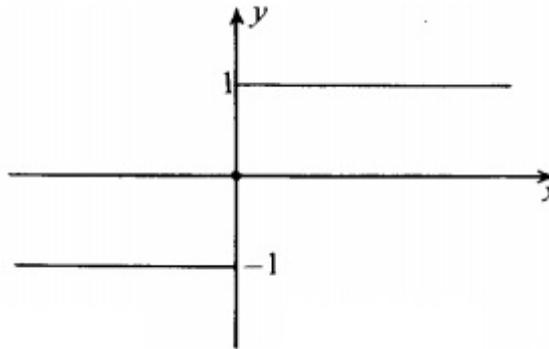


Figura 1.2: gráfico de $\text{sign } x$

Definição 7. Uma função é dita *seccionalmente diferenciável*, se ela e a sua primeira derivada forem seccionalmente contínuas.

Uma função pode não ser contínua e mesmo assim ser seccionalmente diferenciável. Assim como, uma função contínua pode não ser seccionalmente diferenciável.

Exemplo 9. Considere a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{se } |x| \leq 1; \\ \text{e periódica de período } 2. \end{cases}$$

Note que ela é contínua, mas ela não é seccionalmente diferenciável. Pois

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Logo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \infty.$$

Portanto temos que f' é descontínua em $x = 1$ e a sua descontinuidade é de segunda espécie.

Finalizamos essa seção apresentando o Teorema de Fourier, o qual será demonstrado mais a diante na Seção 2.3. O intuito de enunciá-lo aqui é usarmos o seu resultado para obter alguns interessantes exemplos nas seções a seguir.

Teorema 2 (Teorema de Fourier). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função $2L$ periódica e seccionalmente diferenciável. Então a série de Fourier da função f , dada em (1.15), converge em cada ponto x da seguinte forma:*

$$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Note que, em particular, se f é contínua e seccionalmente diferenciável, então para cada x vale a igualdade:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right).$$

1.5 Séries de Fourier de funções pares e ímpares

Em muitas situações iremos estender uma função definida no intervalo $[0, L]$ como uma função par ou uma função ímpar definida no intervalo $[-L, L]$ e depois considerá-la $2L$ periódica em \mathbb{R} . Nesse caso, sob boas hipóteses podemos escrever essa função estendida em termos de sua série de Fourier e recuperar a função original, quando a restringimos ao intervalo $[0, L]$. Isso tudo é motivado pelo fato que para funções pares, ou funções ímpares, os coeficientes a_n , ou os coeficientes b_n , são nulos. Antes disso, vamos relembrar alguns conceitos preliminares.

Definição 8. *Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é par se $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, o gráfico da função f é simétrico com relação ao eixo y .*

Exemplo 10. As funções $f(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}$ e $p(x) = x^{2n}$ com $n = 1, 2, \dots$, são funções pares.

Definição 9. *Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é ímpar se $f(x) = -f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Nesse caso, o gráfico da função f é simétrico em relação à origem.*

Exemplo 11. As funções $f(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$ e $p(x) = x^{2n-1}$ com $n = 1, 2, \dots$, são funções ímpares.

Enunciamos agora alguns resultados básicos sobre esses tipos de funções.

Proposição 5. *Com respeito as funções pares e ímpares são válidas as seguintes afirmações:*

- (i) *A soma de duas funções pares é uma função par. A soma de duas funções ímpares é uma função ímpar.*
- (ii) *O produto de duas funções pares é uma função par.*
- (iii) *O produto de duas funções ímpares é uma função par.*
- (iv) *O produto de uma função par por uma uma função ímpar é uma função ímpar.*

O seguinte resultado será muito útil durante esse trabalho.

Proposição 6. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em todo intervalo limitado.*

- (i) *Se f é par, então*

$$\int_{-L}^L f(x)dx = 2 \int_0^L f(x)dx.$$

- (ii) *Se f é ímpar, então*

$$\int_{-L}^L f(x)dx = 0.$$

Demonstração. (i) Note que

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \int_{-L}^0 f(x)dx + \int_0^L f(x)dx = \int_0^{-L} -f(x)dx + \int_0^L f(x)dx.$$

Fazendo a mudança de variável $y = -x$ na integral $\int_0^{-L} -f(x)dx$, obtemos

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \int_0^L f(-y)dy + \int_0^L f(y)dy. \tag{1.16}$$

E como f é par, teremos então que

$$\int_{-L}^L f(x)dx = 2 \int_0^L f(x)dx.$$

(ii) Se a função f for ímpar, usando a igualdade (1.16), teremos

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \int_0^L f(-y)dy + \int_0^L f(y)dy = \int_0^L -f(y)dy + \int_0^L f(y)dy = 0.$$

□

Por fim, seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função $2L$ periódica, integrável e absolutamente integrável. Usando as proposições anteriores, junto com o cálculo dos coeficientes da série de Fourier, temos que

a) Caso f seja uma função par, então os coeficientes de Fourier de f serão

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad \text{e} \quad b_n = 0.$$

b) Caso f seja uma função ímpar, então os coeficientes de Fourier de f serão

$$a_n = 0 \quad \text{e} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

1.6 Cálculo de algumas séries de Fourier

Exemplo 12. Seja $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$ e definida por

$$f_1(x) = \begin{cases} L - x, & \text{para } 0 \leq x \leq L, \\ L + x, & \text{para } -L \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Como f_1 é uma função par, temos uma série de cossenos, cujos coeficientes são:

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L (L - x)dx = \frac{2}{L} \frac{L^2}{2} = L,$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L (L - x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1.$$

Para $n \geq 1$, usando uma mudança de variável e integrando por partes, obtemos

$$a_n = \frac{2L}{n^2\pi^2} [1 - (-1)^n],$$

ou seja,

$$a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = \frac{4L}{(2k-1)^2\pi^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Portanto a série de Fourier da função f_1 é dada por

$$f_1(x) \sim \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{L}.$$

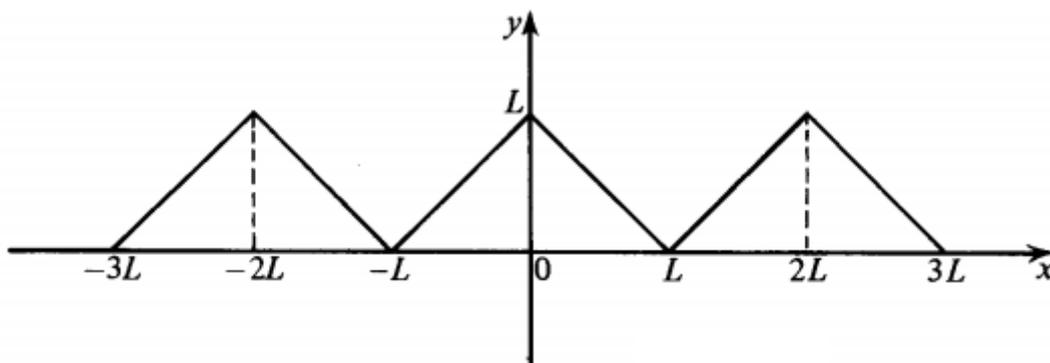


Figura 1.3: Gráfico da função f_1

Observe que, em virtude do Teorema de Fourier, como f é contínua e seccionalmente diferenciável, o símbolo \sim pode ser substituído pelo sinal de igual. Usando o Teorema de Fourier, para $x = 0$, obtemos

$$L = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2},$$

ou seja,

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

Exemplo 13. Seja $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ e definida por $f_2(x) = x^2$, para $-L \leq x \leq L$. Como f_2 é par, teremos uma série de cossenos cujos coeficientes são:

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{2L^2}{3}$$

e

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \cos \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Fazendo a mudança de variável $y = \frac{n\pi x}{L}$, teremos $dy = \frac{n\pi}{L} dx$ e integrando por partes teremos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \int_0^{n\pi} y^2 \cos y \left(\frac{L}{n\pi} \right) dy \\ &= 2 \frac{L^2}{n^3 \pi^3} \int_0^{n\pi} y^2 \cos y dy \\ &= 2 \frac{L^2}{n^3 \pi^3} \left[y^2 \operatorname{sen} y \Big|_0^{n\pi} - \int_0^{n\pi} 2y \operatorname{sen} y dy \right] \\ &= 4 \frac{L^2}{n^3 \pi^3} \left[y \cos y \Big|_0^{n\pi} - \int_0^{n\pi} -\cos y dy \right] \\ &= 4 \frac{L^2}{n^3 \pi^3} [n\pi \cos n\pi] \\ &= 4 \frac{L^2}{n^2 \pi^2} (-1)^n \end{aligned}$$

Portanto a série de Fourier da função f_2 é

$$f_2(x) \sim \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{L}$$

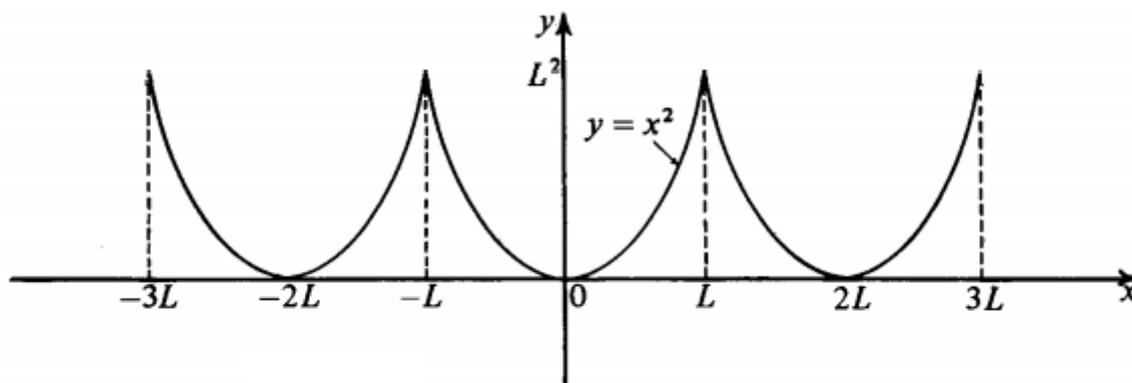


Figura 1.4: Gráfico da função f_2

Observe que temos uma igualdade em vez de \sim , como consequência de Teorema de Fourier. Assim, usando o teorema de Fourier para $x = L$, obtemos

$$L^2 = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

ou seja,

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Exemplo 14. Seja $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função $2L$ periódica, dada por $f_3(x) = x$, para $-L \leq x < L$. Como essa função é ímpar, teremos uma série de senos e seus coeficientes serão

$$a_n = 0 \quad \text{e} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Fazendo a mudança de variável $y = \frac{n\pi x}{L}$, teremos $dy = \frac{n\pi}{L} dx$, logo

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^{n\pi} \frac{Ly}{n\pi} \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen} y \, dy = \frac{2L}{n^2\pi^2} \int_0^{n\pi} y \operatorname{sen} y \, dy \\ &= \frac{2L}{n^2\pi^2} \left[-y \cos y \Big|_0^{n\pi} + \int_0^{n\pi} \cos y \, dy \right] \\ &= \frac{2L}{n^2\pi^2} \left[-n\pi \cos n\pi \right] \\ &= \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos que $\cos n\pi = (-1)^n$. Portanto, a série de Fourier de f_3 será

$$f_3(x) \sim \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

1.7 Forma complexa da série de Fourier

Nesta última seção do Capítulo 1, veremos que é possível unir a série de senos com a série de cossenos na expressão da série de Fourier de uma função usando funções exponenciais. Para isso, precisamos considerar alguns resultados sobre números complexos.

Iniciamos relembando a *Fórmula de Euler* dada por

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Assim, podemos representar as funções cosseno e seno da seguinte forma:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Portanto, para cada $n \geq 1$, usando as igualdades acima para $\theta = n\pi x/L$, podemos escrever

$$a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{in\pi x/L} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) e^{-in\pi x/L}.$$

Logo, o coeficiente α_n de $e^{in\pi x/L}$ é dado por

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left[\cos \frac{n\pi x}{L} - i \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right] dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left[\cos \left(-\frac{n\pi x}{L} \right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{n\pi x}{L} \right) \right] dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\alpha_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx, \quad n \geq 1.$$

Além disso, o coeficiente β_n de $e^{-in\pi x/L}$ é dado por

$$\beta_n = \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left[\cos \frac{n\pi x}{L} + i \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right] dx.$$

ou seja,

$$\beta_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{in\pi x/L} dx, \quad n \geq 1.$$

Definimos também o coeficiente

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx.$$

Assim, usando os argumentos anteriores podemos escrever

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{in\pi x/L} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-in\pi x/L}.$$

Note agora que os coeficientes α_n , para $n \geq 0$ e β_n , para $n \geq 1$, podem ser expressos por uma única fórmula se considerarmos $n \in \mathbb{Z}$, da seguinte forma

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{in\pi x/L} dx, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.17)$$

ou seja, $c_n = \beta_n$ se $n \geq 1$, $c_n = \alpha_{-n}$ se $n \leq -1$ e $c_0 = \alpha_0$.

Desse modo, mostramos que se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função $2L$ periódica, integrável e absolutamente integrável, então a sua série de Fourier pode ser escrita na seguinte forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L},$$

onde os coeficientes de Fourier c_n são dados por (1.17).

Capítulo 2

Convergência das séries de Fourier

Dando continuidade ao trabalho, iremos apresentar neste capítulo um estudo detalhado sobre convergência das séries de Fourier, as quais foram introduzidas no capítulo anterior. Nas duas seções iniciais apresentaremos alguns resultados preliminares que irão auxiliar nas demonstrações da convergência pontual e da convergência uniforme das séries de Fourier.

2.1 O espaço de funções \mathcal{L}^1

Dada uma função $2L$ -periódica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, vimos na Seção 1.4 que as hipóteses mínimas para que consigamos definir os coeficientes de Fourier de f , conseqüentemente sua série de Fourier, são a *integrabilidade* e a *integrabilidade absoluta* no intervalo $[-L, L]$.

Uma vez que estamos considerando aqui a integral de Riemann, relembremos algumas importantes considerações a respeito dessa integral. Dada uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida em um intervalo limitado $[a, b]$, temos dois casos a considerar:

(i) Se a função f é limitada, então ela é integrável quando o supremo das somas inferiores é igual ao ínfimo das somas superiores.

(ii) Se a função f não é limitada, então ela é integrável quando o intervalo $[a, b]$ puder ser dividido em um número finito de subintervalos fechados $I_k = [a_k, b_k]$, $k = 1, \dots, n$, tais que para todos $\delta > 0$ e $\delta' > 0$, a função f é limitada e integrável em $[a_k + \delta, b_k - \delta']$ e os limites abaixo existem

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow 0, \delta' \rightarrow 0} \int_{a_k + \delta}^{b_k - \delta'} f(x)dx.$$

Neste caso a integral é chamada de *integral imprópria* e é dada por

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} f(x)dx.$$

Dizemos que a função f é absolutamente integrável se o valor absoluto $|f|$ for integrável no sentido (i) ou no sentido (ii) descrito acima.

Se f for limitada e integrável, então f será absolutamente integrável. Não vale a recíproca pois a função limitada

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ -1, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

é absolutamente integrável, com integral igual a 1, porém f não é integrável.

Por outro lado, quando f não é limitada é possível encontrarmos funções integráveis que não são absolutamente integráveis. Isso nos permite concluir que a integrabilidade de f não implica em sua integrabilidade absoluta, assim como a integrabilidade absoluta de f não implica em sua integrabilidade.

Definição 10. Diremos que uma função $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é \mathcal{L}^1 se f e $|f|$ são integráveis.

Se $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função \mathcal{L}^1 , então os coeficientes de Fourier de f estão bem definidos.

Teorema 3. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathcal{L}^1 . Então, dado $\varepsilon > 0$, existe uma função contínua $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)|dx < \varepsilon \quad e \quad \psi(a) = \psi(b) = 0.$$

Demonstração. (i) Suponha inicialmente que f seja limitada e integrável. Logo dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx - \sum_{j=1}^k m_j(x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.1}$$

onde $m_j = \inf\{f(x); x_{j-1} \leq x \leq x_j\}$. Agora designe por $\chi(x)$ a função definida por

$$\chi(x) = m_j, \text{ para } x_{j-1} \leq x < x_j. \tag{2.2}$$

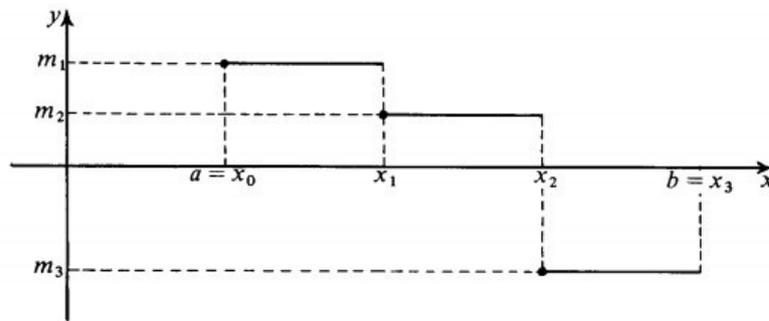
Dessa forma,

$$\sum_{j=1}^k m_j(x_j - x_{j-1}) = \int_a^b \chi(x) dx.$$

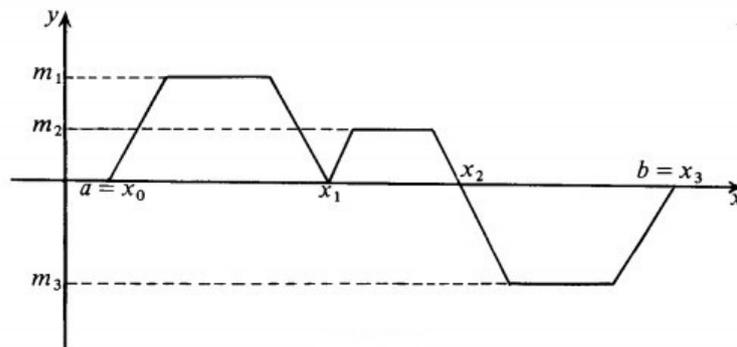
e assim podemos reescrever (2.1) como

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b \chi(x) dx = \int_a^b [f(x) - \chi(x)] dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.3)$$

Antes de prosseguirmos vamos ilustrar com um gráfico simples a ideia que será explorada para concluir a demonstração. Suponhamos que a partição tenha quatro pontos e o gráfico de $\chi(x)$ seja o da figura abaixo.



Observe que $\chi(x)$ não é contínua. Gostaríamos que ela fosse contínua, para isso substituímos os “retângulos” por “trapézios”, considerando uma sequência de ângulos $\alpha_n \nearrow \frac{\pi}{2}$, que determinam a inclinação dos lados de cada trapézio em relação o eixo x . Então para cada n consideremos a função $\psi_n(x)$ cujo gráfico possui os “lados” inclinados conforme discutido anteriormente e descrito na figura a seguir.



Note que, em cada subintervalo da partição, a região delimitada entre o retângulo e o trapézio

é formada por dois triângulos retângulos, cada um deles com área $\frac{1}{2}m_j \left(\frac{m_j}{\tan \alpha_j} \right)$. Portanto, a diferença das áreas sob os dois gráficos anteriores satisfaz a seguinte igualdade:

$$\int_a^b |\chi(x) - \psi_n(x)| dx = \sum_{j=1}^k \frac{m_j^2}{\tan \alpha_n}.$$

Como f é limitada, seja $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in [a, b]$, então:

$$\int_a^b [\chi(x) - \psi_n(x)] dx \leq \frac{kM^2}{\tan \alpha_n}.$$

Como k está fixado, existe n suficientemente grande, tal que

$$\int_a^b |\chi(x) - \psi_n(x)| dx \leq \frac{kM^2}{\tan \alpha_n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para esse n suficientemente grande, obtemos dos cálculos anteriores que

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)| dx &= \int_a^b |[f(x) - \chi(x)] + [\chi(x) - \psi_n(x)]| dx \\ &\leq \int_a^b |f(x) - \chi(x)| dx + \int_a^b |\chi(x) - \psi_n(x)| dx \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe uma função contínua $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$ tal que

$$\int_a^b |f(x) - \psi_n(x)| dx < \varepsilon$$

(ii) Suponha agora que f não seja limitada, mas que seja integrável e absolutamente integrável no sentido de integrais impróprias. Para facilitar, suponha também que f se torne ilimitada apenas nas vizinhanças de a e b . Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \int_a^b |f(x)| dx - \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x)| dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.4)$$

Como f é limitada e integrável no intervalo $[a + \delta, b - \delta]$, então existe uma função contínua

$\psi : [a + \delta, b - \delta] \rightarrow \mathbb{R}$, com $\psi(a + \delta) = \psi(b - \delta) = 0$ tal que

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.5)$$

Considere a função $\tilde{\psi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{para } a + \delta \leq x \leq b - \delta, \\ 0, & \text{para } a \leq x \leq a + \delta \text{ e } b - \delta \leq x \leq b. \end{cases}$$

Temos então

$$\int_a^b |f(x) - \tilde{\psi}(x)| dx = \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)| dx,$$

assim usando (2.4) e (2.5), obtemos

$$\int_a^b |f(x) - \tilde{\psi}(x)| dx < \varepsilon.$$

□

2.2 Lema de Riemann-Lebesgue

Nessa seção apresentaremos o Lema de Riemann-Lebesgue o qual nos auxiliará em resultados futuros.

Lema 1 (Riemann-Lebesgue). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathcal{L}^1 . Então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(tx) dx = 0 \quad e \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(tx) dx = 0.$$

Demonstração. (i) Suponha, inicialmente, que f seja limitada, isto é, que exista $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in [a, b]$. Como f é uma função limitada e integrável, por definição de funções \mathcal{L}^1 , então dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, tal que

$$S[f, P] - s[f, P] < \frac{\varepsilon}{2},$$

onde

$$S[f, P] = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}), \quad M_j = \sup[f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j],$$

$$s[f, P] = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}), \quad m_j = \inf[f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j],$$

são as somas superiores e inferiores associadas a partição P . Considerando a partição do intervalo $[a, b]$ determinada pelos pontos $x_j = a + \frac{j}{n}(b - a)$, para $j = 0, 1, \dots, n$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx &= \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x) \operatorname{sen}(tx) + f(x_j) \operatorname{sen}(tx) - f(x_j) \operatorname{sen}(tx)] dx = \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x) - f(x_j)] \operatorname{sen}(tx) dx + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x_j) \operatorname{sen}(tx) dx \end{aligned}$$

Observe que $\left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(tx) dx \right| = \left| \frac{-\cos(tx)}{t} \right|_{x_{j-1}}^{x_j} \leq \frac{2}{t}$ e que $|f(x) - f(x_j)| \leq M_j - m_j$, para $x_{j-1} \leq x \leq x_j$. Portanto:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| &= \left| \sum_{j=1}^n f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(tx) dx + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x) - f(x_j)] \operatorname{sen}(tx) dx \right| \\ &\leq \frac{2nM}{t} + \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) \\ &= \frac{2nM}{t} + \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}) \\ &= \frac{2nM}{t} + [S(f; P) - s(f; P)]. \end{aligned}$$

Agora, basta tomarmos t_0 grande o suficiente tal que $\frac{2nM}{t_0} < \frac{\varepsilon}{2}$, então, dado $\varepsilon > 0$, temos:

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| \leq \frac{2nM}{t} + [S(f; P) - s(f; P)] < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

(ii) Suponha agora que f seja uma função \mathcal{L}^1 qualquer. Dado $\varepsilon > 0$, então pelo Teorema 3, existe uma função contínua $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como toda função contínua num compacto é limitada e integrável, concluímos pelo caso (i) visto anteriormente que existe t_0 tal que, para qualquer $t \geq t_0$, temos

$$\left| \int_a^b \psi(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Agora, como

$$\int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx = \int_a^b \psi(x) \operatorname{sen}(tx) dx + \int_a^b [f(x) - \psi(x)] \operatorname{sen}(tx) dx,$$

obtemos

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| \leq \left| \int_a^b \psi(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| + \int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx = 0$. A demonstração de $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{cos}(tx) dx = 0$ é obtida de forma análoga.

□

2.3 Convergência pontual da série de Fourier

Nessa seção apresentamos condições suficientes sobre a função f que garantam a convergência de sua série de Fourier em cada ponto fixado x . Além das hipóteses mínimas que são necessárias para que se possa definir os coeficientes de Fourier faremos outra hipótese sobre o comportamento de f nas vizinhanças do ponto x . Nosso objetivo é fazer estimativas do valor

$$e_n(x) = S_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

sendo

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \right).$$

Vamos inicialmente escrever a soma parcial $S_n(x)$ de modo mais conveniente usando as expressões dos coeficientes de Fourier. Sabemos que os coeficientes de Fourier são dados pelas seguintes expressões:

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k \geq 0, \tag{2.6}$$

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k \geq 1. \quad (2.7)$$

Logo, seguimos o cálculo de $S_n(x)$ substituindo as expressões (2.6) e (2.7) e a identidade trigonométrica $\cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) = \cos(a-b)$, obtendo

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) dy + \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \cos \frac{k\pi y}{L} dy \cos \frac{k\pi x}{L} + \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \operatorname{sen} \frac{k\pi y}{L} dy \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \right] \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) dy + \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \left(\cos \frac{k\pi y}{L} \cos \frac{k\pi x}{L} + \operatorname{sen} \frac{k\pi y}{L} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \right) dy \right] \\ &= \int_{-L}^L \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi(x-y)}{L} \right] f(y) dy. \end{aligned}$$

A igualdade acima pode ser reescrita como

$$S_n(x) = \int_{-L}^L D_n(x-y) f(y) dy \quad (2.8)$$

onde a expressão dada por

$$D_n(x) \doteq \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi x}{L} \right),$$

é conhecida como o *núcleo de Dirichlet*, o qual possui as propriedades a seguir:

(i) D_n é uma função par.

(ii) Usando as relações de ortogonalidade, obtemos

$$\int_{-L}^L D_n(x) dx = 1.$$

(iii) $D_n(x)$ é uma função contínua.

(iv) $D_n(x)$ é uma função periódica de período $2L$.

(v) $D_n(0) = \frac{(n + \frac{1}{2})}{L}$.

(vi) Vale a seguinte expressão compacta de $D_n(x)$, para $x \notin \{0, \pm 2L, \pm 4L, \dots\}$,

$$D_n(x) = \frac{1}{2L} \frac{\operatorname{sen}((n + \frac{1}{2})\frac{\pi x}{L})}{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2L}}. \quad (2.9)$$

Vamos agora fazer as demonstrações das propriedades acima:

(i) Como para cada k temos que $\cos \frac{k\pi x}{L}$ é uma função par e, além disso, somas de funções pares ainda é uma função par, então segue imediatamente que $D_n(x)$ é uma função par.

(ii) Integrando o núcleo de Dirichlet obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L D_n(x) dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right] dx \\ &= \frac{1}{L} \left[\underbrace{\int_{-L}^L \frac{1}{2} dx}_L + \sum_{k=1}^n \underbrace{\int_{-L}^L \cos \frac{k\pi x}{L} dx}_0 \right] = 1. \end{aligned}$$

(iii) Segue imediatamente que $D_n(x)$ é uma função contínua pois somas de funções contínuas também é uma função contínua.

(iv) Usando o fato que cosseno é uma função periódica temos:

$$\begin{aligned} D_n(x + 2L) &= \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi(x + 2L)}{L} \right) \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi x}{L} + 2\pi k \right) \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right] = D_n(x), \end{aligned}$$

para todo x , logo $D_n(x)$ é uma função $2L$ periódica.

(v) Segue diretamente substituindo $x = 0$ na definição do núcleo de Dirichlet, ou seja,

$$D_n(0) = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + n \right].$$

(vi) Primeiramente iremos encontrar uma expressão para a soma a seguir:

$$S_n(\theta) = 1 + \sum_{k=1}^n \cos(k\theta).$$

Usando a igualdade

$$e^{ik\theta} = \cos(k\theta) + i \operatorname{sen}(k\theta), \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n,$$

dada pela Fórmula de Euler, temos

$$Re(1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots + e^{ni\theta}) = 1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \dots + \cos(n\theta) = S_n(\theta).$$

Por outro lado, usando a fórmula $1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$, $z \neq 1$, no caso particular $z = e^{i\theta}$, temos

$$S(\theta) = Re \left(\frac{1 - e^{i\theta(n+1)}}{1 - e^{i\theta}} \right).$$

Multiplicando a fração acima por $\frac{e^{-\frac{i\theta}{2}}}{e^{-\frac{i\theta}{2}}}$, obtemos

$$S(\theta) = Re \left(\frac{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{i(n+\frac{1}{2})\theta}}{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}} \right), \quad (2.10)$$

para $\theta \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$

Sabemos que $\text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}}}{2i}$, portanto $e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}} = -2i \text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right)$. Substituindo esses valores na equação (2.10) e usando a relação $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \text{sen}(\alpha)$, obtemos

$$\begin{aligned} S(\theta) &= Re \left[\frac{(\cos(\frac{\theta}{2}) - i \text{sen}(\frac{\theta}{2})) - (\cos(n + \frac{1}{2})\theta + i \text{sen}(n + \frac{1}{2})\theta)}{-2i \text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right] \\ &= Re \left[\frac{(\text{sen}(\frac{\theta}{2}) + \text{sen}(n + \frac{1}{2})\theta) + i (\cos(\frac{\theta}{2}) - \cos(n + \frac{1}{2})\theta)}{2 \text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right] \\ &= \frac{\text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) + \text{sen}(n + \frac{1}{2})\theta}{2 \text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right)}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

para $\theta \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$

Agora veja que

$$LD_n(x) + \frac{1}{2} = 1 + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right). \quad (2.12)$$

Assim, usando a fórmula encontrada em (2.11) no lado direito da igualdade (2.12), com $\theta = \frac{\pi x}{L}$, obtemos

$$LD_n(x) + \frac{1}{2} = \frac{\text{sen} \left(\frac{\pi x}{2L} \right) + \text{sen} \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L} \right)}{2 \text{sen} \frac{\pi x}{2L}},$$

para cada $x \neq 0, \pm 2L, \pm 4L, \dots$

Portanto,

$$LD_n(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{x\pi}{2L}\right)} + \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}\right)}{2 \operatorname{sen}\frac{x\pi}{2L}}$$

donde segue que

$$D_n(x) = \frac{1}{2L} \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2L}},$$

para cada $x \neq 0, \pm 2L, \pm 4L, \dots$

Voltando a equação (2.8), utilizando a mudança de variáveis $y = x - t$, obtemos

$$S_n(x) = \int_{-L}^L D_n(t) f(x - t) dt. \quad (2.13)$$

Usando o fato de que $D_n(t)$ é uma função par, podemos reescrever a integral de (2.13) como

$$\int_{-L}^0 D_n(t) f(x - t) dt + \int_0^L D_n(t) f(x - t) dt = \int_0^L D_n(t) [f(x + t) + f(x - t)] dt.$$

Logo

$$s_n(x) = \int_0^L D_n(t) [f(x + t) + f(x - t)] dt. \quad (2.14)$$

Sendo assim, a expressão da estimativa $e_n(x)$ fica escrita na seguinte forma

$$e_n(x) = \int_0^L D_n(t) g(x, t) dt, \quad (2.15)$$

sendo a função

$$g(x, t) = [f(x + t) - f(x + 0)] + [f(x - t) - f(x - 0)].$$

O próximo resultado apresenta uma condição suficiente para que dado $x \in [-L, L]$ a estimativa $e_n(x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Teorema 4 (Teste de Dini). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função $2L$ periódica \mathcal{L}^1 em $[-L, L]$. Fixado x em $[-L, L]$, suponha que existam os limites laterais $f(x+0)$ e $f(x-0)$ e que também existe $\eta > 0$, tal que*

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x,t)}{t} \right| dt < \infty. \quad (2.16)$$

Então $e_n(x) \rightarrow 0$, ou seja, $s_n(x) \rightarrow \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$, quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. Inicialmente, vamos decompor $e_n(x) = \int_0^L D_n(t)g(x,t)dt$ em duas partes:

$$e_n(x) = \int_0^\delta tD_n(t)\frac{g(x,t)}{t} + \int_\delta^L \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x,t)}{2L \operatorname{sen}(\frac{\pi t}{2L})} dt.$$

Na primeira integral no lado direito da igualdade acima, tomaremos $\delta > 0$ convenientemente pequeno e usaremos a hipótese $\int_0^\eta \left| \frac{g(x,t)}{t} \right| dt < \infty$. Na segunda integral, usaremos o Lema de Riemann-Lebesgue.

Segue de (2.9) que

$$|tD_n(t)| \leq \frac{t}{2L \operatorname{sen}(\frac{\pi t}{2L})}, \quad \text{para } t \neq 0, 2L, 4L, \dots,$$

para todo n .

Como a função no lado direito da desigualdade acima é contínua e crescente em $[0, L]$, obtemos a estimativa

$$|tD_n(t)| \leq \frac{1}{2}, \quad \text{para } t \in [0, L] \text{ e para todo } n.$$

Então, como $\int_0^\eta \left| \frac{g(x,t)}{t} \right| dt < \infty$, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta < \min(L, \eta)$ de forma que

$$\left| \int_0^\delta tD_n(t)\frac{g(x,t)}{t} dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^\delta \left| \frac{g(x,t)}{t} \right| dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Agora com respeito a segunda integral, a ideia será aplicar o Lema de Riemann-Lebesgue. Note que a função

$$h(t) = \frac{g(x,t)}{2L \operatorname{sen}(\pi t)}, \quad t \in [\delta, L],$$

é integrável, pois o denominador de $h(t)$ é contínua e nunca se anula em $[\delta, L]$ e $g(x,t)$ é integrável.

Logo, para n suficientemente grande, segue pelo Lema de Riemann-Lebesgue que

$$\left| \int_{\delta}^L \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \left(\frac{\pi t}{2L} \right)} dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} |e_n(x)| &= \left| \int_0^{\delta} t D_n(t) \frac{g(x, t)}{t} dt + \int_{\delta}^L \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^{\delta} t D_n(t) \frac{g(x, t)}{t} dt \right| + \left| \int_{\delta}^L \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \left(\frac{\pi t}{2L} \right)} dt \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Segue que $e_n(x) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

□

2.3.1 Demonstração do Teorema de Fourier

Vamos usar agora o teste de Dini para provar o Teorema de Fourier (2). Como por hipótese a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é seccionalmente diferenciável então existem as derivadas laterais

$$f'_+(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t}$$

e

$$f'_-(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x+t) - f(x-0)}{t} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(x-0) - f(x-s)}{s}, \quad (t = -s).$$

Portanto, existem constantes $\eta > 0$ e $C > 0$ tais que

$$\left| \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \right| \leq C \quad \text{e} \quad \left| \frac{f(x-0) - f(x-t)}{t} \right| \leq C,$$

para todo $t \in (0, \eta]$.

Dessa forma, temos que

$$\int_0^{\eta} \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt = 2C \int_0^{\eta} dt = 2\eta C < \infty,$$

ou seja, vale a condição (2.16) do Teste de Dini. Segue então que

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

2.4 Convergência uniforme da série de Fourier

Nessa seção veremos condições que garantem a convergência uniforme das séries de Fourier.

Teorema 5 (Primeiro teorema sobre convergência uniforme da série de Fourier). *Se f é uma função periódica de período $2L$, contínua e com derivada primeira de quadrado integrável, então a série de Fourier de f converge uniformemente para f .*

Demonstração. Para a demonstração desse teorema usaremos o teste M de Weierstrass (veja a Proposição 1). Para isso, uma vez que

$$\left| a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right| \leq |a_n|, \quad \left| b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right| \leq |b_n|,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, então

$$\frac{1}{2}|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right| \leq \frac{1}{2}|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|).$$

Portanto, basta verificar que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$, é convergente.

Começamos estabelecendo certas relações entre os coeficientes de Fourier de f e de f' .

Usando integração por partes temos

$$\begin{aligned} La_n = \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx &= \frac{L}{n\pi} f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \Big|_{-L}^L - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \\ &= -\frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} Lb_n = \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx &= -\frac{L}{n\pi} f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \Big|_{-L}^L + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx. \end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que

$$a_n = -\frac{L}{\pi n} b'_n \quad \text{e} \quad b_n = \frac{L}{\pi n} a'_n, \quad (2.17)$$

onde a'_n e b'_n denotam os coeficientes de Fourier da derivada f' . Dessa forma, escrevemos

$$M_n \doteq |a_n| + |b_n| = \frac{L}{n\pi} (|b'_n| + |a'_n|) = \frac{L}{\pi} \left[\frac{1}{n} (|b'_n| + |a'_n|) \right].$$

Agora, para cada $k \in \mathbb{N}$, segue da igualdade acima e da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k M_n &= \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} (|a'_n| + |b'_n|) \\ &\leq \frac{L}{\pi} \left(\sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^k (|a'_n| + |b'_n|)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{L}{\pi} \left(\sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^k 2(|a'_n|^2 + |b'_n|^2) \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{\sqrt{2}L}{\pi} \left(\sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^k (|a'_n|^2 + |b'_n|^2) \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{\sqrt{2}L}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (|a'_n|^2 + |b'_n|^2) \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Sabemos que a primeira série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ que aparece na desigualdade (2.18) converge, logo resta provar que a segunda série também converge.

De fato, por hipótese, a derivada f' é uma função de quadrado integrável, então basta usar a desigualdade de Bessel

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a'_n|^2 + |b'_n|^2 \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f'(x)|^2 dx < \infty,$$

a qual pode ser encontrada na Seção 3.5 de [1]. Como a desigualdade (2.18) é válida para todo $k \in \mathbb{N}$, fazendo $k \rightarrow +\infty$, teremos que a série numérica $\sum_{n=1}^k M_n$ converge, o que finaliza a demonstração do teorema. \square

Antes de enunciarmos o próximo teorema sobre convergência uniforme da série de Fourier,

temos o seguinte resultado auxiliar.

Lema 2. *Seja ψ a função periódica de período $2L$, definida por:*

$$\psi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{L}\right), & \text{para } -L \leq x < 0 \\ 0, & \text{para } x = 0 \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right), & \text{para } 0 < x \leq L. \end{cases}$$

Então, a série de Fourier de ψ converge uniformemente para ψ em qualquer intervalo que não contenha pontos da forma $2Ln$, para n inteiro.

Demonstração. Inicialmente iremos calcular a série de Fourier da função ψ definida no enunciado do lema. Como já discutido nos capítulos anteriores, sabemos que:

$$\psi(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right),$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \psi(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 0,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \psi(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1.$$

Note que a função ψ é ímpar o que implica que $a_n = 0$. Agora, vamos calcular os coeficientes b_n .

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^0 -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{L}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Fazendo a mudança de variável $y = -x$ na primeira integral que aparece no lado direito da igualdade anterior e usando integração por partes, obtemos:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{1}{L} \left[-\frac{L}{n\pi} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L - \frac{1}{n\pi} \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right] \\ &= \frac{1}{n\pi}. \end{aligned}$$

Logo, a série de Fourier da função ψ é dada por:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (2.19)$$

Para concluir a demonstração do lema, basta mostrar que para qualquer $\delta > 0$, a série acima converge uniformemente para $0 < \delta \leq |x| \leq L$. Para isso, basta mostrar que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}, \quad (2.20)$$

converge uniformemente, para $\theta \in [\varepsilon, \pi]$, com $0 < \varepsilon < \pi$ arbitrário. De fato, note que a série que aparece em (2.19) é a parte imaginária da série (2.20), no caso em que $\theta = \pi x/L$.

Considere a soma parcial

$$E_n(\theta) = \sum_{k=1}^n e^{ik\theta}. \quad (2.21)$$

Dessa forma, temos

$$\sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} [E_k(\theta) - E_{k-1}(\theta)], \quad (2.22)$$

e fazendo a mudança de índice $k = j + 1$ temos

$$\sum_{k=m}^n \frac{1}{k} E_{k-1}(\theta) = \sum_{j=m-1}^{n-1} \frac{1}{j+1} E_j(\theta).$$

Obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} &= \sum_{k=m}^n \frac{E_k(\theta)}{k} - \sum_{j=m-1}^{n-1} \frac{E_j(\theta)}{j+1} \\ &= \sum_{k=m}^n \frac{E_k(\theta)}{k} - \left(\frac{E_{m-1}(\theta)}{m} + \sum_{k=m}^n \frac{E_k(\theta)}{k+1} - \frac{E_n(\theta)}{n+1} \right) \\ &= \sum_{k=m}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) E_k(\theta) + \frac{1}{n+1} E_n(\theta) - \frac{1}{m} E_{m-1}(\theta). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Por outro lado, podemos reescrever a soma geométrica $E_n(\theta)$, para $0 < \theta < 2\pi$, como

$$E_n(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}},$$

e assim

$$|E_n(\theta)| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|} = \frac{2}{|e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}|} = \frac{1}{\text{sen}(\theta/2)}.$$

Logo, de (2.23)

$$\left| \sum_{k=n}^m \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \frac{1}{\text{sen}(\theta/2)} \left[\sum_{k=m}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m} \right] = \frac{2}{m \text{sen}(\theta/2)},$$

e para $0 < \varepsilon \leq \theta \leq \pi$, temos que

$$\left| \sum_{k=n}^m \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \frac{2}{m \text{sen}(\theta/2)} \leq \frac{2}{m \text{sen}(\varepsilon/2)},$$

e pelo critério de Cauchy, temos a convergência uniforme de (2.20) o que conclui a demonstração do lema. \square

Teorema 6 (Segundo teorema sobre convergência uniforme da série de Fourier). *Seja f uma função periódica de período $2L$, seccionalmente contínua e tal que a derivada primeira (definida apenas onde f é contínua) é de quadrado integrável. Então, a série de Fourier de f converge uniformemente para f em todo intervalo fechado que não contém pontos de descontinuidade de f .*

Demonstração. Suponha que f seja descontínua nos pontos x_1, x_2, \dots, x_n do intervalo $[-L, L]$ e sejam $w_j = f(x_j + 0) - f(x_j - 0)$, para $j \in \{1, \dots, n\}$ os saltos de f . Logo, considerando a função ψ do lema anterior, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ a função $w_j \psi(x - x_j)$ é descontínua em pontos da forma $x_j \pm 2Lk$, para $k = 0, 1, 2, \dots$, e o salto nesses pontos é w_j .

Afirmamos inicialmente que a função $f(x) - w_1 \psi(x - x_1)$ é contínua nos pontos da forma $x = x_1 \pm 2Lk$, para $k = 0, 1, 2, \dots$, pois os limites laterais

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_1^+} (f(x) - w_1 \psi(x - x_1)) &= f(x_1 + 0) - \left(f(x_1 + 0) - f(x_1 - 0) \right) \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(f(x_1 + 0) + f(x_1 - 0) \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_1^-} (f(x) - w_1 \psi(x - x_1)) &= f(x_1 - 0) - \left(f(x_1 + 0) - f(x_1 - 0) \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(f(x_1 + 0) + f(x_1 - 0) \right), \end{aligned}$$

existem e são iguais. Além disso, $f(x) - w_1\psi(x - x_1)$ também é contínua em todos os pontos onde f era contínua. Concluimos assim que $f(x) - w_1\psi(x - x_1)$ é descontínua apenas nos pontos $x = x_2 \pm 2Lk, x_3 \pm 2Ln, \dots, x_n \pm 2Lk$, para $k = 0, 1, 2, \dots$

Analogamente aos argumentos anteriores, a função

$$\left(f(x) - w_1\psi(x - x_1)\right) - w_2\psi(x - x_2),$$

é descontínua apenas nos pontos $x = x_3 \pm 2Lk, x_4 \pm 2Lk, \dots, x_n \pm 2Lk$, para $k = 0, 1, 2, \dots$. De forma geral, em cada etapa subtraímos $w_{k+1}\psi(x - x_{k+1})$ da função $f(x) - \sum_{j=1}^k w_j\psi(x - x_j)$, obtida na etapa anterior. Concluimos assim que a função

$$g(x) = f(x) - \sum_{j=1}^n w_j\psi(x - x_j),$$

será contínua em \mathbb{R} . Como g é contínua e g' é de quadrado integrável, então pelo Teorema 5 temos que a série de Fourier de g converge uniformemente para g . Além disso, temos pelo lema anterior temos que a série de Fourier de $\sum_{j=1}^n w_j\psi(x - x_j)$ converge uniformemente em qualquer intervalo que não contenha pontos da forma $x_j \pm 2Lk$, para $j \in \{1, \dots, n\}$ e $k = 0, 1, 2, \dots$. Note que esses pontos são exatamente onde a função $2L$ periódica f não é contínua e como

$$f(x) = g(x) + \sum_{j=1}^n w_j\psi(x - x_j),$$

segue a conclusão do teorema.

□

Capítulo 3

Equação do calor numa barra finita

3.1 Condução do calor em uma barra finita

Considere uma barra finita de comprimento L , cuja secção transversal tem área A , feita de um material condutor de calor homogêneo. Suponha que a superfície lateral da barra esteja isolada termicamente de modo a não permitir, através dela, transferência de calor com o meio ambiente. No entanto, podemos permitir que transferências ocorram através das extremidades dessa barra. Veja a figura a seguir.

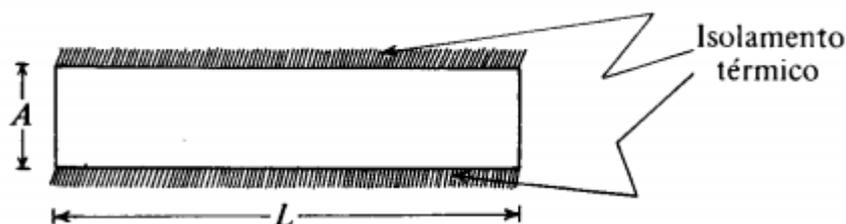


Figura 3.1: Barra finita isolada termicamente

A uniformidade do material e o isolamento térmico lateral implicam que o fluxo de calor ocorre somente na direção longitudinal, portanto este é um problema de condução de calor em apenas uma dimensão. Utilizaremos a seguinte lei para estudar a condução do calor nessa barra.

Lei de Resfriamento de Fourier: Considere duas placas P_1 e P_2 de áreas iguais a A , mantidas constantemente às temperaturas T_1 e T_2 , respectivamente. Se colocadas paralelamente a uma distância d uma da outra, haverá passagem de calor da placa mais quente para a mais fria, e a

quantidade de calor, por unidade de tempo, transferida de uma placa para outra é dada por

$$Q = \frac{kA|T_2 - T_1|}{d}, \quad (3.1)$$

onde k é a condutibilidade térmica do material entre as placas P_1 e P_2 .

Imaginemos que a barra esteja colocada sobre o eixo x . Note que a temperatura independe das coordenadas espaciais y e z . Assim, representamos por $u(x, t)$ a temperatura de um ponto de abscissa x no instante de tempo t .

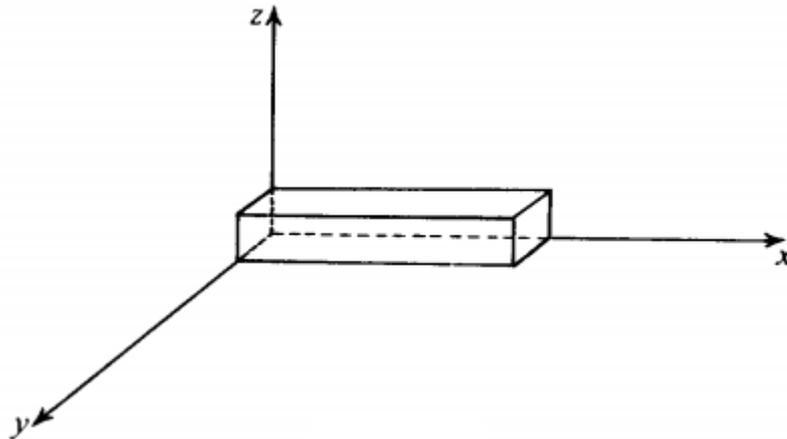


Figura 3.2: Barra finita no sistema cartesiano

Tomemos duas secções transversais da barra localizadas em x e $x + d$. Para aplicar a lei de resfriamento de Fourier, consideramos essas secções como as placas P_1 e P_2 descritas acima. A dificuldade nesse caso é que as temperaturas nessas secções variam com o tempo e, portanto, não são constantes como requer a Lei de resfriamento de Fourier. Para superar essa dificuldade vamos introduzir a grandeza *fluxo de calor* através de uma secção x , num instante de tempo t , o qual é motivado pelo seguinte fato: fixado um tempo t e fazendo $T_1 = u(x, t)$ e $T_2 = u(x + d, t)$ em (3.1), obtemos a seguinte quantidade de calor

$$kA \left| \frac{u(x + d, t) - u(x, t)}{d} \right|.$$

Agora, fazendo d tender a zero na igualdade acima chegamos em $kA|u_x(x, t)|$.

Motivados pela discussão acima, definimos o *fluxo de calor* na direção positiva do eixo x como

uma função $q(x, t)$ dada por

$$q(x, t) = -kAu_x(x, t).$$

O sinal negativo que aparece nessa equação se deve ao fato de que se a temperatura u crescesse com x , então u_x seria positivo; mas nesse caso o calor fluiria para esquerda, assim d deveria ser negativo. Por outro lado, se a temperatura u decrescesse com x , então u_x seria negativo, porém como o calor fluiria para a direita, o valor de q deveria ser negativo.

Fixemos agora um elemento da barra entre x_0 e $x_0 + \delta$, e vejamos qual é a quantidade de calor (q) que aí entra, no período de tempo entre t_0 e $t_0 + \tau$. Usando o fluxo de calor $q(x, t)$ podemos ver que

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0, t)dt - \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0 + \delta, t)dt,$$

ou seja,

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} k[u_x(x_0 + \delta, t) - u_x(x_0, t)]Adt. \quad (3.2)$$

Por outro lado, sabemos que o calor específico c de uma substância é a quantidade de calor necessária para elevar em $1C$ a temperatura de $1g$ de substância. Portanto, q pode ser também escrito como

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} cu_t(x, t)dt\rho Adx, \quad (3.3)$$

onde ρ é a densidade da substância.

Usando o Teorema fundamental do cálculo na equação (3.2) e a seguir igualando o valor de q assim obtido com o valor de q dado em (3.3), obtemos:

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} ku_{xx}(x, t)dxdt = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} cpu(x, t)dxdt.$$

Como a expressão é válida para todo $t_0 > 0$, todo $0 < x_0 < L$ e todos $\tau > 0$ e $\delta > 0$,

concluimos que

$$ku_{xx}(x, t) = c\rho u(x, t),$$

ou seja,

$$u_t = ku_{xx}. \tag{3.4}$$

onde k é a *difusibilidade térmica* do material envolvido no modelo. A equação (3.4) é chamada de *equação do calor* em uma barra isolada termicamente composta por um material homogêneo. A função $u(x, t)$ representa a distribuição de temperatura nessa barra e deve satisfazer a equação do calor (3.4).

É natural esperar que a distribuição de temperatura da barra ao longo do tempo dependa da distribuição de temperatura inicial, a qual chamaremos de condição inicial e matematicamente denotaremos por

$$u(x, 0) = f(x).$$

Em outras palavras, a função $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ descreve a temperatura na barra no instante $t = 0$.

3.1.1 Condições de fronteira

Além da condição inicial, para estudar esse problema de condução de calor, precisamos impor certas condições nas extremidades da barra que chamaremos de condições de fronteira. Vejamos algumas delas.

Tipo (I) Suponhamos que, por algum processo, as extremidades da barra sejam mantidas a temperaturas conhecidas.

Por exemplo: (1) Temperatura constante em cada extremidade, $u(0, t) = T_1$ e $u(L, t) = T_2$, onde T_1 e T_2 são temperaturas dadas.

(2) Um caso mais complexo seria aquele em que se conhece a variação da temperatura em uma extremidade (ou em ambas), isto é, $u(0, t) = h_0(t)$ e $u(L, t) = h_1(t)$, onde $h_0(t)$ e $h_1(t)$, para $t \geq 0$ são as temperaturas conhecidas em cada uma das extremidades.

Tipo (II) Suponhamos que as extremidades estejam isoladas termicamente. Isso quer dizer que os fluxos de calor através de $x = 0$ e $x = L$ são nulos. Da expressão $q(x, t) = -kAu_x(x, t)$ para o fluxo de calor, vemos que as condições laterais nesse caso têm forma $u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$.

Tipo (III) Suponhamos que o meio ambiente tinha temperatura u_0 e que haja transferência de calor, entre a barra e o meio ambiente, regidas pela lei

$$\begin{aligned}ku_x(0, t) &= eu(0, t) - u_0 \\ -ku_x(L, t) &= eu(L, t) - u_0,\end{aligned}$$

onde e é a constante de emissividade, característica do par constituído pelo material da barra e pelo meio ambiente.

Tipo (IV) Uma combinação de duas quaisquer condições acima, como por exemplo, $u(0, t) = 0$ e $u_x(L, t) = 0$.

3.2 Método de separação de variáveis

Vamos representar por \mathcal{R} a região do plano (x, t) determinada por $0 < x < L$, $t > 0$ e por $\overline{\mathcal{R}}$ a união de \mathcal{R} com sua fronteira que é formada pelas semi-retas $x = 0, t > 0$ e $x = L, t > 0$ e pelo segmento $0 \leq x \leq L$ e $t = 0$. Um problema da condução do calor consiste em determinar uma função real $u(x, t)$, definida em $\overline{\mathcal{R}}$, que satisfaça a equação do calor

$$u_t = Ku_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R}, \tag{3.5}$$

e que valha a condição inicial

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \tag{3.6}$$

onde $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada e, finalmente, que satisfaça as condições de fronteira.

Vamos começar com o caso em que as temperaturas nas extremidades da barra são mantidas constantemente zero, isto é,

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0. \tag{3.7}$$

O problema dado por (3.5), (3.6) e (3.7) é chamado de *Problema de Valores Inicial e de Fronteira*, abreviado por PVIF.

O *Método de Fourier* nos auxiliará a encontrar uma solução para esse PVIF. O método consiste em, primeiramente, usar separação de variáveis e procurar soluções $u(x, t)$ do problema

na forma

$$u(x, t) = F(x)G(t). \quad (3.8)$$

A partir desse estudo vamos descobrir uma função (ou funções) que constitua uma candidata razoável à solução do problema. Uma vez identificada, tentaremos provar rigorosamente que ela é de fato uma solução do problema.

Substituindo (3.8) na equação do calor (3.5) obtemos:

$$F(x)G'(t) = KF''(x)G(t) \quad (3.9)$$

ou equivalentemente

$$\frac{1}{K} \frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}. \quad (3.10)$$

Observe que de (3.9) para (3.10), devemos admitir que as funções $G(t)$ e $F(x)$ nunca se anulam nos intervalos abertos correspondentes a x e a t , ou seja, $0 < x < L$ e $t > 0$.

Agora, observe que o lado esquerdo de (3.10) é função apenas da variável t , enquanto que o lado direito é uma função que depende apenas de x . Logo, tanto o lado esquerdo quanto o direito nessa equação, que são iguais, não podem depender de x e t . Isso implica que

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \sigma \quad \text{e} \quad \frac{1}{K} \frac{G'(t)}{G(t)} = \sigma, \quad (3.11)$$

onde σ é um parâmetro constante independente de t e de x .

A primeira equação em (3.11) nos diz que F deve satisfazer à equação diferencial ordinária

$$F''(x) - \sigma F(x) = 0, \quad \text{para } 0 < x < L, \quad (3.12)$$

e como $u(0, t) = u(L, t) = 0$, então a função $F(x)$ deve satisfazer também as condições

$$F(0) = F(L) = 0, \quad (3.13)$$

pois, como $u(0, t) = F(0)G(t) = 0$ para todo $t > 0$, segue-se que, se $F(0) \neq 0$, então $G(t) \equiv 0$ e, portanto, $u \equiv 0$. Embora $u \equiv 0$ seja uma solução da equação do calor (3.5) e satisfaça às condições de fronteira (3.7), essa função não tem chance de satisfazer a condição inicial $u(x, 0) =$

$f(x)$, a menos que $f \equiv 0$.

Agora procedemos no sentido de ver quais os valores de σ que conduzem as soluções $F(x)$ do problema dado em (3.12) - (3.13). É claro que estamos interessados apenas nas soluções F não identicamente nulas, de outro modo, obteríamos $u \equiv 0$, o que não nos interessa. Há três possibilidades para σ , conforme segue.

(i) Se $\sigma > 0$, a solução geral de (3.12) é da forma

$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x}.$$

Portanto, se tal F satisfizer (3.13), o par de constantes (c_1, c_2) deverá ser solução do sistema

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 e^{\sqrt{\sigma}L} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}L} &= 0. \end{aligned}$$

Mas a única solução desse sistema é a trivial $c_1 = c_2 = 0$ e isso implica $F \equiv 0$, o que não nos interessa.

(ii) Se $\sigma = 0$, a solução geral de (3.12) é da forma

$$F(x) = c_1 x + c_2,$$

e para satisfazer as condições (3.13) devemos ter

$$c_2 = 0 \quad \text{e} \quad c_1 L + c_2 = 0,$$

o que implica novamente $c_1 = c_2 = 0$ e portanto $F \equiv 0$.

(iii) Se $\sigma < 0$, escrevemos $\sigma = -\lambda^2$, com $\lambda > 0$ logo a solução geral de (3.12) é da forma

$$F(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x.$$

Para que esse função F satisfaça (3.13) devemos ter

$$c_1 = 0 \quad \text{e} \quad c_2 \sin \lambda L = 0.$$

Como não queremos $c_2 = 0$ devemos ter $\sin \lambda L = 0$, o que implica $\lambda L = n\pi$, onde n é um número

inteiro não nulo e positivo pois L e λ são não nulos. Os valores de $-\sigma = \lambda^2$ são dados por

$$\lambda_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad (3.14)$$

e são chamados de valores próprios ou *autovalores do problema* em (3.12) e (3.13) e as funções

$$F_n(x) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (3.15)$$

são chamadas de funções próprias ou *autofunções do problema* dado em (3.12) e (3.13). Note que como mencionado anteriormente $\lambda > 0$, pois caso contrário isso conduziria apenas uma autofunção diferindo apenas no sinal de uma outra obtida para um λ_n positivo.

Vejamos agora a segunda equação diferencial ordinária em (3.11). Sua solução geral é

$$G(t) = ce^{\sigma kt} \quad (3.16)$$

Logo, para cada $n = 1, 2, 3, \dots$, temos uma função

$$u_n(x, t) = e^{-n^2\pi^2 kt/L^2} \text{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad (3.17)$$

a qual satisfaz a equação (3.5) e as condições de fronteira (3.7).

Essas funções u_n chegaram quase a resolver o problema dado em (3.5), (3.6) e (3.7). A dificuldade está em que, sendo

$$u_n(x, 0) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

então a função $u_n(x, t)$ só seria solução de (3.5), (3.6) e (3.7) se a função dada $f(x)$ tivesse exatamente a forma $f(x) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L}$, a qual é uma função que depende de n .

Por exemplo, se considerarmos o problema (3.5), (3.6) e (3.7) com $f(x) = \text{sen} \frac{5\pi x}{L}$, então a função

$$u_5(x, t) = e^{-25\pi^2 kt/L^2} \text{sen} \frac{5\pi x}{L}$$

é uma solução.

Supondo agora que a condição inicial seja $f(x) = 3 \text{sen} \frac{5\pi x}{L}$, então algo nos diz que a solução

do problema (3.5), (3.6) e (3.7), nesse caso, deve ser

$$u(x, t) = 3e^{-25\pi^2 kt/L} \operatorname{sen} \frac{5\pi x}{L}. \quad (3.18)$$

De fato isso ocorre pois tal função satisfaz a equação (3.5) e fazendo $x = 0$ e $x = L$, obtemos as condições de fronteira (3.7). Finalmente, fazendo $t = 0$, verifica-se a condição (3.6).

Pensemos agora o caso em que a condição inicial seja dada por uma combinação de senos, ou seja, suponha por exemplo que a condição inicial seja

$$f(x) = 4 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} + 3 \operatorname{sen} \frac{5\pi x}{L}.$$

Intuitivamente, somos levados a pensar que, nesse caso, a solução do problema dado em (3.5)-(3.7) deveria ser

$$u(x, t) = 4e^{-4\pi^2 kt/L^2} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} + 3e^{-25\pi^2 kt/L^2} \operatorname{sen} \frac{5\pi x}{L}. \quad (3.19)$$

Analogamente, como discutido anteriormente, pode-se verificar que todas as condições do problema são satisfeitas para a função (3.19).

O fato que (3.18) e (3.19) satisfazem a equação (3.5) nos indica que o seguinte fato é verdadeiro: “se $u(x, t)$ e $v(x, t)$ forem soluções da equação (3.5), então qualquer função da forma

$$au(x, t) + bv(x, t),$$

com a e b constantes, será também uma solução dessa mesma equação”.

Esse fato ocorre uma vez que (3.5) é uma equação linear. Nesse caso, uma combinação linear de duas soluções é também uma solução. Esse é o chamado *princípio da superposição*, o qual vale de forma geral para combinações lineares finitas de quaisquer soluções da equação (3.5).

Portanto, qualquer expressão da forma

$$\sum_{n=1}^N c_n u_n(x, t),$$

será também uma solução dessa mesma equação.

Portanto, para cada $N > 1$ temos que uma solução de (3.5), (3.6) e (3.7) será

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n e^{-n^2 \pi^2 kt/L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Uma questão natural que surge é: e se f não tiver a forma simples como nos exemplos anteriores? Aí vem a motivação de termos estudado nos capítulos anteriores as séries de Fourier. Suponhamos então que a função dada $f(x)$ possa ser expressa por sua série de Fourier da seguinte forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.20)$$

Logo, o candidato para ser uma solução do problema dado em (3.5), (3.6) e (3.7) será

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 kt/L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.21)$$

3.3 Barras com extremidades a 0^{a} C

O objetivo central desta seção é demonstrarmos que a candidata à solução que encontramos na seção anterior é de fato uma solução do problema da condução do calor em uma barra finita com extremidades mantidas a temperatura zero.

Matematicamente, o problema consiste em determinar uma função $u(x, t)$, definida para $t \geq 0$ e $0 \leq x \leq L$ que satisfaça o PVIF a seguir

$$\begin{aligned} u_t &= K u_{xx}, & t > 0, & \quad 0 < x < L, \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq L, \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde a constante K e a função f são dadas.

Em outras palavras, vamos mostrar formalmente que a série (3.21), a qual é uma candidata a solução desse PVIF, é de fato uma solução para esse problema num sentido adequado que descreveremos mais adiante.

Note que (3.21) satisfaz a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$ em (3.22) desde que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad (3.23)$$

e nesse caso, os coeficientes c_n em (3.21) devem ser os coeficientes de Fourier da função $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ estendida de forma ímpar no intervalo $[-L, L]$ e periódica de período $2L$ quando considerada em \mathbb{R} . Assim,

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1. \quad (3.24)$$

Note que para ocorrer a igualdade (3.23) em cada ponto $x \in [0, L]$ basta considerarmos f contínua e f' seccionalmente contínua, pelo Teorema de Fourier 2.

Definição 11. *Sejam $\mathcal{R} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < L \text{ e } t > 0\}$ e $\overline{\mathcal{R}} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq L \text{ e } t \geq 0\}$. Uma função $u : \overline{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução do PVIF (3.22) se*

- u é contínua em $\overline{\mathcal{R}}$;
- existem as derivadas parciais u_t e u_{xx} em \mathcal{R} ;
- u satisfaz às três igualdades em (3.22).

Observação: A condição u ser contínua em $\overline{\mathcal{R}}$ evita que tenhamos soluções $u(x, t)$ que não possuem relação entre a condição inicial e o valor de $u(x, t)$ para $t > 0$. Por exemplo, seja

$$u(x, t) = \begin{cases} f(x), & t = 0 \text{ e } 0 \leq x \leq L \\ 0, & t > 0 \text{ e } (x = 0 \text{ ou } x = L) \\ Cx, & t > 0 \text{ e } 0 < x < L. \end{cases}$$

onde C é constante. Então, $u(x, t)$ satisfaz as três igualdades do PVIF em (3.22) embora não seja uma solução adequada dependendo do valor de $f(x)$, pois não existe uma relação entre a condição inicial e os valores de $u(x, t)$ para $t > 0$.

Para que a função $u(x, t)$ dada em (3.21) seja uma solução do PVIF (3.22), no sentido da Definição (11), precisamos considerar boas propriedades de regularidade para a função f , de modo que ao menos a igualdade (3.23) ocorra pontualmente. Antes disso, vamos provar que $u(x, t)$ dado em (3.21) é solução do PVIF (3.22) num sentido mais fraco, podendo considerar funções f mais gerais.

Teorema 7. Seja $\widehat{\mathcal{R}} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq L \text{ e } t > 0\}$. Se f é uma função de quadrado integrável em $[0, L]$, então a função $u : \widehat{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por (3.21) é contínua em $\widehat{\mathcal{R}}$ e é solução do problema

$$\begin{aligned} u_t &= Ku_{xx}, \quad 0 < x < L \text{ e } t > 0 \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad t > 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t) \varphi(x) dx &= \int_0^L f(x) \varphi(x) dx, \end{aligned} \quad (3.25)$$

para toda função $\varphi : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ seccionalmente contínua.

Demonstração. Dividiremos essa demonstração em 3 partes. *1ª parte:* Vejamos que $u : \widehat{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 kt / L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad (3.26)$$

é uma função contínua, sendo c_n os coeficientes de Fourier de f .

Para isso vamos mostrar que a série anterior converge uniformemente em cada sub-retângulo de $\widehat{\mathcal{R}}$ da forma: $\overline{\mathcal{R}}_{12} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x_1 \leq x \leq x_2 \leq L \text{ e } 0 < t_1 \leq t \leq t_2 < \infty\}$. Assim, teremos que a série (3.26) será uma função contínua em $\overline{\mathcal{R}}_{12}$ uma vez que as funções do termo geral $c_n e^{-n^2 \pi^2 kt / L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$ são contínuas para cada $n \geq 1$.

Primeiramente note que existe uma constante $M > 0$ de forma que

$$|c_n| \leq \frac{2}{L} \int_0^L |f(x)| dx = M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, dado $n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\left| c_n e^{-n^2 \pi^2 kt / L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right| \leq M e^{-n^2 \pi^2 kt_1 / L^2}, \quad \forall (x, t) \in \overline{\mathcal{R}}_{12}.$$

Denotando por $\alpha = \frac{\pi^2 kt_1}{L^2}$, basta verificar que série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n^2}$ é convergente, o que segue imediatamente, pois $e^{-\alpha n^2} \leq e^{-\alpha n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e além disso $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n} = \frac{e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} < \infty$ (série geométrica). Portanto, pelo Teste de Weierstrass segue que a série (3.26) converge uniforme em $\overline{\mathcal{R}}_{12}$.

Como o sub-retângulo $\overline{\mathcal{R}}_{12}$ é arbitrário, concluímos que a função $u : \widehat{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por (3.26) é contínua.

2ª parte: Obviamente temos

$$u(0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 k^2 t / L^2} \operatorname{sen} 0 = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 k^2 t / L^2} \operatorname{sen} n\pi = u(L, t),$$

para todo t .

Veamos agora que existem as derivadas parciais u_t e u_{xx} . Além disso, elas satisfazem a equação $u_t = Ku_{xx}$ em \mathcal{R} .

Considere arbitrariamente um sub-retângulo

$$\overline{\mathcal{R}}_{12} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; x_1 \leq x \leq x_2 \text{ e } t_1 \leq t \leq t_2\} \subset \mathcal{R}.$$

Veamos que as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n e^{-n^2 \pi^2 k t / L^2} \cos \frac{n\pi x}{L} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n e^{-n^2 \pi^2 k t / L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (3.27)$$

convergem uniformemente em $\overline{\mathcal{R}}_{12}$.

Uma vez que $|c_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, denotando $\alpha = \frac{\pi^2 k t_1}{L^2}$ teremos

$$\left| n c_n e^{-n^2 \pi^2 k t / L^2} \cos \frac{n\pi x}{L} \right| \leq M n e^{-\alpha n^2}$$

e

$$\left| n^2 c_n e^{-n^2 \pi^2 k t / L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right| \leq M n^2 e^{-\alpha n^2},$$

para todo $(x, t) \in \overline{\mathcal{R}}_{12}$. Por outro lado, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)e^{-\alpha(n+1)^2}}{n e^{-\alpha n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} e^{-2\alpha n - \alpha} = 0,$$

logo, pelo teste da razão, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\alpha n^2}$ é convergente. Analogamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 e^{-\alpha(n+1)^2}}{n^2 e^{-\alpha n^2}} = 0$$

e portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\alpha n^2}$ também é convergente.

Segue pelo Teste de Weierstrass que as séries (3.27) convergem uniformemente em $\overline{\mathcal{R}}_{12}$.

Como $u(x, t)$ dada por (3.26) converge em $\overline{\mathcal{R}}_{12}$ e as séries dadas em (3.27) convergem uniforme-

mente em $\overline{\mathcal{R}}_{12}$, então podemos derivar a série (3.26) termo a termo obtendo

$$u_t(x, t) = -\frac{\pi^2 k}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n e^{-n^2 \pi^2 kt/L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

e

$$u_{xx}(x, t) = -\frac{\pi^2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n e^{-n^2 \pi^2 kt/L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

para todo $(x, t) \in \overline{\mathcal{R}}_{12}$. Como $\overline{\mathcal{R}}_{12} \subset \mathcal{R}$ é arbitrário, segue que $u_t = Ku_{xx}$ em \mathcal{R} .

3ª parte: Vejamos agora a validade da igualdade (3.25).

Dada uma função seccionalmente contínua $\varphi : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, em particular temos que φ é de quadrado integrável. Por outro lado, por hipótese, a função f também é de quadrado integrável, logo $f + \varphi$ é de quadrado integrável. Sejam b_n e d_n , $n \in \mathbb{N}$, os coeficientes de Fourier de φ e $f + \varphi$, respectivamente. Dessa forma, temos $d_n = c_n + b_n$ e segue da Identidade de Parseval que

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x)]^2 dx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{2}{L} \int_0^L [\varphi(x)]^2 dx$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) + \varphi(x)]^2 dx.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^2 + c_n^2 + 2b_n c_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) + \varphi(x)]^2 dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L \left([f(x)]^2 + [\varphi(x)]^2 + 2f(x)\varphi(x) \right) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^2 + c_n^2) + \frac{4}{L} \int_0^L f(x)\varphi(x) dx, \end{aligned}$$

o que implica

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\varphi(x) dx. \quad (3.28)$$

Por outro lado, uma vez que para cada $t > 0$ fixado a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 kt/L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \varphi(x)$$

converge uniforme (em relação à x), então

$$\begin{aligned} \int_0^L u(x, t) \varphi dx &= \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 Kt/L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \varphi(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 Kt/L^2} \int_0^L \varphi(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 Kt/L^2} b_n, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Vejam agora que a série no lado direito da igualdade (3.29) converge uniformemente (em relação à t) quando considerada no intervalo $[0, +\infty)$. De fato, como φ e f são funções de quadrado integrável, então pela Desigualdade de Bessel temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n^2 + c_n^2) \leq \frac{2}{L} \int_0^L |\varphi(x)|^2 dx + \frac{2}{L} \int_0^L |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Além disso, como $|b_n| |c_n| \leq \frac{1}{2}(b_n^2 + c_n^2)$ e

$$|e^{-n^2 \pi^2 Kt/L^2} b_n c_n| \leq |b_n| |c_n| \leq \frac{1}{2}(b_n^2 + c_n^2),$$

segue pelo Teste de Weierstrass que a série no lado direito da igualdade (3.29) converge uniformemente em $[0, +\infty)$. Portanto, essa série define uma função contínua de t em $[0, +\infty)$. Segue que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n e^{-n^2 \pi^2 Kt/L^2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n. \quad (3.30)$$

Combinando (3.28), (3.29) e (3.30) temos a validade de (3.25). \square

Observação 1. Se $\alpha > 0$, então para cada $p \in \mathbb{N}$ a série numérica dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p e^{-\alpha n^2}$$

é convergente. Logo, seguindo ideias análogas as usadas no teorema anterior é possível concluir de forma indutiva que a função u , dada em (3.21), é na verdade de classe C^∞ em \mathcal{R} .

Teorema 8. *Seja $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com $f(0) = f(L) = 0$ e tal que f' é de quadrado integrável em $[0, L]$. Então, a função $u : \overline{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ dada em (3.21) é uma solução do PVIF (3.22), no sentido da Definição 11.*

Demonstração. Primeiramente note que se f é contínua então f é de quadrado integrável em $[0, L]$. Assim, se considerarmos $u(x, t)$ dada por (3.21) e definida em $\widehat{\mathcal{R}}$ temos uma função contínua e também valem as condições de fronteira $u(0, t) = u(L, t) = 0$, para todo $t > 0$, e a igualdade $u_t = Ku_{xx}$ em \mathcal{R} . Resta mostrarmos que $u(x, t)$, dada por (3.21), é uma função contínua para todo $t \geq 0$. Assim, também teremos que

$$u(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = f(x).$$

Note que em $\overline{\mathcal{R}}$ a série (3.21) é limitada pela série $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$. Logo, basta mostrar que essa série numérica convirja e concluiremos que (3.21) converge uniformemente em $\overline{\mathcal{R}}$ usando o Teste de Weierstrass.

Integrando por partes temos

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{L}{n\pi} \int_0^L \left[\frac{2}{L} f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right] \\ &= \frac{L}{n\pi} c'_n, \end{aligned}$$

onde c'_n são os coeficientes de Fourier da derivada f' estendida como uma função par em $[-L, L]$ e $2L$ periódica em \mathbb{R} . Assim,

$$|c_n| = \left| \frac{L}{n\pi} \right| |c'_n| \leq \frac{1}{2} \left(\left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 + (c'_n)^2 \right).$$

Por hipótese, f' é de quadrado integrável, logo pela Desigualdade de Bessel temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c'_n)^2 \leq \frac{1}{2} \int_0^L |f'(x)|^2 dx < \infty.$$

Além disso, como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \leq \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (c'_n)^2 + \frac{L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right] < \infty.$$

□

3.4 Problema do calor com outras condições de fronteira

Nessa seção estudaremos duas situações de PVIF com condições de fronteira diferentes das estudadas na seção anterior. Na primeira delas vamos considerar o caso em que a barra está isolada termicamente nas extremidades, ou seja, sujeitas as condições de Neumann. Na segunda situação vamos considerar a um caso em que a barra está submetida a temperaturas não nulas nas extremidades.

3.4.1 Condições de fronteira de Neumann

O problema matemático é determinar uma função $u(x, t)$, definida em $\overline{\mathcal{R}}$, tal que

$$\begin{aligned} u_t &= K u_{xx}, & \text{em } \mathcal{R}, \\ u_x(0, t) &= u_x(L, t) = 0, & \text{para } t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & \text{para } 0 \leq x \leq L. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Vamos usar a mesma técnica usada anteriormente para obter uma candidata a solução do PVIF (3.31). Novamente usando o Método de Separação de Variáveis, substituímos $u(x, t) = F(x)G(t)$ na equação do calor $u_t = K u_{xx}$, obtendo

$$F(x)G'(t) = KF''(x)G(t),$$

o que equivale a escrever

$$\frac{1}{K} \frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)},$$

admitindo que F e G nunca se anulam nos intervalos correspondentes.

Como já discutido na seção anterior, a equação acima implica que o lado esquerdo e o lado direito deve ser constantes. Assim,

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \sigma \quad \text{e} \quad \frac{1}{K} \frac{G'(t)}{G(t)} = \sigma, \quad (3.32)$$

onde σ é um parâmetro que não depende de x e t . Portanto, podemos escrever

$$G'(t) = \sigma K G(t) \quad t \geq 0 \quad (3.33)$$

e

$$F''(x) - \sigma F(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3.34)$$

onde σ deve ser determinado, de modo que as soluções de (3.34) satisfaçam as seguintes condições

$$F'(0) = F'(L) = 0, \quad (3.35)$$

as quais são obtidas usando as condições de fronteira do PVI (3.31).

Agora precisamos encontrar quais valores de σ conduzem as soluções $F(x)$ do problema de valor de contorno dado por (3.34) e (3.35). Estamos interessados apenas nas soluções F não identicamente nulas. Analogamente à seção anterior, temos três possibilidades para o valor de σ .

(i) Se $\sigma > 0$, então a solução geral da equação (3.34) é da forma $F(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x}$.

Logo

$$F'(x) = \sqrt{\sigma} c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} - \sqrt{\sigma} c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x}.$$

Portanto, para que F satisfaça as condições (3.35), o par de constantes (c_1, c_2) deverá ser solução do sistema

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma} c_1 - \sqrt{\sigma} c_2 &= 0 \\ \sqrt{\sigma} c_1 e^{\sqrt{\sigma}L} - \sqrt{\sigma} c_2 e^{-\sqrt{\sigma}L} &= 0. \end{aligned}$$

Note que nesse caso a única solução é a trivial $c_1 = c_2 = 0$, o que implica $F \equiv 0$, logo esse caso não nos interessa.

(ii) Se $\sigma = 0$, a solução geral de (3.34) é da forma $F(x) = c_1 + c_2x$, portanto

$$F'(x) = c_2, \quad (3.36)$$

logo para satisfazer (3.35) devemos ter $c_2L = 0$, o que implica $c_2 = 0$. Nesse caso a constante c_1 pode ser escolhida de forma arbitrária. Além disso, uma solução G em (3.33) é também dada por uma constante. Portanto, nesse caso temos que $u(x, t) = C$, sendo C uma constante, será uma solução da equação do calor em (3.31) que satisfaz as condições de fronteira.

(iii) Se $\sigma < 0$, escrevendo $-\sigma = \lambda^2$, teremos que a solução geral de (3.34) é da forma

$$F(x) = c_1 \operatorname{sen} \lambda x + c_2 \operatorname{cos} \lambda x,$$

logo

$$F'(x) = \lambda c_1 \operatorname{cos} \lambda x - \lambda c_2 \operatorname{sen} \lambda x. \quad (3.37)$$

Agora, para que F satisfaça as condições (3.35), devemos ter

$$\lambda c_1 = 0$$

$$\lambda c_1 \operatorname{cos} \lambda L - \lambda c_2 \operatorname{sen} \lambda L = 0.$$

Assim, $c_1 = 0$ e como não queremos $c_2 = 0$, devemos ter $\operatorname{sen} \lambda L = 0$ o que implica $\lambda L = n\pi$, onde n é um número inteiro não nulo. Nesse caso, os valores de $-\sigma = \lambda^2$, dados por

$$\lambda_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad (3.38)$$

são os autovalores do problema dado em (3.33), (3.34) e as autofunções associadas são

$$F_n(x) = \operatorname{cos} \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.39)$$

Note que a função acima é par, logo basta considerarmos $n \in \mathbb{N}$. Logo, para cada n , temos correspondendo a cada σ_n uma solução de (3.33) dada por

$$G_n(t) = e^{-n^2 \pi^2 K t / L^2}.$$

Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma solução da equação em (3.31) que satisfaz as condições de fronteira é

$$u_n(x, t) = e^{-n^2\pi^2 Kt/L^2} \cos \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.40)$$

Pelo *Princípio da Superposição*, dos casos (ii) e (iii) temos que qualquer combinação linear na forma

$$\sum_{n=0}^N c_n e^{-n^2\pi^2 kt/L^2} \cos \frac{n\pi x}{L},$$

será uma solução da equação do calor em (3.31), a qual satisfaz as condições de fronteira desse problema.

Analogamente ao que foi feito na seção anterior, suponha que seja possível escrever

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad (3.41)$$

onde c_n são os coeficientes de Fourier de f estendida no intervalo $[-L, L]$ de forma a ser uma função par e $2L$ periódica em \mathbb{R} , isto é,

$$c_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad (3.42)$$

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.43)$$

Portanto, a candidata a ser solução do PVIF (3.31) é dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 kt/L^2} \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad (3.44)$$

onde c_n são os coeficientes de Fourier de f dados em (3.42) e (3.43).

O procedimento rigoroso para provar que (3.44) é de fato uma solução para o PVIF (3.31), no sentido da Definição 11, é muito parecido com o que foi feito na seção anterior e será omitido. Basicamente, o esquema a ser seguido é o seguinte:

- analogamente ao que foi feito na demonstração do Teorema 7, mostrar primeiramente que a expressão (3.44) define uma função u contínua em $\widehat{\mathcal{R}}$ e possui as derivadas parciais u_t e u_{xx} em \mathcal{R} ;

- por construção, verificar que u satisfaz a equação do calor e as condições de fronteira do PVIF (3.31).
- sobre a condição inicial, note que a igualdade (3.41) será verificada para cada x em $\in [0, L]$, se exigirmos hipóteses de f como: continuidade e existência da derivada f' como função seccionalmente contínua.

Dessa forma, usando integração por partes, pode ser provado como na seção anterior, que $c_n = -\frac{L}{n\pi}d_n$, para cada $n = 1, 2, \dots$, sendo d_n os coeficientes de Fourier da derivada f' , dados por

$$d_n = \frac{2}{L} \int_0^L f'(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \leq \frac{L^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 < \infty, \quad (3.45)$$

onde a convergência da última série é a consequência da Desigualdade de Bessel.

A desigualdade (3.45) implica que a função u definida em (3.44) é contínua em $\overline{\mathcal{R}}$ e desse modo satisfaz também a condição inicial do PVIF (3.31).

Caso f não seja contínua, analogamente a seção anterior, podemos mostrar que, sob a hipótese de f ser de quadrado integrável, a função (3.44) satisfaz a condição inicial no sentido a seguir

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t) \varphi(x) dx = \int_0^L f(x) \varphi(x) dx, \quad (3.46)$$

para toda função φ seccionalmente contínua.

3.4.2 Condições de fronteira não-homogêneas

Nessa parte do trabalho vamos discutir o problema de condução do calor numa barra submetida a temperaturas não nulas nas extremidades.

O problema matemático consiste em determinar uma função $u(x, t)$ tal que

$$\begin{aligned} u_t &= K u_{xx}, & \text{em } \mathcal{R} \\ u(0, t) &= h_0(t), \quad u(L, t) = h_1(t), & \text{para } t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & \text{para } 0 < x < L, \end{aligned} \tag{3.47}$$

onde f , h_0 e h_1 são funções dadas.

O objetivo é usar uma mudança de variáveis para reduzir esse problema a um outro, com condições homogêneas, do tipo já estudado nas seções anteriores. Então, suponha que seja possível achar uma função $v(x, t)$, de classe C^2 em $\overline{\mathcal{R}}$, tal que

$$v(0, t) = h_0(t) \quad \text{e} \quad v(L, t) = h_1(t). \tag{3.48}$$

Então designando por u a solução do PVIF (3.47), segue-se que a função $w = u - v$ satisfaz o seguinte problema

$$\begin{aligned} w_t &= K w_{xx} + g(x, t), & \text{em } \mathcal{R}, \\ w(0, t) &= w(L, t) = 0, & \text{para } t > 0, \\ w(x, 0) &= f(x) - v(x, 0), & \text{para } 0 < x < L, \end{aligned} \tag{3.49}$$

onde $g(x, t) = K v_{xx} - v_t$. Se for possível determinar v de modo que ela seja solução da equação do calor em \mathcal{R} , então $g \equiv 0$ e w é simplesmente uma solução de um PVIF tipo (3.22), o qual já conhecemos o formato da solução. No próximo exemplo veremos um caso onde isso ocorre.

Exemplo 15. Sejam $h_0(t) = \alpha$ e $h_1(t) = \beta$ funções constantes em (3.47). Note que a função $v(x, t) = \alpha + (\beta - \alpha)x/L$ é uma solução da equação do calor (homogênea). Assim, se u é uma solução do PVIF (3.47), então $w = u - v$ é uma solução do problema

$$\begin{aligned} w_t &= K w_{xx}, & \text{em } \mathcal{R}, \\ w(0, t) &= w(L, t) = 0, & \text{para } t > 0, \\ w(x, 0) &= f(x) - \alpha - \frac{\beta - \alpha}{L}x, & \text{para } 0 < x < L. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Por outro lado, vimos no Teorema 8 que uma solução para o PVIF (3.50) é dada por

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 K t / L^2} \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{L},$$

onde os c_n são os coeficientes de Fourier (em senos) da função $f(x) - \alpha - \frac{\beta - \alpha}{L}x$. Logo, uma solução do PVIF (3.47), com $h_0(t) = \alpha$ e $h_1(t) = \beta$ funções constantes, é dada por

$$u(x, t) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{L}x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 K t / L^2} \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{L}. \quad (3.51)$$

3.5 Equação do calor não-homogênea

Nessa seção vamos estudar a existência de solução para o problema de condução de calor num barra finita envolvendo uma *equação do calor não homogênea*. De maneira semelhante à Seção 3.3, vamos considerar a temperatura nula nas extremidades. Mais precisamente, considere o PVIF:

$$\begin{aligned} u_t &= K u_{xx} + g(x) && \text{em } \mathcal{R}, \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, && \text{para } t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), && \text{para } 0 < x < L, \end{aligned} \quad (3.52)$$

Vimos na Seção 3.3 que, no caso $g \equiv 0$, assumindo boa regularidade da função f , que a solução do PVIF (3.52) é dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 k t / L^2} \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{L}, \quad (3.53)$$

onde c_n são os coeficientes de Fourier de f .

Motivados pela expressão de $u(x, t)$ descrita em (3.53), buscaremos uma solução para o PVIF (3.52) na forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{L}. \quad (3.54)$$

Note que a expressão de $u(x, t)$ dada em (3.54) já satisfaz as condições de fronteira do PVIF (3.52).

Considere a função g estendida no intervalo $[-L, L]$ de forma a ser uma função ímpar e $2L$ periódica quando considerada em \mathbb{R} . Admita também que ela é representada por sua série de Fourier, ou seja,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

onde

$$g_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Note também que devido a condição inicial em (3.52), temos que $c_n(0)$, com $n \in \mathbb{N}$, devem ser os coeficientes de Fourier de f , isto é,

$$c_n(0) = f_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Substituindo (3.54) na equação do calor do PVI (3.52) temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} c'_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = -K \frac{\pi^2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) n^2 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Da equação acima temos

$$c'_n(t) = \frac{-K\pi^2 n^2}{L^2} c_n(t) + g_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ou equivalentemente,

$$c'_n(t) + \frac{K\pi^2 n^2}{L^2} c_n(t) = g_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para cada n , denotamos por $\alpha_n = \frac{K\pi^2 n^2}{L^2}$. Logo, multiplicando a equação acima pelo fator integrante $e^{\alpha_n t}$, obtemos

$$(e^{\alpha_n t} c_n(t))' = g_n e^{\alpha_n t}.$$

Integrando a igualdade anterior temos que,

$$e^{\alpha_n t} c_n(t) = g_n \frac{e^{\alpha_n t}}{\alpha_n} + C \iff c_n(t) = \frac{1}{\alpha_n} g_n + C e^{-\alpha_n t}.$$

Note agora que $f_n = c_n(0) = \frac{1}{\alpha_n}g_n + C$, o que implica $C = \left(f_n - \frac{1}{\alpha_n}g_n\right)$. Portanto,

$$c_n(t) = \frac{1}{\alpha_n}g_n + \left(f_n - \frac{1}{\alpha_n}g_n\right)e^{-\alpha_n t}.$$

Dessa forma, a candidata a solução do PVIF (3.52) é dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\alpha_n}g_n + \left(f_n - \frac{1}{\alpha_n}g_n\right)e^{-\alpha_n t} \right] \text{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.55)$$

Teorema 9. *Suponha que f e g são funções contínuas com derivadas seccionalmente contínuas em $[0, L]$ e além disso $f(0) = f(L) = g(L) = g(0) = 0$. Então, a expressão dada em (3.55) é uma solução para o PVIF (3.52), onde $\alpha_n = \frac{k\pi^2 n^2}{L^2}$, f_n e g_n são os coeficientes de Fourier de f e g , respectivamente.*

Demonstração. Vejamos primeiramente que $u(x, t)$ dada em (3.55) é uma função contínua em $\overline{\mathcal{R}} = [0, L] \times [0, +\infty)$. Para isso, basta mostrar que $u(x, t)$ converge uniformemente em $\overline{\mathcal{R}}$. Para isso, note primeiramente que

$$\begin{aligned} \left| \left[\frac{1}{\alpha_n}g_n + \left(f_n - \frac{1}{\alpha_n}g_n\right)e^{-\alpha_n t} \right] \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right| &\leq \left| \frac{1}{\alpha_n}g_n + \left(f_n - \frac{1}{\alpha_n}g_n\right) \right| \\ &\leq \frac{2}{\alpha_n}|g_n| + |f_n|, \end{aligned}$$

para todo $(x, t) \in \overline{\mathcal{R}}$.

Agora vejamos que a seguinte série numérica é convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\alpha_n}|g_n| + |f_n| \right).$$

Usando o lema de Riemann-Lebesgue, como g_n é limitada, existe $c_0 > 0$ tal que $|g_n| \leq c_0$, para todo n . Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha_n}|g_n| \leq \frac{2c_0 L^2}{k\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Agora usando a relação $f_n = \frac{L}{n\pi}f'_n$, onde f'_n são os coeficientes de Fourier da derivada f' , teremos

$$|f_n| = \frac{L}{n\pi}|f'_n| \leq \frac{1}{2} \frac{L^2}{n^2\pi^2} + \frac{1}{2}|f'_n|^2,$$

onde na desigualdade acima usamos o fato que $|ab| \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$, para $a, b \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| &\leq \frac{1}{2} \frac{L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n'|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{L} \int_0^L |f'(x)|^2 dx < +\infty, \end{aligned}$$

onde usamos que f' é de quadrado integrável uma vez que é uma seccionalmente contínua.

Portanto, a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\alpha_n} |g_n| + |f_n| \right),$$

é convergente.

Segue pelo Teste M de Weierstrass que a série $u(x, t)$, dada em (3.55), converge uniformemente em $\overline{\mathcal{R}}$, logo é uma função contínua em $\overline{\mathcal{R}}$.

Vamos agora provar que $u(x, t)$ é de classe C^2 em \mathcal{R} . Vejamos inicialmente que $u(x, t)$ é de classe C^1 em \mathcal{R} . Para isso basta mostrar que as séries obtidas derivando termo a termo a série (3.55) convergem uniformemente em cada subretângulo $\overline{\mathcal{R}}_{12} = [x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$, com $0 < x_1 < x_2 < L$ e $0 < t_1 < t_2 < +\infty$. Devemos então, mostrar que as seguintes séries convergem uniformemente em $\overline{\mathcal{R}}_{12}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (g_n - \alpha_n f_n) e^{-\alpha_n t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad (3.56)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left[\frac{1}{\alpha_n} \left(f_n - \frac{1}{\alpha_n} g_n \right) e^{-\alpha_n t} \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.57)$$

Considere $c_0 > 0$ tal que $|f_n| \leq c_0$ e $|g_n| \leq c_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\begin{aligned} \left| (g_n - \alpha_n f_n) e^{-\alpha_n t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right| &\leq (|g_n| + \alpha_n |f_n|) e^{-\alpha_n t_1} \\ &\leq \left(c_0 + \frac{k\pi^2}{L^2} n^2 c_0 \right) e^{-c_1 n^2}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde $c_1 = \frac{k\pi^2 t_1}{L^2} > 0$.

Para que a série numérica com termo geral dado pelo lado direito da desigualdade (3.58) seja

convergente basta notar que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p e^{-c_1 n^2}, \quad (3.59)$$

é convergente, qualquer que seja $p \in \mathbb{Z}$. De fato, isso segue pelo Teste da Razão uma vez que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^p e^{-c_1(n+1)^2}}{n^p e^{-c_1 n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^p e^{-c_1(2n+1)} = 0.$$

Portanto, pelo Teste M de Weierstrass a série dada em (3.56) converge uniformemente em $\overline{\mathcal{R}}_{12}$.

Analogamente, para provar que (3.57) converge uniformemente em $\overline{\mathcal{R}}_{12}$, note que

$$\left| n \left[\frac{1}{\alpha_n} g_n + \left(f_n - \frac{1}{\alpha_n} \right) e^{-\alpha_n t} \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right| \leq \frac{L^2}{k\pi^2} |g_n| + 2c_0 n e^{-\alpha_n t_1}, \quad \forall (x, t) \in \overline{\mathcal{R}}_{12}.$$

Vamos então verificar que as seguintes séries numéricas são convergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g_n| \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-c_1 n^2},$$

sendo $c_1 = \frac{k\pi^2 t_1}{L^2}$.

A primeira delas é convergente uma vez que f e g tem as mesmas hipóteses e provamos que $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ é convergente. A segunda série é convergente pois ela é da forma (3.59).

Segue pelo Teste M de Weierstrass a convergência uniforme da série (3.59) em $\overline{\mathcal{R}}_{12}$. Como $\overline{\mathcal{R}}_{12} \subset \mathcal{R}$ foi tomado arbitrariamente, concluímos que $u(x, t)$ é de classe C^1 em \mathcal{R} .

Agora, vejamos que u é de classe C^2 em \mathcal{R} . Analogamente aos argumentos anteriores, basta mostrar que as séries obtidas ao derivar termo a termo as séries (3.56) e (3.57) convergem uniformemente em cada subretângulo da forma $\overline{\mathcal{R}}_{12} = [x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$, sendo $0 < x_1 < x_2 < L$ e $0 < t_1 < t_2 < +\infty$.

Basta então mostrar que as seguintes séries convergem uniformemente em $\overline{\mathcal{R}}_{12}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (g_n - \alpha_n f_n) e^{-\alpha_n t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad (3.60)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left[\frac{1}{\alpha_n} g_n + \left(f_n - \frac{1}{\alpha_n} g_n \right) e^{-\alpha_n t} \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.61)$$

Note que o termo geral da primeira dessas séries é limitada da seguinte forma

$$\begin{aligned} \left| n^2(g_n - \alpha_n f_n)e^{-\alpha_n t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right| &\leq n^2(|g_n| + \alpha_n |f_n|)e^{-\alpha_n t} \\ &\leq n^2\left(c_0 + \frac{k\pi^2}{L}n^2 c_0\right)e^{-c_1 n^2}, \end{aligned}$$

onde $c_1 = \frac{k\pi^2}{L}t_1 > 0$.

Como $\sum n^2 e^{-c_1 n^2}$ e $\sum n^4 e^{-c_1 n^2}$ convergem pois são séries da forma (3.59), então a série (3.60) converge uniformemente em $\overline{\mathcal{R}}_{12}$.

Em relação a série (3.61), note que temos a seguinte limitação para o termo geral

$$\left| n^2 \left[\frac{1}{\alpha_n} g_n + \left(f_n - \frac{1}{\alpha_n} g_n \right) e^{-\alpha_n t} \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right| \leq \frac{L^2}{K\pi^2} c_0 e^{-c_1 n^2} + c_0 n^2 e^{-c_1 n^2},$$

para todo $(x, t) \in \overline{\mathcal{R}}_{12}$. Como $\sum e^{-c_1 n^2}$ e $\sum n^2 e^{-c_1 n^2}$ convergem, segue a convergência uniforme de (3.61) em $\overline{\mathcal{R}}_{12}$.

Uma vez que o subretângulo $\overline{\mathcal{R}}_{12} \subset \mathcal{R}$ foi tomado arbitrariamente, concluímos que $u(x, t)$ é de classe C^2 em \mathcal{R} .

Por fim, uma vez que já sabemos que (3.55) é uma função em $C(\overline{\mathcal{R}}) \cap C^2(\mathcal{R})$, temos pela própria construção feita anteriormente que $u(x, t)$ satisfaz a equação do calor do PVIF (3.52). As condições de fronteira e a condição inicial são facilmente verificadas. \square

3.6 Unicidade de solução

Nesta seção provamos a unicidade da solução do PVIF (3.52) que foi estudada na Seção 3.5. No caso particular em que $g \equiv 0$, temos o PVIF (3.22), cuja solução foi encontrada na Seção 3.2. Para isso, usamos como resultado principal o conhecido Princípio do Máximo-Mínimo, descrito a seguir.

Teorema 10 (Princípio do Máximo-Mínimo). *Seja $u(x, t)$ uma função contínua no retângulo $\overline{\mathcal{R}}_{12} = \{(x, t); x_1 \leq x \leq x_2, t_1 \leq t \leq t_2\}$ e tal que $u_t = Ku_{xx}$, para $x_1 < x < x_2$ e $t_1 < t < t_2$. Então o máximo de u é assumido em um dos seguintes lados de $\overline{\mathcal{R}}_{12}$:*

$$l_1 = \{x = x_1, t_1 \leq t \leq t_2\}, \quad l_2 = \{x_1 \leq x \leq x_2, t = t_1\}, \quad l_3 = \{x = x_2, t_1 \leq t \leq t_2\}.$$

Demonstração. Primeiramente, segue do Teorema de Weierstrass que u assume valor máximo e valor mínimo em $\overline{\mathcal{R}}_{12}$, pois u é contínua e $\overline{\mathcal{R}}_{12}$ é um conjunto fechado e limitado.

Denote por $l = l_1 \cup l_2 \cup l_3$ e considere as constantes

$$M = \max\{u(x, t); (x, t) \in \overline{\mathcal{R}}\} \quad \text{e} \quad m = \max\{u(x, t); (x, t) \in l\}.$$

Logo, em particular, temos que $m \leq M$, pois $l \subset \overline{\mathcal{R}}$. Porém, afirmamos que $m = M$. De fato, suponha por contradição que a desigualdade seja estrita, isto é, $m < M$. Seja então $(x_0, t_0) \in \mathcal{R} \setminus l$, tal que $u(x_0, t_0) = M$ e defina a função

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{M - m}{4L^2}(x - x_0)^2, \quad (x, t) \in \overline{\mathcal{R}},$$

sendo $L = x_2 - x_1$.

Note que para cada $(x, t) \in l$, temos

$$v(x, t) \leq m + \frac{M - m}{4L^2}L^2 = m + \frac{M - m}{4} < M.$$

Além disso, $v(x_0, t_0) = M + 0 = M = u(x_0, t_0)$. Dessa forma, concluímos que o máximo da função v , considerada em \mathcal{R} , não ocorre nos lados l .

Considere um ponto $(\bar{x}, \bar{t}) \in \overline{\mathcal{R}} \setminus l$, onde v atinge o valor máximo.

(i) Se $(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathcal{R}$, então como \mathcal{R} é aberto e (\bar{x}, \bar{t}) é ponto de máximo, segue que $\nabla v(\bar{x}, \bar{t}) = 0$, logo $v_t(\bar{x}, \bar{t}) = 0$. Além disso, temos $v_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) \leq 0$.

(ii) Se (\bar{x}, \bar{t}) é tal que, $\bar{t} = t_2$ e $x_1 < x < x_2$, considere a função $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\phi(x) = v(x, t_2)$, sendo I o intervalo (x_1, x_2) .

Note que a função ϕ assume o valor máximo em \bar{x} , o que implica $\phi''(\bar{x}) \leq 0$, portanto $v_{xx}(\bar{x}, t_2) \leq 0$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
v_t(\bar{x}, t_2) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{v(\bar{x}, t_2 + h) - v(\bar{x}, t_2)}{h} \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{v(\bar{x}, t_2 - \delta) - v(\bar{x}, t_2)}{-\delta} \quad (h = -\delta) \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{v(\bar{x}, t_2) - v(\bar{x}, t_2 - \delta)}{\delta} \geq 0.
\end{aligned}$$

Dos argumentos anteriores, se $(\bar{x}, \bar{t}) \in \overline{\mathcal{R}} \setminus l$ é um ponto de máximo de v , concluímos que

$$v_t(\bar{x}, \bar{t}) \geq 0 \quad \text{e} \quad v_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) \leq 0. \quad (3.62)$$

Por outro lado, note que

$$v_t(\bar{x}, \bar{t}) = u_t(\bar{x}, \bar{t}) \quad \text{e} \quad v_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) = u_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) + \frac{M - m}{2L^2},$$

o que implica

$$v_t(\bar{x}, \bar{t}) = u_t(\bar{x}, \bar{t}) = Ku_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) = K \left[v_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) - \frac{M - m}{2L^2} \right] < Kv_{xx}(\bar{x}, \bar{t}),$$

o que contraria (3.62). Portanto, o máximo da função u ocorre em l .

Afirmamos que o mínimo de u também ocorre em l . De fato, seja $w = -u$. Logo w é contínua em $\overline{\mathcal{R}}$ e $w_t = Kw_{xx}$. Segue pelo que vimos anteriormente que o máximo de w ocorre em l . Porém, $\max(w) = -\min(u)$, portanto $\min(u) = -\max(w)$ e segue a validade de afirmação. \square

Corolário 1. *Se u é uma função contínua em $\overline{\mathcal{R}} = [0, L] \times [0, +\infty)$, que satisfaz*

$$u_t = Ku_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R}, \quad (3.63)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad (3.64)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3.65)$$

então $u \equiv 0$.

Demonstração. Sejam $x_1 = 0$, $x_2 = L$, $t_1 = 0$ e $t_2 > 0$ arbitrário. Como u é contínua em $\overline{\mathcal{R}}_{12} = [x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$ e em \mathcal{R}_{12} é válida a equação do calor (3.63), então pelo Princípio do Máximo-Mínimo temos que o máximo de u ocorre em $l = l_1 \cup l_2 \cup l_3$. Porém, de (3.64) e (3.65) temos que $u \equiv 0$ em l . Como máximo e mínimo de u ocorre em l , segue que $u \equiv 0$ em $\overline{\mathcal{R}}_{12}$. Como $t_2 > 0$ é qualquer, então $u \equiv 0$ em $\overline{\mathcal{R}}$. □

Teorema 11 (Unicidade de solução). *O PVIF dado por*

$$\begin{aligned} u_t &= Ku_{xx} + g(x), & \text{em } \mathcal{R}, \\ u(0, t) &= h_0(t), \quad u(L, t) = h_1(t), & t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq L, \end{aligned}$$

caso tenha solução $u \in C(\overline{\mathcal{R}}) \cap C^2(\mathcal{R})$ ela é única.

Demonstração. Suponha que $u_1, u_2 \in C(\overline{\mathcal{R}}) \cap C^2(\mathcal{R})$ são soluções desse PVIF. Logo, a função $u = u_1 - u_2$ satisfaz o seguinte PVIF:

$$\begin{aligned} u_t &= Ku_{xx}, & \text{em } \mathcal{R}, \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, & 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Corolário 1, temos que $u \equiv 0$ em $\overline{\mathcal{R}}$, ou seja, $u_1 = u_2$ em $\overline{\mathcal{R}}$. □

Por fim, os resultados provados nessa seção, juntamente com a existência de solução discutida nas Seções 3.3 e 3.5, nos fornecem o seguinte teorema.

Teorema 12. *Se f e g são funções contínuas com derivadas seccionalmente contínuas no intervalo $[0, L]$ e, além disso, $f(0) = f(L) = g(0) = g(L) = 0$, então existe uma única solução $u \in C(\overline{\mathcal{R}}) \cap C^2(\mathcal{R})$ que satisfaz o PVIF:*

$$\begin{aligned} u_t &= Ku_{xx} + g(x), & \text{em } \mathcal{R}, \\ u(0, t) &= u(L, t), & t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

Considerações finais

Ao decorrer desse trabalho foi possível relembrar vários resultados de Análise Matemática, principalmente propriedades relacionadas à convergência de sequências e séries de funções. Isso nos auxiliou a estudar a parte principal do trabalho que foi a série de Fourier, seus coeficientes e algumas aplicações. Usando isso e a modelagem matemática do problema de condução de calor numa barra finita, obtemos uma solução empregando o Método de Fourier. Dessa forma, percebemos que a série de Fourier é uma ferramenta de grande importância para a resolução de problemas matemáticos e físicos.

Referências Bibliográficas

- [1] Djairo Guedes de Figueiredo; *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Projeto Euclides, IMPA, 1977.
- [2] Elon Lages Lima; *Curso de Análise Vol 1*. Projeto Euclides, IMPA, 2017.
- [3] Rafael Iório e Valéria Iório; *Equações Diferenciais Parciais: Uma introdução*. IMPA, 2013.
- [4] Gerald Budge Folland; *Fourier Analysis and its Applications*, University of Washington, 1992.
- [5] Willian E. Boyce e Richard C. DiPrima; *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, LTC, 2015.