

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

LUCAS NACIF GIACOMIN

ONDAS SOLITÁRIAS E A EQUAÇÃO DE KdV

CURITIBA

2020

LUCAS NACIF GIACOMIN

## ONDAS SOLITÁRIAS E A EQUAÇÃO DE KdV

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado, Curso de Matemática, Departamento de Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Ribeiro Santos Junior

CURITIBA

2020

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, quero agradecer aos meus pais, Cristiana e Florêncio, que sempre me apoiaram nas minhas escolhas. Também gostaria de agradecer meus amigos que estiveram sempre ao meu lado e aos meus colegas de curso que me acompanharam nessa jornada.

Aos meus professores do ensino básico que me levaram a escolher matemática agradeço imensamente, em especial a professora Cláudia Santos, e também aos professores do curso, que me mostraram o que significa ser matemático.

Finalmente, ao meu orientador, Professor Roberto Ribeiro, minha eterna gratidão por ter me ensinado valiosas lições ao longo destes dois anos de orientação.

*“Eu quase que nada não sei.  
Mas desconfio de muita coisa.”*  
Guimarães Rosa

## RESUMO

GIACOMIN, Lucas Nacif. Ondas Solitárias e a Equação de KdV. 2020. 66 p. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2020.

Em 1834, enquanto caminhava pelas margens do Union Canal em Edimburgo, o engenheiro naval John Scott Russell presenciou a formação de uma onda que tomou a forma de uma elevação solitária e viajou por este canal por um longo tempo sem mudar sua forma, a qual denominou Onda de Translação, que, *a posteriori*, passou a ser chamada de onda solitária. A modelagem matemática para o perfil desta onda veio apenas em 1865 com a dedução da equação de KdV atribuída aos matemáticos neerlandeses Diederik Korteweg e Gustav de Vries. O objetivo principal deste trabalho é estudar a dedução da equação de KdV. Mais precisamente, mostramos como a KdV pode ser obtida de três formas diferentes: por meio das equações de Boussinesq, via teoria do potencial e diretamente das equações de Euler. Além disso, investigamos a representação matemática da onda solitária. Ademais, discutimos sobre as grandezas que são preservadas na equação de KdV. A principal técnica empregada no nosso estudo é a análise assintótica com expansões assintóticas feitas em torno dos parâmetros de não-linearidade e dispersão. Apresentamos os conceitos, os cálculos e demonstrações de forma mais simples possível de modo a tornar o texto acessível aos leitores não familiarizados com o tema.

**Palavras chave:** Ondas Solitárias, Equação de KdV, Equações de Euler, Expansões Assintóticas.

## ABSTRACT

GIACOMIN, Lucas Nacif. Solitary Waves and the KdV Equation. 2020. 66 p. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2020.

In 1834, while walking on the side of the Union Canal in Edimburgh, John Scott Russell, a naval engineer, observed the motion of a wave which assumed the form of a solitary elevation and traveled along the canal for a long period of time without changing its form. Russell named it the wave of translation, which later on would come to be known as a solitary wave. The mathematical modeling for the profile of this wave was discovered only in 1865, when dutch mathematicians Diederik Korteweg and Gustav de Vries derived the KdV equation. The main goal of this dissertation is to study the derivation of the KdV equation. More precisely, we show how the KdV can be obtained from three different ways: through the Boussinesq equations, via potential theory and directly from the Euler equations. Besides, the mathematical representation of the solitary wave and conserved quantities are also discussed. The main approach that we employ in this study is asymptotic analysis through asymptotic expansions around the nonlinearity and dispersion parameters. We present the concepts, calculations and demonstrations in the simplest way possible so that this text could be accessible to any reader who is not familiarized with the theory.

**Keywords:** Solitary Wave, KdV Equation, Euler Equations, Asymptotic Expansions.

# Lista de Figuras

5.1	Onda de Translação. . . . .	54
5.2	Simetria da Onda de Translação. . . . .	56
5.3	Perfil de $\eta(x, t)$ em relação ao eixo $x$ ao longo do tempo. . . . .	58
5.4	Propagação da onda $\text{sech}^2$ via equação de Burgers. . . . .	59
5.5	Propagação da onda $\text{sech}^2$ via EDP dispersiva <b>II</b> . . . . .	59

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>1 As Equações governantes para Ondas de Superfície</b>	<b>11</b>
1.1 As Equações de Euler . . . . .	11
1.2 Teoria do Potencial . . . . .	16
1.3 Adimensionalização . . . . .	18
1.4 Relação de dispersão de ondas aquáticas de gravidade . . . . .	21
<b>2 As Equações de Boussinesq</b>	<b>25</b>
2.1 Análise assintótica: ondas não lineares fracamente dispersivas . . . . .	25
2.1.1 A Equação da Onda: modelo para a dinâmica de ondas longas lineares	32
<b>3 Dedução da Equação de KdV via Boussinesq</b>	<b>34</b>
<b>4 Outras deduções para a Equação de KdV</b>	<b>39</b>
4.1 Dedução da KdV diretamente da Teoria do Potencial . . . . .	39
4.2 Dedução da KdV via Equações de Euler . . . . .	46
<b>5 Onda Solitária e a Equação de KdV</b>	<b>54</b>
5.1 Os fenômenos da equação de KdV . . . . .	59
5.2 Grandezas conservadas . . . . .	60
5.2.1 Leis de Conservação . . . . .	60
5.2.2 Grandezas conservadas na Equação de KdV . . . . .	61
<b>Considerações Finais</b>	<b>64</b>
<b>Referências</b>	<b>65</b>

# Introdução

A humanidade sempre buscou justificar os fenômenos físicos que acontecem a nossa volta, ora por meio da religião, ora pela ciência. Como consequência, muitos matemáticos, ao longo dos anos, concentraram seus esforços em descrever e compreender estes fenômenos, desde a infinitude do espaço até a estrutura molecular dos átomos que nos rodeiam. Em especial, figuras notáveis como Euler, Laplace e Boussinesq deram grandes contribuições para o desenvolvimento da teoria matemática sobre a dinâmica das ondas aquáticas. Mais precisamente, Euler foi o pioneiro na formalização matemática da teoria. Em meados do século XVIII deduziu as equações da hidrodinâmica, equações diferenciais parciais (EDPs) que modelam a evolução das ondas do mar, que são utilizadas até hoje [2].

Durante os séculos XIX e XX ocorreram grandes avanços teóricos, numéricos e experimentais na área de ondas. Hoje, os modelos matemáticos para a dinâmica de ondas de superfície são amplamente utilizados em diferentes contextos, seja para mapear a concentração de poluente no oceano, prever a formação de tsunamis ou determinar o campo de velocidade submarino, crucial para o bom funcionamento de operações submersas como a extração de petróleo em uma plataforma.

Este trabalho revolve em torno das ondas aquáticas, em particular iremos estudar uma onda peculiar, descrita pela primeira vez pelo engenheiro naval escocês John Scott Russell.

Em 1834 Russell estava andando pelo Union Canal em Edimburgo (Escócia) quando se deparou com um barco que estava sendo puxado por dois cavalos. A frente desse barco uma onda começou a se formar e, quando repentinamente o barco parou, esta onda continuou o curso do canal. Intrigado pelas qualidades dessa onda, que tomou a forma de uma elevação solitária, Russell seguiu-a pelo canal por aproximadamente três quilômetros. Durante seu trajeto, a onda não se mostrou dispersiva, retendo sua forma original. Além disso, esta onda manteve uma velocidade constante e viajava celeremente. Russell denominou-a Onda de Translação ([15], p.13). Mais tarde esta onda passou a ser chamada de onda solitária.

Fascinado pelo que viu, Russell realizou diversos experimentos os quais foram registrados detalhadamente em seu artigo [15]. Quando publicado, o estudo de Russell chamou atenção de diversos cientistas da época, entre eles Joseph Boussinesq, cuja aproximação

matemática para a onda de translação veremos neste trabalho, e os matemáticos neerlandeses Diederik Korteweg e Gustav de Vries que em 1865 derivaram a EDP

$$\eta_t + \eta\eta_x + \eta_{xxx} = 0,$$

a qual ficou conhecida como equação de KdV, cuja solução condiz com a onda observada por Russell.

Embora a motivação inicial para a equação de KdV seja a dinâmica de ondas aquáticas, ela tem aplicação em uma vasta gama de áreas, por exemplo, fibra ótica, supercondutividade em eletrônicos, física de partículas, física quântica, biologia e cosmologia [9].

O objetivo principal deste trabalho é deduzir a equação de KdV. Mais precisamente, mostraremos como a KdV é obtida de três formas diferentes: por meio das equações de Boussinesq, via teoria do potencial e diretamente das equações de Euler. Além disso, iremos buscar pela representação matemática da onda solitária, a saber,  $\text{sech}^2$ . Ademais, discutiremos sobre as grandezas que são preservadas na equação de KdV.

Independente de como as equações governantes estão postas (Boussinesq, potencial ou Euler), a técnica que será empregada nas deduções da KdV é a análise assintótica, que consiste em definir versões aproximadas das equações governantes. Neste trabalho utilizaremos expansões assintóticas em torno dos parâmetros de não-linearidade ( $\alpha$ ) e dispersão ( $\beta$ ) advindos do processo de adimensionalização.

Além disso, para encontrar a função que descreve o perfil da onda solitária (Onda de Translação de Russell) vamos buscar por soluções viajantes para a equação de KdV que assumem a forma de uma “elevação solitária”, conforme descreveu Russell.

Este trabalho se divide como segue. No primeiro capítulo apresentaremos as equações governantes de ondas aquáticas, sistema de equações base para este trabalho. No segundo capítulo deduziremos as equações de Boussinesq e em seguida o modelo para ondas lineares no regime de águas rasas, resultados importantes na teoria de ondas aquáticas. Nos próximos três capítulos apresentaremos diferentes deduções para a Equação de KdV. Por fim no quinto capítulo determinaremos o perfil da onda solitária, discutiremos sobre o aparente “equilíbrio” entre dois fenômenos físicos presentes na KdV e as grandezas que se mantêm conservadas nessa equação.

# Capítulo 1

## As Equações governantes para Ondas de Superfície

Neste capítulo mostraremos as equações que governam a dinâmica de ondas aquáticas de superfície, estas equações servirão como ponto de partida para a dedução da equação de KdV.

### 1.1 As Equações de Euler

Seguindo os relatos de Russell ([15], p.13), vamos considerar uma onda que translada ao longo de um canal extenso. Fazendo um corte transversal do escoamento na direção de propagação da onda e perpendicular a sua crista, observamos que este escoamento tridimensional pode ser aproximado por modelos bidimensionais.

Considere as coordenadas cartesianas  $(x, y)$ , onde  $y$  é a coordenada vertical,  $x$  a direção da propagação da onda e  $t$  o tempo. Denotamos por  $\vec{U}(x, y, t) = (u(x, y, t), v(x, y, t))$  o campo de velocidade do escoamento, limitado inferiormente, em  $y = -h$ , por um fundo horizontal e impermeável e superiormente pela onda de superfície,  $y = \eta(x, t)$ , onde  $y = 0$  é o nível de repouso da água. Além disso, consideramos a água como um fluido invíscido e incompressível.

As equações da hidrodinâmica foram deduzidas por Euler em meados do século XVIII e estão baseadas em dois princípios físicos: *conservação de massa* e *conservação da quantidade de movimento*. Matematicamente, estes conceitos são descritos, respectivamente, pelas seguintes equações (vide [18] p.431 e [13] p.35):

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0 & \text{em } -h < y < \eta(x, t), \\ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \vec{g} & \text{em } -h < y < \eta(x, t). \end{cases}$$

onde  $P(x, y, t)$  é a pressão,  $\vec{g} = (0, -g)$ , em que  $g$  é a aceleração da gravidade,  $\rho$  é a densidade constante e  $\nabla$  é o operador  $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ .

Além disso, o produto  $(\vec{U} \cdot \nabla)f$ , onde  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , é interpretado como  $\vec{U} \cdot \nabla f$ , de modo que  $(\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U} = ((\vec{U} \cdot \nabla)u, (\vec{U} \cdot \nabla)v)$ . Ademais, consideramos que as funções  $\rho, P, u$  e  $v$  são suaves e satisfazem todas as hipóteses necessárias para os cálculos que seguirão.

Aqui consideramos a densidade da água como sendo constante no espaço e no tempo, logo, a equação de conservação de massa reduz-se a

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0. \quad (1.1.1)$$

Estamos considerando também que o escoamento é irrotacional, isto é,

$$\nabla \times \vec{U} = (0, 0, v_x - u_y) = 0.$$

Fisicamente, isto significa que as partículas não apresentam rotação em relação ao seu centro de massa. Utilizando esta hipótese e a identidade vetorial

$$\frac{1}{2} \nabla (\vec{U} \cdot \vec{U}) = \vec{U} \times (\nabla \times \vec{U}) + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U}$$

na equação de conservação da quantidade de movimento obtemos a equação

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \|\vec{U}\|^2 = -\frac{\nabla P}{\rho} + \vec{g} \quad \text{em } -h < y < \eta(x, t). \quad (1.1.2)$$

Agora vamos determinar as condições de fronteira.

A condição de impermeabilidade no fundo  $y = -h$  é escrita como

$$v = 0 \quad \text{em } y = -h. \quad (1.1.3)$$

Ao longo da onda de superfície  $y = \eta(x, t)$ , a qual denotaremos no texto como fronteira livre ou superfície livre, temos a condição de dinâmica

$$P = P_{atm} \quad \text{em } y = \eta(x, t), \quad (1.1.4)$$

onde  $P_{atm}$  é a pressão atmosférica, e a condição de cinemática

$$\eta_t + \eta_x u = v \quad \text{em } y = \eta(x, t). \quad (1.1.5)$$

De modo geral, a condição de cinemática surge quando consideramos que existe

uma certa interface entre o ar e o fluido em questão dada implicitamente pela equação  $F(\vec{x}, t) = 0$ ,  $\vec{x} = (x, y)$ , satisfazendo a propriedade de que o fluido não a atravessa<sup>1</sup>. Matematicamente, esta propriedade traduz-se na equação

$$\vec{U} \cdot \vec{n} = \vec{U}, \quad (1.1.6)$$

onde  $\vec{U} = (u, v)$  é o campo de velocidade do escoamento,  $\vec{n}$  é o vetor normal (unitário) à interface e  $\vec{U}$  é a velocidade da interface na direção normal.

Sabe-se que (cf. [17], p. 964)

$$\vec{n} = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}.$$

Uma vez que o campo de velocidade das partículas na interface é dado por  $\frac{d\vec{x}}{dt}$ , temos

$$\vec{U} = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{n} = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}.$$

Note que

$$\begin{aligned} F(\vec{x}, t) = 0 &\Rightarrow \frac{d}{dt}[F(\vec{x}, t)] = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \nabla F = 0 \\ &\Rightarrow \frac{F_t}{\|\nabla F\|} + \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = -\frac{F_t}{\|\nabla F\|}. \end{aligned}$$

Assim, a equação (1.1.6) se torna

$$\vec{U} \cdot \nabla F = -F_t. \quad (1.1.7)$$

Quando impomos a existência de uma superfície livre ( $y = \eta(x, t)$ ) a nossa interface pode ser dada por  $F(x, y, t) \equiv y - \eta(x, t)$ , a qual implica que  $\nabla F = (-\eta_x, 1)$  e  $F_t = -\eta_t$ . Deste modo, substituindo na equação (1.1.7) vamos obter

$$\eta_t + \eta_x u = v \quad \text{em } y = \eta(x, t).$$

---

<sup>1</sup>Essa definição e os cálculos que seguem foram adaptados de [18] p.432

**Observação 1.1.1.** A condição de cinemática implica que partículas que estão inicialmente na superfície permanecem na superfície ao longo do tempo. De fato, seja  $\nu(t) = (x(t), y(t))$  a trajetória de uma partícula que se encontra inicialmente na superfície. Então,  $\nu(t)$  é solução do sistema de equações ordinárias

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(x(t), y(t), t), \\ \frac{dy}{dt} = v(x(t), y(t), t), \\ F(\nu(0), 0) = 0. \end{cases}$$

Note que

$$\frac{d}{dt} [F(\nu(t), t)] = F_t + F_x \left( \frac{dx}{dt} \right) + F_y \left( \frac{dy}{dt} \right) = F_t + F_x u + F_y v = F_t + \vec{U} \cdot \nabla F \stackrel{(1.1.7)}{=} 0.$$

Essa relação implica que

$$F(\nu(t), t) = \mathcal{K}$$

para alguma constante  $\mathcal{K}$ . Mais ainda,

$$F(\nu(0), 0) = 0 \Rightarrow \mathcal{K} = 0.$$

Logo, para todo tempo  $t$ ,  $F(\nu(t), t) = 0$ .

Se tomarmos  $F \equiv y - \eta(x, t)$  devemos ter que a trajetória  $\nu$  se escreve  $\nu(t) = (x(t), \eta(x(t), t))$  e se dá ao longo da superfície.



Conseqüentemente,

$$(ii) \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} u_x + v_y = 0 & \text{em } -h < y < \eta(x, t), \\ u_t + uu_x + vv_y = -\frac{P_x}{\rho} & \text{em } -h < y < \eta(x, t), \\ v_t + uv_x + vv_y = -\frac{P_y}{\rho} - g & \text{em } -h < y < \eta(x, t), \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \eta_t + \eta_x u = v & \text{em } y = \eta(x, t), \\ P = P_{atm} & \text{em } y = \eta(x, t), \\ v = 0 & \text{em } y = -h. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

## 1.2 Teoria do Potencial

A hipótese de escoamento irrotacional, isto é,  $\nabla \times \vec{U} = 0$ , assegura (veja [7], p. 177) que existe um potencial  $\phi(x, y, t)$  tal que

$$\vec{U} = \nabla\phi(x, y, t)$$

A seguir veremos que ao substituir essa relação no sistema (i) a quantidade de variáveis desse sistema diminuirá, ademais passamos a trabalhar com uma equação de Laplace.

Com efeito, substituindo  $\vec{U} = \nabla\phi = (\phi_x, \phi_y)$  no sistema (i), utilizando a equação (1.1.2), obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot (\nabla\phi) = 0 & \text{em } -h < y < \eta(x, t), \\ \frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \|\nabla\phi\|^2 = -\frac{\nabla P}{\rho} + \vec{g} & \text{em } -h < y < \eta(x, t), \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \eta_t + \eta_x \phi_x = \phi_y & \text{em } y = \eta(x, t), \\ P = P_{atm} & \text{em } y = \eta(x, t), \\ \phi_y = 0 & \text{em } y = -h. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Note que

$$\frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\phi_x, \phi_y) = (\phi_{xt}, \phi_{yt}) = (\phi_{tx}, \phi_{ty}) = \nabla \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)$$

e  $\vec{g} = (0, -g) = -\nabla(gy)$ , assim, podemos reescrever a equação

$$\frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \|\nabla\phi\|^2 = -\frac{\nabla P}{\rho} + \vec{g}$$

na forma

$$\nabla \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \nabla \|\nabla\phi\|^2 + \frac{\nabla P}{\rho} + \nabla(gy) = 0.$$

Podemos também escrever  $\frac{\nabla P}{\rho}$  como  $\frac{\nabla(P - P_{atm})}{\rho}$ , uma vez que  $P_{atm}$  é constante. Então

$$\begin{aligned} \nabla \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \nabla \|\nabla\phi\|^2 + \frac{\nabla(P - P_{atm})}{\rho} + \nabla(gy) &= 0 \\ \Rightarrow \nabla \left[ \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \|\nabla\phi\|^2 + \frac{P - P_{atm}}{\rho} + gy \right] &= 0 \\ \Rightarrow \phi_t + \frac{1}{2} \|\nabla\phi\|^2 + \frac{P - P_{atm}}{\rho} + gy &= r(t). \end{aligned}$$

A constante  $r(t)$  pode ser incorporada a  $\phi$  com a transformação

$$\phi = \tilde{\phi} + \int_0^t r(s) ds.$$

Ora, é fácil ver que  $\nabla\phi = \nabla\tilde{\phi}$  e que  $\tilde{\phi}_t = \phi_t - r(t)$ . Substituindo na equação anterior, abandonando a notação “ $\sim$ ”, segue que

$$\phi_t + \frac{1}{2} \|\nabla\phi\|^2 + \frac{P - P_{atm}}{\rho} + gy = 0 \quad \text{em } -h < y < \eta(x, t).$$

Essa expressão é conhecida como *Equação de Bernoulli* e é válida em todo o meio. Em particular, quando  $y = \eta(x, t)$ ,  $P = P_{atm}$ , tem-se

$$\phi_t + \frac{1}{2} \|\nabla\phi\|^2 + g\eta = 0 \quad \text{em } y = \eta(x, t).$$

Finalmente, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{em } -h < y < \eta, & (1.2.1) \\ \eta_t + \eta_x\phi_x = \phi_y & \text{em } y = \eta(x, t), & (1.2.2) \\ \phi_t + \frac{1}{2}\|\nabla\phi\|^2 + g\eta = 0 & \text{em } y = \eta(x, t), & (1.2.3) \\ \phi_y = 0 & \text{em } y = -h. & (1.2.4) \end{cases} \quad (\text{iii})$$

### 1.3 Adimensionalização

Quando utilizamos os sistemas de equações (ii) e (iii) além de encontrar soluções precisamos nos atentar à dimensão das variáveis envolvidas. Dessa forma, para evitar essa inconveniência vamos utilizar uma simples mudança de variáveis a fim de tornar os sistemas (ii) e (iii) adimensionais.

Assim, considere a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{aligned} x &= \lambda\tilde{x}, & y &= h(\tilde{y} - 1), & t &= \frac{\lambda}{c_0}\tilde{t}, \\ \phi &= \frac{g\lambda a}{c_0}\tilde{\phi}, & \eta &= a\tilde{\eta}, \\ c_0 &= \sqrt{gh}. \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

Para o sistema (ii) ainda incluem-se

$$\begin{aligned} u &= c_0\tilde{u}, & v &= \frac{hc_0}{\lambda}\tilde{v}, \\ P &= P_{atm} + \rho g(h - y) + \rho gh\tilde{P} \\ &= P_{atm} - (\rho gh)\tilde{y} + (\rho gh)\tilde{P}. \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

onde  $c_0 = \sqrt{gh}$ ,  $\lambda$  é o comprimento de onda característico e  $a$  é a amplitude das oscilações da onda de superfície.

Destá forma, temos

$$\phi_x = \left( \frac{g\lambda a}{c_0} \right) \tilde{\phi}_{\tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{dx} = \left( \frac{g\lambda a}{c_0} \right) \tilde{\phi}_{\tilde{x}} \frac{1}{\lambda} = \left( \frac{ga}{c_0} \right) \tilde{\phi}_{\tilde{x}},$$

$$\phi_{xx} = \left( \frac{ga}{c_0} \right) \tilde{\phi}_{\tilde{x}\tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{dx} = \left( \frac{ga}{c_0} \right) \tilde{\phi}_{\tilde{x}\tilde{x}} \frac{1}{\lambda} = \left( \frac{ga}{c_0\lambda} \right) \tilde{\phi}_{\tilde{x}\tilde{x}},$$

$$\phi_y = \left( \frac{g\lambda a}{c_0} \right) \tilde{\phi}_{\tilde{y}} \frac{d\tilde{y}}{dy} = \left( \frac{g\lambda a}{c_0} \right) \tilde{\phi}_{\tilde{y}} \frac{1}{h} = \left( \frac{g\lambda a}{c_0 h} \right) \tilde{\phi}_{\tilde{y}}$$

$$\phi_{yy} = \left( \frac{g\lambda a}{c_0} \right) \tilde{\phi}_{\tilde{y}\tilde{y}} \frac{d\tilde{y}}{dy} = \left( \frac{g\lambda a}{c_0 h} \right) \tilde{\phi}_{\tilde{y}\tilde{y}} \frac{1}{h} = \left( \frac{g\lambda a}{c_0 h^2} \right) \tilde{\phi}_{\tilde{y}\tilde{y}},$$

$$\phi_t = \left( \frac{g\lambda a}{c_0} \right) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{t}} \frac{d\tilde{t}}{dt} = \left( \frac{g\lambda a}{c_0} \right) \tilde{\phi}_{\tilde{t}} \frac{c_0}{\lambda} = (ga) \tilde{\phi}_{\tilde{t}},$$

$$\eta_x = a \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{dx} = a \tilde{\eta}_{\tilde{x}} \frac{1}{\lambda} = \left( \frac{a}{\lambda} \right) \tilde{\eta}_{\tilde{x}},$$

$$\eta_t = a \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{t}} \frac{d\tilde{t}}{dt} = a \tilde{\eta}_{\tilde{t}} \frac{c_0}{\lambda} = \left( \frac{ac_0}{\lambda} \right) \tilde{\eta}_{\tilde{t}},$$

$$u_x = c_0 \tilde{u}_{\tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{dx} = c_0 \tilde{u}_{\tilde{x}} \frac{1}{\lambda} = \left( \frac{c_0}{\lambda} \right) \tilde{u}_{\tilde{x}},$$

$$u_y = c_0 \tilde{u}_{\tilde{y}} \frac{d\tilde{y}}{dy} = c_0 \tilde{u}_{\tilde{y}} \frac{1}{h} = \left( \frac{c_0}{h} \right) \tilde{u}_{\tilde{y}},$$

$$u_t = c_0 \tilde{u}_{\tilde{t}} \frac{d\tilde{t}}{dt} = c_0 \tilde{u}_{\tilde{t}} \frac{c_0}{\lambda} = \left( \frac{c_0^2}{\lambda} \right),$$

$$v_x = \left( \frac{hc_0}{\lambda} \right) \tilde{v}_{\tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{dx} = \left( \frac{hc_0}{\lambda} \right) \tilde{v}_{\tilde{x}} \frac{1}{\lambda} = \left( \frac{hc_0}{\lambda^2} \right) \tilde{v}_{\tilde{x}}$$

$$v_y = \left( \frac{hc_0}{\lambda} \right) \tilde{v}_{\tilde{y}} \frac{d\tilde{y}}{dy} = \left( \frac{hc_0}{\lambda} \right) \tilde{v}_{\tilde{y}} \frac{1}{h} = \left( \frac{c_0}{\lambda} \right) \tilde{v}_{\tilde{y}}$$

$$v_t = \left( \frac{hc_0}{\lambda} \right) \tilde{v}_{\tilde{t}} \frac{d\tilde{t}}{dt} = \left( \frac{hc_0}{\lambda} \right) \tilde{v}_{\tilde{t}} \frac{c_0}{\lambda} = \left( \frac{hc_0^2}{\lambda^2} \right) \tilde{v}_{\tilde{t}}$$

$$P_x = [P_{atm} - (\rho gh)\tilde{y} + (\rho gh)\tilde{P}]_{\tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{dx} = \left( \frac{\rho gh}{\lambda} \right) \tilde{P}_{\tilde{x}}$$

$$P_y = [P_{atm} - (\rho gh)\tilde{y} + (\rho gh)\tilde{P}]_{\tilde{y}} \frac{d\tilde{y}}{dy} = (-\rho gh + \rho gh\tilde{P}_{\tilde{y}}) \frac{1}{h} = -\rho g + \rho g\tilde{P}_{\tilde{y}}$$

Quando efetuamos as substituições nos sistemas (ii) e (iii), abandonando a notação “ $\sim$ ”, obtemos

$$(iv) \left\{ \begin{array}{ll} \beta\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 & \text{em } 0 < y < 1 + \alpha\eta, \\ \eta_t + \alpha\phi_x\eta_x = \frac{1}{\beta}\phi_y & \text{em } y = 1 + \alpha\eta, \\ \phi_t + \frac{\alpha}{2} \left( \phi_x^2 + \frac{1}{\beta}\phi_y^2 \right) + \eta = 0 & \text{em } y = 1 + \alpha\eta, \\ \phi_y = 0 & \text{em } y = 0. \end{array} \right.$$

$$(v) \left\{ \begin{array}{ll} u_x + v_y = 0 & \text{em } 0 < y < 1 + \alpha\eta, \\ u_t + uu_x + vv_y = -P_x & \text{em } 0 < y < 1 + \alpha\eta, \\ \beta[v_t + uv_x + vv_y] = -P_y & \text{em } 0 < y < 1 + \alpha\eta, \\ \alpha(\eta_t + \eta_x u) = v & \text{em } y = 1 + \alpha\eta, \\ P = \alpha\eta & \text{em } y = 1 + \alpha\eta, \\ v = 0 & \text{em } y = 0, \end{array} \right.$$

onde  $\alpha = \frac{a}{h}$  é chamado de parâmetro de não-linearidade uma vez que, em ambos os siste-

mas acompanha os termos não lineares e  $\beta = \frac{h^2}{\lambda^2}$  é chamado de parâmetro de dispersão.

Quando  $\beta$  é muito pequeno, isto é, a profundidade do meio é muito menor que o comprimento da onda, dizemos que estamos no regime de águas rasas ou ondas longas. Por outro lado, se  $\beta$  é grande dizemos que estamos no regime de águas profundas ou ondas curtas.

**Observação 1.3.1.** *As novas variáveis provenientes de (1.3.1) e (1.3.2) não têm dimensão. De fato, denotemos por*

$$[L] = \text{unidade de comprimento}$$

*e façamos a seguinte análise de dimensão:*

$$x = \lambda \tilde{x} \Rightarrow [x] = [\lambda \tilde{x}] = [\lambda][\tilde{x}].$$

*Como  $[x] = [\lambda] = [L]$ , então,*

$$[\tilde{x}] = 1.$$

*Por conseguinte,  $\tilde{x}$  é uma quantidade com nenhuma dimensão física associada. Por tal motivo é chamada de variável adimensional.*

*Podemos aplicar o mesmo processo a todas as variáveis “ $\sim$ ”, colocando*

$$[T] = \text{unidade de tempo},$$

$$[M] = \text{unidade de massa}.$$

*Portanto, concluímos que as variáveis “ $\sim$ ” são todas adimensionais.*

## 1.4 Relação de dispersão de ondas aquáticas de gravidade

As ondas aquáticas são geradas a partir de uma força externa que causa um distúrbio no meio, majoritariamente, esta força é a gravidade e dá origem ao que chamamos de Ondas de Gravidade. Quando a amplitude da onda é muito menor quando comparada a profundidade do meio,  $h$ , dizemos que a onda é linear. Matematicamente, as ondas lineares são entendidas como a solução das equações governantes **(iv)** ou **(v)** no caso particular em que  $\alpha \rightarrow 0$ . Neste contexto o sistema **(iv)** torna-se:

$$(S.L.) \left\{ \begin{array}{ll} \beta \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 & \text{em } 0 < y < 1, & (1.4.1) \\ \eta_t = \frac{1}{\beta} \phi_y & \text{em } y = 1, & (1.4.2) \\ \phi_t + \eta = 0 & \text{em } y = 1, & (1.4.3) \\ \phi_y = 0 & \text{em } y = 0. & (1.4.4) \end{array} \right.$$

Note que neste caso o sistema de equações governantes se torna linear, o que explica a adoção da nomenclatura onda linear.

As ondas lineares possuem uma relação de dispersão característica, descrita pela equação adimensional

$$\omega^2 = \frac{k \tanh(\sqrt{\beta}k)}{\sqrt{\beta}}$$

Para obter esta relação vamos procurar por soluções na forma de trens de onda para o sistema (*S.L.*).

Com efeito, suponha que  $\eta(x, t) = A_k e^{i(kx - \omega t)}$ . Então, segue da equação (1.4.3) que

$$\phi_t(x, 0, t) = -\eta(x, t) = -A_k e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\Rightarrow \phi(x, 0, t) = \frac{A_k}{i\omega} e^{i(kx - \omega t)}.$$

O que nos sugere que

$$\phi(x, y, t) = f(y)e^{i(kx - \omega t)}. \quad (1.4.5)$$

Note que,

$$\phi_{xx} = f(y)(ik)^2 e^{i(kx - \omega t)},$$

$$\phi_y = f'(y)e^{i(kx - \omega t)},$$

$$\phi_{yy} = f''(y)e^{i(kx - \omega t)}.$$

Substituindo (1.4.5) em (1.4.1) temos

$$\beta(ik)^2 f + f'' = 0.$$

Segue também de (1.4.4) que

$$\phi_y(x, 0, y) = f'(0)e^{i(kx - \omega t)} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0.$$

Logo,

$$\begin{cases} -\beta k^2 f + f'' = 0, & (1.4.6) \\ f'(0) = 0. & (1.4.7) \end{cases}$$

Como a EDO (equação diferencial ordinária) acima é linear e homogênea, sua solução geral é

$$f(y) = E e^{(\sqrt{\beta}ky)} + F e^{-(\sqrt{\beta}ky)} \quad (1.4.8)$$

Agora, resta determinar as constantes E e F para que  $f'(y) = 0$ . Desta forma, substituindo (1.4.8) em (1.4.7) obtemos que

$$\begin{aligned} f'(y) &= \sqrt{\beta}k(E e^{(\sqrt{\beta}ky)} - F e^{-(\sqrt{\beta}ky)}) \\ \Rightarrow f'(0) &= \sqrt{\beta}k(E - F) = 0 \\ \Rightarrow E &= F. \end{aligned}$$

Assim,

$$f(y) = 2F \left( \frac{e^{(\sqrt{\beta}ky)} + e^{-(\sqrt{\beta}ky)}}{2} \right) = 2F \cosh(\sqrt{\beta}ky).$$

E portanto,

$$\phi(x, y, t) = 2F \cosh(\sqrt{\beta}ky) e^{i(kx - \omega t)}. \quad (1.4.9)$$

As equações (1.4.2) e (1.4.3) implicam que

$$\phi_{tt} = -\eta_t = -\frac{1}{\beta} \phi_y \Rightarrow \phi_{tt} + \frac{1}{\beta} \phi_y = 0 \quad \text{em } y = 1.$$

De (1.4.9) temos que

- $\phi_{tt} = -\omega^2 2F \cosh(\sqrt{\beta}ky) e^{i(kx - \omega t)}$ 

$$\Rightarrow \phi_{tt}(x, 1, t) = -\omega^2 2F \cosh(\sqrt{\beta}k) e^{i(kx - \omega t)}.$$
- $\phi_y = \sqrt{\beta}k 2F \sinh(\sqrt{\beta}ky) e^{i(kx - \omega t)}$ 

$$\Rightarrow \phi_y(x, 0, t) = \sqrt{\beta}k 2F \sinh(\sqrt{\beta}k) e^{i(kx - \omega t)}.$$

Substituindo na equação anterior obtemos

$$-\omega^2 2F \cosh(\sqrt{\beta}k) + \frac{1}{\beta} \sqrt{\beta}k 2F \sinh(\sqrt{\beta}k) = 0.$$

E portanto

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k \tanh(\sqrt{\beta}k)}{\sqrt{\beta}}}$$

**Observação 1.4.1.** (*Velocidade de ondas longas*) No caso particular em que o comprimento da onda  $\lambda$  é muito maior do que a profundidade de referência  $h$ , isto é, na hipótese

de ondas longas, o termo  $\sqrt{\beta}k = \frac{2\pi h}{\lambda^2} \ll 1$ , o que nos permite utilizar a aproximação  $\tanh(\sqrt{\beta}k) \approx \sqrt{\beta}k$  e então, a relação de dispersão obtida se resume a

$$\omega^2 = \frac{k\sqrt{\beta}k}{\sqrt{\beta}} \Rightarrow \omega^2 = k^2 \Rightarrow c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = 1 \Rightarrow |c| = 1.$$

Isto nos diz que a velocidade das ondas aquáticas no regime de ondas longas é constante e equivale a uma unidade do parâmetro de velocidade ( $c_0$ ) escolhido, isto é,

$$c_{dim} = \sqrt{gh}.$$

Uma aplicação dessa fórmula é na velocidade de propagação de ondas de tsunamis. Em alto mar, as tsunamis são ondas cuja amplitude é cerca de um metro e comprimento na ordem de centenas de quilômetros. Assim, levando em consideração que a profundidade típica em alto mar é de 4000m, estas ondas se enquadram na teoria linear no regime de ondas longas<sup>2</sup>. Dessa forma, considerando  $g = 10\text{m/s}^2$ , temos

$$c_{tsunami} = \sqrt{gh} = \sqrt{40000} = 200\text{m/s} = 720\text{km/h}.$$

---

<sup>2</sup>Commonwealth of Australia 2020, Bureau of Meteorology. Tsunami Facts and Information. Disponível em: <http://www.bom.gov.au/tsunami/info/index.shtml>.

# Capítulo 2

## As Equações de Boussinesq

Neste capítulo iremos deduzir as equações de Boussinesq a partir das equações de Euler adimensionais vistas na seção 1.3. Também mostraremos um modelo para a ondas longas lineares. Os conteúdos que serão apresentados neste capítulo e no capítulo seguinte foram baseados nas notas de aula do professor André Nachbin ([14]).

### 2.1 Análise assintótica: ondas não lineares fracamente dispersivas

Considere as equações governantes para ondas de superfície adimensionais nos parâmetros de não-linearidade ( $\alpha$ ) e dispersão ( $\beta$ ) escrita na formulação da teoria do potencial (veja seção (1.3)):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \beta\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 & \text{em } 0 < y < 1 + \alpha\eta, \end{array} \right. \quad (2.1.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \eta_t + \alpha\phi_x\eta_x = \frac{1}{\beta}\phi_y & \text{em } y = 1 + \alpha\eta, \end{array} \right. \quad (2.1.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi_t + \frac{\alpha}{2} \left( \phi_x^2 + \frac{1}{\beta}\phi_y^2 \right) + \eta = 0 & \text{em } y = 1 + \alpha\eta, \end{array} \right. \quad (2.1.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi_y = 0 & \text{em } y = 0. \end{array} \right. \quad (2.1.4)$$

Vamos estudar o caso em que  $0 < \beta \ll 1$  sem nenhuma hipótese sobre  $\alpha$ , que corresponde à teoria de ondas longas. Nessas condições, as equações (2.1.1)-(2.1.4) constituem um sistema de equações diferenciais parciais não lineares, com uma fronteira livre e móvel, o que torna desafiador obter uma fórmula fechada para a solução, assim como o seu estudo computacional. Não obstante, a hipótese  $0 < \beta \ll 1$  nos permite aplicar uma técnica mo-

derna no tratamento de EDPs não-lineares: análise assintótica. Mais precisamente, essa ferramenta esteia-se em procurar por soluções de (2.1.1)-(2.1.4) da forma

$$\phi = \phi_0 + \beta\phi_1 + \beta^2\phi_2 + \beta^3\phi_3 \dots \quad (2.1.5)$$

em que  $\phi_i, i = 0, 1, \dots$ , são funções a serem determinadas *a posteriori*, e a soma (2.1.5) é entendida apenas como uma notação, isto não significa convergência de série. Na prática, uma expansão assintótica raramente vai além de 5 termos. Mais detalhes sobre análise assintótica e suas nuances podem ser encontrados em Johnson ([8], p.35).

Ao substituírmos (2.1.5) em (2.1.1) temos

$$\beta(\phi_{0,xx} + \beta\phi_{1,xx} + \mathcal{O}(\beta^2)) + (\phi_{0,yy} + \beta\phi_{1,yy} + \beta^2\phi_{2,yy} + \mathcal{O}(\beta^3)) = 0.$$

Reordenando,

$$\phi_{0,yy} + \beta(\phi_{0,xx} + \phi_{1,yy}) + \beta^2(\phi_{1,xx} + \phi_{2,yy}) + \mathcal{O}(\beta^3) = 0. \quad (2.1.6)$$

Se considerarmos a equação anterior na ordem  $\beta$ , obtemos

$$\phi_{0,yy}(x, y, t) = 0.$$

O que implica que

$$\phi_{0,y}(x, y, t) = c(x, t),$$

para alguma função  $c(x, t)$ . E então, da condição (2.1.4) obtemos que  $c(x, t) \equiv 0$ . Integrando  $\phi_{0,y}$  com respeito a  $y$  obtemos

$$\boxed{\phi_0(x, y, t) = f(x, t)}$$

Essa função nos diz que, na ordem mais baixa, a componente de velocidade horizontal ( $\phi_x$ ) não depende da coordenada  $y$ .

**Observação 2.1.1.** *É importante ressaltar que ao buscar pelas componentes  $\phi_i$  da expansão de  $\phi$  surgirão algumas constantes de integração, o que nos diz que existem infinitas aproximações para  $\phi$ . Deste modo, é aceitável que se escolha uma solução mais simples. Naturalmente, essas constantes serão consideradas identicamente nulas. Veremos no capítulo 4 que essas constantes de fato não interferem no resultado final.*

Agora, vamos considerar a equação (2.1.6) da ordem  $\beta^2$ . É fácil ver que neste caso obtemos

$$\phi_{0,xx} + \phi_{1,yy} = 0. \quad (2.1.7)$$

Se integrarmos (2.1.7) com respeito a  $y$  obtemos que

$$\begin{aligned} & \int \phi_{0,xx}(x, y, t) dy + \int \phi_{1,yy}(x, y, t) dy = c_1(x, t) \\ \Rightarrow & \int f_{xx}(x, t) dy + \phi_{1,y}(x, y, t) = c_1(x, t) \\ \Rightarrow & y f_{xx}(x, t) + \phi_{1,y}(x, y, t) = c_1(x, t) \\ \Rightarrow & \phi_{1,y}(x, y, t) = -y f_{xx}(x, t) + c_1(x, t). \end{aligned}$$

Aplicando a condição de fronteira  $\phi_y(x, 0, t) = 0$  encontramos que  $c_1 \equiv 0$ , e então

$$\begin{aligned} & \phi_{1,y}(x, y, t) = -y f_{xx}(x, t) \\ \Rightarrow & \boxed{\phi_1(x, y, t) = -\frac{y^2}{2} f_{xx}(x, t)} \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Para determinar  $\phi_2$  vamos considerar a equação (2.1.6) na ordem  $\beta^3$ :

$$\phi_{1,xx} + \phi_{2,yy} = 0. \quad (2.1.9)$$

Substituindo a equação (2.1.8) em (2.1.9) temos

$$\begin{aligned} & -\frac{y^2}{2} f_{xxxx} + \phi_{2,yy} = 0 \\ \Rightarrow & \phi_{2,y} = \frac{y^3}{6} f_{xxxx} + c_2(x, t). \end{aligned}$$

Novamente pela condição (2.1.4) temos que  $c_2 \equiv 0$ , assim,

$$\boxed{\phi_2(x, y, t) = \frac{y^4}{24} f_{xxxx}(x, t)} \quad (2.1.10)$$

Portanto, recursivamente, temos a seguinte aproximação:

$$\phi(x, y, t) = f - \beta \frac{y^2}{2!} \partial_x^2 f + \beta^2 \frac{y^4}{4!} \partial_x^4 f + \dots,$$

ou seja,

$$\phi(x, y, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\beta)^n y^{2n}}{(2n)!} \partial_x^{2n} f(x, t). \quad (2.1.11)$$

Vamos impor que a expansão assintótica (2.1.11) para  $\phi$  satisfaça as condições de fronteira livre ((2.1.2) e (2.1.3)) em  $y = 1 + \alpha\eta$ . Para isso vamos calcular  $\phi_t$ ,  $\phi_x$  e  $\phi_y$ :

$$\phi_x(x, 1 + \alpha\eta, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\beta)^n (1 + \alpha\eta)^{2n}}{(2n)!} \partial_x^{2n+1} f(x, t), \quad (2.1.12)$$

$$\phi_y(x, 1 + \alpha\eta, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\beta)^n (1 + \alpha\eta)^{2n-1}}{(2n-1)!} \partial_x^{2n} f(x, t), \quad (2.1.13)$$

$$\phi_t(x, 1 + \alpha\eta, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\beta)^n (1 + \alpha\eta)^{2n}}{(2n)!} \partial_t(\partial_x^{2n} f(x, t)). \quad (2.1.14)$$

Substituindo as aproximações acima na condição de cinemática, (2.1.2), isto é,

$$\eta_t + \alpha\phi_x\eta_x = \frac{1}{\beta} \phi_y \quad \text{em } y = 1 + \alpha\eta,$$

vamos obter

$$\begin{aligned} \eta_t + \alpha \left( f_x - \frac{\beta}{2}(1 + \alpha\eta)^2 f_{xxx} + \mathcal{O}(\beta^2) \right) \eta_x &= \\ &= \frac{1}{\beta} \left( -\beta(1 + \alpha\eta) f_{xx} + \frac{\beta^2}{6}(1 + \alpha\eta)^3 f_{xxxx} + \mathcal{O}(\beta^3) \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \eta_t + \alpha f_x \eta_x + \mathcal{O}(\alpha\beta, \beta^2) = -(1 + \alpha\eta) f_{xx} + \frac{\beta}{6} f_{xxxx} + \mathcal{O}(\beta^2, \alpha\beta)$$

$$\Rightarrow \eta_t + \alpha f_x \eta_x + (1 + \alpha\eta) f_{xx} - \frac{\beta}{6} f_{xxxx} = \mathcal{O}(\beta^2, \alpha\beta)$$

$$\Rightarrow \eta_t + [(1 + \alpha\eta) f_x]_x - \frac{\beta}{6} f_{xxxx} = \mathcal{O}(\beta^2, \alpha\beta). \quad (2.1.15)$$

Por outro lado, quando substituimos as aproximações (2.1.12), (2.1.13) e (2.1.14) na condição de Bernoulli, (2.1.3), obtemos

$$\begin{aligned}
& f_t - \frac{\beta}{2}(1 + \alpha\eta)^2 f_{xxt} + \mathcal{O}(\beta^2) + \frac{\alpha}{2} \left[ f_x - \frac{\beta}{2}(1 + \alpha\eta)^2 f_{xxx} + \mathcal{O}(\beta^2) \right]^2 + \\
& \quad + \frac{\alpha}{2\beta} \left[ -\beta(1 + \alpha\eta) f_{xx} + \frac{\beta^2}{6}(1 + \alpha\eta)^3 f_{xxxx} + \mathcal{O}(\beta^3) \right]^2 + \eta = 0 \\
\Rightarrow \quad & \eta + f_t - \frac{\beta}{2} f_{xxt} + \frac{\alpha}{2} f_x^2 = \mathcal{O}(\beta^2, \alpha\beta). \tag{2.1.16}
\end{aligned}$$

Deste modo, como primeira aproximação, abandonando os termos da ordem  $\beta^2$  e  $\alpha\beta$ , temos

$$\begin{cases} \eta_t + [(1 + \alpha\eta) f_x]_x - \frac{\beta}{6} f_{xxxx} = 0, & (2.1.17) \\ \eta + f_t + \frac{\alpha}{2} f_x^2 - \frac{\beta}{2} f_{xxt} = 0. & (2.1.18) \end{cases}$$

Recorde que a aproximação de  $\phi$  da ordem mais baixa e, conseqüentemente, a velocidade horizontal nessa mesma ordem,  $\phi_{0,x}$ , não dependem da variável  $y$ , deste modo, vamos denotar a partir de agora  $\phi_{0,x}(x, t) = f_x(x, t) = u(x, t)$ .

**Observação 2.1.2.** *Na seção 1.1, definimos a velocidade horizontal do fluido como sendo  $u(x, y, t)$ . Apesar do abuso de notação, aqui, entenda  $u(x, t)$  como sendo a aproximação de primeira ordem no parâmetro  $\beta$  para a velocidade horizontal.*

Assim, se derivarmos a equação (2.1.18) com respeito a  $x$  encontramos

$$\begin{aligned}
& \eta_x + f_{tx} + \frac{\alpha}{2}(2f_x f_{xx}) - \frac{\beta}{2} f_{xxtx} = 0 \\
\Rightarrow \quad & \eta_x + f_{xt} + \alpha f_x f_{xx} - \frac{\beta}{2} f_{xxt} = 0.
\end{aligned}$$

Fazendo a troca  $f_x = u$  na equação acima e em (2.1.17) obtemos o seguinte sistema:

$$(\text{vi}) \quad \begin{cases} u_t + \eta_x + \alpha u u_x - \frac{\beta}{2} u_{xxt} = 0, \\ \eta_t + [(1 + \alpha\eta)u]_x - \frac{\beta}{6} u_{xxx} = 0. \end{cases}$$

O sistema (vi) é um variante das versões das equações de Boussinesq. A versão clássica do sistema de Boussinesq escreve as equações governantes em termos de  $\mathcal{U}(x, t)$ , média vertical da velocidade horizontal:

$$\mathcal{U}(x, t) = \frac{1}{Y} \int_0^Y \phi_x(x, y, t) dy, \text{ onde } Y = 1 + \alpha\eta.$$

Utilizando a expansão (2.1.11) temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x, t) &= \frac{1}{1 + \alpha\eta} \int_0^{1+\alpha\eta} \frac{\partial \phi}{\partial x} dy \\ \Rightarrow \mathcal{U}(x, t) &= \frac{1}{1 + \alpha\eta} \int_0^{1+\alpha\eta} \partial_x \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\beta)^n y^{2n}}{(2n)!} \partial_x^{2n} f(x, t) \right) dy \\ \Rightarrow \mathcal{U}(x, t) &= \frac{1}{1 + \alpha\eta} \int_0^{1+\alpha\eta} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\beta)^n y^{2n}}{(2n)!} \partial_x^{2n+1} f(x, t) dy \\ &= \frac{1}{1 + \alpha\eta} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\beta)^n}{(2n)!} \left[ \int_0^{1+\alpha\eta} y^{2n} dy \right] \partial_x^{2n+1} f(x, t) \\ &= \frac{1}{1 + \alpha\eta} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\beta)^n}{(2n+1)!} (1 + \alpha\eta)^{2n+1} \partial_x^{2n+1} f(x, t) \\ \Rightarrow \mathcal{U}(x, t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\beta)^n (1 + \alpha\eta)^{2n}}{(2n+1)!} \partial_x^{2n+1} f(x, t). \end{aligned}$$

Truncando na ordem  $\mathcal{O}(\beta^2)$ , temos

$$\mathcal{U}(x, t) = f_x(x, t) - \frac{\beta(1 + \alpha\eta)^2}{6} f_{xxx}.$$

Substituindo  $f_x = u$ , segue que

$$\mathcal{U}(x, t) = u(x, t) - \frac{\beta}{6} u_{xx} + \mathcal{O}(\beta^2, \alpha\beta). \quad (2.1.19)$$

Diferenciando (2.1.19) duas vezes em relação a  $x$  e multiplicando por  $\frac{\beta}{6}$  obtemos

$$\frac{\beta}{6} \mathcal{U}_{xx}(x, t) = \frac{\beta}{6} u_{xx}(x, t) + \mathcal{O}(\beta^2, \alpha\beta). \quad (2.1.20)$$

Segue de (2.1.19) e (2.1.20) que

$$\mathcal{U}(x, t) + \frac{\beta}{6}\mathcal{U}_{xx}(x, t) = u(x, t).$$

Vamos substituir a relação acima no sistema (vi) e truncar as equações na ordem  $\mathcal{O}(\beta^2, \alpha\beta)$ . Com efeito, note que:

1. A equação  $u_t + \eta_x + \alpha uu_x - \frac{\beta}{2}u_{xxt} = 0$  implica em

$$\begin{aligned} & \left[ \mathcal{U} + \frac{\beta}{6}\mathcal{U}_{xx} \right]_t + \eta_x + \alpha \left[ \mathcal{U} + \frac{\beta}{6}\mathcal{U}_{xx} \right] \left[ \mathcal{U} + \frac{\beta}{6}\mathcal{U}_{xx} \right]_x - \frac{\beta}{2} \left[ \mathcal{U} + \frac{\beta}{6}\mathcal{U}_{xx} \right]_{xxt} = 0 \\ \Rightarrow & \mathcal{U}_t + \frac{\beta}{6}\mathcal{U}_{xxt} + \eta_x + \alpha\mathcal{U}\mathcal{U}_x + \frac{\alpha\beta}{6} \left[ (\mathcal{U}\mathcal{U}_{xx})_x + \frac{\beta}{12}(\mathcal{U}_{xx}^2)_x \right] - \frac{\beta}{2}\mathcal{U}_{xxt} - \frac{\beta^2}{12}\mathcal{U}_{xxxxt} = 0 \\ \Rightarrow & \mathcal{U}_t + \eta_x + \alpha\mathcal{U}\mathcal{U}_x + \left( \frac{\beta}{6} - \frac{\beta}{2} \right) \mathcal{U}_{xxt} = \mathcal{O}(\beta^2, \alpha\beta) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{U}_t + \eta_x + \alpha\mathcal{U}\mathcal{U}_x - \frac{\beta}{3}\mathcal{U}_{xxt} = 0}$$

2. A equação  $\eta_t + [(1 + \alpha\eta)u]_x - \frac{\beta}{6}u_{xxx} = 0$  acarreta em

$$\begin{aligned} & \eta_t + \left[ (1 + \alpha\eta) \left( \mathcal{U} + \frac{\beta}{6}\mathcal{U}_{xx} \right) \right]_x - \frac{\beta}{6} \left[ \mathcal{U} + \frac{\beta}{6}\mathcal{U}_{xx} \right]_{xxx} = 0 \\ \Rightarrow & \eta_t + \left[ (1 + \alpha\eta)\mathcal{U} + (1 + \alpha\eta)\frac{\beta}{6}\mathcal{U}_{xx} \right]_x - \frac{\beta}{6}\mathcal{U}_{xxx} + \mathcal{O}(\beta^2) = 0 \\ \Rightarrow & \eta_t + [(1 + \alpha\eta)\mathcal{U}]_x + \mathcal{O}(\beta^2, \alpha\beta) = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\eta_t + [(1 + \alpha\eta)\mathcal{U}]_x = 0}$$

Portanto, obtemos o sistema da ordem  $\mathcal{O}(\beta^2, \alpha\beta)$

$$(vii) \begin{cases} \eta_t + [(1 + \alpha\eta)\mathcal{U}]_x = 0, \\ \mathcal{U}_t + \eta_x + \alpha\mathcal{U}\mathcal{U}_x - \frac{\beta}{3}\mathcal{U}_{xxt} = 0. \end{cases}$$

Da primeira equação do sistema anterior temos

$$\begin{aligned}\eta_t &= -\mathcal{U}_x - \alpha(\eta\mathcal{U})_x \\ \Rightarrow \beta\eta_t &= -\beta\mathcal{U}_x + \mathcal{O}(\alpha\beta) \\ \Rightarrow \beta\eta_{xtt} &= -\beta\mathcal{U}_{xxt}.\end{aligned}\tag{2.1.21}$$

Substituindo (2.1.21) na segunda equação de (vii) obtemos as *aproximações de Boussinesq* na forma normalizada:

$$\begin{cases} \eta_t + [(1 + \alpha\eta)\mathcal{U}]_x = 0, & (2.1.22) \\ \mathcal{U}_t + \eta_x + \alpha\mathcal{U}\mathcal{U}_x + \frac{\beta}{3}\eta_{xtt} = 0. & (2.1.23) \end{cases}$$

A aproximação de Boussinesq, também conhecida como Equações de Boussinesq ou sistema de Boussinesq, é um modelo fracamente não linear e fracamente dispersivo e surgiu como uma primeira aproximação acerca das Ondas Solitárias deduzida em 1872 por Joseph Boussinesq([1]) com base nos experimentos de Russell.

### 2.1.1 A Equação da Onda: modelo para a dinâmica de ondas longas lineares

A equação unidimensional da onda foi descoberta por Jean-Baptiste d'Alembert em 1746 ([3]), surgindo como solução para a modelagem das vibrações em uma corda. Esta equação também é utilizada na modelagem de ondas aquáticas lineares no regime de águas rasas, conforme mostraremos a seguir.

Observe que se negligenciarmos os termos da ordem  $\beta$  no sistema (vi) obtemos as equações fundamentais de águas rasas:

$$\begin{cases} \eta_x + u_t + \alpha uu_x = 0, \\ \eta_t + [(1 + \alpha\eta)u]_x = 0. \end{cases}$$

Supondo agora que  $\alpha$  assume um valor muito próximo de 0, ou seja, linearizando o sistema acima, obtemos:

$$\begin{cases} \eta_x + u_t = 0, & (2.1.24) \\ \eta_t + u_x = 0. & (2.1.25) \end{cases}$$

Em seguida, derivando (2.1.24) em relação a  $x$  e (2.1.25) em relação a  $t$ , temos:

$$\begin{cases} \eta_{xx} + u_{xt} = 0, \\ \eta_{tt} + u_{xt} = 0. \end{cases}$$

Eliminando o termo  $u_{xt}$  obtemos a equação

$$\boxed{\eta_{tt} - \eta_{xx} = 0} \quad (2.1.26)$$

Esta é a equação da onda clássica, ela nos diz que ondas lineares no regime de águas rasas viajam com velocidade constante. Lembre que estamos nas variáveis adimensionais, cuja notação inicial era " $\sim$ ", de modo que a equação (2.1.26) é na verdade

$$\tilde{\eta}_{\tilde{t}\tilde{t}} - \tilde{\eta}_{\tilde{x}\tilde{x}} = 0.$$

Ao voltarmos para as variáveis dimensionais, o que consiste em desfazer a troca de variáveis realizada na seção (1.3), encontraremos

$$\boxed{\eta_{tt} - c_0^2 \eta_{xx} = 0}$$

onde  $c_0 = \sqrt{gh}$  corresponde à velocidade da onda.

## Capítulo 3

# Dedução da Equação de KdV via Boussinesq

Neste capítulo iremos deduzir a equação de KdV a partir das equações de Boussinesq

$$\text{(viii)} \left\{ \begin{array}{l} u_t + \eta_x + \alpha uu_x - \frac{\beta}{2} u_{xxt} = 0, \\ \eta_t + [(1 + \alpha\eta)u]_x - \frac{\beta}{6} u_{xxx} = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.0.1) \\ (3.0.2) \end{array}$$

apresentadas na seção 2.1.

Com efeito, vamos buscar por soluções viajantes de **(viii)**. Para isso vamos procurar por soluções da forma

$$\eta(x, t) = f(x - ct),$$

$$u(x, t) = g(x - ct),$$

onde  $c > 0$ .

Na aproximação da ordem  $\mathcal{O}(\alpha, \beta)$  o sistema **(viii)** tem a forma

$$\begin{cases} \eta_t + u_x = 0, \\ u_t + \eta_x = 0. \end{cases}$$

Escrevendo  $\eta(x, t) = f(z)$ ,  $u(x, t) = g(z)$ , com  $z = x - ct$  e substituindo no sistema acima encontramos

$$\begin{cases} -cf' + g' = 0, \\ -cg' + f' = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos que

$$(1 - c^2)f' = 0 \Rightarrow c = 1 \text{ ou } f' = 0.$$

Visto que estamos buscando por soluções não triviais, impomos que  $f' \neq 0$ , portanto,  $c = 1$  e conseqüentemente

$$g = f,$$

a menos de uma constante, ou seja,

$$u = \eta \quad e \quad \eta_t + \eta_x = 0. \quad (3.0.3)$$

Estamos interessados em encontrar uma solução fracamente não linear e fracamente dispersiva para (viii), isto é, uma solução da ordem  $\mathcal{O}(\alpha^2, \beta^2)$  que seja apenas uma perturbação da solução (3.0.3). Para isto, vamos supor que

$$u = \eta + \alpha P + \beta Q + \mathcal{O}(\alpha^2, \beta^2), \quad (3.0.4)$$

onde  $P$  e  $Q$  são funções que ainda precisam ser determinadas.

Desta forma, temos

$$u_t = \eta_t + \alpha P_t + \beta Q_t + \mathcal{O}(\alpha^2, \beta^2), \quad (3.0.5)$$

$$u_x = \eta_x + \alpha P_x + \beta Q_x + \mathcal{O}(\alpha^2, \beta^2). \quad (3.0.6)$$

Lembre que, de (3.0.3),

$$u_t = -u_x + \mathcal{O}(\alpha, \beta),$$

$$\eta_t = -\eta_x + \mathcal{O}(\alpha, \beta).$$

Substituindo em (3.0.5) obtemos que

$$-u_x + \mathcal{O}(\alpha, \beta) = -\eta_x + \mathcal{O}(\alpha, \beta) + \alpha P_t + \beta Q_t + \mathcal{O}(\alpha^2, \beta^2)$$

$$\Rightarrow -u_x = -\eta_x + \alpha P_t + \beta Q_t + \mathcal{O}(\alpha, \beta). \quad (3.0.7)$$

Somando as equações (3.0.6) e (3.0.7) encontramos

$$0 = \alpha (P_x + P_t) + \beta (Q_x + Q_t) + \mathcal{O}(\alpha, \beta).$$

Logo, uma condição consistente para  $P$  e  $Q$  é

$$\begin{cases} P_x + P_t = 0, & (3.0.8) \\ Q_x + Q_t = 0. & (3.0.9) \end{cases}$$

Se substituirmos a expressão (3.0.4) no sistema (viii), truncando na ordem  $\mathcal{O}(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2)$ , encontramos que:

1.  $u_t + \eta_x + \alpha u u_x - \frac{\beta}{2} u_{xxt} = 0$  implica em

$$\begin{aligned} & [\eta + \alpha P + \beta Q]_t + \eta_x + \alpha [\eta + \alpha P + \beta Q] [\eta + \alpha P + \beta Q]_x - \\ & \quad - \frac{\beta}{2} [\eta + \alpha P + \beta Q]_{xxt} = 0 \\ \Rightarrow & \quad [\eta + \alpha P + \beta Q]_t + \eta_x + \alpha \eta \eta_x - \frac{\beta}{2} \eta_{xxt} = 0 \\ \Rightarrow & \quad \eta_t + \eta_x + \alpha (P_t + \eta \eta_x) + \beta \left( Q_t - \frac{\eta_{xxt}}{2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.0.10)$$

2.  $\eta_t + [(1 + \alpha\eta)u]_x - \frac{\beta}{6} u_{xxx} = 0$  implica em

$$\begin{aligned} & \eta_t + [(1 + \alpha\eta) (\eta + \alpha P + \beta Q)]_x - \frac{\beta}{6} [\eta + \alpha P + \beta Q]_{xxx} = 0 \\ \Rightarrow & \quad \eta_t + 2\alpha\eta\eta_x + (\eta + \alpha P + \beta Q)_x - \frac{\beta}{6} \eta_{xxt} = 0 \\ \Rightarrow & \quad \eta_t + \eta_x + \alpha (P_x + 2\eta\eta_x) + \beta \left( Q_x + \frac{\eta_{xxx}}{6} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.0.11)$$

Assim, de (3.0.10) e (3.0.11), obtemos o sistema de equações

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_t + \eta_x + \alpha (P_x + 2\eta\eta_x) + \beta \left( Q_x + \frac{\eta_{xxx}}{6} \right) = 0, \end{array} \right. \quad (3.0.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_t + \eta_x + \alpha (P_t + \eta\eta_x) + \beta \left( Q_t - \frac{\eta_{xxt}}{2} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (3.0.13)$$

Para que estas equações sejam consistentes impomos que

$$P_x + 2\eta\eta_x = P_t + \eta\eta_x, \quad (3.0.14)$$

$$Q_x + \frac{\eta_{xxx}}{6} = Q_t - \frac{\eta_{xxt}}{2}. \quad (3.0.15)$$

Unindo a condição (3.0.14) à condição (3.0.8) encontramos que

$$\begin{aligned}
P_x + 2\eta\eta_x &= -P_x + \eta\eta_x \\
\Rightarrow 2P_x &= -\eta\eta_x \\
\Rightarrow \boxed{P = -\frac{\eta^2}{4}}
\end{aligned}$$

Das condições (3.0.15), (3.0.9) e (3.0.3) obtemos que

$$\begin{aligned}
Q_x + \frac{\eta_{xxx}}{6} &= -Q_x - \frac{\eta_{xxt}}{2} \\
\Rightarrow 2Q_x &= -\frac{\eta_{xxx}}{6} - \frac{\eta_{xxt}}{2} \\
\Rightarrow 2Q_x &= -\frac{\eta_{xxx}}{6} + \frac{\eta_{xxx}}{2} \\
\Rightarrow Q_x &= \frac{\eta_{xxx}}{6} \\
\Rightarrow \boxed{Q = \frac{\eta_{xx}}{6}}
\end{aligned}$$

Portanto, a igualdade (3.0.4) acarreta em

$$u = \eta + \frac{\alpha}{4}\eta^2 + \frac{\beta}{6}\eta_{xx}.$$

Além disso, segue de (3.0.12) que

$$\begin{aligned}
\eta_t + \eta_x + \alpha(P_x + 2\eta\eta_x) + \beta\left(Q_x + \frac{\eta_{xxx}}{6}\right) &= 0 \\
\Rightarrow \eta_t + \eta_x + \alpha\left[-\left(\frac{\eta^2}{4}\right)_x + 2\eta\eta_x\right] + \beta\left[\left(\frac{\eta_{xx}}{6}\right)_x + \frac{\eta_{xxx}}{6}\right] &= 0 \\
\Rightarrow \eta_t + \eta_x + \alpha\left(-\frac{\eta\eta_x}{2} + 2\eta\eta_x\right) + \beta\left(\frac{\eta_{xxx}}{6} + \frac{\eta_{xxx}}{6}\right) &= 0.
\end{aligned}$$

De onde obtemos a equação de KdV

$$\boxed{\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2} \alpha \eta \eta_x + \frac{1}{3} \beta \eta_{xxx} = 0} \quad (3.0.16)$$

É importante mencionar que esta equação foi obtida sob a hipótese que  $\alpha$  e  $\beta$  são de mesma ordem e suficientemente pequenos de modo que os termos da ordem  $\mathcal{O}(\alpha^2)$ ,  $\mathcal{O}(\alpha\beta)$  e  $\mathcal{O}(\beta^2)$  sejam desprezíveis.

**Observação 3.0.1.** *(Forma reduzida da equação de KdV) Em contextos mais gerais, a equação de KdV aparece na forma*

$$\eta_t + a_1 \eta_x + a_2 \eta \eta_x + a_3 \eta_{xxx} = 0,$$

onde  $a_1, a_2 \neq 0$  e  $a_3 > 0$ .

Ainda podemos simplificar esta equação ao efetuar a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{a_3} \tilde{x}, & t &= \sqrt{a_3} \tilde{t}, \\ \zeta &= a_1 + a_2 \eta. \end{aligned}$$

Assim,

$$\eta_t = \frac{1}{a_2 \sqrt{a_3}} \zeta_{\tilde{t}},$$

$$\eta_x = \frac{1}{a_2 \sqrt{a_3}} \zeta_{\tilde{x}},$$

$$\eta_{xxx} = \frac{1}{a_2 a_3 \sqrt{a_3}} \zeta_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}}.$$

Substituindo no sistema anterior obtemos

$$\left( \frac{\zeta_{\tilde{t}}}{a_2 \sqrt{a_3}} \right) + a_1 \left( \frac{\zeta_{\tilde{x}}}{a_2 \sqrt{a_3}} \right) + a_2 \left( \frac{-a_1 + \zeta}{a_2} \right) \left( \frac{\zeta_{\tilde{x}}}{a_2 \sqrt{a_3}} \right) + a_3 \left( \frac{\zeta_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}}}{a_2 a_3 \sqrt{a_3}} \right) = 0.$$

Após algumas simplificações, abandonando a notação " $\sim$ ", obtemos a Equação de KdV simplificada

$$\zeta_t + \zeta \zeta_x + \zeta_{xxx} = 0.$$

## Capítulo 4

# Outras deduções para a Equação de KdV

No capítulo anterior deduzimos a Equação de KdV a partir das equações de Boussinesq. Aqui surge um questionamento, será que podemos obter a KdV a partir de contextos mais gerais? Neste capítulo veremos que a equação de KdV surge a partir das equações completas da teoria do potencial e mais ainda, podemos descartar a hipótese da existência de um potencial de velocidade e deduzi-la diretamente das Equações de Euler. Estas deduções foram adaptadas dos livros de Drazin & Johnson ([5], p.10) e Lokenath ([4], p.440) respectivamente.

### 4.1 Dedução da KdV diretamente da Teoria do Potencial

Vamos deduzir a Equação de KdV agora partindo das equações completas da teoria do potencial (sistema (iv) da seção 1.3),

$$\left\{ \begin{array}{ll} \beta\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 & \text{em } 0 < y < 1 + \alpha\eta, \end{array} \right. \quad (4.1.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \eta_t + \alpha\phi_x\eta_x = \frac{1}{\beta}\phi_y & \text{em } y = 1 + \alpha\eta, \end{array} \right. \quad (4.1.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi_t + \frac{\alpha}{2} \left( \phi_x^2 + \frac{1}{\beta}\phi_y^2 \right) + \eta = 0 & \text{em } y = 1 + \alpha\eta, \end{array} \right. \quad (4.1.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi_y = 0 & \text{em } y = 0. \end{array} \right. \quad (4.1.4)$$

Para isso, introduziremos as seguintes variáveis:

$$\xi = \frac{\alpha^{1/2}}{\beta^{1/2}}(x - t), \quad \tau = \frac{\alpha^{3/2}}{\beta^{1/2}} t, \quad \Phi = \frac{\alpha^{1/2}}{\beta^{1/2}} \phi.$$

**Observação 4.1.1.** A variável  $\xi$  é conhecida como variável viajante e representa a região no espaço onde compreende-se a equação de KdV.

Desta forma,

$$\phi_x = \frac{\beta^{1/2}}{\alpha^{1/2}} \Phi_\xi \frac{d\xi}{dx} = \frac{\beta^{1/2}}{\alpha^{1/2}} \frac{\alpha^{1/2}}{\beta^{1/2}} \Phi_\xi = \Phi_\xi,$$

$$\phi_t = \frac{\beta^{1/2}}{\alpha^{1/2}} \left( \Phi_\xi \frac{d\xi}{dt} + \Phi_\tau \frac{d\tau}{dt} \right) = \frac{\beta^{1/2}}{\alpha^{1/2}} \left( -\frac{\alpha^{1/2}}{\beta^{1/2}} \Phi_\xi + \frac{\alpha^{3/2}}{\beta^{1/2}} \Phi_\tau \right) = -\Phi_\xi + \alpha \Phi_\tau,$$

$$\phi_y = \frac{\beta^{1/2}}{\alpha^{1/2}} \Phi_y,$$

$$\phi_{xx} = \frac{\alpha^{1/2}}{\beta^{1/2}} \Phi_{\xi\xi},$$

$$\phi_{yy} = \frac{\beta^{1/2}}{\alpha^{1/2}} \Phi_{yy},$$

$$\eta_x = \eta_\xi \frac{d\xi}{dx} = \frac{\alpha^{1/2}}{\beta^{1/2}} \eta_\xi,$$

$$\eta_t = \eta_\xi \frac{d\xi}{dt} + \eta_\tau \frac{d\tau}{dt} = \frac{\alpha^{1/2}}{\beta^{1/2}} (-\eta_\xi + \alpha \eta_\tau).$$

Substituindo no sistema obtemos que:

- De (4.1.1)

$$\beta \frac{\alpha^{1/2}}{\beta^{1/2}} \Phi_{\xi\xi} + \frac{\beta^{1/2}}{\alpha^{1/2}} \Phi_{yy} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha \Phi_{\xi\xi} + \Phi_{yy} = 0}$$

- De (4.1.2)

$$\frac{\alpha^{1/2}}{\beta^{1/2}} (-\eta_\xi + \alpha \eta_\tau) + \alpha \Phi_\xi \frac{\alpha^{1/2}}{\beta^{1/2}} \eta_\xi = \frac{1}{\beta} \frac{\beta^{1/2}}{\alpha^{1/2}} \Phi_y$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha(-\eta_\xi + \alpha \eta_\tau + \alpha \Phi_\xi \eta_\xi) = \Phi_y}$$

- De (4.1.3)

$$(-\Phi_\xi + \alpha\Phi_\tau) + \frac{\alpha}{2} \left[ \phi_\xi^2 + \frac{1}{\beta} \left( \frac{\beta^{1/2}}{\alpha^{1/2}} \Phi_y \right)^2 \right] + \eta = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta - \Phi_\xi + \alpha\Phi_\tau + \frac{1}{2}(\Phi_y^2 + \alpha\Phi_\xi^2) = 0}$$

- De (4.1.4)

$$\boxed{\Phi_y = 0}$$

Donde obtemos um novo sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha\Phi_{\xi\xi} + \Phi_{yy} = 0 & \text{em } 0 < y < 1 + \alpha\eta(\xi, \tau), \end{array} \right. \quad (4.1.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha(-\eta_\xi + \alpha\eta_\tau + \alpha\Phi_\xi\eta_\xi) = \Phi_y & \text{em } y = 1 + \alpha\eta(\xi, \tau), \end{array} \right. \quad (4.1.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \eta - \Phi_\xi + \alpha\Phi_\tau + \frac{1}{2}(\Phi_y^2 + \alpha\Phi_\xi^2) = 0 & \text{em } y = 1 + \alpha\eta(\xi, \tau), \end{array} \right. \quad (4.1.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi_y = 0 & \text{em } y = 0. \end{array} \right. \quad (4.1.8)$$

Observe que esse sistema está aliado a apenas um parâmetro,  $\alpha$ .

Assim como no capítulo anterior, vamos aplicar uma expansão assintótica para determinar a solução do sistema. Com efeito, vamos buscar por soluções da forma

$$\Phi = \Phi_0 + \alpha\Phi_1 + \alpha^2\Phi_2 + \dots, \quad (4.1.9)$$

$$\eta = \eta_0 + \alpha\eta_1 + \alpha^2\eta_2 + \dots. \quad (4.1.10)$$

Observe que se substituirmos (4.1.9) e (4.1.10) no sistema anterior, mantendo as equações na ordem  $\mathcal{O}(\alpha)$  encontramos:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi_{0,yy} = 0 & \text{em } 0 < y < 1, \end{array} \right. \quad (4.1.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi_{0,y} = 0 & \text{em } y = 1, \end{array} \right. \quad (4.1.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \eta_0 - \Phi_{0,\xi} + \frac{1}{2}(\Phi_{0,y}^2) = 0 & \text{em } y = 1, \end{array} \right. \quad (4.1.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi_{0,y} = 0 & \text{em } y = 0. \end{array} \right. \quad (4.1.14)$$

Note que da equação (4.1.11) temos

$$\int \Phi_{0,yy} = \Phi_{0,y} = g(\xi, \tau),$$

para alguma função  $g$ . Segue de (4.1.14) que  $g \equiv 0$  e então,

$$\int \Phi_{0,y} = \Phi_0 = f(\xi, \tau) \quad \text{em } 0 < y < 1,$$

para alguma função  $f$ .

Por outro lado, de (4.1.12) e (4.1.13) obtemos

$$\eta_0 = \Phi_{0,\xi} \quad \text{em } y = 1.$$

Portanto, encontramos uma solução para o sistema (4.1.11) e (4.1.14):

$$\begin{cases} \Phi_0(\xi, y, \tau) = f(\xi, \tau), & (4.1.15) \\ \Phi_{0,\xi}(\xi, y, \tau) = \eta_0(\xi, \tau) = f_\xi(\xi, \tau). & (4.1.16) \end{cases}$$

Agora, se substituirmos as expansões assintóticas (4.1.9) e (4.1.10) em (4.1.5), mantendo as equações na ordem  $\mathcal{O}(\alpha^2)$ , obtemos que:

$$\begin{cases} \alpha\Phi_{0,\xi\xi} + \Phi_{0,yy} + \alpha\Phi_{1,yy} = 0 & \text{em } 0 < y < 1 + \alpha\eta_0, \\ \Phi_{0,y} + \alpha\Phi_{1,y} = 0 & \text{em } y = 0. \end{cases}$$

Por conseguinte, segue das equações (4.1.11) e (4.1.14) que

$$\begin{cases} \Phi_{0,\xi\xi} + \Phi_{1,yy} = 0 & \text{em } 0 < y < 1, & (4.1.17) \\ \Phi_{1,y}(\xi, \tau, 0) = 0 & \text{em } y = 0. & (4.1.18) \end{cases}$$

Consequentemente, integrando (4.1.17) com respeito a  $y$ , obtemos

$$\Phi_{1,y} = -y\Phi_{0,\xi\xi} + c(\xi, \tau),$$

para alguma função  $c(\xi, \tau)$ . A condição (4.1.18) implica  $c(\xi, \tau) \equiv 0$ . Portanto, após integrar  $\Phi_{1,y}$ , encontramos que

$$\Phi_1 = -\frac{y^2}{2}\Phi_{0,\xi\xi} + f_1(\xi, \tau),$$

para alguma função  $f_1(\xi, \tau)$ .

Finalmente, de (4.1.15) temos

$$\Phi_1 = -\frac{y^2}{2}f_{\xi\xi} + f_1(\xi, \tau). \quad (4.1.19)$$

Continuando a análise assintótica, se substituirmos as expansões (4.1.9) e (4.1.10) nas

equações (4.1.5) e (4.1.8), mantendo as equações na ordem  $\mathcal{O}(\alpha^3)$ , vamos obter que

$$\begin{cases} \alpha\Phi_{0,\xi\xi} + \Phi_{0,yy} + \alpha\Phi_{1,yy} + \alpha^2(\Phi_{1,\xi\xi} + \Phi_{2,yy}) = 0 & \text{em } 0 < y < 1 + \alpha(\eta_0 + \alpha\eta_1), \\ \Phi_{0,y} + \alpha\Phi_{1,y} + \alpha^2\Phi_{2,y} = 0 & \text{em } y = 0. \end{cases}$$

Usando os resultados anteriores, temos:

$$\begin{cases} \Phi_{1,\xi\xi} + \Phi_{2,yy} = 0 & \text{em } 0 < y < 1, \\ \Phi_{2,y} = 0 & \text{em } y = 0. \end{cases} \quad (4.1.20)$$

$$\Phi_{2,y} = 0 \quad \text{em } y = 0. \quad (4.1.21)$$

Substituindo (4.1.19) na equação (4.1.20) vamos encontrar que

$$\Phi_{2,yy} = \frac{y^2}{2}f_{\xi\xi\xi\xi} - f_{1,\xi\xi}.$$

Integrando a equação acima obtemos

$$\Phi_{2,y} = \frac{y^3}{6}f_{\xi\xi\xi\xi} - yf_{1,\xi\xi} + h(\xi, \tau),$$

para algum  $h(\xi, \tau)$ . Então, da condição (4.1.21) temos  $h \equiv 0$ . Logo, integrando  $\Phi_{2,y}$ , obtemos

$$\Phi_2 = f_2 - \frac{y^2}{2}f_{1,\xi\xi} + \frac{y^4}{24}f_{\xi\xi\xi\xi}.$$

para algum  $f_2(\xi, \tau)$ . Assim, substituindo os valores encontrados para  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  na expansão (4.1.9), concluímos que

$$\Phi = f + \alpha \left( f_1 - \frac{y^2}{2}f_{\xi\xi} \right) + \alpha^2 \left( f_2 - \frac{y^2}{2}f_{1,\xi\xi} + \frac{y^4}{24}f_{\xi\xi\xi\xi} \right) + \mathcal{O}(\alpha^3). \quad (4.1.22)$$

**Observação 4.1.2.**  $f_i = f_i(\xi, \tau)$ ,  $i = 1, 2$  são funções arbitrárias resultantes da integração de  $\Phi_{1,y}$  e  $\Phi_{2,y}$ .

Agora, vamos substituir (4.1.22) nas condições de fronteira (4.1.6) e (4.1.7). Para isso, note que

$$\begin{cases} \Phi_\tau(\xi, \tau, 1 + \alpha\eta_0) = f_\tau + \alpha \left( f_{1,\tau} - \frac{1}{2}f_{\xi\xi\tau} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2), \\ \Phi_\xi(\xi, \tau, 1 + \alpha\eta_0) = f_\xi + \alpha \left( f_{1,\xi} - \frac{1}{2}f_{\xi\xi\xi} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2), \\ \Phi_y(\xi, \tau, 1 + \alpha\eta_0) = -\alpha(1 + \alpha\eta_0)f_{\xi\xi} + \alpha^2 \left( -f_{1,\xi\xi} + \frac{1}{6}f_{\xi\xi\xi\xi} \right) + \mathcal{O}(\alpha^3). \end{cases} \quad (4.1.23)$$

Substituindo (4.1.23) na equação (4.1.6) obtemos que

$$\alpha(-\eta_\xi + \alpha\eta_\tau + \alpha\Phi_\xi\eta_\xi) = \Phi_y$$

implica em

$$\alpha(-\eta_{0,\xi} - \alpha\eta_{1,\xi} + \alpha\eta_{0,\tau} + \alpha f_\xi\eta_{0,\xi}) = -\alpha(1 + \alpha\eta)f_{\xi\xi} + \alpha^2 \left( -f_{1,\xi\xi} + \frac{1}{6}f_{\xi\xi\xi\xi} \right) + \mathcal{O}(\alpha^3),$$

o que por sua vez acarreta em

$$-\eta_{0,\xi} - \alpha\eta_{1,\xi} + \alpha\eta_{0,\tau} + \alpha f_\xi\eta_{0,\xi} = -f_{\xi\xi} - \alpha\eta_0 f_{\xi\xi} - \alpha f_{1,\xi\xi} + \alpha \frac{1}{6}f_{\xi\xi\xi\xi} + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (4.1.24)$$

Ao substituir (4.1.23) em (4.1.7) segue que

$$\eta - \Phi_\xi + \alpha\Phi_\tau + \frac{1}{2}(\Phi_y^2 + \alpha\Phi_\xi^2) = 0$$

implica em

$$\eta_0 + \alpha\eta_1 - \left[ f_\xi + \alpha \left( f_{1,\xi} - \frac{1}{2}f_{\xi\xi\xi} \right) \right] + \alpha f_\tau + \frac{1}{2}\alpha f_\xi^2 = \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (4.1.25)$$

Portanto, (4.1.24) e (4.1.25) fornecem o seguinte sistema de equações na ordem  $\mathcal{O}(\alpha^2)$ :

$$\begin{cases} -\eta_{0,\xi} - \alpha\eta_{1,\xi} + \alpha\eta_{0,\tau} + \alpha f_\xi\eta_{0,\xi} = -f_{\xi\xi} - \alpha\eta_0 f_{\xi\xi} - \alpha f_{1,\xi\xi} + \alpha \frac{1}{6}f_{\xi\xi\xi\xi}, & (4.1.26) \\ \eta_0 + \alpha\eta_1 - \left[ f_\xi + \alpha \left( f_{1,\xi} - \frac{1}{2}f_{\xi\xi\xi} \right) \right] + \alpha f_\tau + \frac{1}{2}\alpha f_\xi^2 = 0. & (4.1.27) \end{cases}$$

Derivando (4.1.27) em relação a  $\xi$  obtemos

$$\begin{cases} -\eta_{0,\xi} - \alpha\eta_{1,\xi} + \alpha\eta_{0,\tau} + \alpha f_\xi\eta_{0,\xi} = -f_{\xi\xi} - \alpha\eta_0 f_{\xi\xi} - \alpha f_{1,\xi\xi} + \alpha \frac{1}{6}f_{\xi\xi\xi\xi}, & (4.1.28) \\ \eta_{0,\xi} + \alpha\eta_{1,\xi} - \left[ f_{\xi\xi} + \alpha \left( f_{1,\xi\xi} - \frac{1}{2}f_{\xi\xi\xi\xi} \right) \right] + \alpha f_{\xi\tau} + \alpha f_\xi f_{\xi\xi} = 0. & (4.1.29) \end{cases}$$

Lembre que, de (4.1.16),

$$\eta_0 = f_\xi.$$

Substituindo no sistema anterior encontramos:

$$\begin{cases} -\eta_{0,\xi} - \alpha\eta_{1,\xi} + \alpha\eta_{0,\tau} + \alpha\eta_0\eta_{0,\xi} = -\eta_{0,\xi} - \alpha\eta_0\eta_{0,\xi} - \alpha f_{1,\xi\xi} + \alpha\frac{1}{6}\eta_{0,\xi\xi\xi}, \\ \eta_{0,\xi} + \alpha\eta_{1,\xi} - \left[ \eta_{0,\xi} + \alpha \left( f_{1,\xi\xi} - \frac{1}{2}\eta_{0,\xi\xi\xi} \right) \right] + \alpha\eta_\tau + \alpha\eta_0\eta_{0,\xi} = 0. \end{cases}$$

Consequentemente, após algumas manipulações algébricas simples, obtemos

$$\begin{cases} -\eta_{1,\xi} + \eta_{0,\tau} + \eta_0\eta_{0,\xi} = -\eta_0\eta_{0,\xi} - f_{1,\xi\xi} + \frac{1}{6}\eta_{0,\xi\xi\xi}, \end{cases} \quad (4.1.30)$$

$$\begin{cases} \eta_{1,\xi} - f_{1,\xi\xi} + \frac{1}{2}\eta_{0,\xi\xi\xi} + \eta_{0,\tau} + \eta_0\eta_\xi = 0. \end{cases} \quad (4.1.31)$$

Somando (4.1.30) e (4.1.31) obtemos que  $\eta_0(\xi, \tau)$  deve satisfazer a equação de KdV

$$2\eta_{0,\tau} + 3\eta_0\eta_{0,\xi} + \frac{1}{3}\eta_{0,\xi\xi\xi} = 0.$$

**Observação 4.1.3.** *Note que as constantes de integração  $f_1$  e  $f_2$  não interferiram na dedução da equação. Isto nos leva a refletir que, na seção 2.1, mesmo se tivéssemos levado em consideração as constantes de integração que surgiram no processo de obter valores para as funções  $\phi_i$ , elas não afetariam os resultados encontrados.*

## 4.2 Dedução da KdV via Equações de Euler

Na seção anterior utilizamos o sistema de equações advindo da teoria do potencial, mas, como vimos na seção 1.3, também podemos escrever o sistema de equações governantes na forma

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_x + v_y = 0 & \text{em } 0 < y < 1 + \alpha\eta, \\ u_t + uu_x + vv_y = -P_x & \text{em } 0 < y < 1 + \alpha\eta, \\ \beta[v_t + uv_x + vv_y] = -P_y & \text{em } 0 < y < 1 + \alpha\eta, \\ \alpha(\eta_t + \eta_x u) = v & \text{em } y = 1 + \alpha\eta, \\ P = \alpha\eta & \text{em } y = 1 + \alpha\eta, \\ v = 0 & \text{em } y = 0. \end{array} \right.$$

Nesta seção vamos deduzir a equação de KdV a partir deste sistema. Para isso, vamos fazer um reescalonamento no tempo e no eixo  $x$  utilizando a troca de variáveis

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \hat{x}, & t &= \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \hat{t}, \\ P &= \alpha\hat{P}, & u &= \alpha\hat{u}, & v &= \alpha\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \hat{v}, \end{aligned}$$

a qual resulta no sistema abaixo, que, por conveniência, foi escrito sem a notação  $\wedge$ .

$$\text{(ix)} \left\{ \begin{array}{ll} u_t + \alpha(uu_x + vv_y) = -P_x & \text{em } 0 < y < 1 + \alpha\eta \\ \alpha[v_t + \alpha(uv_x + vv_y)] = -P_y & \text{em } 0 < y < 1 + \alpha\eta \\ u_x + v_y = 0 & \text{em } 0 < y < 1 + \alpha\eta \\ v = \eta_t + \alpha\eta_x u, & \text{em } y = 1 + \alpha\eta \\ P = \eta & \text{em } y = 1 + \alpha\eta, \\ v = 0 & \text{em } y = 0. \end{array} \right.$$

Por fim, vamos efetuar a mudança para as variáveis viajantes

$$\xi = x - t \quad \text{e} \quad \tau = \alpha t,$$

a qual implica em:

$$u_x = u_\xi, \quad u_t = -u_\xi + \alpha u_\tau,$$

$$v_x = v_\xi, \quad v_t = -v_\xi + \alpha v_\tau,$$

$$\eta_x = \eta_\xi, \quad \eta_t = -\eta_\xi + \eta_\tau,$$

$$P_x = P_\xi.$$

Substituindo em (ix) obtemos

$$\begin{cases}
 (x) \left\{ \begin{array}{ll}
 -u_\xi + \alpha(u_\tau + uu_\xi + vv_\xi) = -P_\xi & \text{em } 0 < y < 1 + \alpha\eta(\xi, \tau), \quad (4.2.1) \\
 \alpha[-v_\xi + \alpha(v_\tau + uv_\xi + vv_\xi)] = -P_y & \text{em } 0 < y < 1 + \alpha\eta(\xi, \tau), \quad (4.2.2) \\
 u_\xi + v_y = 0 & \text{em } 0 < y < 1 + \alpha\eta(\xi, \tau), \quad (4.2.3) \\
 v = -\eta_\xi + \alpha(\eta_\tau + \eta_\xi u) & \text{em } y = 1 + \alpha\eta(\xi, \tau), \quad (4.2.4) \\
 P = \eta & \text{em } y = 1 + \alpha\eta(\xi, \tau), \quad (4.2.5) \\
 v = 0 & \text{em } y = 0. \quad (4.2.6)
 \end{array} \right.
 \end{cases}$$

Agora, vamos utilizar expansões assintóticas para  $u, v, P$  e  $\eta$ ,

$$u = u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \dots, \quad (4.2.7)$$

$$v = v_0 + \alpha v_1 + \alpha^2 v_2 + \dots, \quad (4.2.8)$$

$$P = P_0 + \alpha P_1 + \alpha^2 P_2 + \dots, \quad (4.2.9)$$

$$\eta = \eta_0 + \alpha \eta_1 + \alpha^2 \eta_2 + \dots, \quad (4.2.10)$$

para resolver o sistema (x). Lembre que  $u = u(\xi, y, \tau), v = v(\xi, y, \tau), P = P(\xi, y, \tau)$  e  $\eta = \eta(\xi, \tau)$ .

Ora, substituindo as expansões (4.2.7)-(4.2.10) nas equações (4.2.1)-(4.2.3) e negligenciando os termos da ordem  $\alpha^2$ , obtemos que

$$(xi) \left\{ \begin{array}{ll}
 -u_{0,\xi} + \alpha(-u_{1,\xi} + u_{0,\tau} + u_0 u_{0,\xi} + v_0 u_{0,y}) = -P_{0,\xi} - \alpha P_{1,\xi} & \text{em } 0 < y < 1 + \alpha\eta_0, \\
 -\alpha v_{0,\xi} = -P_{0,y} - \alpha P_{1,y} & \text{em } 0 < y < 1 + \alpha\eta_0, \\
 u_{0,\xi} + v_{0,y} + \alpha(u_{1,\xi} + v_{1,y}) = 0 & \text{em } 0 < y < 1 + \alpha\eta_0.
 \end{array} \right.$$

## Aproximações da ordem $\alpha$

As equações governantes (xi) e as condições de fronteira de (x) na ordem  $\alpha$  formam o sistema linear

$$(xii) \left\{ \begin{array}{ll} u_{0,\xi} = P_{0,\xi} & \text{em } 0 < y < 1, \\ P_{0,y} = 0 & \text{em } 0 < y < 1, \\ u_{0,\xi} + v_{0,y} = 0 & \text{em } 0 < y < 1, \\ v_0 = -\eta_{0,\xi} & \text{em } y = 1, \\ P_0 = \eta_0 & \text{em } y = 1, \\ v_0 = 0 & \text{em } y = 0. \end{array} \right. \begin{array}{l} (4.2.11) \\ (4.2.12) \\ (4.2.13) \\ (4.2.14) \\ (4.2.15) \\ (4.2.16) \end{array}$$

Note que da equação (4.2.12) segue que

$$P_0(\xi, y, \tau) = c(\xi, \tau),$$

para alguma função  $c$  arbitrária.

A condição de fronteira (4.2.15) acarreta que

$$P_0(\xi, 1, \tau) = c(\xi, \tau) = \eta_0(\xi, \tau). \quad (4.2.17)$$

Substituindo (4.2.17) em (4.2.11) obtemos

$$u_{0,\xi} = P_{0,\xi} = \eta_{0,\xi} \Rightarrow u_0(\xi, y, \tau) = \eta_0(\xi, \tau). \quad (4.2.18)$$

Integrando a equação (4.2.14) em relação a  $y$  conclui-se que

$$v_0 = -yu_{0,\xi} + \bar{c}(\xi, \tau),$$

para alguma função arbitrária  $\bar{c}(\xi, \tau)$ . Consequentemente, em virtude da condição (4.2.16) encontramos que

$$v_0 = -y\eta_{0,\xi}. \quad (4.2.19)$$

Portanto, as igualdades (4.2.17), (4.2.18) e (4.2.19) fornecem uma solução para o

sistema (xii):

$$\begin{cases} u_0(\xi, y, \tau) = \eta_0(\xi, \tau), & (4.2.20) \\ v_0 = -y\eta_{0,\xi}, & (4.2.21) \\ P_0(\xi, y, \tau) = \eta_0(\xi, \tau). & (4.2.22) \end{cases}$$

### Aproximações da ordem $\alpha^2$

Se restringimos as equações de (xi) ao domínio  $0 < y < 1$ , segue do sistema linear (xii)

$$(xiii) \begin{cases} -u_{1,\xi} + u_{0,\tau} + u_0 u_{0,\xi} + v_0 u_{0,y} = -P_{1,\xi} & \text{em } 0 < y < 1, \\ P_{1,y} = v_{0,\xi} & \text{em } 0 < y < 1, \\ u_{1,\xi} + v_{1,y} = 0 & \text{em } 0 < y < 1. \end{cases}$$

Agora, precisamos definir as condições de fronteira para as equações (xiii). Deste modo, para as condições de fronteira (4.2.4) e (4.2.5) convém utilizar uma expansão de Taylor em  $y = 1$  para as funções  $u, v$  e  $P$ .

Uma expansão de Taylor em torno de um ponto  $h$  de uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pode ser feita da forma

$$f(x + h) = f(h) + f'(h)x + \frac{f''(h)}{2!}x^2 + \frac{f'''(h)}{3!}x^3 \dots$$

Perceba que podemos considerar  $u, v$  e  $P$  como funções de uma variável ao fixar as variáveis  $\xi$  e  $\tau$ . Desta forma, tomando  $h = 1$ , vamos obter

$$\begin{cases} u(\xi, 1 + y, \tau) = u(\xi, 1, \tau) + u_y(\xi, 1, \tau)y + \frac{1}{2} u_{yy}(\xi, 1, \tau)y^2 \dots, \\ v(\xi, 1 + y, \tau) = v(\xi, 1, \tau) + v_y(\xi, 1, \tau)y + \frac{1}{2} v_{yy}(\xi, 1, \tau)y^2 \dots, \\ P(\xi, 1 + y, \tau) = P(\xi, 1, \tau) + P_y(\xi, 1, \tau)y + \frac{1}{2} P_{yy}(\xi, 1, \tau)y^2 \dots \end{cases}$$

Substituindo as expansões assintóticas (4.2.7)-(4.2.9) nas séries de Taylor acima e explicitando apenas os termos de primeira ordem no parâmetro  $\alpha$  temos:

$$\begin{cases} u(\xi, 1 + y, \tau) = u_0(\xi, 1, \tau) + u_{0,y}(\xi, 1, \tau)y + \alpha[u_1(\xi, 1, \tau) + u_{1,y}(\xi, 1, \tau)y] \dots, \\ v(\xi, 1 + y, \tau) = v_0(\xi, 1, \tau) + v_{0,y}(\xi, 1, \tau)y + \alpha[v_1(\xi, 1, \tau) + v_{1,y}(\xi, 1, \tau)y] \dots, \\ P(\xi, 1 + y, \tau) = P_0(\xi, 1, \tau) + P_{0,y}(\xi, 1, \tau)y + \alpha[P_1(\xi, 1, \tau) + P_{1,y}(\xi, 1, \tau)y] \dots \end{cases}$$

Assim, tomado  $y = \alpha\eta$  e mantendo a aproximação da ordem  $\mathcal{O}(\alpha^2)$ , obtemos:

$$\begin{cases} u(\xi, 1 + \alpha\eta, \tau) = u_0(\xi, 1, \tau) + \alpha u_{0,y}(\xi, 1, \tau)\eta + \alpha u_1(\xi, 1, \tau), & (4.2.23) \\ v(\xi, 1 + \alpha\eta, \tau) = v_0(\xi, 1, \tau) + \alpha v_{0,y}(\xi, 1, \tau)\eta + \alpha v_1(\xi, 1, \tau), & (4.2.24) \\ P(\xi, 1 + \alpha\eta, \tau) = P_0(\xi, 1, \tau) + \alpha P_{0,y}(\xi, 1, \tau)\eta + \alpha P_1(\xi, 1, \tau). & (4.2.25) \end{cases}$$

Quando substituimos estas equações e a expansão assintótica de  $\eta$  nas condições de fronteira (4.2.4) e (4.2.5) encontramos que:

- $v = -\eta_\xi + \alpha(\eta_\tau + \eta_\xi u)$  em  $y = 1 + \alpha\eta$  implica que

$$\begin{aligned} v_0 + \alpha(v_{0,y}\eta_0 + v_1) &= -\eta_{0,\xi} - \alpha\eta_{1,\xi} + \alpha[\eta_{0,\tau} + \eta_{0,\xi}(u_0 + \alpha(u_{0,y}\eta_0 + u_1))] \\ \Rightarrow v_0 + \alpha v_{0,y}\eta_0 + \alpha v_1 &= -\eta_{0,\xi} - \alpha\eta_{1,\xi} + \alpha\eta_{0,\tau} + \alpha\eta_{0,\xi}u_0. \end{aligned}$$

Por conseguinte, segue da condição de fronteira (4.2.14) que

$$v_{0,y}\eta_0 + v_1 = -\eta_{1,\xi} + \eta_{0,\tau} + \eta_{0,\xi}u_0 \quad \text{em } y = 1. \quad (4.2.26)$$

- $P = \eta$  em  $y = 1 + \alpha\eta$  implica em

$$P_0 + \alpha P_{0,y}\eta_0 + \alpha P_1 = \eta_0 + \alpha\eta_1.$$

Segue da condição de fronteira (4.2.15) que

$$P_{0,y}\eta_0 + P_1 = \eta_1 \quad \text{em } y = 1. \quad (4.2.27)$$

Por fim, a condição de fronteira (4.2.6) na ordem  $\mathcal{O}(\alpha^2)$  resulta em

$$v_0 + \alpha v_1 = 0 \quad \text{em } y = 0.$$

E então, aplicando a condição (4.2.16) obtemos

$$v_1 = 0 \quad \text{em } y = 0. \quad (4.2.28)$$

Em resumo, do sistema **(xiii)** com as condições de fronteira (4.2.26)-(4.2.28), obtemos que as equações governantes da ordem  $\mathcal{O}(\alpha^2)$  são:

$$\text{(xiv)} \left\{ \begin{array}{ll}
 -u_{1,\xi} + u_{0,\tau} + u_0 u_{0,\xi} + v_0 u_{0,y} = -P_{1,\xi} & \text{em } 0 < y < 1, \\
 P_{1,y} = v_{0,\xi} & \text{em } 0 < y < 1, \\
 u_{1,\xi} + v_{1,y} = 0 & \text{em } 0 < y < 1, \\
 v_{0,y} \eta_0 + v_1 = -\eta_{1,\xi} + \eta_{0,\tau} + \eta_{0,\xi} u_0 & \text{em } y = 1, \\
 P_{0,y} \eta_0 + P_1 = \eta_1 & \text{em } y = 1, \\
 v_1 = 0 & \text{em } y = 0.
 \end{array} \right.$$

Substituindo a solução do sistema linear no sistema **(xiv)** temos:

$$\text{(xv)} \left\{ \begin{array}{ll}
 -u_{1,\xi} + \eta_{0,\tau} + \eta_0 \eta_{0,\xi} = -P_{1,\xi} & \text{em } 0 < y < 1, \quad (4.2.29) \\
 P_{1,y} = -y \eta_{0,\xi\xi} & \text{em } 0 < y < 1, \quad (4.2.30) \\
 u_{1,\xi} + v_{1,y} = 0 & \text{em } 0 < y < 1, \quad (4.2.31) \\
 v_1 + \eta_{1,\xi} = \eta_{0,\tau} + 2\eta_0 \eta_{0,\xi} & \text{em } y = 1, \quad (4.2.32) \\
 P_1 = \eta_1 & \text{em } y = 1, \quad (4.2.33) \\
 v_1 = 0 & \text{em } y = 0. \quad (4.2.34)
 \end{array} \right.$$

Vamos determinar  $u_1, v_1$  e  $P_1$ . Para isso, note que, integrando a equação (4.2.30) em relação a  $y$  em ambos os lados obtemos que

$$P_1(\xi, y, \tau) = -\frac{y^2}{2} \eta_{0,\xi\xi} + f(\xi, \tau),$$

para alguma função  $f$ . A condição de fronteira (4.2.33) nos diz que

$$\begin{aligned}\eta_1 &= P_1(\xi, 1, \tau) = -\frac{1}{2} \eta_{0,\xi\xi} + f(\xi, \tau) \\ \Rightarrow f(\xi, \tau) &= \frac{1}{2} \eta_{0,\xi\xi} + \eta_1,\end{aligned}$$

e, portanto,

$$P_1(\xi, y, \tau) = \frac{(1-y^2)}{2} \eta_{0,\xi\xi} + \eta_1. \quad (4.2.35)$$

Quando substituimos (4.2.35) em (4.2.29) obtemos que

$$\begin{aligned}-u_{1,\xi} + \eta_{0,\tau} + \eta_0 \eta_{0,\xi} &= -\left( \frac{(1-y^2)}{2} \eta_{0,\xi\xi} + \eta_1 \right)_\xi \\ \Rightarrow -u_{1,\xi} + \eta_{0,\tau} + \eta_0 \eta_{0,\xi} &= -\frac{(1-y^2)}{2} \eta_{0,\xi\xi\xi} - \eta_{1,\xi}.\end{aligned}$$

Reorganizando os termos obtemos

$$u_{1,\xi}(\xi, y, \tau) = \left[ \eta_{1,\xi} + \eta_{0,\tau} + \eta_0 \eta_{0,\xi} + \frac{1}{2} \eta_{0,\xi\xi\xi} \right] - \frac{y^2}{2} \eta_{0,\xi\xi\xi}. \quad (4.2.36)$$

Substituindo (4.2.36) em (4.2.31) obtemos que

$$\begin{aligned}v_{1,y} &= -\left[ \eta_{1,\xi} + \eta_{0,\tau} + \eta_0 \eta_{0,\xi} + \frac{1}{2} \eta_{0,\xi\xi\xi} \right] + \frac{y^2}{2} \eta_{0,\xi\xi\xi} \\ \Rightarrow v_1(\xi, y, \tau) &= -\left[ \eta_{1,\xi} + \eta_{0,\tau} + \eta_0 \eta_{0,\xi} + \frac{1}{2} \eta_{0,\xi\xi\xi} \right] y + \frac{y^3}{6} \eta_{0,\xi\xi\xi} + g(\xi, \tau),\end{aligned}$$

para alguma função  $g$ , o que, da condição de fronteira  $v_1(\xi, 0, \tau) = 0$  (*c.f.* equação (4.2.34)), resulta em  $g(\xi, \tau) \equiv 0$ . De onde segue que

$$v_1(\xi, y, \tau) = -\left[ \eta_{1,\xi} + \eta_{0,\tau} + \eta_0 \eta_{0,\xi} + \frac{1}{2} \eta_{0,\xi\xi\xi} \right] y + \frac{y^3}{6} \eta_{0,\xi\xi\xi}. \quad (4.2.37)$$

As relações (4.2.35), (4.2.36) e (4.2.37) são suficientes para determinar uma solução do sistema  $(\mathbf{xv})$  em função de  $\eta_0$  e  $\eta_1$ .

Além disso, podemos encontrar uma condição para  $\eta_0$ . Basta ver que, quando  $y = 1$ ,

$$\begin{aligned} v_1(\xi, 1, \tau) &= - \left[ \eta_{1,\xi} + \eta_{0,\tau} + \eta_0 \eta_{0,\xi} + \frac{1}{2} \eta_{0,\xi\xi\xi} \right] + \frac{1}{6} \eta_{0,\xi\xi\xi} \\ &= -\eta_{1,\xi} - \eta_{0,\tau} - \eta_0 \eta_{0,\xi} - \frac{1}{3} \eta_{0,\xi\xi\xi}. \end{aligned} \quad (4.2.38)$$

Assim, quando substituimos (4.2.38) em (4.2.32), vamos obter

$$\left[ -\eta_{1,\xi} - \eta_{0,\tau} - \eta_0 \eta_{0,\xi} - \frac{1}{3} \eta_{0,\xi\xi\xi} \right] + \eta_{1,\xi} = \eta_{0,\tau} + 2\eta_0 \eta_{0,\xi},$$

o que implica que  $\eta_0$  deve satisfazer a equação de KdV

$$2\eta_{0,\tau} + 3\eta_0 \eta_{0,\xi} + \frac{1}{3} \eta_{0,\xi\xi\xi} = 0.$$

## Capítulo 5

# Onda Solitária e a Equação de KdV

Em 1834 o engenheiro naval J.S. Russell observava uma onda produzida pelo movimento de um barco que viajava por um canal estreito e extenso. Quando este barco repentinamente parou esta onda seguiu pelo canal por muito tempo. A onda adotou a forma de uma elevação solitária não só retendo sua forma como também uma velocidade constante e muito grande [15]. Russell denominou-a Onda de Translação (Figura 5.1).

Quando foi divulgado, o estudo de Russel chamou a atenção de diversos matemáticos, entre eles Joseph Boussinesq cuja aproximação para a equação que rege esta onda vimos no capítulo 2. Entretanto, foi só em 1895 que os matemáticos Diederik Korteweg e Gustav de Vries derivaram a equação hoje conhecida como equação de KdV

$$\eta_t + \eta\eta_x + \eta_{xxx} = 0,$$

que descreve essas ondas, atualmente chamadas de Sólitons ou Ondas Solitárias. Conforme visto nos capítulos anteriores, a equação de KdV pode ser deduzida a partir das equações de Boussinesq, das equações de Euler e da teoria do potencial. Neste capítulo buscaremos por uma solução para a KdV que se aproxima da onda de translação de Russell, em seguida discutiremos algumas particularidades dessa equação.

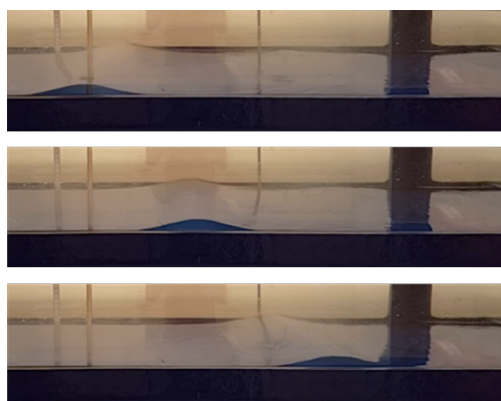


Figura 5.1: Onda de Translação.  
Fonte: [16].

Com efeito, vamos procurar por uma solução que representa uma onda viajando com velocidade constante sem mudar sua forma. Para isso, vamos supor que a equação de KdV

$$\eta_t + \eta\eta_x + \eta_{xxx} = 0 \quad (5.0.1)$$

admite solução da forma

$$\eta(x, t) = f(x - ct), \quad c > 0,$$

onde  $f$  é uma função de uma variável e de classe  $\mathcal{C}^3$ . Mais ainda, Russell relata que a onda tomou forma de uma “elevação solitária”, deste modo vamos supor que esta solução é também um pulso com

$$z \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(z), f'(z), f''(z) \rightarrow 0. \quad (5.0.2)$$

Nosso objetivo é encontrar condições sobre  $f$  e  $c$ , para que de fato exista solução do tipo supracitado. Estas soluções, como já mencionado, são chamadas de ondas solitárias.

Desta forma, substituindo a função (5.0.2) na equação de KdV temos

$$-cf'(x - ct) + f(x - ct)f'(x - ct) + f'''(x - ct) = 0.$$

Tomando  $z = x - ct$ , temos  $f(x - ct) = f(z)$  e podemos prosseguir “ignorando” a variável independente  $z$ :

$$-cf' + ff' + f''' = 0.$$

Integrando com relação a  $z$  obtemos

$$-cf + \frac{1}{2}f^2 + f'' = a.$$

Da condição (5.0.2), tomando o limite quando  $z \rightarrow +\infty$  concluímos que  $a = 0$ . Assim,

$$-cf + \frac{1}{2}f^2 + f'' = 0.$$

Multiplicando essa equação por  $f'$  encontramos

$$-cf'f + \frac{1}{2}f'f^2 + f'f'' = 0.$$

Integrando com relação a  $z$  temos

$$-\frac{1}{2}cf^2 + \frac{1}{6}f^3 + \frac{1}{2}(f')^2 = b.$$

Novamente, da condição (5.0.2), tomando o limite quando  $z \rightarrow +\infty$  obtemos que  $b = 0$  e, portanto

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}cf^2 + \frac{1}{6}f^3 + \frac{1}{2}(f')^2 &= 0 \\ \Rightarrow -3cf^2 + f^3 + 3(f')^2 &= 0 \\ \Rightarrow 3(f')^2 &= (3c - f)f^2. \end{aligned}$$

Note que  $f = 3c$  é uma solução trivial, mas estamos buscando por uma solução não trivial. Consequentemente, devemos impor que  $0 < 3c - f$ . Assim,

$$\sqrt{3}|f'| = \sqrt{(3c - f)}|f|.$$

Lembrando que havíamos considerado o fundo do canal em  $y = 0$  e por consequência  $f > 0$ , de modo que

$$\sqrt{3}f' = \sqrt{(3c - f)}f.$$

Observando a figura 5.1, ao fazer um corte transversal na direção de propagação da onda, é possível notar uma simetria com relação à crista da onda (figura 5.2). Sem perda de generalidade, considere a crista em  $z = 0$  e tome  $f$  no domínio  $(-\infty, 0)$ . Assim,  $f' > 0$  e

$$\sqrt{3}f' = \sqrt{(3c - f)}f.$$

Consequentemente,

$$\frac{\sqrt{3}f'}{\sqrt{(3c - f)}f} = 1. \quad (5.0.3)$$

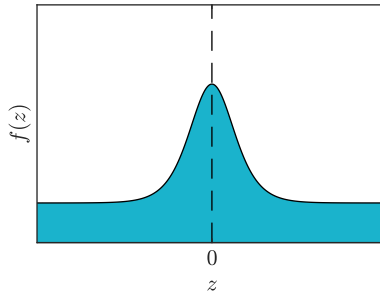


Figura 5.2: Simetria da Onda de Translação.  
Fonte: Autoria própria.

Fazendo a substituição  $g(z) = \sqrt{(3c - f(z))}$  com  $z \in (-\infty, 0)$  temos

$$g^2 = 3c - f \Rightarrow f' = -2gg'.$$

Substituindo em (5.0.3) vamos obter

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}(-2gg')}{g(3c - g^2)} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3c - g^2} g' &= -1. \end{aligned}$$

Multiplicando em ambos os lados por  $\sqrt{c}$ , podemos fazer a separação

$$\frac{g'}{\sqrt{3c + g}} + \frac{g'}{\sqrt{3c - g}} = -\sqrt{c}.$$

Integrado ambos os lados com respeito a  $z$  temos

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{g'}{\sqrt{3c + g}} + \frac{g'}{\sqrt{3c - g}} \right) dz &= \int -\sqrt{c} dz \\ \Rightarrow \int \left( \frac{g'}{\sqrt{3c + g}} \right) dz + \int \left( \frac{g'}{\sqrt{3c - g}} \right) dz &= -\sqrt{c}z + d. \end{aligned}$$

Após duas substituições simples, vamos encontrar

$$\begin{aligned} \ln(\sqrt{3c + g}) - \ln(\sqrt{3c - g}) &= -\sqrt{c}z + d \\ \Rightarrow \ln \left( \frac{\sqrt{3c + g}}{\sqrt{3c - g}} \right) &= -\sqrt{c}z + d, \end{aligned}$$

onde  $d$  é apenas uma constante de integração.

Resolvendo para  $g$  obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3c + g}}{\sqrt{3c - g}} &= e^{(-\sqrt{c}z + d)} \\ \Rightarrow g &= \sqrt{3c} \frac{e^{(-\sqrt{c}z + d)} - 1}{e^{(-\sqrt{c}z + d)} + 1}. \end{aligned}$$

Lembremos que  $\tanh(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ . Além disso,  $\tanh(x) = -\tanh(-x)$ , desta forma,

$$g = \sqrt{3c} \tanh\left[\frac{1}{2}(-\sqrt{c}z + d)\right] = -\sqrt{3c} \tanh\left[\frac{1}{2}(\sqrt{c}z - d)\right], \quad \forall z \in (-\infty, 0).$$

Finalmente, substituindo em  $f = 3c - g^2$  obtemos

$$f(z) = 3c - \left(3c \tanh^2\left[\frac{1}{2}(\sqrt{c}z - d)\right]\right) = 3c \left(1 - \tanh^2\left[\frac{1}{2}(\sqrt{c}z - d)\right]\right).$$

Então, da identidade  $\operatorname{sech}^2(x) = 1 - \tanh^2 x$ , encontramos

$$f(z) = 3c \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}(\sqrt{c}z + d)\right], \quad \forall z \in (-\infty, 0).$$

Como  $f$  é simétrica em relação à origem, podemos estender o seu domínio para a reta toda. Desta forma, como estamos buscando apenas um perfil para  $\eta$ , podemos tomar  $d = 0$ . Assim, obtemos a solução viajante para a Equação de KdV

$$\eta(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct)\right].$$

Lembrando, que obtivemos esse resultado assumindo que a onda é um pulso com  $c > 0$ ,  $0 < f < 3c$  e que  $f$  possui simetria com relação à crista (em  $z = 0$ ).

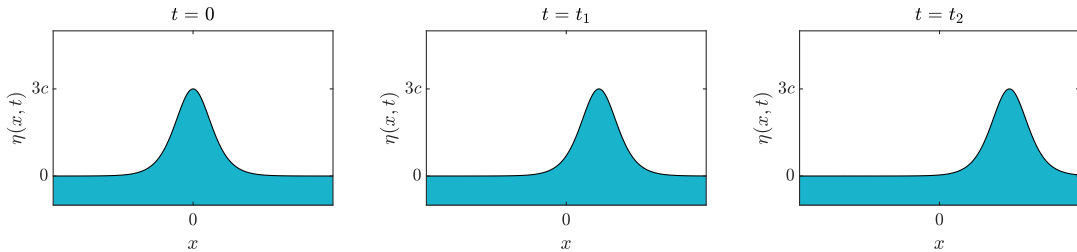


Figura 5.3: Perfil de  $\eta(x, t)$  em relação ao eixo  $x$  ao longo do tempo.  
Fonte: Autoria própria.

## 5.1 Os fenômenos da equação de KdV

A equação de KdV é proveniente da junção de dois fenômenos físicos:

**I.** Uma onda não-linear gerada a partir da Equação de Burgers Invíscida:

$$\eta_t + \eta\eta_x = 0.$$

**II.** Uma onda dispersiva gerada pela equação

$$\eta_t + \eta_{xxx} = 0.$$

Para compreender como não-linearidade e dispersão atuam na KdV vamos considerar as equações **I** e **II** com dado inicial

$$\eta(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{c}}{2} x \right),$$

os resultados são mostrados nas figuras 5.4 e 5.5.

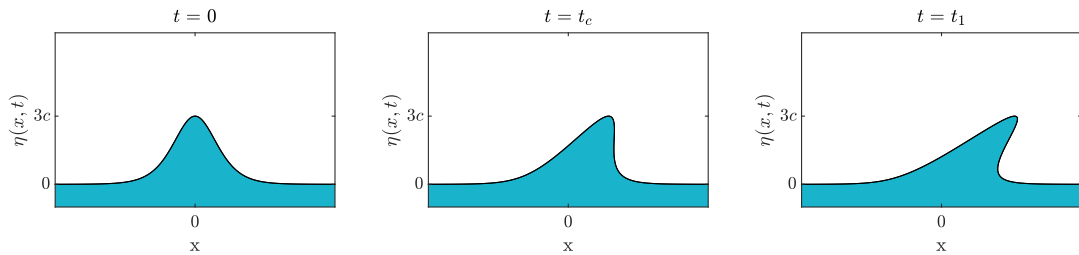


Figura 5.4: Propagação da onda  $\operatorname{sech}^2$  via equação de Burgers.

Fonte: Autoria própria com ajuda do prof. orientador.

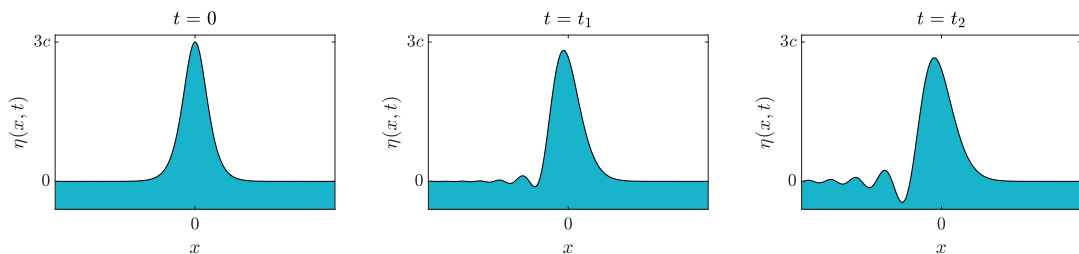


Figura 5.5: Propagação da onda  $\operatorname{sech}^2$  via EDP dispersiva **II**.

Fonte: Autoria própria com ajuda do prof. orientador.

No caso **I** a onda tende a “tombar” para a frente. Já no segundo, tende a se desfazer para trás. A KdV representa um “equilíbrio perfeito” entre esses dois fenômenos, de modo que a onda solitária retém sua forma original.

## 5.2 Grandezas conservadas

### 5.2.1 Leis de Conservação

De modo geral uma lei de conservação é uma equação que considera todas as formas que uma grandeza pode mudar ([11], p.113).

Matematicamente, se  $\mu(x, t)$  representa a quantidade de uma grandeza que se move em um meio unidimensional e  $\psi(x, t)$  é o fluxo no qual essa grandeza se move ao longo do meio, então a lei de conservação na sua forma integral é dada pela equação

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \mu(x, t) dx = \psi(a, t) - \psi(b, t), \quad (5.2.1)$$

para todos os pontos  $a$  e  $b$  no meio tal que  $a < b$ .

Sob a hipótese que  $\mu$  e  $\psi$  são funções de classe  $\mathcal{C}^1$ , obtemos a lei de conservação na forma diferencial

$$\mu_t(x, t) + \psi_x(x, t) = 0.$$

De fato, note que

$$\psi(a, t) - \psi(b, t) = \psi(x, t) \Big|_{x=b}^{x=a} = \int_b^a \psi_x(x, t) dx.$$

Assim, podemos reescrever (5.2.1) na forma

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \mu(x, t) dx = \int_b^a \psi_x(x, t) dx.$$

Como estamos integrando na variável  $x$ , temos

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \mu(x, t) dx = \int_a^b \mu_t(x, t) dx,$$

o que implica em

$$\begin{aligned} & \int_a^b \mu_t(x, t) dx - \int_b^a \psi_x(x, t) dx = 0 \\ \Rightarrow & \int_a^b \mu_t(x, t) dx + \int_a^b \psi_x(x, t) dx = 0 \\ \Rightarrow & \int_a^b [\mu_t(x, t) + \psi_x(x, t)] dx = 0. \end{aligned}$$

Como  $\mu$  e  $\psi$  são de classe  $\mathcal{C}^1$ , segue da arbitrariedade de  $a$  e  $b$  que

$$\mu_t(x, t) + \psi_x(x, t) = 0.$$

## 5.2.2 Grandezas conservadas na Equação de KdV

Para a Equação de KdV,

$$\eta_t + \eta\eta_x + \eta_{xxx} = 0,$$

sob a hipótese de que o perfil de  $\eta$  corresponde a um sólon ou onda solitária, com

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\partial^n \eta}{\partial x^n}(x, t) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

podemos encontrar algumas grandezas que são conservadas, mais notavelmente, quando reescrevemos a KdV na forma

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\eta^2}{2} + \eta_{xx} \right) = 0$$

obtemos que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\eta^2}{2} + \eta_{xx} \right) dx = 0 \\ \Rightarrow & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta dx = 0 \\ \Rightarrow & \int_{-\infty}^{+\infty} \eta dx = \text{constante}. \end{aligned}$$

Essa equação corresponde à lei de conservação de massa.

Quando multiplicamos a equação de KdV por  $\eta$  temos

$$\begin{aligned} & \eta\eta_t + \eta^2\eta_x + \eta\eta_{xxx} = 0 \\ \Rightarrow & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\eta^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\eta^3}{3} + \eta\eta_{xx} - \frac{\eta_x^2}{2} \right) = 0 \\ \Rightarrow & \int_{-\infty}^{+\infty} \eta^2 dx = \text{constante}. \end{aligned}$$

Embora não seja muito bem definido, nas literaturas sobre o assunto essa equação é associada à lei de conservação do momento linear.

Ainda podemos obter outras grandezas conservadas. Denote por  $KDV(x, t)$  o lado esquerdo da equação de KdV. Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(KDV(x, t)) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \eta_x + \frac{\partial}{\partial x}(\eta\eta_x + \eta_{xxx}) &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta_x \, dx = \text{constante}.$$

Além disso, também temos

$$3\eta^2 \cdot KDV(x, t) - 6\eta_x \cdot \frac{\partial}{\partial x}(KDV(x, t)) = 0,$$

de onde encontramos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\eta^3 - 6\eta_x^2) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{3}{4} \eta^4 + 3\eta^2 \eta_{xx} - 6\eta \eta_x^2 + 3\eta_{xx}^2 - 6\eta_x \eta_{xxx} \right) = 0.$$

Integrando em relação a  $x$  no domínio  $(-\infty, +\infty)$ , assim como nos casos anteriores, *mutatis mutandis*, vamos obter

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\eta^3 - 6\eta_x^2) \, dx = \text{constante}.$$

Ainda que não esteja bem definida, na literatura esta relação é tida como *conservação da energia*.

De modo geral, quando consideramos que  $\eta$  assume a forma de uma onda solitária existem infinitas grandezas conservadas(veja [10]):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial^n \eta}{\partial x^n} \right)^a \, dx = \text{constante} \quad \forall n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}.$$

**Observação 5.2.1.** *(Origem da palavra Sóliton) Sóliton é um termo mais geral para as ondas solitárias, e pode ser encontrado em vários contextos. Segundo Gondar e Cipolatti (2016):*

*[...] A palavra ‘sóliton’ surgiu em 1965 a partir dos trabalhos de Zabuski e Kruskal. Eles observaram uma propriedade notável: o fato de que ondas solitárias da KdV,[...] ao se encontrarem, uma passa pela outra sem mudar de forma [...]. Essa é uma propriedade importante, porque mostra que a energia pode se propagar em pacotes localizados sem se dispersar. Como a KdV é uma equação não linear, estas soluções são excepcionais e, por isso, decidiram chamá-las de sólitons. O sufixo ‘on’ (que em grego significa partícula), ilustra, neste caso, o comportamento tipo partícula destas ondas.*

*Esse fenômeno não é uma exclusividade da KdV. Além das ondas de águas rasas em um canal, muitos outros sólitons podem ser observados na natureza, ou produzidos em laboratório. Somente para citar algumas áreas onde eles ocorrem (em equações diferentes da KdV): na teoria da supercondutividade, na física de partículas, na física de plasmas e na ótica não linear. Esta última, em particular, tem aplicações relevantes nas comunicações por laser via fibras óticas.[...]( [6], p.153).*

# Considerações Finais

A equação de KdV, assim como sua solução – a onda solitária – são de grande importância na Teoria de Ondas Aquáticas. Em 1834, devido aos experimentos de Russell, as ondas solitárias já eram objeto de estudo de diversos pesquisadores. Atualmente, com a evolução da tecnologia e da área de Equações Diferenciais Parciais, uma classe particular de ondas solitárias, *sólitons*, surgiu em outros contextos como física nuclear, fibra ótica e até mesmo biologia [9].

Motivado pelos relatos de Russell que são um marco na teoria, este trabalho compreendeu um estudo sobre a equação de KdV, desde sua dedução e apresentação de sua solução viajante, a onda  $sech^2$ , ao estudo das suas grandezas conservadas. No decorrer deste texto não só abordamos conceitos iniciais da teoria de ondas aquáticas como também alguns conceitos avançados, cuja compreensão provou ser tarefa difícil, dada a complexidade da literatura sobre o tema.

Com isso em mente, neste trabalho de conclusão de curso buscamos apresentar esses conceitos de uma forma simples e mais detalhada possível para que sejam de fácil entendimento àqueles que se interessem pelo assunto. Além disso, esperamos que esse texto seja útil também como uma literatura em nível de graduação para alunos e professores que estejam abordando este tema.

Finalmente, como desdobramento dos assuntos tratados aqui sugere-se investigar as interações entre sólitons e suas possíveis aplicações. Não obstante, tendo em vista que apenas tocamos a base da Teoria de Ondas Aquáticas, encorajamos os leitores a aventurarem-se mais nesta teoria.

# Referências

- [1] BOUSSINESQ, J.. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées** (1872): 55-108. <<http://eudml.org/doc/234248>>.
- [2] CRAIK, Alex D.D..The Origins of water Wave Theory. **Annual Review Of Fluid Mechanics**, [S.L.], v. 36, n. 1, p. 1-28, jan. 2004. Annual Reviews. <http://dx.doi.org/10.1146/annurev.fluid.36.050802.122118>.
- [3] D'ALEMBERT, JEAN LE ROND **RECHERCHES SUR LA COURBE QUE FORME UN CORDE TENDUË MISE EN VIBRATION**. Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles Lettres. 1749. Vol. 3. P.214.
- [4] DEBNATH, L.. **Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers**. New York: Springer, 2012.
- [5] DRAZIN, P. G.; JOHNSON, R. S. **Solitons: an introduction**. Cambridge University Press, 1989.
- [6] GONDAR, Juan López; CIPOLATTI, Rolci. **Iniciação à Física Matemática**. 2. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2016. 304 p.
- [7] GUIDORIZZI, H.L. **Um Curso de Cálculo - Volume 3** 5<sup>a</sup> ed., 2002.
- [8] JOHNSON, R. S.. **A Modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves**. Cambridge, Uk: Cambridge University Press, 1997.
- [9] JOSEPH, A.. **Investigating Seafloors and Oceans**. (2017). Chapter 3. Elsevier. <https://doi.org/10.1016/c2015-0-05842-7>.
- [10] KARCZEWSKA, A.; ROZMEJ, P.; INFELD, E. Energy invariant for shallow water waves and the Korteweg - de Vries equation. Is energy always an invariant? **arXiv:1503.09089v3 [physics.flu-dyn]**. 2015.
- [11] KNOBEL, R. **An Introduction to the Mathematical Theory of Waves**. Providence, R.I.: American Mathematical Society, Institute for Advanced Study, 2000.

- [12] KORTEWEG, D.J.; DE VRIES, G.. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. **Phil. Mag.** (5) 39 (1895), 422-443.
- [13] NACHBIN, A. **Aspectos de Modelagem Matemática e Dinâmica dos Fluidos**. Rio de Janeiro. IMPA, 2001.
- [14] NACHBIN, A. **Dinâmica dos Fluidos**. IMPA, Mar-Jun de 2010. Notas de Aula.
- [15] RUSSELL, J. S. **Report on Waves**. London: Richard an John E. Taylor, 1845.
- [16] SOLITON WAVES. Disponível em:  
[https://www.youtube.com/watch?v=G-xHbcMm\\_Gs&ab\\_channel=tsca111](https://www.youtube.com/watch?v=G-xHbcMm_Gs&ab_channel=tsca111). Acesso em 24/08/2020.
- [17] STEWART, J. **Calculus** 7<sup>a</sup> ed., Cengage.
- [18] WHITHAM, G.B. **Linear and Nonlinear Waves**.Wiley Interscience, New York, 1999.